Л. Г. ГУРОВ

О МЕТОДЕ ПЕРРОНА

В работе строятся решения класса $C^{n-2}([a, b])$ линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами и с произвольной правой частью. В качестве производных n-го порядка выступают аппроксимативные производные числа, вычисленные с точностью до множества плотности τ. Решение уравнения, если оно существует, зависит от указанного параметра τ. Этот параметр имеет вероятностный характер.

В частном случае, когда рассматривается уравнение $y'(t)=f(t)$, мы получаем обобщение интеграла Перрона. Обобщение идет в направлении отказа от требования непрерывности. Известны работы по интегралу Перрона, в которых требование непрерывности понималось в некотором ослабленном виде. В связи с этим можно отметить работы Ицуми [1], Риддера [2], Кеннеди и Поллярд [3]. В настоящей работе непрерывность интеграла не предполагается ни в каком, даже ослабленном, виде. В работе показано, что если хотя бы для одной из двух функций интеграл не зависит от τ, то интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждого слагаемого, в других же случаях это свойство записывается в виде неравенства.

Результаты работы анонсированы автором в [4, 5].

§ 1. АППРОКСИМАТИВНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Рассматривается уравнение

$$L[y]\equiv y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+p_2(t)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(t)y'+p_n(t)y=f(t) \qquad (1.1)$$

с коэффициентами $p_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, непрерывными на некотором отрезке $[a, b]$. С каждой функцией $F(t)$ класса $C^{n-2}([a, b])$ мы будем связывать вектор-функцию $\mathbf{F}(t)=(F(t), F'(t), \ldots, F^{(n-2)}(t), F_{n-1}(t))$, где $F_{n-1}(t)$ имеет конечное значение в каждой точке отрезка $[a, b]$ и, вообще говоря, не является $(n-1)$-й производной функции $F(t)$. При $n=1$ $\mathbf{F}(t)=F(t)$ — всюду конечная на $[a, b]$ функция. Все вектор-функции, используемые в работе, имеют указанный вид.

Для заданной вектор-функции $\mathbf{F}(t)$ будем обозначать через $y_{\mathbf{F},k,t_0}(t)$ решение задачи Коши:

$$L[y]=k,$$
$$y(t_0)=F(t_0),\ y'(t_0)=F'(t_0),\ \ldots,$$
$$y^{n-2}(t_0)=F^{(n-2)}(t_0),\ y^{(n-1)}(t_0)=F_{n-1}(t_0).$$

Для определения аппроксимативных производных введем обозначение для множеств:

$$U_\pm(t, h, k, \mathbf{F})=\{z\in(0, h):(\pm 1)^n F(t\pm z)<(\pm 1)^n y_{\mathbf{F},k,t}(t\pm z)\},$$
$$U^\pm(t, h, k, \mathbf{F})=\{z\in(0, h):(\pm 1)^n F(t\pm z)>(\pm 1)^n y_{\mathbf{F},k,t}(t\pm z)\}.$$

Теперь введем нижние и верхние правые и левые τ-аппроксимативные производные числа для вектор-функции $\mathbf{F}(t)$ следующими формулами: $0<\tau\leqslant 1$,

$$\mathscr{D}_\pm[\tau]F(t)=\sup\left\{k\in\mathbf{R}:\varlimsup_{h\to+0}\frac{1}{h}|U_\pm(t, h, k, \mathbf{F})|<\tau\right\},$$
$$\mathscr{D}^\pm[\tau]F(t)=\inf\left\{k\in\mathbf{R}:\varlimsup_{h\to+0}\frac{1}{h}|U^\pm(t, h, k, \mathbf{F})|<\tau\right\}.$$

Отметим некоторые соотношения для введенных чисел. При $\tau_1 \leqslant \tau_2$

$$\begin{aligned} &\mathscr{D}_\pm[\tau_1]F(t) \leqslant \mathscr{D}_\pm[\tau_2]F(t), \\ &\mathscr{D}^\pm[\tau_1]F(t) \geqslant \mathscr{D}^\pm[\tau_2]F(t). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Далее, если $\tau_1+\tau_2 \leqslant 1$ и $\mathscr{D}_\pm[\tau_1]F(t) > -\infty$, а $\mathscr{D}^\pm[\tau_2]G(t) < +\infty$, то

$$\mathscr{D}_\pm[\tau_1+\tau_2](F-G)(t) \geqslant \mathscr{D}_\pm[\tau_1]F(t) - \mathscr{D}^\pm[\tau_2]G(t). \tag{1.3}$$

