О ПОГРЕШНОСТИ УСРЕДНЕНИЯ ДИФФУЗИИ БЕЗ СНОСА В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

*В. В. Юринский**

ВВЕДЕНИЕ

Пусть ξ_t — диффузионный процесс со значениями в $\mathbf{R}^d$; производящий оператор которого имеет вид

$$L\,u(x) \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x,\omega)\,D_i D_j u(x)\,, \tag{0.1}$$

где $x=(x_i)\in\mathbf{R}^d$, $D_i=\partial/\partial x_i$, а коэффициенты являются компонентами матричнозначного однородного случайного поля $a=(a_{ij})$ на некотором вероятностном пространстве $\langle\Omega,\mathfrak{A},\mathbf{Pr}\rangle$. Элементарные исходы этого пространства называются ниже «состояниями случайной среды».

Известно, что при естественных ограничениях оператор (0.1) допускает усреднение (см., например, [1—3]). Это означает, что для почти всех $\omega\in\Omega$ зависящие от состояния среды распределения нормированных процессов $\eta_t^T=T^{-1/2}\xi_{Tt}$ слабо сходятся к распределению гауссовского процесса η_t^∞ с той же начальной точкой. Предельный процесс также является диффузионным с производящим оператором вида (0.1), у которого коэффициенты неслучайны и постоянны. Эти коэффициенты называют *усредненными* или *эффективными характеристиками* среды.

Эта работа посвящена усовершенствованию метода оценки погрешности усреднения, развитого в [4—6]. Оценки выводятся в предположении, что поле коэффициентов оператора (0.1) удовлетворяет достаточно жесткому условию перемешивания. Типичная оценка имеет вид

$$\mathbf{E}\left|\,\mathbf{M}_x F(\eta_t^T)-\mathbf{M}_x F(\eta_t^\infty)\right| = O\,(T^{-\beta})\,, \tag{0.2}$$

где $\beta>0$, а F — гладкая неслучайная функция с компактным носителем. В формуле (0.2) символ $\mathbf{E}$ означает математическое ожидание по распределению «случайной среды» $\mathbf{Pr}$, а $\mathbf{M}_x$ — среднее по зависящему от ω распределению процесса η^T с начальным условием $\eta_0^T=x$ или по гауссовскому предельному распределению процесса η^∞ с тем же начальным условием.

Оценки вида (0.2) и аналогичные им были получены в [4, 5] при степенном условии перемешивания. Первоначальные доказательства [4] использовали дополнительное ограничение на разброс собственных зна-

© *В. В. Юринский,* 1993

**Работа выполнена при частичной поддержке Гранта №214-627 Министерства по науке, высшей школе и технической политике Российской Федерации.*

чений матрицы диффузии a, аналогичное известному условию Кордеса. В работе [5] это ограничение удалось снять для размерностей $d \geq 5$. Модификация метода [4, 5], описанная ниже, не нуждается в ограничениях кордесовского типа и при $d = 4$, хотя предъявляет несколько бо́льшие требования к гладкости коэффициентов оператора (0.1).

Основу вывода оценок вида (0.2) и их аналогов составляют неравенства для дисперсий случайных величин

$$[u_T\,;r] = r^{-d} \int\limits_{|x| \leq r} u_T(x)\,dx\,, \tag{0.3}$$

где

$$u_T(x) = \mathbf{M}_{T^{-1/2}x} \int\limits_0^\infty g(T^{1/2}\eta_t^T)\, e^{-t}\,dt\,, \tag{0.4}$$

а g — ограниченное случайное поле, причем «расширенное» случайное поле $(a, g) : \mathbf{R}^d \times \Omega \to \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ удовлетворяет тем же условиям однородности и перемешивания, что поле коэффициентов (0.1). Числовые параметры, входящие в (0.3), при выводе (0.2) связаны соотношениями $1 \ll r \ll T^{1/2}$.

Переход от неравенств для дисперсий величин (0.4) к оценкам вида (0.2) детально описан в [5]. Поэтому ниже изложен лишь вывод неравенств для дисперсий величин (0.3).

Вычисления ведутся по той же схеме, что в [4—6]. Величина (0.4) приближается суммой средних по узким «трубкам траекторий» диффузии. Зависимость «среднего по трубке» от поля $k = (a, g)$ локализована — его величину определяют только значения коэффициентов в окрестности трубки. Вместе с тем величина (0.3) мало меняется при изменении k на множестве малой меры. Поэтому ковариация величины (0.3) с каждым из «средних по трубкам» мала. Оценка дисперсии (0.3) получается из неравенств для описанных выше ковариаций суммированием и усреднением по начальной точке, общей для всех «трубок траекторий».

