# ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ВЫХОДОВ ИЗ ПОЛОСЫ ДО МОМЕНТА ОСТАНОВКИ

*С. Ю. Новак*

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных невырожденных неотрицательных случайных величин и

$$N_x(t) = \sum_{j=0}^{\mu(t)} 1\{X_j \geq x\} + 1\{t - S_{\mu(t)} \geq x\}, \tag{0.1}$$

где $X_0 \equiv 0$, $S_m = X_0 + \ldots + X_m$, $\mu(t) = \max\{m \geq 0: S_m \leq t\}$, $x \in [0, t]$. В настоящей работе изучается скорость сходимости при $t \to \infty$ распределений случайных величин $N_x(t)$ к предельному закону.

Интерес автора к данной тематике связан с задачей о числе «длинных» серий «успехов» в случайной последовательности. Пусть $\{\xi_k, k \geq 1\}$ — некоторая последовательность нулей и единиц, $W_r(n)$ — число серий единиц («успехов») длины не менее $r$ среди $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Обозначим через $\eta_i$ момент появления $i$-го нуля в последовательности $\{\xi_k, k \geq 1\}$, $\eta_0 = 0$, и положим $X_i = \eta_i - \eta_{i-1}$ при $i \geq 1$. Тогда

$$W_r(n) = \sum_{i=0}^{\mu(n)} 1\{X_i - 1 \geq r\} + 1\{n - \eta_{\mu(n)} \geq r\}.$$

Можно проверить, что случайные величины $W_r(n)$ и $N_x(t)$ связаны между собой соотношением $W_r(n-1) = N_{r+1}(n)$.

Задача имеет ряд приложений. Например, банк финансирует цикл работ (экспериментов) в пределах выделенной суммы денег $t$; расходы на проведение $i$-го эксперимента представляют собой случайную величину $X_i$. Какова вероятность, что банку придется хотя бы раз единовременно выплатить сумму, превышающую заданный уровень $x$? И какова вероятность, что таких единовременных крупных выплат будет несколько? Ответить на эти и другие вопросы помогут сведения о распределении случайных величин $N_x(t)$.

Условия сходимости сумм вида (0.1) к нормальному закону изучались в [1]. Сходимость распределений случайных величин $W_r(n)$ к распределению Пуассона при $n \to \infty$ и логарифмическом росте $r = r(n)$ в случае марковской цепи $\{\xi_k, k \geq 1\}$ с состояниями 0 и 1 установил Раджарши [2]. Анисимов и Черняк [3] распространили этот результат на случай марковской цепи с конечным числом состояний, понимая под «успехом» попадание цепи в фиксированное подмножество состояний.

В работе автора [4] в предположении, что $\mathbf{E}\, e^{\varepsilon X} < \infty$ при некотором $\varepsilon > 0$, установлена равномерная по $x$ оценка близости к предельному (при $t \to \infty$) закону распределений случайных величин $Z_t$, где

$$Z_t = \max \{ t - S_{\mu(t)}, \max_{i \le \mu(t)} X_i \}.$$

Отметим, что $\{ Z_t < x \} = \{ N_x(t) = 0 \}$. Асимптотические свойства траекторий процесса $\{ Z_t, t \ge 0 \}$ исследовались в статьях [5, 6 и др.].

В ряде работ изучалось распределение максимума $R(n)$ длин серий единиц среди первых $n$ элементов последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ нулей и единиц. Отметим, что $R(n-1) = Z_n - 1$, если $X_i = \eta_i - \eta_{i-1}$. Это равенство позволяет выводить из результатов для распределений случайных величин $N_x(t)$ и $Z_t$ соответствующие результаты для распределений случайной величины $R(n)$. Подробнее о распределении серий максимальной длины в случайных последовательностях см. [7—19].

В настоящей статье устанавливаются равномерные по $x$ оценки скорости сходимости и асимптотические разложения в предельной теореме для распределений случайной величины $N_x(t)$. В качестве следствий основных результатов получены оценка скорости сходимости в предельной теореме для числа $W_r(n)$ «длинных» серий «успехов», а также оценка скорости сходимости в предельной теореме для числа отрезков постоянства пуассоновского процесса.

## § 1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже используются следующие обозначения:

$$(u)_0 \equiv 1, \quad (u)_m \equiv u(u-1)\ldots(u-m+1), \quad \binom{u}{m} = \frac{(u)_m}{m!}$$
$$(u \in \mathbf{R}, \ m \in \mathbf{N}),$$

$$K_* = \inf\{ x : \mathbf{P}(X < x) > 0 \}, \quad K^* = \sup\{ x : \mathbf{P}(X < x) < 1 \}.$$

Введем семейство независимых случайных величин $X_0^<, X_1^<, \ldots; X_1^\ge, \ldots$ с распределениями

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_m^< \in B) &= \mathbf{P}(X_m \in B \mid X_m < x), \\ \mathbf{P}(X_m^\ge \in B) &= \mathbf{P}(X_m \in B \mid X_m \ge x), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $K_* < x < K^*$. Положим $S_0(k) = 0$,

$$S_m(k) = \sum_{i=0}^{m} \left( X_i^< \mathbf{1}\{ i > k \} + X_i^\ge \mathbf{1}\{ i \le k \} \right) \qquad (m \ge 1),$$

$$S_m^< = X_0^< + \ldots + X_m^< \quad (m \ge 0), \qquad S_m^\ge = X_1^\ge + \ldots + X_m^\ge \quad (m \ge 1)$$

и определим случайные величины $\{ \tau_k, \ k \ge 0 \}$ равенством

$$\tau_k \equiv \tau_k(r, x) = \min\{ m \ge -k : S_{m+k}(k) > t - x \}. \tag{1.2}$$

Пусть $p \equiv p(x) = \mathrm{P}(X \ge x)$, $y^{\prime} e^{-y} \equiv 0$ при $y = \infty$, $r \in \mathbf{N}$. Для произвольной случайной величины $\tau$ определим функционал

$$H_{r,n}(\tau) \equiv H_{r,n,p}(\tau) =$$

$$= (1-p)^{\mathrm{E}\tau} p^r \sum_{i=0}^{n-1} (-p)^i \sum_{j=0}^{r} \frac{\mathrm{E}(\tau - \mathrm{E}\tau)_{i+j}}{i!\,j!} \binom{\mathrm{E}\tau+i+r}{r-j}.$$

В приводимых ниже теоремах 1.1—1.3 считается выполненым условие

(A) *существуют постоянные* $D < \infty$ *и* $D_* \in (K_*, K^*)$ *такие, что при* $x > D_*$

$$\int_x^{\infty} \mathrm{P}(X \ge y)\,dy \le D\,\mathrm{P}(X \ge x). \tag{1.3}$$

**Теорема 1.1.** *Для любых* $n$, $k \in \mathbf{N}$ *найдется константа* $c(k,n) < \infty$ *(зависящая от распределения случайной величины* $X$*) такая, что при* $t \ge c(k,n)$

$$\sup_{x \in B(t)} \left| \mathrm{P}(N_x(t) = k) - H_{k,n}(\tau_k) - (1-p) \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ H_{r,n}(\tau_k) - H_{r,n}(\tau_{k-1} - 1) \right\} \right| \le$$

$$\le c(k,n)\, t^{-n/2},$$

*где* $B(t) = \{x : D_* < x < \min(\sqrt{t}, K^*)\}$.