Действительно, пусть $k_1 < \mathscr{D}_\pm[\tau_1]F(t)$ и $k_2 > \mathscr{D}^\pm[\tau_2]G(t)$. В силу линейности уравнения (1.1) имеем

$$U_\pm(t,\ h,\ k_1-k_2,\ \mathbf{F}-\mathbf{G}) \subset U_\pm(t,\ h,\ k_1,\ \mathbf{F}) + U^\pm(t,\ h,\ k_2,\ \mathbf{G}).$$

Поэтому $\mathscr{D}_\pm[\tau_1+\tau_2](F-G)(t) \geqslant k_1-k_2$. Устремляя $k_1 \to \mathscr{D}_\pm[\tau_1]F(t)$ и $k_2 \to \mathscr{D}^\pm[\tau_2]G(t)$, получаем (1.3). Из (1.3) следует, что при $\tau_1+\tau_2 \leqslant 1$

$$\mathscr{D}_\pm[\tau_1]F(t) \leqslant \mathscr{D}^\pm[\tau_2]F(t).$$

В самом деле, если бы оказалось $\mathscr{D}_\pm[\tau_1]F(t) > \mathscr{D}^\pm[\tau_2]F(t)$, то это означало бы, что $\mathscr{D}_\pm[\tau_1]F(t) > -\infty$ и $\mathscr{D}^\pm[\tau_2]F(t) < +\infty$ и тогда, применяя (1.3), мы пришли бы к противоречию.

Выполняются также следующие соотношения:

$$\mathscr{D}_\pm[\tau]F(t) = -\mathscr{D}^\pm[\tau](-F)(t),$$

$$\mathscr{D}_\pm[\tau_1+\tau_2](F+G)(t) \geqslant \mathscr{D}_\pm[\tau_1]F(t) + \mathscr{D}^\pm[\tau_2]G(t), \tag{1.4}$$

$$\mathscr{D}^\pm[\tau_1+\tau_2](F+G)(t) \leqslant \mathscr{D}^\pm[\tau_1]F(t) + \mathscr{D}^\pm[\tau_2]G(t). \tag{1.5}$$

Отметим, что если $\mathscr{D}_\pm F(t)$ и $\mathscr{D}^\pm F(t)$ — нижние и верхние (правые и левые) производные числа Дини, то при любом $\tau \in (0,\ 1)$ для оператора $L[y]=y'$ выполнено

$$\mathscr{D}_\pm F(t) \leqslant \mathscr{D}_\pm[\tau]F(t) \leqslant \mathscr{D}^\pm[1-\tau]F(t) \leqslant \mathscr{D}^\pm F(t). \tag{1.6}$$

Определение 1. Вектор-функцию $\mathbf{F}(t)$ будем называть *τ-верхней* ($0 \leqslant \tau < 1$) *для $f(t)$ на $[a,\ b]$ относительно оператора L*, если выполнены следующие условия:

а) $\mathbf{F}(a) = \mathbf{0}$;

б) $-\infty \neq \mathscr{D}_+[1-\tau]F(t) \geqslant f(t)$ для $t \in [a,\ b)$, $-\infty \neq \mathscr{D}_-[1-\tau]F(t) \geqslant f(t)$ для $t \in (a,\ b]$.

Вектор-функцию $\mathbf{G}(t)$ будем называть *τ-нижней* ($0 < \tau \leqslant 1$) *для $f(t)$ на $[a,\ b]$ относительно оператора L*, если выполнены следующие условия:

а) $\mathbf{G}(a) = 0$;

б) $+\infty \neq \mathscr{D}^+[\tau]G(t) \leqslant f(t)$ для $t \in [a,\ b)$, $+\infty \neq \mathscr{D}^-[\tau]G(t) \leqslant f(t)$ для $t \in (a,\ b]$.

Ввиду (1.2) всякая τ_1-верхняя функция будет также τ-верхней при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$, а всякая τ_2-нижняя — τ-нижней при $\tau_2 \leqslant \tau \leqslant 1$.

Если $\mathbf{F}(t)$ и $\mathbf{G}(t)$ — τ-верхняя и τ-нижняя функции для одной и той же функции, то из (1.3) следует

$$\mathscr{D}_\pm[1](F-G)(t) \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Неравенство вида (1.7), записанное для нижних производных чисел, влечет неубывание функции $F-G$, и на этом факте основано определение интеграла Перрона. Оказывается, что наличие τ-аппроксимативных производных чисел в неравенстве (1.7) достаточно для применения конструкции Перрона. Доказательство этого результата будет проведено отдельно для уравнений первого и старших порядков. Различие этих двух случаев порождено тем, что в определении τ-аппроксимативных производных чисел производные промежуточных порядков не участвуют явным образом.