Наиболее трудной частью вычислений является построение удовлетворительного приближения величины (0.3), слабо зависимого от «среднего по трубке». Отказ от ограничения кордесовского типа достигается за счет использования в качестве такого приближения аналогичной (0.3) величины для диффузии с коэффициентами, специальным образом измененными в окрестности «трубки траекторий». Описание соответствующего построения и составляет основное содержание работы.

Оценки статьи недостаточно точны, чтобы получить оценку (0.2) или ее аналоги без ограничений на разброс собственных чисел матрицы диффузии при $d = 3$. Для размерностей $d \geq 5$ построение можно упростить благодаря тому, что при большой размерности в окрестность типичной «трубки траекторий» редко попадают траектории диффузии с другой начальной точкой. При $d = 2$ несколько худшую оценку можно получить методами теории возмущений [7].

Формулировка основного результата работы — теоремы 1.1 — и использованные при его доказательстве ограничения приведены в § 1. В § 2 дана схема доказательства теоремы 1.1. Бо́льшая часть технических средств работы содержится в § 3. Здесь, в частности, описано построение поля коэффициентов, модифицированного на множестве малой меры. В § 4 изложено доказательство теоремы 1.1.

§ 1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Коэффициенты оператора (0.1) удовлетворяют условию симметрии

$$a_{ij}(x,\omega)=a_{ji}(x,\omega) \tag{1.1}$$

и условию равномерной эллиптичности и ограниченности

$$\forall\, Y=(Y_i)\in \mathbf{R}^d \qquad A_0\,|Y|^2\le a_{ij}(x,\omega)\,Y_iY_j\le A_1\,|Y|^2, \tag{1.2}$$

где $A_m>0$ — неслучайные постоянные. В (1.2) и ниже принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. В частности, евклидова норма в пространстве задается равенством $|Y|=(Y_iY_i)^{1/2}$.

Как и перед формулами (1.1), (1.2), оговорка «для всех x и почти всех состояний ω» опускается, если она очевидна.

Реализации поля a непрерывны и удовлетворяют условию Липшица с неслучайной постоянной:

$$|a_{ij}(x',\omega)-a_{ij}(x'',\omega)|\le A_2\,|x'-x''|\,. \tag{1.3}$$

Положительные константы, значения которых определяют неслучайные постоянные в условиях, относящихся к коэффициентам оператора (0.1), обозначаются c, c_i и т. д. В разных местах одно и то же обозначение может быть использовано для разных констант этого типа, так что не должны вызывать недоумения «равенства» вроде $c+c=c$, $(c')^2=c'$ и им подобные.

Коэффициенты оператора (0.1) являются компонентами случайного поля $k=(a,g)$ со значениями в $\mathbf{R}^d\otimes\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}$. Поле g измеримо и ограничено. Удобно принять, что

$$1\le g(x,\omega)\le 3\,. \tag{1.4}$$

Случайное поле k однородно относительно целочисленных сдвигов: для любого $z\in\mathbf{Z}^d$ статистические свойства полей $k(x)$ и $k(x+z)$ одинаковы.

Значения поля k в далеких точках слабо зависимы. Чтобы точно сформулировать это ограничение, потребуются некоторые обозначения.

Пусть N — конечное подмножество целочисленной решетки $\mathbf{Z}^d$ пространства $\mathbf{R}^d$, и пусть

$$V(N)=\bigcup_{\zeta\in N}(z+[0,1]^d)\,. \tag{1.5}$$

Значения поля k на множестве $V(N)$ порождают σ-алгебру

$$\mathfrak{K}(N)=\sigma\,(k(x),\,x\in V(N))\,. \tag{1.6}$$

Значения k «вдали» от множества N порождают σ-алгебру

$$\mathfrak{K}^+(N,\rho)=\sigma\,\{k(x):\operatorname{dist}(x,V(N))>\rho\}\,, \tag{1.7}$$

где, как обычно, $\operatorname{dist}(x,A)=\inf\{\,|x-y|:y\in A\,\}$.