Замечание 1.1. При $x \notin B(t)$ вероятность $\mathrm{P}(N_x(t) = k)$ пренебрежимо мала по сравнению с правой частью этой оценки. Так, в [4] установлено, что

$$\sup\{\mathrm{P}(N_x(t) \ne 0) : x \ge \sqrt{t}\} \le \mathrm{P}(X \ge \sqrt{t})\,\mathrm{E}(\mu(t) + 1) \le c\,q^{\sqrt{t}}$$

при некотором $q < 1$. Как будет показано в параграфе 3, величина $\sup\{\mathrm{P}(N_x(t) = k) : 0 < x \le D_*\}$ убывает при $t \to \infty$ с экспоненциальной скоростью. Положим

$$M(t,x,k) = (t - x - k\,\mathrm{E}X^{\ge}) / \mathrm{E}X^{<}, \quad \lambda_k \equiv \lambda_k(t,x) = p\,M(t,x,k). \tag{1.4}$$

Обозначим через $\Pi(\cdot, \lambda)$ распределение Пуассона с параметром $\lambda$, $\Pi(k,\lambda) \equiv \Pi(\{k\}, \lambda)$.

**Теорема 1.2.** *Для любого* $k \in \mathbf{N}$

$$\sup_{x \in B_1(t)} \left| \mathrm{P}(N_x(t) = k) - \Pi(k, \lambda_k) - \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \Pi(r, \lambda_k) - \Pi(r, \lambda_{k-1}) \right\} \right| = O(t^{-1}) \tag{1.5}$$

*при* $t \to \infty$, *где* $B_1(t) = (K_*, K^* \wedge t/(k+2))$. *В случае* $k = 0$ *соотношение (1.5) останется в силе, если опустить входящую в него сумму.*

**Теорема 1.3.** *Для любого* $k \in \mathbf{Z}^+$

$$\sup_{K_* < x < K^*} \left| \mathrm{P}\,(N_x(t) = k) - \Pi\,(k\,, p\,t/\mathrm{E}\,X) \right| = O\,(t^{-1}\ln t) \quad \text{при } t \to \infty\,. \tag{1.6}$$

Замечание 1.2. Как следует из результатов работы [15], устанавливаемый теоремой 1.3 порядок скорости сходимости является правильным.

Замечание 1.3. Из приводимого ниже соотношения (2.1) вытекает, что утверждения теорем 1.1—1.3 останутся в силе при замене $N_x(t)$ на $N^*_x(t) = \sum_{j=1}^{\mu(t)+1} 1\,\{X_j \geq x\}$, если при этом в формулах (1.2) и (1.4) заменить $t-x$ на $t$.

Пусть $\{\pi_s\,,\ s \geq 0\}$ — пуассоновский процесс с параметром $\lambda$, $\tilde{\eta}_i$ — момент $i$-го «скачка», $\tilde{\eta}_0 = 0$, $X_i = \tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_{i-1}$. Определяемая равенством (0.1) случайная величина $N_x(t)$ есть число отрезков постоянства длины не менее $x$ процесса $\{\pi_s\,,\ s \in [0\,, t]\}$. Из теоремы 1.3 вытекает

**Следствие 1.1.** *Для любого* $k \in \mathbf{Z}^+$

$$\sup_{0 < x < t} \left| \mathrm{P}\,(N_x(t) = k) - \Pi\,(k\,, t\lambda\, e^{-\lambda x}) \right| = O\,(t^{-1}\ln t)\,, \quad t \to \infty\,.$$

Рассмотрим последовательность Бернулли $\{\xi_k\,,\ k \geq 1\}$ с параметром $p \equiv \mathrm{P}\,(\xi_1 = 1) \in (0,1)$. По-прежнему $W_r(n)$ обозначает число серий единиц длины не менее $r$ среди $\xi_1\,, \ldots, \xi_n$. Положим $\beta\,(r) = (1-p)\,p^r$.

**Следствие 1.2.** *Для любого* $k \geq 0$

$$\max_{1 \leq r \leq n} \left| \mathrm{P}\,(W_r(n) = k) - \Pi\,(k\,, n\beta\,(r)) \right| = O\,(n^{-1}\ln n)\,, \quad t \to \infty\,. \tag{1.8}$$

## § 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Автором [4] было показано, что $\mathrm{P}\,(N_x(t) = 0) = \mathrm{E}\,(1-p)^{\tau_0(t,\,x)}$. Этот результат дополняет

**Теорема 2.1.** *При* $K_* < x < \min\{t\,, K^*\}$, $k \geq 1$ *справедливо следующее равенство*:

$$\mathrm{P}\,(N_x(t) = k) = G_k(\tau_k) + (1-p)\sum_{r=0}^{k-1} \left\{ G_r(\tau_k) - G_r(\tau_{k-1} - 1) \right\},$$

*где* $G_r(\tau) \equiv G_{r,\,p}(\tau) = p^r\,\mathrm{E}\,(1-p)^\tau \binom{\tau + r}{r}$.