Для уравнения первого порядка

$$y' + p(t)y = f(t)$$

будем использовать все обозначения и определения, введенные в первом параграфе.

Теорема 2.1. *Если $F(t)$ — τ-верхняя, а $G(t)$ — τ-нижняя $(0 < \tau < 1)$ функции для одной и той же правой части $f(t)$, то $F(b) \geqslant G(b)$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, а $y = \varphi(t)$ — решение задачи Коши: $y' + p(t)y = 1$, $y(a) = 0$. Положим $A = \{t \in [a, b] : F(t) - G(t) + \varepsilon\varphi(t) \geqslant 0\}$ и $B = [a, b] \setminus A$. При $t \in A$ ввиду (1.7) имеем $\overline{\lim\limits_{h\to+0}} |(t, t + h)B|/h < 1$ или $\underline{\lim\limits_{h\to+0}} (1/h)\, m_*(t, t+h)A > 0$, где m_* — внутренняя мера Лебега на прямой. Точно так же если $t \in B$, то $\overline{\lim\limits_{h\to+0}} |(t - h, t)A|/h < 1$ или $\underline{\lim\limits_{h\to+0}} (1/h)\, m_*(t - h, t)B > 0$. Таким образом, если B не пусто, то любая порция множества A или множества B имеет положительную внутреннюю меру. Если мы обозначим через A_1 и B_1 множества внешней плотности для A и B соответственно, то A_1 и B_1 не пусты и выполнены включения $A_1 \subset A$ и $B_1 \subset B$. Отсюда следует (см. [6, 2.9.11]), что A и B измеримы и $|A_1| = |A|$, $|B_1| = |B|$.

Выберем последовательность $\varepsilon_m \to 0$ $(0 < \varepsilon_m < 1)$ и построим последовательность вложенных отрезков

$$[x_1, x_1 + \delta_1] \supset [y_1 - \delta_1', y_1] \supset [x_2, x_2 + \delta_2] \supset [y_2 - \delta_2', y_2] \supset \ldots$$
$$\ldots \supset [x_m, x_m + \delta_m] \supset [y_m - \delta_m', y_m] \supset \ldots,$$

удовлетворяющую условиям

$$x_m \in A_1,\ y_m \in B_1,\ 0 < \delta_m < 2^{-m},\ 0 < \delta_m' < 2^{-m},$$
$$|(x_m, x_m + h)A| > (1 - \varepsilon_m)h \text{ при } h \in (0, \delta_m),$$
$$|(y_m - h, y_m)B| > (1 - \varepsilon_m)h \text{ при } h \in (0, \delta_m').$$

Построение проведем по индукции. В качестве x_1 возьмем произвольную точку из A_1. Предположим, что точка x_m уже выбрана, и положим $x = \inf(x_m, b)B$. Если $x = x_m$, то подходящее δ_m можно выбрать благодаря тому, что x_m — точка плотности для A. Если $x_m < x < x_m + 2^{-m}(1 - \varepsilon_m)^{-1}$, то положим $\delta_m = \min\left\{\dfrac{x - x_m}{1 - \varepsilon_m}, y_{m-1} - x_m\right\}$. Если же $x \geqslant x_m + 2^{-m}(1 - \varepsilon_m)^{-1}$, то заменим точку x_m какой-нибудь точкой из интервала $(x - 2^{-m}/(1 - \varepsilon_m), x)$, и дело сводится к предыдущему случаю. Когда δ_m выбрано, возьмем в качестве y_m произвольную точку из $(x_m, x_m + \delta_m)B_1$ и подберем δ_m' так же, как мы подбирали δ_m, поменяв только ролями множества A и B.

Общая точка этих отрезков $c = \prod\limits_{m=1}^{\infty} [x_m, x_m + \delta_m] = \prod\limits_{m=1}^{\infty} [y_m - \delta_m', y_m]$ не может принадлежать ни одному из множеств A или B. В самом деле, если $c \in A$, то

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\, |(c, c + h)B|/h \geqslant \lim_{y_m \to c} |(c, y_m)B|/(y_m - c) \geqslant \lim (1 - \varepsilon_m) = 1,$$

а если $c \in B$, то

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\, |(c - h, c)A|/h \geqslant \lim_{x_m \to c} |(x_m, c)A|/(c - x_m) \geqslant \lim (1 - \varepsilon_m) = 1.$$

Полученное противоречие показывает, что множество B пусто. Устремляя теперь ε к нулю, мы видим, что в каждой точке $t \in [a, b]$ выполнено $F(t) \geqslant G(t)$.