Предполагается, что поле k удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания в следующей форме:

$$\mathrm{Cov}(\zeta, \zeta^+) \le \kappa(r) \ \mathrm{vraisup} \, |\zeta^+| \ \mathbf{E}\, |\zeta| \,, \tag{1.8}$$

где при некотором конечном $N \subset \mathbf{Z}^d$ случайная величина ζ измерима относительно $\mathfrak{K}(N)$, а случайная величина ζ^+ является $\mathfrak{K}^+(N, r)$-измеримой. Символы $\mathbf{E}$, $\mathbf{Cov}$ и $\mathbf{Var}$ обозначают математическое ожидание, дисперсию и ковариацию для случайных величин на пространстве состояний случайной среды $\langle \Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{Pr} \rangle$.

Для дальнейшего наиболее важен случай, когда в условии (1.8) коэффициент перемешивания удовлетворяет неравенству

$$\kappa(r) \le K(1+r)^{-\alpha}, \qquad \alpha > 0 \,. \tag{1.9}$$

Примеры случайных полей с описанными свойствами однородности и слабой зависимости значений в далеких точках доставляют «шахматные структуры»

$$k(x+z, \omega) = f(x, Y(z, \omega)), \qquad x \in [0,1)^d, \quad z \in \mathbf{Z}^d,$$

где заданное на целочисленной решетке поле Y однородно и слабо зависимо.

При перечисленных выше ограничениях каждой реализации поля k отвечает диффузионный процесс ξ_t со значениями в $\mathbf{R}^d$, производящий оператор которого задает равенство (0.1). Распределение в пространстве траекторий диффузии $\mathrm{U} = C([0, \infty), \mathbf{R}^d)$, отвечающее (0.1) и начальному условию $\xi_0 = x$, обозначается $\mathbf{P}_x$. Зависимость этого распределения в U от состояния среды ω не отмечено в обозначении, чтобы не загромождать выкладки. Те же обозначения вероятности и соответствующего математического ожидания, $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{M}_x$, применяются и для распределений нормированного процесса с начальным условием $\eta_0^T = x$ или гауссовского предельного процесса при $\eta_0^\infty = x$ (ср. (0.2)). Хотя речь идет, собственно, о различных мерах в пространстве траекторий U, в выкладках будет удобнее писать $\mathbf{P}_x\{\eta_t^T \in B\}$ или $\mathbf{M}_x g(\xi_t)$ вместо того, чтобы дополнять соответствующими пояснениями символы вероятности или математического ожидания.

Основной результат статьи —

Теорема 1.1. *Пусть поле $k = (a, g)$ однородно относительно целочисленных сдвигов и удовлетворяет условиям* (1.1)—(1.4), *а также условию перемешивания* (1.8). *Тогда при $c_0 < \hat{r} < r < T^{1/2}$ дисперсия случайной величины* (0.3) *допускает оценку*

$$\mathrm{Var}([u_T; r]) \le c_1\big(\kappa(\hat{r}) + T^{1/d - 1/2}\hat{r}\log T + e^{-(\log T)^2} + (\hat{r}/r)^d T^{2-\hat{A}} (\log T)^3\big),$$

где показатель $\hat{A} > 0$ зависит только от размерности d и постоянных из условия (1.2).

Следствие 1.1. *Если коэффициент перемешивания из* (1.8) *допускает степенную оценку* (1.9), *а размерность достаточно велика* ($d \ge 4$), *то найдутся положительные числа β' и β'' такие, что*

$$\mathrm{Var}\,[u_T\,;r] = O(T^{-\beta''})$$

для $r \sim T^{1/2-\beta'}$. *Показатель* β' *при этом следует выбирать достаточно малым* ($\beta' \le c$). *Показатель* β'' *зависит от выбора* β', *размерности* d *и постоянных эллиптичности из условия* (1.2), *а также от показателя степени в условии* (1.9).

Доказательство сводится к применению теоремы 1.1 при $r \sim T^{1/2-p}$, $\hat{r} \sim T^{p}$, где $p > 0$ достаточно мало. Допустимые значения p определяют показатель $\hat{A}$ из теоремы 1.1 и α из (1.9).

§ 2. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Условие Липшица (1.3) позволяет приблизить коэффициенты оператора (0.1) случайными полями с гладкими реализациями. Погрешность можно сделать равномерно малой на $\mathbf{R}^d \times \Omega$. Приближение можно выбрать так, чтобы удовлетворить дополнительно (1.1), (1.2) и неравенству

$$|D_k a_{ij}(x,\omega)| \le c A_2 , \tag{2.1}$$

а также получить неслучайные оценки для производных высших порядков от коэффициентов, равномерные по пространственной переменной. Одновременно можно добиться сохранения условия слабой зависимости значений сглаженных коэффициентов в далеких точках в форме (1.8) с коэффициентом $\kappa(r+1)$.