Доказательство опирается на равенство

$$\{N_x(t) = k\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\nu(t-x)} 1\,\{X_i \geq x\} = k \right\}, \tag{2.1}$$

где $\nu(t) = \min\{m > 0 : S_m > t\}$. В справедливости (2.1) нетрудно убедиться, рассматривая по отдельности события $\{N_x(t) = k\,, t - S_\mu(t) < x\}$ и

$\{N_x(t) = k,\, t - S_{\mu(t)} \geq x\}$ .Хорошо известно, что если случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и $\mathbf{P}(X_i \in B_i) > 0$ при $1 \leq i \leq n$, то

$$\mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_n \in B_0 \mid X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \mathbf{P}(X_{(1)} + \ldots + X_{(n)} \in B_0), \quad (2.2)$$

где $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ независимы и имеют распределения

$$\mathbf{P}(X_{(m)} \in B) = \mathbf{P}(X_m \in B \mid X_m \in B_m). \quad (2.3)$$

Из (2.1) и (2.2) выводим цепочку равенств

$$\mathbf{P}(N_x(t) = k) = \sum_{m \geq k} \mathbf{P}\left( \sum_{i=1}^{m} \mathbf{1}\{X_i \geq x\} = k,\ S_{m-1} \leq t - x < S_m \right) =$$

$$= \sum_{m \geq k} p^k (1-p)^{m-k} \left\{ \binom{m-1}{k-1} \mathbf{P}(S^{\geq}_{k-1} \leq t - x - S^{<}_{m-k} < S^{\geq}_k) + \right.$$

$$\left. + \binom{m-1}{k} \mathbf{P}(S^{<}_{m-k-1} \leq t - x - S^{\geq}_k < S^{<}_{m-k}) \right\} =$$

$$= \sum_{m \geq k} p^k (1-p)^{m-k} \left\{ \binom{m}{k} \mathbf{P}(\tau_k = m-k) + \binom{m-1}{k-1} \Big( \mathbf{P}(\tau_k \leq m-k-1) - \mathbf{P}(\tau_{k-1} \leq m-k) \Big) \right\} =$$

$$= \sum_{j \geq 0} p^k (1-p)^j \binom{j+k}{k} \mathbf{P}(\tau_k = j) +$$

$$+ \sum_{j \geq 0} p^k (1-p)^j \binom{j+k-1}{k-1} \Big\{ \mathbf{P}(\tau_k \leq j-1) - \mathbf{P}(\tau_{k-1} \leq j) \Big\} \equiv I_1 + I_2 - I_3. \quad (2.4)$$

Здесь использовано равенство $\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k} = \binom{m}{k}$ . Покажем, что при $i \geq 0$, $k \geq 1$ и $p \in [0, 1)$

$$p^k \sum_{j=i+1} (1-p)^j \binom{j+k-1}{k-1} = (1-p)^{i+1} \sum_{r=0}^{k-1} p^r \binom{i+r}{r}. \quad (2.5)$$

Действительно, пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины с распределением Бернулли B(p) , $\Sigma_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ , $\sigma_n = \max\{m\colon \Sigma_m \leq n\}$ . Через $\Sigma^*_n$ и $\sigma^*_n$ обозначим величины, определяемые аналогично $\Sigma_n$ и $\sigma_n$ с заменой $\xi_i$ на $1 - \xi_i$, $i \geq 1$. Заметим, что $\mathbf{P}(\sigma_{k-1} = j+k-1) = p^k (1-p)^j \binom{j+k-1}{k-1}$. Поэтому левая часть (2.5) имеет вид

$$\mathbf{P}(\sigma_{k-1} \geq i + k) = \mathbf{P}(\Sigma_{i+k} \leq k - 1) = \mathbf{P}(\Sigma^*_{i+k} > i).$$

Аналогично убеждаемся, что $\mathbf{P}(\sigma^*_i = i+r) = (1-p)^{i+1} p^r \binom{j+r}{r}$ и, следовательно, правая часть (2.5) есть $\mathbf{P}(\sigma^*_i < i + k) = \mathbf{P}(\Sigma^*_{i+k} > i)$ , что и требовалось доказать.

С учетом (2.5) имеем

$$I_2 - p^k \mathbf{P}(\tau_k \le -1) \sum_{j \ge 0} (1-p)^j \binom{j+k-1}{k-1} =$$

$$= p^k \sum_{i \ge 0} \mathbf{P}(\tau_k = i) \sum_{j \ge i+1} (1-p)^j \binom{j+k-1}{k-1} = (1-p) \sum_{r=0}^{k-1} G_r(\tau_k) \ . \qquad (2.6)$$

Аналогично выводим

$$I_3 - p^k \mathbf{P}(\tau_{k-1} \le 0) \sum_{j \ge 0} (1-p)^j \binom{j+k-1}{k-1} = (1-p) \sum_{r=0}^{k-1} G_r(\tau_{k-1}-1) \, . \qquad (2.7)$$

Заметим, что

$$\mathbf{P}(\tau_k \le -r) = \mathbf{P}(S^{\ge}_{k-r} > t - x) = \mathbf{P}(\tau_{k-1} \le -r+1) \qquad (2.8)$$

при $1 \le r \le k$. Из (2.4) — (2.8) следует утверждение теоремы 2.1.

**Лемма 2.1.** *Пусть выполнено условие* (A). *Тогда при* $x \ge D_*$

$$J_n(x) \equiv \int_x^{\infty} y^n \mathbf{P}(X \ge y) \, dy \ \le \ D \mathbf{P}(X \ge x) \, n! \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i D^{n-i}}{i!} \, .$$

Доказательство. Положим

$$p^*(x) = \int_x^{\infty} \mathbf{P}(X \ge y) \, dy \, .$$

Интегрируя по частям и пользуясь условием (A), получим при $x \ge D_*$ рекуррентное неравенство

$$J_n(x) = -\int_x^{\infty} y^n \, d p^*(y) \le D x^n \mathbf{P}(X \ge x) + D n J_{n-1}(x) \, ,$$

из которого вытекает требуемое соотношение.

**Следствие 2.1.** *Пусть выполнено условие* (A). *Тогда при* $D_* \le x < K^*$, $h < 1/D$ *справедливы неравенсства*

$$x^n \le \mathbf{E}(X^{\ge})^n \le n! \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i D^{n-i}}{i!} \, , \qquad (2.9)$$

$$\mathbf{E} \exp(h X^{\ge}) \le e^{hx} (1 - hD)^{-1} \, . \qquad (2.10)$$

Доказательство. Левое неравенство в (2.9) следует из (1.1), а правое — из леммы 2.1 и равенств

$$\mathbf{P}(X \ge x) \mathbf{E}(X^{\ge})^n = x^n \mathbf{P}(X \ge x) + \int_x^{\infty} (y^n - x^n) \, \mathbf{P}(X \in dy) =$$

$$= x^n \mathbf{P}(X \ge x) + n J_{n-1}(x) \, .$$

Для доказательства неравенства (2.10) достаточно воспользоваться соотношением

$$\mathrm{E}\exp(hX^{\geq}) = \sum_{i\geq 0}\frac{\mathrm{E}(hX^{\geq})^i}{i!}$$

и формулой (2.9). Из соотношения (2.10) следует, что $\mathrm{E}\exp(hX) < \infty$ при $0 \leq h < 1/D$. Именно, из неравенства $\mathrm{E}\,e^{hX} \leq \mathrm{E}\,e^{hX^{\geq}}$ и соотношения (2.10) при $x = D_*$ вытекает оценка

$$\mathrm{E}\exp(hX) \leq (1-hD)^{-1}e^{hD_*}. \tag{2.11}$$

Следующая лемма дает условие, достаточное для выполнения условия (А).