Если при $0 < \tau < 1$ функция $f(t)$ имеет хотя бы одну τ-верхнюю и хотя бы одну τ-нижнюю функции, то доказанная теорема позволяет записать

$$-\infty < \sup G(b) \leqslant \inf F(b) < +\infty,$$

где инфимум берется по всем τ-верхним, а супремум по всем τ-нижним функциям. Введем обозначения

$$\bar{J}[\tau, f, L, a, b] = \inf F(b), \qquad \underline{J}[\tau, f, L, a, b] = \sup G(b).$$

Будем называть эти величины *верхним* и *нижним τ-интегралами функции f относительно оператора L на отрезке* $[a, b]$. В дальнейшем для краткости мы можем опускать в этом обозначении те или иные символы, если это не вызовет затруднений в понимании написанного.

Пусть для некоторой функции f при каждом ω_ν $(\omega_\nu \to 1)$ найдется ω_ν-верхняя функция и при каждом τ_ν $(\tau_\nu \to 0)$ — τ_ν-нижняя. Тогда $\bar{J}[\tau, f]$ и $\underline{J}[\tau, f]$ определены при любом $\tau \in (0, 1)$ и не убывают относительно переменной τ. Если дополнительно известно, что они ограничены, то существуют их предельные значения при $\tau \to 1$ и $\tau \to 0$, которые мы будем обозначать через $\bar{J}[1, f]$, $\underline{J}[1, f]$, $\bar{J}[0, f]$, $\underline{J}[0, f]$.

Если при некотором $\tau \in [0, 1]$ выполнено $\bar{J}[\tau, f, L, a, b] = \underline{J}[\tau, f, L, a, b]$, то мы будем говорить, что функция f *τ-интегрируема на* $[a, b]$ *относительно оператора* L, и обозначать это общее значение через $J[\tau, f, L, a, b]$. Заметим, что в силу (1.6) если f интегрируема по Перрону на отрезке $[a, b]$, то она τ-интегрируема относительно оператора $L[y] = y'$ при любом $\tau \in [0, 1]$, причем $J[\tau, f, L, a, b] = (\mathscr{P}) \int_a^b f(t)\,dt$.

Легко также заметить, что если неотрицательная функция τ-интегрируема относительно оператора $L[y] = y'$, то она интегрируема по Лебегу и, следовательно, τ-интеграл не зависит от τ.

Отметим некоторые свойства τ-интеграла, приводя доказательства лишь в тех случаях, когда они отличаются от соответствующих доказательств для интеграла Перрона.

Теорема 2.2. *Если f τ-интегрируема на $[a, b]$ и $a < c < b$, то f будет τ-интегрируемой и на каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, причем*

$$J[\tau, f, L, a, b] = J[\tau, f, L, a, c] + J[\tau, f, L, c, b].$$

Теорема 2.3. *Если $a < c < b$ и f τ-интегрируема на каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, то и на всем отрезке $[a, b]$ она τ-интегрируема.*

Доказательство. Пусть для $\varepsilon > 0$ F_1 и F_2 — τ-верхние, а G_1 и G_2 — τ-нижние функции для f на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно такие, что $F_1(c) - G_1(c) < \varepsilon$ и $F_2(b) - G_2(b) < \varepsilon$. Пусть $y = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ — решения уравнения $L[y] = 0$, удовлетворяющие начальным условиям $\varphi(c) = F_1(c)$ и $\psi(c) = G_1(c)$. Тогда функции

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) & \text{при } t \in [a, c], \\ F_2(t) + \varphi(t) & \text{при } t \in [c, b], \end{cases}$$

$$G(t) = \begin{cases} G_1(t) & \text{при } t \in [a, c], \\ G_2(t) + \psi(t) & \text{при } t \in [c, b] \end{cases}$$

будут соответственно τ-верхней и τ-нижней для f на $[a, b]$, причем в силу непрерывной зависимости решений уравнения $L[y] = 0$ от начальных данных будем иметь $F(b) - G(b) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 2.4. *Если f τ-интегрируема и $k = \mathrm{const} > 0$, то и kf так же τ-интегрируема, причем*

$$J[\tau, kf, L, a, b] = kJ[\tau, f, L, a, b],$$

При умножении на отрицательную постоянную величину получаются следующие соотношения:

$$\bar{J}[\tau, -f] = -\underline{J}[1-\tau, f], \quad \underline{J}[\tau, -f] = -\bar{J}[1-\tau, f].$$