Стандартное рассуждение показывает, что средние (0.3) для исходного диффузионного процесса могут быть получены переходом к пределу из соответствующих величин для диффузий со сглаженными коэффициентами. Оценка теоремы 1.1 «выдерживает» такой предельный переход. В дальнейшем удобнее вести вычисления для диффузий с гладкими коэффициентами, а затем получить оценку теоремы 1.1 в полной общности переходом к пределу. Поэтому в последующих выкладках без дополнительных пояснений будет использоваться гладкость коэффициентов оператора (0.1). Однородность всегда понимается как однородность относительно целочисленных сдвигов.

Чтобы описать построение, позволяющее локализовать зависимость величин (0.3) от коэффициентов (0.1), потребуются некоторые обозначения. Они, в основном, следуют [5].

Отрезок траектории диффузии обозначается

$$\xi\,[s,t] = \{\,\xi_\tau : \tau \in [s,t]\,\} . \tag{2.2}$$

Множество целочисленных точек, «задетых» этим отрезком, есть

$$\Xi\,[s,t] = \{\,z \in \mathbf{Z}^d : \xi\,[s,t] \cap (z + [0,1]^d) \ne \text{л}\,\} . \tag{2.3}$$

Ниже $\Xi(t) = \big|\,\Xi\,[0,t]\,\big|$, а $|N|$ — число точек в множестве N. Полагая $\widetilde{T} = T(\log T)^2$, можно выписать оценку среднего числа точек, «задетых» начальным отрезком траектории диффузии: при $T \ge c$ моменты положительных порядков случайной величины Ξ удовлетворяют неравенству

$$\mathbf{M}_x\,|\Xi(\widetilde{T})|^{\nu} \le c'\,\big(T(\log T)^3\big)^{\nu}, \quad c' = c'(\nu), \quad \nu \ge 0 , \tag{2.4}$$

для всех начальных точек и состояний случайной среды. Вывод неравенства (2.4) можно найти, например, в [5].

Вывод оценки теоремы 1.1 проводится по следующей схеме.

Траектории диффузии непрерывны. Поэтому множества (2.3) конечны, и пространство траекторий U допускает разбиение

$$\mathrm{U} = \bigcup_{|N| < \infty} \{ \Xi(\widetilde{T}) = N \} . \tag{2.5}$$

Из (1.4) вытекает равенство

$$u_T(x) = \mathrm{M}_x \int_0^{\widetilde{T}} g(\xi_T)\, d\mathrm{e}(t/T) + \rho_T(x) , \tag{2.6}$$

где $\mathrm{e}(t/T) = 1 - \exp\{ -t/T \}$, а «остаток» допускает оценку

$$|\rho_T(x)| \le 3 \exp\{ -\widetilde{T}/T \} = 3 \exp\{ -(\log T)^2 \} .$$

Следовательно, из (2.5) вытекает справедливость разложения

$$u_T(x) = \rho_T(x) + \sum\nolimits_N' G_{T,N}(x) , \tag{2.7}$$

где знак $\sum_N'$ означает суммирование по всевозможным конечным подмножествам целочисленной решетки, а

$$G_{T,N}(x) \equiv \mathrm{M}_x \mathrm{I}_{\{\Xi(\widetilde{T}) = N\}} \int_0^{\widetilde{T}} g(\xi_T)\, d\mathrm{e}(t/T) \tag{2.8}$$

— средние по «трубкам траекторий», близких к множествам N.

Разложение (2.7), (2.8) приводит к следующему представлению для дисперсии величины (0.3):

$$\mathrm{Var}([u_T ; r]) = \widetilde{\rho}(T, r) + \sum\nolimits_N' \mathrm{Cov}([G_{T,N}], [u_T]) , \tag{2.9}$$

где использовано сокращение

$$[\varphi] = [\varphi; r] = r^{-d} \int_{|x| \le r} \varphi(x)\, dx .$$

В (2.7)—(2.9) величины $G_{T,N}$ определяются значениями поля k на множестве $V(N)$. Поэтому для любого измеримого ограниченного случайного поля $\widehat{u}^N$, значения которого определяет поведение k на множестве $\{ x : \mathrm{dist}(x, V(N)) > \rho \}$, в правой части очевидного равенства

$$\mathrm{Cov}([G_{T,N}], [u_T]) =$$

$$= \mathrm{Cov}([G_{T,N}], [\widehat{u}^N]) + \mathrm{E}\, [G_{T,N}]\, [u_T - \widehat{u}^N] - \mathrm{E}\, [G_{T,N}]\, \mathrm{E}\, [u_T - \widehat{u}^N] \tag{2.10}$$

под знаком ковариации стоят слабо зависимые случайные величины. Это позволяет применить при выводе оценки ковариации (2.10) условие (1.8). Нужно лишь найти удовлетворительное по точности приближение для поля u_T, не зависящее от поведения поля коэффициентов k вблизи N. Формула (2.10) и разложение (2.9) являются основой приведенного ниже доказательства теоремы 1.1.