**Лемма 2.2.** *Предположим, что найдутся число $D_* > K_*$ и интегрируемая функция $f(\cdot) \geq 0$ такие, что при $x \geq D_*$ справедлива оценка*

$$\mathrm{P}(X \geq x + t \mid X \geq x) \leq f(t) \qquad (t \geq 0).$$

*Тогда имеет место условие* (А).

З а м е ч а н и е 2.1. Условие (А) выполнено, если для некоторого $h > 0$ функция $H(x) = e^{hx}\mathrm{P}(X \geq x)$ не возрастает при $x > 1/h$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2.2. При $x \geq D_*$ имеем

$$\int_x^\infty \frac{\mathrm{P}(X \geq y)\,dy}{\mathrm{P}(X \geq x)} = \int_x^\infty \mathrm{P}(X \geq y \mid X \geq x)\,dy \leq \int_0^\infty f(t)\,dt < \infty.$$

Лемма 2.2 доказана.

З а м е ч а н и е 2. 2. Нетрудно показать, что равенство в (1.3) достигается при всех $x \geq 0$ тогда и только тогда, когда случайная величина $X$ имеет экспоненциальное распределение со средним $\mathrm{E}X = D$.

Положим $T \equiv T(t, x, k) = (\tau_k - \mathrm{E}\tau_k)\,t^{-1/2}$. Ниже буквами $\varepsilon, \delta, q, c, C$ (с индексами и без них) обозначаются различные положительные константы.

**Теорема 2.2.** *Пусть выполнено условие* (А). *Если $w(t) \geq 0$ и $w(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то найдется число $\delta > 0$ такое, что при $t \geq 1/\delta$*

$$\mathrm{E}\exp(\delta\,|T|) \leq 1/\delta \tag{2.12}$$

*равномерно по $x \in B(t)$, $k \leq w(t)\sqrt{t}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in B(t)$, $k \leq w(t)\sqrt{t}$. Обозначим

$$\overline{S}_m^< = S_m^< - \mathrm{E}S_m^<, \qquad \overline{S}_m^{\geq} = S_m^{\geq} - \mathrm{E}S_m^{\geq}, \qquad \nu(t, x) = \min\{m : S_m^< > t\}$$

(присутствие индекса $x$ в определении $\nu(t, x)$ объясняет формула (1.1)). Отметим, что $\{\tau_k > i\} = \{\nu(t - x - S_k^{\geq}, x) > i\}$ при $i \geq 0$. Поэтому верно равенство $\mathrm{E}\{\tau_k;\ \tau_k \geq 0\} = \mathrm{E}\nu(t - x - S_k^{\geq}, x)$. Пользуясь известным (см. [20]) неравенством $t \leq \mathrm{E}X^< \mathrm{E}\nu(t, x) \leq t + \mathrm{E}(X^<)^2/\mathrm{E}X^<$, получаем

$$-(k-1)\,\mathrm{E}X^< \leq \mathrm{E}X^< \mathrm{E}\tau_k - (t - x - k\mathrm{E}X^{>=}) \leq c^* \tag{2.13}$$

при всех достаточно больших $t$. Положим

$$m \equiv m(t, x, k, y) = [\,(t - x - k\mathrm{E}X^{\geq})/\mathrm{E}X^< + y\sqrt{t}\,] - k + 1 \qquad (y > 0).$$

Тогда

$$\mathbf{P}(T>y) \le \mathbf{P}(\tau_k>m) = \mathbf{P}(S_m^{<} + S_k^{\ge} \le t-x) \le$$

$$\le \mathbf{P}(\overline{S}_m^{<} + \overline{S}_k^{\ge} \le -\mathbf{E}X^{<}(y\sqrt{t}-k)).$$

Выберем число $t_0$ так, что $2w(t) \le 1$ при $t>t_0$. Тогда при $t \ge t_0$, $y \ge 1$ справедлива оценка

$$\mathbf{P}(T>y) \le \mathbf{P}(\overline{S}_m^{<} + \overline{S}_k^{\ge} \le -c_0 y\sqrt{t}), \tag{2.14}$$

где $2c_0 = \inf\{\mathbf{E}X^{<} : x > D_*\}$. Из (2.9) при $n=1$ получаем неравенства

$$x \le \mathbf{E}X^{\ge} \le x+D. \tag{2.15}$$

Поэтому $\mathbf{E}X^{\ge} - X^{\ge} \le D$. Следовательно, при $t \ge t_0$, $y \ge 1$, $D_* < x < K^*$

$$\mathbf{P}(T>y) \le \mathbf{P}(-\overline{S}_m^{<} + kD \ge c_0 y\sqrt{t}). \tag{2.16}$$

В [21] показано, что если случайные величины $Y_1, \dots, Y_n$ независимы, $\mathbf{E}Y_i = 0$, $|Y_i| \le C$, $\Sigma_n = Y_1 + \dots + Y_n$, то

$$e^{-hz}\mathbf{E}\exp(h\Sigma_n) \le e^{-hz/2} \le \exp(-z^2/4(Cz+\mathbf{D}\Sigma_n)) \quad (z \ge 0),$$

где $h = \min\{1/C,\ z/\mathbf{D}\Sigma_n\}/2$. Применяя эту оценку при $n=m$, $C=\sqrt{t}$ и $Y_i = -X_i^{<} + \mathbf{E}X_i^{<}$, $1 \le i \le m$, и учитывая (2.16), получим

$$\mathbf{P}(T>y) \le \exp(Dkh - c_0 hy\sqrt{t})\,\mathbf{E}\exp(-h\overline{S}_m^{<}) \le$$

$$\le \exp\left(Dk/2\sqrt{t} - c_0^2 y^2 t/4(c_0 yt + m\mathbf{D}X^{<})\right)$$

при $y \ge 1$, $t \ge t_0 + D_*^2$. Заметим, что $\mathbf{D}X^{<} \le c_1 < \infty$ при $x \ge D_*$. Поэтому при $y \ge 1$ и всех достаточно больших $t$

$$\mathbf{P}(T>y) \le \exp(Dw(t) - y^2/(c_2 y + c_3)) \le 2e^{-\varepsilon y}, \tag{2.17}$$