При сложении двух τ-интегрируемых функций ситуация более сложная. Пусть $\tau_1+\tau_2 \leqslant \omega \leqslant \omega_1+\omega_2-1$, причем все эти числа из отрезка $[0, 1]$. Тогда, учитывая (1.2), (1.4), (1.5), мы можем записать соотношения

$$\mathcal{D}^{\pm}[\omega](G_1+G_2) \leqslant \mathcal{D}^{\pm}[\tau_1+\tau_2](G_1+G_2) \leqslant \mathcal{D}^{\pm}[\tau_1]G_1+\mathcal{D}^{\pm}[\tau_2]G_2,$$
$$\mathcal{D}_{\pm}[1-\omega](F_1+F_2) \geqslant \mathcal{D}_{\pm}[(1-\tau_1)+(1-\tau_2)](F_1+F_2) \geqslant$$
$$\geqslant \mathcal{D}_{\pm}[1-\tau_1]F_1+\mathcal{D}_{\pm}[1-\tau_2]F_2,$$

из которых следует

$$\underline{J}[\tau_1, f_1]+\underline{J}[\tau_2, f_2] \leqslant \underline{J}[\omega, f_1+f_2] \leqslant \bar{J}[\omega, f_1+f_2] \leqslant \bar{J}[\omega_1, f_1]+\bar{J}[\omega_2, f_2],$$

если величины, стоящие в левой и правой частях, существуют. Рассмотрим, в частности, пространство функций, для которых существуют $\bar{J}[1, f]$ и $\underline{J}[0, f]$. Мы можем записать

$$\underline{J}[0, f_1]+\underline{J}[\omega, f_2] \leqslant \underline{J}[\omega, f_1+f_2] \leqslant \bar{J}[\omega, f_1+f_2] \leqslant \bar{J}[1, f_1]+\bar{J}[\omega, f_2].$$

Последние соотношения вместе со свойствами умножения на постоянную показывают, что в этом пространстве величина $\bar{J}[1, f]-\underline{J}[0, f]$ служит полунормой. При этом если одна из двух функций f_1 принадлежит ядру этой полунормы, а другая f_2 τ-интегрируема, то имеет место равенство

$$J[\tau, f_1+f_2] = J[\tau, f_1]+J[\tau, f_2].$$

Теорема 2.5. *Если функция f τ-интегрируема на $[a, b]$, а g ей эквивалентна, то g тоже τ-интегрируема, причем их τ-интегралы совпадают.*

Доказательство. Пусть E — множество, на котором различаются функции f и g. Возьмем непрерывную неубывающую функцию $\sigma(t)$ $(\sigma(a)=0)$, для которой $\sigma'(t)=+\infty$ во всех точках t множества E. Теперь если F — τ-верхняя, а G — τ-нижняя функции для f, то $F(t)+\varepsilon\sigma(t)\times$ $\times\exp\left(-\int\limits_a^t p(x)\,dx\right)$ и $G(t)-\varepsilon\sigma(t)\exp\left(-\int\limits_a^t p(x)\,dx\right)$ будут соответственно τ-верхней и τ-нижней для g, что и доказывает теорему.

§ 3. УРАВНЕНИЯ СТАРШИХ ПОРЯДКОВ

При рассмотрении уравнений порядка $m \geqslant 2$ мы наложим на уравнение (1.1) некоторое условие, которое при $n=2$ означает отсутствие у уравнения сопряженных точек на $[a, b]$.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — некоторая фундаментальная система решений уравнения $L[y]=0$, а $W(t)$ — определитель Вронского этой системы. Известно, что $W(t)$ не обращается в нуль на $[a, b]$. Пусть

$$\Delta_0 = y_1, \ \Delta_1 = y_1y_2' - y_2y_1', \ \Delta_2, \ \ldots,$$
$$\Delta_{n-2}, \ \Delta_{n-1} = W$$

— угловые миноры определителя Вронского. Мы будем предполагать, что уравнение обладает такой фундаментальной системой решений, для которой все указанные угловые миноры положительны на $[a, b]$. Рассмотрим функции

$$q_0 = \Delta_0^{-1}, \ q_1 = \Delta_0^2\Delta_1^{-1}, \ q_n = \Delta_{n-1}\Delta_{n-2}^{-1},$$
$$q_k = \Delta_{k-1}^2(\Delta_{k-2}\Delta_k)^{-1} \text{ при } k=2, 3, 4, \ldots, n-1.$$