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФУЗИИ, СЛАБО ЗАВИСЯЩИХ ОТ «СРЕДНЕГО ПО ТРУБКЕ»

Для дальнейшего потребуются некоторые оценки переходных плотностей для диффузий с производящим оператором вида (0.1). Эти оценки собраны ниже.

Вероятности переходов за время t для диффузионного процесса с производящим оператором (0.1) задаются плотностью p:

$$\mathbf{P}_x\{\xi_t \in B\} = \int_B p(x, t, y)\, dy. \tag{3.1}$$

Используя это обозначение, средние (0.3) можно записать в виде

$$[u_T] = [u_T\,; r] = r^{-d} \int_{\mathbf{R}^d} p_r(y)\, g(y)\, dy, \tag{3.2}$$

где

$$p_r(y) = \int_{|x| \le r} dx \int_0^\infty p(x, t, y)\, de(t/T).$$

Очевидно,

$$p_r(y) \le p_\infty(y) \equiv \int_{\mathbf{R}^d} dx \int_0^\infty p(x, t, y)\, de(t/T). \tag{3.3}$$

Статистические свойства плотности из правой части (3.1) не меняются при одновременном целочисленном сдвиге обоих пространственных аргументов. Случайное поле (3.3) однородно в том же смысле и (см. детальное обоснование в [5])

$$< p_\infty > = 1\,, \qquad < p_\infty^{d/(d-1)} > \le c\,, \tag{3.4}$$

где для однородных полей среднее $< \cdot >$ вводится равенством

$$< \eta > \equiv \mathbf{E} \int_{[0,1]^d} \eta(x)\, dx.$$

Из прямого уравнения Колмогорова для диффузии с производящим оператором (0.1) следует, что p_r удовлетворяет уравнению

$$-L' p_r + p_r/T = T^{-1}\, \mathrm{I}_{B(0,r)}, \tag{3.5}$$

где I_A — индикатор множества A, $B(a, r) = \{x : |x - a| \le r\}$, а сопряженный к (0.1) оператор имеет вид $L' v(x) \equiv 1/2\, D_i(a_{ij} D_j v + v D_j a_{ij})$.

Ограничения на коэффициенты, принятые в работе, позволяют применить неравенство Гарнака в виде оценки колебания на единичном шаре (см. [8, теоремы 8.17 и 8.18]):

$$\mathrm{osc}_{B(x,1)}\, p_r = \sup_{B(x,1)} p_r - \inf_{B(x,1)} p_r \le c\,(p_r(x) + 1/T)\,. \tag{3.6}$$

Поэтому при любых x, y, связанных неравенством $1 \ge |x - y|$, ввиду [8, теорема 8.22] справедлива оценка

$$|p_r(x) - p_r(y)| \leq c\,|x-y|^{\hat{\alpha}}\left(1/T + \min\{p_r(x),\ p_r(y)\}\right). \tag{3.7}$$

Все константы в (3.6), (3.7) определяются только размерностью d и структурными константами из (1.2), (1.3).

Пусть N — конечное подмножество целочисленной решетки, $\hat{r} \geq 1$. Сокращение

$$\mathbf{E}_N \cdot \equiv \mathbf{E}\{\cdot\ |\mathfrak{K}^+(N, \hat{r})\} \tag{3.8}$$

используется ниже для обозначения условных средних функционалов от состояния среды при фиксированных вне $\hat{r}$-окрестности $V(N)$ значениях случайного поля $k = (a, g)$.

В дальнейшем коэффициенты оператора (0.1) модифицируются по формуле

$$\hat{a}^N_{ij}(x) = \frac{\mathbf{E}_N\, a_{ij}(x)\ [G_{T,N}](p_r(x) + 1/T)}{\mathbf{E}_N\ [G_{T,N}](p_r(x) + 1/T)}, \tag{3.9}$$

если знаменатель правой части не нуль. В противном случае можно положить, например, $\hat{a}^N = (1-\zeta)\,a + \zeta A^0$, где $\zeta : \mathbf{R}^d \to [0,1]$ — гладкая срезающая функция, $\zeta(x) = 1$ при $\operatorname{dist}(x, V(N)) \leq \hat{r}$, а A^0 — фиксированная неслучайная постоянная матрица, удовлетворяющая (1.2).