где $\varepsilon > 0$ не зависит от $t, x, y, k$. Следовательно,

$$\mathbf{E}\{\exp(\delta T);\ T \ge 0\} \le c_4 < \infty, \tag{2.18}$$

если $\delta \in (0,1)$ достаточно мало. Положим

$$m^* \equiv m^*(t,x,k,y) = \max[0, (t-x-k\mathbf{E}X^{\ge} + c^*)/\mathbf{E}X^{<} - y\sqrt{t}].$$

Тогда при $1 \le y < (k+\mathbf{E}\tau_k)/\sqrt{t}$, $t \ge t_0$

$$\mathbf{P}(T \le -y) \le \mathbf{P}(\overline{S}_{m^*}^{<} + \overline{S}_k^{\ge} > t-x) \le$$

$$\le \mathbf{P}(\overline{S}_{m^*}^{<} + \overline{S}_k^{\ge} > 2c_0 y\sqrt{t} - c^*) \le \mathbf{P}(\overline{S}_{m^*}^{<} + \overline{S}_k^{\ge} > c_0 y\sqrt{t}).$$

Так как $\mathbf{P}(T \le -y) = 0$ при $y \ge (\mathbf{E}\tau_k + k)/\sqrt{t}$, для всех $y \ge 1$ справедлива оценка

$$\mathbf{P}(T \le -y) \le e^{-c_0 hy\sqrt{t}}\,\mathbf{E}\exp(h\overline{S}_{m*}^{<})\,\mathbf{E}\exp(h\overline{S}_k^{\ge}),$$

где $t > t_0$, $h = \min\{t^{-1/2},\ c_0 y\sqrt{t}/\mathbf{D}\overline{S}_{m*}^{<}\}/2$. Из неравенств (2.10) и (2.15) выводим

$$\mathrm{E}\exp(h\overline{S}_k^{\geq}) \leq (1-hD)^{-k} \leq \left(1 - D/2\sqrt{t}\right)^{-w(t)\sqrt{t}} = 1+o(1) \qquad (2.19)$$

при $t \to \infty$. Отсюда аналогично выводу оценки (2.17) получим: найдется $\varepsilon > 0$ такое, что при $x \in B(t)$, $y \geq 1$, $k \leq v(t)\sqrt{t}$ и всех достаточно больших $t$ выполняется неравенство $\mathrm{P}(T \leq -y) \leq 2e^{-\varepsilon y}$. Следовательно, при $\delta < \varepsilon$, $x \in B(t)$, $k \leq w(t)\sqrt{t}$ и достаточно больших $t$

$$\mathrm{E}\{\exp(-\delta T);\ T < 0\} \leq c_4 < \infty. \qquad (2.20)$$

Объединяя (2.18) и (2.20), получим утверждение теоремы 2.2.

## § 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1.1. Заметим, что при $n \geq 1$

$$(1-p)^b = \sum_{i=0}^{n-1} (-p)^i \binom{b}{i} + (-p)^n \binom{b}{n} (1-\theta p)^{b-n},$$

где $0 < \theta < 1$. Тем самым

$$p^r \mathrm{E}(1-p)^\tau (\tau + r)_r = p^r (1-p)^{\mathrm{E}\tau} \sum_{i=0}^{n-1} (-p)^i \mathrm{E}\binom{b}{i} (\tau + r)_r +$$
$$+ p^r (1-p)^{\mathrm{E}\tau} (-p)^n \mathrm{E}\binom{b}{n} (\tau + r)_r (1-\theta p)^{b-n},$$

где $r \geq 0$, $b \equiv \tau - \mathrm{E}\tau$.

Оценим второе слагаемое в правой части этого равенства при $\tau = \tau_k$ и $x \in B(t)$. Заметим предварительно, что

$$(1-p)^{\mathrm{E}\tau} (1-\theta p)^{b-n} \leq (1-p)^{\min\{\tau - n,\ \mathrm{E}\tau\}}. \qquad (3.1)$$

Разбивая пространство элементарных исходов на события $\{\tau < (1-\delta)\mathrm{E}\tau\}$ и $\{\tau \geq (1-\delta)\mathrm{E}\tau\}$ и принимая во внимание неравенство $|b|\,\mathbf{1}\{\tau < (1-\delta)\mathrm{E}\tau\} \leq k + \mathrm{E}\tau$, убеждаемся, что при $x \in B(t)$ и всех достаточно больших $t$ справедливы оценки

$$(p\,t)^{r+n}\mathrm{P}(\tau < (1-\delta)\mathrm{E}\tau) \leq c_1 t^{-n/2}, \qquad (3.2)$$

$$p^{r+n}(1-p)^{(1-\delta)\mathrm{E}\tau}\mathrm{E}|b|^n |\tau|^r \leq c_2 t^{-n/2}. \qquad (3.3)$$

Действительно, ввиду (2.12), (2.13) и (2.15) левая часть неравенства (3.2) при $x \in B(t)$ не превосходит $c_2 q^{\sqrt{t}}$ $(0 < q < 1)$. В силу теоремы 2.2 при $x \in B(t)$ имеем

$$\mathrm{E}|b|^n |b + \mathrm{E}\tau|^r \leq c_3 t^{r+n/2}. \qquad (3.4)$$

Поэтому левая часть (3.3) при $x \in B(t)$ не превосходит величины

$$c_4 t^{-n/2} (p\,t)^{r+n} e^{-c_5 p t} \leq c_6 t^{-n/2}.$$

На основе (3.1)—(3.4) заключаем, что при $\tau = \tau_k$, $r \geq 0$, $t \to \infty$ справедливо соотношение

$$\sup_{x \in B(t)} \left| p^r \, \mathrm{E}\,(1-p)^{\tau} (\tau + r)_r - p^r (1-p)^{\mathrm{E}\,\tau} \sum_{i=0}^{n-1} (-p)^i \, \mathrm{E} \binom{b}{i} (\tau + r)_r \right| =$$

$$= O\,(t^{-n/2})\,. \tag{3.5}$$

Аналогично убеждаемся в справедливости (3.5) при $\tau = \tau_k + 1$ и при $\tau = \tau_{k-1}$. Пользуясь формулой Вандермонда [23, с. 8], выводим

$$(b)_i\,(\tau + r)_i = (b)_i\,(\{b - i\} + \{\mathrm{E}\,\tau + r + i\})_i =$$

$$= \sum_{j=o}^{r} \binom{r}{j} (b)_{i+j}\,(\mathrm{E}\,\tau + r + i)_{r-j}\,. \tag{3.6}$$