По предположению все эти функции положительны на $[a, b]$. Используя введенные функции, оператор L можно записать в виде последовательного дифференцирования:

$$L[y]=q_n(q_{n-1}(q_{n-2}(\ldots(q_2(q_1(q_0y)')')'\ldots)')')'.$$

Будем рассматривать и промежуточные операторы, полагая для $k = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$L_k[y]=q_k(q_{k-1}\ldots(q_1(q_0y)')'\ldots)',$$

$$L_0[y]=q_0y.$$

Пусть t_0 — некоторая точка отрезка $[a, b]$. Через $z_k(t_0, t)$ мы будем обозначать решение задачи Коши ($k=1, 2, 3, \ldots, n-1, n$):

$$L_k[y]=1,\ y(t_0)=y'(t_0)=\ldots=y^{(k-1)}(t_0)=0.$$

Такое решение можно записать в явном виде:

$$z_k(t_0, t)=\frac{1}{q_k(t)}\int_{t_0}^{t}\frac{du_1}{q_{k-1}(u_1)}\int_{t_0}^{u_1}\frac{du_2}{q_{k-2}(u_2)}\int_{t_0}^{u_2}\cdots\int_{t_0}^{u_{k-1}}\frac{du_k}{q_0(u_k)}.$$

Будем считать, что $z_0(t_0, t)=y_1(t)$. Как легко видеть,

$$z_k(t_0, t)=C(t-t_0)^k+o((t-t_0)^k), \tag{3.1}$$

где $C>0$.

Для вектор-функции $\mathbf{F}(t)$ имеют смысл выражения $L_k[F](t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$. Мы будем также использовать запись $L_{n-1}[F](t)$, подразумевая, что при вычислении этой величины вместо несуществующей производной $F^{(n-1)}(t)$ подставлена функция $F_{n-1}(t)$. По заданным величинам $L_k[F](t)$ ($k=0, 1, 2, \ldots, n-1$) вектор-функция восстанавливается однозначно. Заметим, что

$$y_{\mathbf{F},0,t_0}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}L_k[F](t_0)\,z_k(t_0, t).$$

Теорема 3.1. *Если* $\mathbf{F}(a)=\mathbf{0}$,

$$\mathscr{D}_+[1]F(t)\geqslant 0 \quad \text{для}\quad t\in[a, b), \tag{3.2}$$

$$\mathscr{D}_-[1]F(t)\geqslant 0 \quad \text{для}\quad t\in(a, b], \tag{3.3}$$

то функции $L_k[F](t)$ *не убывают на* $[a, b]$ *при* $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. *При этом имеют место оценки*

$$L_k[F](t)\leqslant C_kL_{n-1}[F](b) \quad (a\leqslant t\leqslant b), \tag{3.4}$$

где C_k *не зависит от* F.

Доказательство. Будем считать, что неравенства (3.2) и (3.3) строгие, так как мы можем сначала рассмотреть функцию $F(t)+\varepsilon z_n(a, t)$ при $\varepsilon>0$, а затем устремить ε к нулю.

Предположим, что функция $L_{n-2}[F](t)$ имеет локальный максимум во внутренней точке t_0 отрезка $[a, b]$. Полагая

$$R(t)=F(t)-\sum_{k=0}^{n-2}L_k[F](t_0)\,z_k(t_0, t),$$

имеем $L_{n-2}[R](t)\leqslant 0$ в некоторой окрестности точки t_0 и так как $L_k[R](t_0)=0$ при $k=0, 1, \ldots, n-2$ и

$$(L_k[y](t))'=q_k^{-1}(t)\,L_{k+1}[y](t) \quad (k=0, 1, \ldots, n-3), \tag{3.5}$$

то при достаточно малых $h>0$ получаем $(\pm 1)^{n-2}R(t_0\pm h)\leqslant 0$. Далее, учитывая (3.1), из соотношения

$$F(t)-y_{\mathbf{F},0,t_0}(t)=R(t)-L_{n-1}[F](t_0)\,z_{n-1}(t_0, t)$$

получаем при условии $L_{n-1}[F](t_0)\geqslant 0$ для $t>t_0$ $F(t)-y_{\vec{\mathbf{F}},0,t_0}(t)\leqslant 0$, т. е. $\mathscr{D}_+[1]F(t_0)\leqslant 0$, а при условии $L_{n-1}[F](t_0)<0$ для $t<t_0$ $(-1)^n\left(F(t)-y_{\vec{\mathbf{F}},0,t_0}(t)\right)\leqslant 0$, т. е. $\mathscr{D}_-[1]F(t_0)\leqslant 0$. В любом случае мы не получаем строгих неравенств (3.2) и (3.3) и, стало быть, $L_{n-2}[F](t)$ возрастает на $[a, b]$. Функции $L_k[F](t)$ при $k=0, 1, \ldots, n-3$ возрастают, так как ввиду (3.5) они имеют положительные производные.