При $\operatorname{dist}(x, V(N)) > \hat{r}$ модифицированные коэффициенты (3.9), очевидно, совпадают с исходными. Значения их в любой точке пространства являются $\mathfrak{K}^+(N, \hat{r})$-измеримыми случайными величинами на пространстве состояний среды.

Лемма 3.1. *Симметричное матричнозначное поле* $\hat{a}^N = (\hat{a}^N_{ij})$ *удовлетворяет условию* (1.2) *с теми же константами и условию Гёльдера*

$$\left|\hat{a}^N_{ij}(x') - \hat{a}^N_{ij}(x'')\right| \leq A_3\,|x' - x''|^{\hat{\alpha}} \tag{3.10}$$

с неслучайными постоянными A_3 *и* $\hat{\alpha} \in (0,1]$. (*Значения этих постоянных определяют размерность* d *и структурные константы из* (1.2), (1.3).)

Доказательство. Очевидно, что модифицированные коэффициенты удовлетворяют условиям (1.1), (1.2). Проверка того, что эти коэффициенты удовлетворяют условию Гёльдера нетривиальна только при $|x' - x''| < 1$. Ниже для сокращения выкладок полагаем

$$p' = [G_{T,N}]\,(p_r(x') + 1/T),\quad a' = a_{ij}(x'),$$

p'' и a'' — соответствующие величины для точки x''. В этих обозначениях

$$\left|\hat{a}^N_{ij}(x') - \hat{a}^N_{ij}(x'')\right| =$$

$$= \left|\frac{\mathbf{E}_N(a' - a'')\,p'}{\mathbf{E}_N p'} + \frac{\mathbf{E}_N a''(p' - p'')}{\mathbf{E}_N p'} + \frac{\mathbf{E}_N a''\,p''\,\mathbf{E}_N(p'' - p')}{\mathbf{E}_N p'\,\mathbf{E}_N p''}\right|.$$

Ввиду (1.3) и (3.7) верны оценки

$|a' - a''| \leq c\,|x' - x''|$, $|a''| \leq c$, $|p' - p''| \leq c\,|x' - x''|^{\hat{\alpha}} \min(p',\ p'')$,
из которых следует (3.10).

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Доказательство теоремы 1.1 отправляется от формул (2.9), (2.10). Поле u_T из (0.3) удовлетворяет уравнению

$$-L\,u_T + u_T/T = g/T\,, \tag{4.1}$$

которое легко получается из обратного уравнения Колмогорова для диффузии с производящим оператором (0.1). В качестве $\mathfrak{F}^+(N,\hat{r})$-измеримого приближения для u_T используется решение уравнения

$$-\,\hat{L}_N\,\hat{u}^N + \hat{u}^N/T = \left(1 - \mathrm{I}_{V(N)^{\hat{r}}}\right) g/T\,, \tag{4.2}$$

где $\hat{L}_N$ — оператор вида (0.1) с матрицей диффузии (3.9), а множество $V(N)^{\hat{r}} = \{x : \mathrm{dist}(x, V(N)) \le \hat{r}\}$ — окрестность множества $V(N)$. Для поля (4.2) также нетрудно выписать аналогичное (0.4) вероятностное представление, используя распределение диффузионного процесса с производящим оператором $\hat{L}_N$. В отличие от (4.1), поле (4.2), вообще говоря, не однородно. Функционалы от его реализаций по построению являются $\mathfrak{F}^+(N,\hat{r})$-измеримыми случайными величинами; легко видеть, что для некоторой положительной константы верно соотношение $0 \le \hat{u}^N(x) \le c$.

Вывод оценки для величины (2.10) удобно разбить на несколько этапов.