Ввиду теоремы 2.1 и формул (3.5), (3.6) приходим к утверждению теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 1.2. Из теоремы 1.1 и соотношения (3.5) при $n = 2$ имеем

$$\sup_{x \in B(t)} \Big| \mathrm{P}\,(N_x(t) = k) - (1-p)^{\mathrm{E}\,\tau_k} H^*_{r,n}(\tau_k) - \sum_{r=0}^{k-1} \Big\{ (1-p)^{\mathrm{E}\,\tau_k + 1} H^*_{r,n}(\tau_k) -$$

$$- (1-p)^{\mathrm{E}\,\tau_{k-1}} H^*_{r,n}(\tau_{k-1} - 1) \Big\} \Big| = O\,(t^{-1}) \quad \text{при } t \to \infty, \tag{3.7}$$

где $H^*_r(\tau) \equiv H^*_{r,p}(\tau) = p^r \, \mathrm{E} \binom{\tau + r}{r} (1 - (\tau - \mathrm{E}\,\tau)\,p)$. Раскладывая выражение $(\tau + r)_r \equiv (\{r + \mathrm{E}\,\tau\} + \{\tau - \mathrm{E}\,\tau\})_r$ по степеням $\{r + \mathrm{E}\,\tau\}$, с помощью теоремы 2.2 выводим:

$$|\,\mathrm{E}\,(\tau + r)_r (\tau - \mathrm{E}\,\tau)\,| \le c_1 t^r \tag{3.8}$$

равномерно по $D_* < x < \sqrt{t}$, $0 \le r \le k$; здесь в качестве $\tau$ берется $\tau_k$ или $\tau_{k-1} - 1$. Из (2.13) и (2.15) следует

$$(1-p)^{\mathrm{E}\,\tau} p^{r+1} t^r \le t^{-1} (p\,r)^{r+1} e^{-c_2 p t} \le c_3 t^{-1} \tag{3.9}$$

при $x \in B(t)$, $0 \le r \le k$, и аналогично

$$|\,\mathrm{E}\,(\tau + r)_r - (\mathrm{E}\,\tau)^r\,| \le c_4 t^{r-1}, \quad (1-p)^{\mathrm{E}\,\tau} p^r t^{r-1} \le c_4 t^{-1}\,. \tag{3.10}$$

Объединяя (3.7)—(3.10), получаем при $t \to \infty$

$$\sup_{x \in B(t)} |\,\mathrm{P}\,(N_x(t) = k) - p^k (1-p)^{\mathrm{E}\,\tau_k} (\mathrm{E}\,\tau_k)^k / k\,! \, -$$

$$- \sum_{r=0}^{k-1} p^r \Big\{ (1-p)^{\mathrm{E}\,\tau_k + 1} (\mathrm{E}\,\tau_k)^r - (1-p)^{\mathrm{E}\,\tau_{k-1}} (\mathrm{E}\,\tau_{k-1} - 1)^r \Big\} \Big| = O\,(t^{-1}). \tag{3.11}$$

Так как в силу (2.13)

$$|\,\mathrm{E}\,\tau_k - M\,(t, x, k)\,| \le c_5 \tag{3.12}$$

при $x \in B(t)$, имеем

$$\Delta_1(r) \equiv (p\,\mathrm{E}\,\tau_k)^r \left| (1-p)^{\mathrm{E}\,\tau_k} - (1-p)^{M(t,x,k)} \right| \le$$

$$\le (p\,\mathrm{E}\,\tau_k)^r\, (1-p)^{\mathrm{E}\,\tau_k}\, |\, (1-p)^{\pm c_5} - 1\, | \,. \tag{3.13}$$

Пользуясь (3.9) и неравенством

$$|\, e^x - e^y \,| \le |\, x-y \,|\, e^{\max(x,y)} \qquad (x, y \in \mathbf{R}), \tag{3.14}$$

а также очевидным соотношением

$$|\ln(1-p)| \le p/(1-p), \tag{3.15}$$

получим, что при $x \in B(t)$, $0 \le r \le k$

$$\Delta_1(r) \le c_6\, t^{-1} (p\,t)^{r+1} e^{-c_2 p t} \le c_7\, t^{-1}. \tag{3.16}$$

Из (3.12) следует также, что при $x \in B(t)$

$$(1-p)^{M(t,x,k)} p^r \left| (\mathrm{E}\,\tau_k)^r - (M(t,x,k))^r \right| \le$$

$$\le c_8\, p^r t^{r-1} e^{-c_2 p t} \le c_9\, t^{-1}. \tag{3.17}$$

С помощью неравенств (3.14) и (3.15) убеждаемся, что при $x \in B(t)$ выполняется соотношение

$$(p\,M(t,x,k))^r \left| (1-p)^{M(t,x,k)} - e^{-pM(t,x,k)} \right| \le$$

$$\le c_{10}\, p^{r+2}\, t^{r+1}\, e^{-c_2 p t} = O(t^{-1}). \tag{3.18}$$

Неравенства (3.13), (3.16), (3.17) останутся в силе, если в них заменить $\tau_k$ на $\tau_k + 1$ либо $\tau_k$ и $M(t,x,k)$ — на $\tau_{k-1} - 1$ и $M(t,x,k-1)$ ( или на $M(t,x,k-1) + \mathrm{const}$), соответственно. Положим

$$\Delta(t,x,k) = \left| \mathbf{P}(N_x(t) = k) - \Pi(k,\lambda_k) - \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \Pi(r,\lambda_k) - \Pi(r,\lambda_{k-1}) \right\} \right| .$$

В силу (3.11)

$$\sup_{x \in B(t)} \Delta(t,x,k) = O(t^{-1}), \tag{3.19}$$

причем данное соотношение останется справедливым, если вместо параметра $\lambda_{k-1}$ взять $\lambda_{k-1} + c_{11}\, p$. Аналог соотношения (3.19) для случая $k = 0$ доказан в работе автора [4].

Заметим, что $\mathrm{E}\,X^< \le D_*$ при $K_* < x \le D_*$. Следовательно,

$$\lambda_k = \Big((t-x)\,p - k\,\mathrm{E}\,\{X;\ X \ge x\}\Big)/\mathrm{E}\,X^< \ge$$

$$\ge \Big((t - D_*)\,\mathbf{P}(X \ge D_*) - k\,\mathrm{E}\,X\Big)/D_* \equiv M^*(t,k)$$

при $K < x \le D_*$. Однако

$$(p\,M(t,x,k))^r \exp(-p\,M(t,x,k)) \le$$

$$\le (p\,M^*(t,k))^r \exp(-p\,M^*(t,k)) \qquad (0 \le r \le k),$$

как только $M^*(t, k) \geq k$. Поэтому для всякого $k \in \mathbf{Z}^+$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что при $t \geq 1/\varepsilon$

$$\sup_{K_* < x < D^*} \Delta(t, x, k) \leq e^{-\varepsilon t}. \tag{3.20}$$

Из (3.19) и (3.20) следует утверждение теоремы 1.2 в случае $K^* < \infty$.