Теперь предположим, что найдется точка $t_0\in[a, b]$, в которой $L_{n-1}[F](t_0)<0$. Из соотношения

$$L_{n-2}\left[F-y_{\mathbf{F},0,t_0}\right](t)=L_{n-2}[F](t)-L_{n-2}[F](t_0)-L_{n-1}[F](t_0)L_{n-2}[z_{n-1}](t),$$

учитывая, что $L_{n-2}[z_{n-1}](t)$ возрастает и $L_{n-2}[z_{n-1}](t_0)=0$, имеем $L_{n-2}\left[F-y_{\mathbf{F},0,t_0}\right](t)\leqslant 0$ при $t<t_0$. Поэтому при $t<t_0$ получаем $(-1)^{n-2}\left(F(t)-y_{\mathbf{F},0,t_0}(t)\right)\leqslant 0$, т. е. $\mathscr{D}_-[1]F(t_0)\leqslant 0$. Таким образом доказано, что $L_{n-1}[F](t)\geqslant 0$ при $a\leqslant t\leqslant b$. Пусть теперь $(t_1<t_2)$ — произвольные точки отрезка $[a, b]$. Для функции $F_1(t)=F(t)-y_{\mathbf{F},0,t_1}(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ выполнены все условия теоремы, поэтому имеем из уже доказанного

$$0\leqslant L_{n-1}[F_1](t_2)=L_{n-1}[F](t_2)-L_{n-1}\left[y_{\vec{\mathbf{F}},0,t_1}\right](t_2)=L_{n-1}[F](t_2)-L_{n-1}[F](t_1).$$

Осталось установить оценки (3.4). При $k=n-1$ имеем $L_{n-1}[F](t)\leqslant L_{n-1}[F](b)$ из монотонности функции $L_{n-1}[F](t)$. Далее рассмотрим функцию

$$\varphi(t)=\varepsilon+(1+\varepsilon)L_{n-1}[F](b)\int_a^t\frac{dx}{q_{n-1}(x)}\quad(\varepsilon>0)$$

и покажем, что $L_{n-2}[F](t)<\varphi(t)$ для $t\in[a, b]$. При $t=a$ неравенство выполнено. Предположим, что неравенство нарушается на отрезке $[a, b]$, и пусть t_0 — первая точка, считая от a, в которой $L_{n-2}[F](t_0)=\varphi(t_0)$. Рассмотрим дополнительно функцию

$$y(t)=\frac{1}{q_0(t)}\left(L_0[F](t_0)+\int_{t_0}^t\frac{dx_{n-2}}{q_1(x_{n-2})}\left(L_1[F](t_0)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{t_0}^{x_{n-2}}\frac{dx_{n-3}}{q_2(x_{n-3})}\left(\ldots+\int_{t_0}^{x_3}\frac{dx_2}{q_{n-3}(x_2)}\left(L_{n-3}[F](t_0)+\int_{t_0}^{x_2}\frac{\varphi(x_1)}{q_{n-2}(x_1)}dx_1\right)\ldots\right)\right)\right).$$

Имеем при $k=0, 1, 2, \ldots, n-2$

$$L_k[y](t_0)=L_k[F](t_0),$$
$$L_{n-1}[y](t_0)=(1+\varepsilon)L_{n-1}[F](b)>L_{n-1}[F](t_0),$$

поэтому при любом $m\in\mathbf{R}$ найдется такое $\delta>0$, что в точках $t\in(t_0-\delta, t_0)$ выполнено неравенство

$$(-1)^{n-2}y(t)<(-1)^{n-2}y_{\mathbf{F},m,t_0}(t).$$

Кроме того, для $t\in(a, t_0)$ имеем $(-1)^{n-2}F(t)<(-1)^{n-2}y(t)$. Из двух последних неравенств следует $\mathscr{D}_-[1]F(t_0)=-\infty$, что противоречит (3.3). Устремляя $\varepsilon\to 0$, получаем (3.4) при $k=n-2$. При меньших k неравенство доказывается простым интегрированием. Теорема доказана.