А. Ковариация в правой части (2.10) мала, так как случайные величины под ее знаком слабо зависимы: $[G_{T,N}]$ измерима относительно $\mathfrak{F}(N)$, а $[\hat{u}^N]$ — относительно $\mathfrak{F}^+(N,\hat{r})$. Из (1.4) следуют неравенства

$$1 \le u_T(x) \le 3\,, \qquad 0 \le \hat{u}^N(x) \le 3\;, \tag{4.3}$$

$$1 \le (\mathrm{P}_x\{\,\Xi(\tilde{T}) = N\})^{-1}\, G_{T,N}(x) \le 3\,. \tag{4.4}$$

Поэтому по условию (1.8)

$$\mathrm{Cov}\,([G_{T,N}],\, [\hat{u}^N]) \le c\,\kappa(\hat{r})\,\mathrm{E}\,[\mathrm{P}_\cdot\,\{\,\Xi(\tilde{T}) = N\,\}\,]\,.$$

Вместе с разложением (2.5) последнее неравенство приводит к оценке

$$\sum\nolimits_N' \mathrm{Cov}\big([G_{T,N}],\, [\hat{u}^N]\big) \le c\,\kappa(\hat{r})\,, \tag{4.5}$$

так как вероятности в правой части (4.4) в сумме дают единицу.

Б. Разность между решениями уравнений (4.1) и (4.2) можно представить в виде $u_T - \hat{u}^N = v_1 + v_2$, где слагаемые v_i удовлетворяют линейному уравнению

$$-\,L\,v_i + v_i/T = f_i \tag{4.6}$$

с правыми частями, соответственно,

$$f_1 = \mathrm{I}_{V(N)^{\hat{r}}}\, g/T\,, \qquad f_2 = \frac{1}{2}\left(a_{ij} - \hat{a}^N_{ij}\right) D_i D_j\, \hat{u}^N\,.$$

Обе правые части обращаются в нуль вне $V(N)^{\hat{r}}$ (рассматриваются только те слагаемые, для которых модификация коэффициентов проводится по формуле (3.9), так как вклад остальных в сумму (2.9) нулевой).

Б1. Известная оценка Н. В. Крылова для математических ожиданий средних вдоль траекторий стохастических интегралов [9, теорема П.3.4] приводит к справедливому для любых начального положения x и состояния среды ω соотношению

$$|v_1(x)| \le c\left(\int |f_1(T^{1/2}x)|^d dx\right)^{1/d} \le$$

$$\le c\,T^{-1/2}\left(\operatorname{mes}\left[V(N)^{\hat{r}}\right]\right)^{1/d} \le c'\,T^{-1/2}\hat{r}\,|N|^{1/d}.$$

Здесь и далее mes — лебегова мера в $\mathbf{R}^d$, а область интегрирования не указывается, если она совпадает со всем пространством. Вместе с (2.4), (4.4) приведенное неравенство обосновывает оценку

$$\sum\nolimits_N' \left(|\mathbf{E}\,[G_{T,N}]\,\mathbf{E}\,[v_1]| + |\mathbf{E}\,[G_{T,N}]\,[v_1]|\right) \le$$

$$\le c\,T^{-1/2}\hat{r}\,\mathbf{E}\left[\sum\nolimits_N' |N|^d\,\mathbf{P}_{\cdot}\{\Xi(\tilde{T}) = N\}\right]^{1/d} =$$

$$= c\,T^{-1/2}\hat{r}\,\mathbf{E}\left[\mathbf{M}\;|\Xi(\tilde{T})|^{1/d}\right] \le \tilde{c}\,T^{1/d-1/2}\hat{r}(\log T)^{3/d}. \qquad (4.7)$$

Б2. Применяя к (4.2) (в переменных $x' = T^{1/2}x$) известную оценку для модуля непрерывности решения эллиптического уравнения второго порядка [10, теорема 1У.2.2], можно убедиться, что колебание решения уравнения (4.2) на любом шаре единичного радиуса удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{osc}_{B(x,1)} \hat{u}^N \le c\,T^{-\alpha^0}, \qquad \alpha^0 > 0.$$

Матрица диффузии оператора $\hat{L}_N$ гёльдерова по лемме 3.1. Этого достаточно, чтобы стандартными методами получить равномерную по состоянию среды и целочисленному вектору z оценку с неслучайной правой частью

$$\left(\int_{z+[0,1]^d} (\hat{u}^N_{xx}(x))^m dx\right)^{1/m} \le c\,T^{-\alpha'}, \qquad \alpha' > 0, \qquad (4.8)$$

где $\varphi_{xx}(x) = \left(D_i D_j \varphi(x)\cdot D_i D_j \varphi(x)\right)^{1/2}$. Показатель в правой части определяется d, выбором m и структурными постоянными из (1.2).