Предположим, что $K^* = \infty$. При $x \geq \sqrt{t}$ ввиду (1.4) и (2.11) имеем

$$\lambda_k + \lambda_{k-1} \leq 2t\, \mathbf{P}(X \geq \sqrt{t}) / \mathbf{E}\{X;\ X < \sqrt{t}\} \leq c_{12}\, t\, q^{\sqrt{t}},$$

где $0 < q < 1$. Поэтому при $r \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}^+$

$$\sup_{\sqrt{t} \leq x \leq K(t)} \left(1 - e^{-\lambda_k}\right) + \sup_{\sqrt{t} \leq x \leq K(t)} \Pi(k, \lambda_k) \leq c_{13}\, t^{k+1} q^{\sqrt{t}}, \tag{3.21}$$

где $K(t) = \min\{K^*, t(k+2)^{-1}\}$. Из (3.19)—(3.21) следует утверждение теоремы 1.2.

Доказательство теоремы 1.3. Положим

$$\Delta^+(t, x, k) = \left|\, \mathbf{P}(N_x(t) = k) - \Pi(k, pM(t, x, k)) \,\right|.$$

Покажем, что при $t \to \infty$

$$\sup_{D_* < x < K(t)} \Delta^+(t, x, k) = O(t^{-1} \ln t). \tag{3.22}$$

Ввиду (3.19)—(3.21) достаточно показать, что для $r \in \mathbf{Z}^+$, $k \in \mathbf{N}$ при $t \to \infty$

$$\sup_{x \in B(t)} |\Pi(r, pM(t, x, k)) - \Pi(r, pM(t, x, k-1))| = O(t^{-1} \ln t). \tag{3.23}$$

Из (1.4), (2.15) выводим: при $x \in B(t)$

$$|M(t, x, k) - M(t, x, k-1)| \leq cx. \tag{3.24}$$

Отсюда аналогично выводу неравенства (3.17) получим при $x \in B(t)$ и всех достаточно больших $t$

$$\Delta_2(r) \equiv |(pM(t, x, k))^r - (pM(t, x, k-1))^r|\, e^{-pM(t, x, k-1)} \leq$$

$$\leq c_1\, x\, p^r\, t^{r-1} e^{-c_2 p t}. \tag{3.25}$$

**Лемма 3.1.** *При $x \geq K_*$, $t \geq 2$ справедливо неравенство*

$$x\, \mathbf{P}(X \geq x) \leq c_3\, t^{-1} (\ln t) \max\{1, t\,\mathbf{P}(X \geq x)\}.$$

Доказательство. Положим $\varphi \equiv \varphi(t, x) = t\,\mathbf{P}(X \geq x)$. Ввиду (2.11) имеет место оценка $\varphi \leq c_4\, t\, e^{-\delta x}$, где число $\delta > 0$ такое, что $\mathbf{E}\exp(\delta X) < \infty$. Поэтому $\delta x \leq \ln(c_4 t) - \ln \varphi$. Следовательно,

$$\delta x \varphi \leq \begin{cases} \varphi \ln(c_4 t), & \text{если } \varphi \geq 1, \\ \ln(c_4 t) + 1/e, & \text{если } 0 \leq \varphi \leq 1. \end{cases}$$

Лемма 3.1 доказана.

Возвращаясь к (3.25), замечаем, что $\Delta_2(0) \equiv 0$, а при $r \in \mathbf{N}$ ввиду леммы 3.1

$$\Delta_2(r) \le c_5 t^{-1} (\ln t) \max\{1, pt\} (pt)^{r-1} e^{-c_2 pt} \le c_6 t^{-1} \ln t, \quad (3.26)$$

где $p = \mathbf{P}(X \ge x)$. Используя (3.24) и действуя как при выводе оценки (3.16), заключаем, что при $x \in B(t)$, $r \in \mathbf{Z}^+$ и достаточно больших $t$

$$(\lambda_k)^r \left| e^{-\lambda_k} - e^{-\lambda_{k-1}} \right| \le c_7 x p^{r+1} t^r e^{-c_2 pt} \le c_8 t^{-1} \ln t. \quad (3.27)$$

Из (3.26) и (3.27) вытекает (3.23) и, следовательно, (3.22).

Из (1.4) и (2.15) следует, что при $k \in \mathbf{Z}^+$ при $x \in B(t)$ справедливо неравенство $| M(t, x, k) - t/\mathbf{E}X^< | \le c_9 x$, с помощью которого аналогично выводу соотношения (3.23) получим

$$\sup_{x \in B(t)} \left| \Pi(k, pM(t, x, k)) - \Pi(k, pt/\mathbf{E}X^<) \right| = O(t^{-1} \ln t). \quad (3.28)$$

Нетрудно видеть, что оценки (3.20) и (3.21) останутся справедливыми при замене $M(t, x, k)$ на $t/\mathbf{E}X^<$. Отсюда с учетом (3.22) и (3.28) приходим к соотношению

$$\sup_{K_* < x < K^*} \left| \mathbf{P}(N_x(t) = k) - \Pi(k, pt/\mathbf{E}X^<) \right| = O(t^{-1} \ln t). \quad (3.29)$$

Если $\mathbf{E}X^< > 0$ при $x = D_*$, то ввиду условия (А) и соотношения (2.15) при $x > D_*$ справедлива оценка

$$| 1/\mathbf{E}X - 1/\mathbf{E}X^< | \le c_{10} x p. \quad (3.30)$$

Подобно тому, как с помощью (3.24) было установлено соотношение (3.22), из (3.30) нетрудно вывести, что при $t \to \infty$

$$\sup_{K_* < x < K^*} \left| \Pi(k, pt/\mathbf{E}X^<) - \Pi(k, pt/\mathbf{E}X) \right| = O(t^{-1} \ln t). \quad (3.31)$$

Из этого соотношения и (3.29) следует (1.6). Теорема 1.3 доказана.

Доказательство следствия 1. 1 ввиду его простоты опускается.