Если для функции $f(t)$ найдутся хотя бы одна τ-верхняя и хотя бы одна τ-нижняя функции $(0<\tau<1)$, то определены для всех $t\in[a, b]$ и $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$ функции

$$\alpha_k[\tau](t)=\inf L_k[F](t),\qquad \beta_k[\tau](t)=\sup L_k[G](t),$$

где инфимум берется по всем τ-верхним функциям F, а супремум — по всем τ-нижним функциям G, при этом выполняется неравенство $\beta_k[\tau](t) \leqslant \alpha_k[\tau](t)$. Если дополнительно известно, что $\alpha_{n-1}[\tau](b) = \beta_{n-1}[\tau](b)$, то $\alpha_k[\tau](t) = \beta_k[\tau](t)$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и $a \leqslant t \leqslant b$. В последнем случае мы имеем возможность восстановить вектор-функцию $\mathbf{U}(t)$ из соотношений $L_k[\mathbf{U}](t) = \alpha_k[\tau](t)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Эту вектор-функцию мы будем называть *τ-решением уравнения* $L[y] = f(t)$ *с нулевыми начальными условиями.* Мы будем использовать для этого решения то же обозначение $J[\tau, f, L, a, t]$, что и для уравнений первого порядка. Теоремы 2.2—2.5 выполняются для уравнений n-го порядка с небольшими уточнениями. Соотношения в теореме 2.2 будут иметь вид

$$J[\tau, f, L, a, b] = J[\tau, f, L, c, b] + \sum_{k=0}^{n-1} L_k[J[\tau, f, L, a, .]](c)\, z_k(c, b).$$

При доказательстве теоремы 2.3 нужно положить

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} L_k[F_1](c)\, z_k(c, t),$$

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} L_k[G_1](c)\, z_k(c, t).$$

А в доказательстве теоремы 2.5 взять функции $F(t) + \varepsilon\varphi(t)$ и $G(t) - \varepsilon\varphi(t)$, где

$$\varphi(t) = \frac{1}{q_0} \int_a^t \frac{dt_1}{q_1} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{q_2} \int_a^{t_2} \ldots \int_a^{t_{n-2}} \frac{dt_{n-1}}{q_{n-1}} \int_a^{t_{n-1}} \frac{\sigma(t_n)}{q_n}\, dt_n,$$

а $\sigma(t)$ — возрастающая функция из теоремы 2.5.

В заключение рассмотрим пример. Пусть $f(t) = -t^{-3}\sin(1/t)$. Тогда уравнение $y'' = f(t)$ имеет τ-решение на $[0, t]$: $u(t) = t(\sin(1/t) - \cos(\pi\tau))$. В то же время относительно оператора $L[y] = y'$ функция $f(t)$ не имеет ни τ-верхних, ни τ-нижних функций, т. е. последовательное интегрирование здесь не возможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Izumi S.** A new concept of integrals // Proc. Imp. Acad. of Japan.— 1933.— V. 9.— P. 570—573.
2. **Ridder J.** Über der Perronschen Integrablegriff und seine Beziehungen zu der R-, L- und D-Integralen // Math. Z.— 1932.— Bd. 34, N 2.— S. 234—269.
3. **Kennedy M. D., Pollard S.** Upper and lower integrals // Ibid.— 1934.— Bd. 39.— S. 432—454.
4. **Гуров Л. Г.** О необязательно непрерывном интеграле // XIV школа по теории операторов в функциональных пространствах, Новгород, сент. 1989 г.: Тез. докл.— Новгород, 1989.— Ч. 1.— С. 73.
5. **Гуров Л. Г.** О методе Перрона // XV Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах, Ульяновск, сент. 1990 г.: Тез. докл.— Ульяновск, 1990.— Ч. 1.— С. 74.
6. **Федерер Г.** Геометрическая теория меры.— М.: Наука, 1987.— 760 с.

В. К. ИОНИН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Посвящается А. Д. Александрову

Работу Ю. И. Кулакова [1] можно считать началом плодотворных исследований в теории физических структур. В последние годы к этим исследованиям присоединился Ю. С. Владимиров, который получил (см. [2]—[4]) ряд интересных результатов в теоретической физике. К сожалению, математические основания теории физических структур нельзя считать достаточно прочными. Основной целью настоящей статьи является подведение прочного фундамента под эту теорию.