Оценка для величины $\mathbf{E}\,[f_2]$ получается теперь из аналогичного (3.2) представления

$$[v_2] = \left(T/r^d\right)\int p_r(a_{ij} - \hat{a}^N_{ij})\,D_i D_j \hat{u}^N\,dx \qquad (4.9)$$

и (3.4) с помощью неравенства Гёльдера. Подынтегральное выражение в правой части (4.9) отлично от нуля только в некоторой области, которую можно накрыть множеством вида $V(N^+)$ с лебеговой мерой, не превосходящей $c\,\hat{r}^d\,|N|$. Отсюда

$$\mathrm{E}\,[\nu_2] \le c\frac{T}{r^d}\left(\int\limits_{V(N^+)} \mathrm{E}\, p_\infty^{d/(d-1)} dx\right)^{1-1/d} \left(\int\limits_{V(N^+)} \mathrm{E}\left(\hat{u}^N_{xx}\right)^d dx\right)^{1/d} \le cT^{1-\alpha'}|N|(\hat{r}/r)^d.$$

После суммирования с учетом (4.4) и (2.4) из этой оценки получается неравенство

$$\left|\sum\nolimits_N' \mathrm{E}\,[G_{T,N}]\,\mathrm{E}\,[\nu_2]\right| \le c\,T^{2-\alpha'}\,(\hat{r}/r)^d\,(\log T)^3 \tag{4.10}$$

(при суммировании $\nu_2 = \nu_{2N}$ отвечает модификации коэффициентов для «каркаса» N).

B. Составляющая правой части (2.10) $\mathrm{E}\,[G_{T,N}]\,[\nu_2]$ (см. (4.6)) оценивается с учетом специального выбора (3.9) модифицированных коэффициентов. В силу (4.9)

$$\mathrm{E}\,[G_{T,N}]\,[\nu_2] = \left(T/r^d\right)\int \mathrm{E}\,[G_{T,N}]\,(p_r + 1/T)\left(a_{ij} - \hat{a}^N_{ij}\right) D_i D_j \hat{u}^N\,dx -$$

$$- r^{-d}\,\mathrm{E}\,[G_{T,N}]\int\left(a_{ij} - \hat{a}^N_{ij}\right) D_i D_j \hat{u}^N\,dx.$$

Первое слагаемое в правой части обращается в нуль. Чтобы убедиться в этом, достаточно сначала провести усреднение (3.8) при фиксированном вне $V(N)^{\hat{r}}$ состоянии среды. В процессе усреднения производные решения (4.2) ведут себя как неслучайные величины. После этого остается воспользоваться (3.9).

Абсолютная величина второго слагаемого с помощью (4.8) и неравенства Гёльдера оценивается сверху (ср. вывод (4.10)) величиной

$$c(\hat{r}/r)^d\,T^{-\alpha'}\,\mathrm{E}\,[\mathrm{P}_{\cdot}\{\Xi(\tilde{T}) = N\}\,|N|\,].$$

Тем самым,

$$\left|\sum\nolimits_N' \mathrm{E}\,[G_{T,N}]\,[\nu_2]\right| \le c\,T^{1-\alpha'}\,(\hat{r}/r)^d\,(\log T)^3. \tag{4.11}$$

Чтобы получить неравенство теоремы 1.1, остается воспользоваться разложением (2.9), (2.10) и оценками (4.5), (4.7), (4.10), (4.11).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жиков В. В., Сиражудинов М. М.** О G-компактности одного класса недивергентных эллиптических операторов второго порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1981.—Т. 45, № 4.—С. 718–734.
2. **Papanicolaou G. C., Varadhan S. R. S.** Diffusions with random coefficients // Statistics and Probability: Essays in Honour of C. R. Rao/ Ed. by G. Kallianpur, P. R. Krishnaiah, J. K. Ghosh.—Amsterdam–New York: North Holland, 1982.—P. 547–552.
3. **Юринский В. В.** Об усреднении недивергентных уравнений второго порядка со случайными коэффициентами // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 2.—С. 176–188.
4. **Юринский В. В.** Об усреднении диффузии в случайной среде //Предельные теоремы теории вероятностей.—Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1985.—С. 75–85.—(Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 5).

5. Юринский В. В. О погрешности усреднения многомерных диффузий // Теория вероятностей и ее применения.—1988.—Т. 33, № 2. —С. 14–24.
6. Юринский В. В. Оценки ковариаций для средних по распределению диффузии с переключениями в случайной среде // Асимптотический анализ распределений случайных процессов.—Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1989.—С. 169–180.—(Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).
7. Юринский В. В. Об усреднении двумерной диффузии без сноса// Статистика и управление случайными процессами.—М.: Наука, 1989.—С. 299–301.
8. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.—М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
9. Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа.—М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.
10. Крылов Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка.—М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.