Доказательство следствия 1. 2. Заметим, что при $n \to \infty$

$$\sup_r \left| \Pi(k, n\beta(r)) - \Pi(k, (n+1)\beta(r)) \right| = O(n^{-1}).$$

Проверка этого соотношения проводится аналогично выводу оценок (3.16) и (3.17).

Докажем утверждение, сформулированное в замечании 1.1. Ввиду (2.1)

$$\mathbf{P}(N_x(t) = k) \le \mathbf{P}\left( \sum_{i=1}^{\nu(t-x)} \mathbf{1}\{X_i \ge x\} \le k \right) \le$$

$$\le \mathbf{P}(\nu(t-x) < m_*) + \mathbf{P}\left( \sum_{i=1}^{m_*} \mathbf{1}\{X_i \ge x\} \le k \right),$$

где $m_* \equiv m_*(t, x) = [(1-\delta)\,\mathrm{E}\nu(t-x)]$, $0 < \delta < 1$. Следовательно,

$$\mathrm{P}(N_x(t) = k) \le$$

$$\le \mathrm{P}(S_{m_*} - \mathrm{E}S_{m_*} > \delta t + c_1) + (1+m_*)^k \{\mathrm{P}(X < x)\}^{m_*-k}.$$

Заметим, что $\mathrm{P}(X < x) \le \mathrm{P}(X < D_*) < 1$ при $0 < x \le D_*$. Пользуясь результатами о вероятностях больших уклонений для сумм независимых случайных величин [22, гл. 8, п. 8] и неравенством Лордена для функции восстановления (см. [20]), получим экспоненциальный порядок убывания к нулю при $t \to \infty$ величины $\sup\{\mathrm{P}(N_x(t) = k) : 0 < x < D_*\}$, что и требовалось доказать.

Замечание 3.1. Следствие 1.2 можно обобщить на случай $\xi_i = 1\{Y_i \in A\}$, $A = \{1, 2, \dots, N\}$, где $\{Y_k, k \ge 1\}$ - однородная цепь Маркова с возможными состояниями $\{0, 1, \dots, N\}$.

Пусть $\eta_0 = 0$, $\eta_i$ — момент появления $i$-го нуля в последовательности $\{Y_k\ k \ge 1\}$. Введем обозначение $\beta(r) = \mathrm{P}(\eta_2 - \eta_1 > r)/\mathrm{E}(\eta_2 - \eta_1)$. Если $\mathrm{P}(Y_1 = 0) = 1$, то справедливость обобщения формулы (1.8) очевидна (случайные величины $X_i = \eta_i - \eta_{i-1}$, $i \ge 1$, независимы). В противном случае следует рассмотреть независимую цепь Маркова с сосредоточенным в $\{0\}$ начальным распределением и теми же переходными вероятностями и применить прием «склеивания» подобно тому, как это было сделано в [16].

Автор благодарен А. М. Зубкову и Д. А. Коршунову за замечания, способствовавшие улучшению изложения, а также редакторам данного сборника и А. А. Добрынину и С. Ю. Сгоннику за техническое содействие.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Smith W. L.** Regenerative stochastic processes // Proc. Roy. Soc. London. A.—1955.—V. 232.—P. 6–31.
2. **Rajarshi M. B.** Success runs in a two-state Markov chain // J. appl. probab.—1974.—V. 11.—P. 190—192; 1977.—V. 14.—P. 661.
3. **Анисимов В. В., Черняк А. И.** Предельные теоремы для некоторых редких функционалов на цепях Маркова и полумарковских процессах // Теор. вероятн. матем. статист.—1982.—Т. 26.—С. 1–6.
4. **Новак С. Ю.** О распределении максимума случайного числа случайных величин // Теория вероятностей и ее применения.—1991.—Т. 36, № 4.—С. 675–681.
5. **Csaki E., Erdös P., Révész P.** On the length of the longest excursion // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und Verw. Geb.—1985.—B. 68, N 3.—P. 65–382.
6. **Révész P., Willekens E.** On the maximal distance between two renewal epochs // Stochast. processes and appl.—1987.—V. 27.—P. 21–41.
7. **Erdös P., Révész P.** On the length of the longest head-run // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai : Topics inform. theory.—1975.—V. 16.—P. 219–228.
8. **Guibas L. J., Odlyzko A. M.** Long repetitive patterns in random sequences // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und Verw. Geb.—1980.—B. 53, N 3.—P. 241–262.

9. Самарова С. С. О длине максимальной серии успехов для марковской цепи с двумя состояниями // Теория вероятностей и ее применения.—1981.—Т. 26, № 3.—С. 510–520.
10. Kusolitsch N. Longest runs in Markov chains // Probab. Statist. Inference.—1982.—P. 223–230.
11. Mory T. F., Szekely G. Asymptotic independence of «pure head» stopping times // Statist. Probab. Letters.—1984.—V. 2, N 1.—P. 5–8.
12. Gordon L., Schilling M. F., Waterman M. S. An extreme value theory for long head runs // Probab. Th. Rel. Fields.—1986.—Vr. 72, N 2.—P. 279–287.
13. Grill K. Erdos-Revesz type bounds for the length of the longest run from a stationary mixing sequence // Probab. Th. Rel. Fields.—1987.—V. 75, N 1.—P. 77–85.
14. Новак С. Ю. Об отрезках времени постоянного пребывания однородной марковской цепи в фиксированном подмножестве состояний // Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 1.—С. 129–140.
15. Новак С. Ю. Асимптотические разложения в задаче о максимуме длин серий «успехов» в марковской цепи с двумя состояниями // Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отд-ние.—1989.—Т. 13.—С. 136–147.
16. Новак С. Ю. Скорость сходимости в задаче о максимуме длин серий «успехов» // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 5.—С. 113–118.
17. Arratia R., Goldstein L., Gordon L. Two moments suffice for Poisson approximation: the Chen-Stein method // Ann. probab.—1989.—V. 17.—P. 9–25.
18. Arratia R., Gordon L., Waterman M. S. The Erdos-Renyi law in distribution, for coin tossing and sequence matching // Ann. statist.—1990.—V. 18.—P. 539–570.
19. Uspensky J. V. Introduction to mathematical probability.—McGraw-Hill Book Company Inc., 1937.
20. Carlsson H., Nerman O. An alternative proof of Lorden's renewal inequality // Adv. appl. probab.—1986.—V. 18, N 4.—P. 1015–1016.
21. Бернштейн С. Н. Теория вероятностей.—М.-Л.: Гостехиздат, 1946.
22. Боровков А. А. Теория вероятностей.—М.: Наука, 1986.
23. Riordan J. Combinatorial identities.—John Wiley & Sons, 1968.