где инфимум берется по всем τ-верхним функциям F, а супремум — по всем τ-нижним функциям G, при этом выполняется неравенство $\beta_k[\tau](t) \leqslant \alpha_k[\tau](t)$. Если дополнительно известно, что $\alpha_{n-1}[\tau](b) = \beta_{n-1}[\tau](b)$, то $\alpha_k[\tau](t) = \beta_k[\tau](t)$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и $a \leqslant t \leqslant b$. В последнем случае мы имеем возможность восстановить вектор-функцию $\mathbf{U}(t)$ из соотношений $L_k[\mathbf{U}](t) = \alpha_k[\tau](t)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Эту вектор-функцию мы будем называть *τ-решением уравнения* $L[y] = f(t)$ *с нулевыми начальными условиями*. Мы будем использовать для этого решения то же обозначение $J[\tau, f, L, a, t]$, что и для уравнений первого порядка. Теоремы 2.2—2.5 выполняются для уравнений n-го порядка с небольшими уточнениями. Соотношения в теореме 2.2 будут иметь вид

$$J[\tau, f, L, a, b] = J[\tau, f, L, c, b] + \sum_{k=0}^{n-1} L_k[J[\tau, f, L, a, .]](c) z_k(c, b).$$

При доказательстве теоремы 2.3 нужно положить

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} L_k[F_1](c) z_k(c, t),$$

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} L_k[G_1](c) z_k(c, t).$$

А в доказательстве теоремы 2.5 взять функции $F(t) + \varepsilon\varphi(t)$ и $G(t) - \varepsilon\varphi(t)$, где

$$\varphi(t) = \frac{1}{q_0} \int_a^t \frac{dt_1}{q_1} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{q_2} \int_a^{t_2} \cdots \int_a^{t_{n-2}} \frac{dt_{n-1}}{q_{n-1}} \int_a^{t_{n-1}} \frac{\sigma(t_n)}{q_n} dt_n,$$

а $\sigma(t)$ — возрастающая функция из теоремы 2.5.

В заключение рассмотрим пример. Пусть $f(t) = -t^{-3}\sin(1/t)$. Тогда уравнение $y'' = f(t)$ имеет τ-решение на $[0, t]$: $u(t) = t(\sin(1/t) - \cos(\pi\tau))$. В то же время относительно оператора $L[y] = y'$ функция $f(t)$ не имеет ни τ-верхних, ни τ-нижних функций, т. е. последовательное интегрирование здесь не возможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Izumi S.** A new concept of integrals // Proc. Imp. Acad. of Japan.— 1933.— V. 9.— P. 570—573.
2. **Ridder J.** Über der Perronschen Integrablegriff und seine Beziehungen zu der R-, L- und D-Integralen // Math. Z.— 1932.— Bd. 34, N 2.— S. 234—269.
3. **Kennedy M. D., Pollard S.** Upper and lower integrals // Ibid.— 1934.— Bd. 39.— S. 432—454.
4. **Гуров Л. Г.** О необязательно непрерывном интеграле // XIV школа по теории операторов в функциональных пространствах, Новгород, сент. 1989 г.: Тез. докл.— Новгород, 1989.— Ч. 1.— С. 73.
5. **Гуров Л. Г.** О методе Перрона // XV Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах, Ульяновск, сент. 1990 г.: Тез. докл.— Ульяновск, 1990.— Ч. 1.— С. 74.
6. **Федерер Г.** Геометрическая теория меры.— М.: Наука, 1987.— 760 с.

В. К. ИОНИН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Посвящается А. Д. Александрову

Работу Ю. И. Кулакова [1] можно считать началом плодотворных исследований в теории физических структур. В последние годы к этим исследованиям присоединился Ю. С. Владимиров, который получил (см. [2]—[4]) ряд интересных результатов в теоретической физике. К сожалению, математические основания теории физических структур нельзя считать достаточно прочными. Основной целью настоящей статьи является подведение прочного фундамента под эту теорию.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

1.1. *Булеаном*, или *степенью-множеством*, произвольного множества X (в обозначении $\mathscr{P}(X)$) называется множество всех его подмножеств. Булеан конечного множества, состоящего из n элементов, содержит 2^n различных элементов. Например, если $X=\{0, 1, 2\}$, то $\mathscr{P}(X)=\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$.

1.2. *Соответствием f из множества X в множество Y* (в обозначении $f\colon X\to Y$) называется произвольное подмножество декартова произведения $X\times Y$. Множества X и Y называются *областью отправления* и *областью прибытия соответствия* f. Если $(x, y)\in f$, то y называется *образом элемента* x, а x — прообразом элемента y. Объединение всех образов элемента x обозначается символом $f(x)$ и называется *полным образом элемента* x, а объединение всех прообразов элемента y обозначается символом $f^*(y)$ и называется *полным прообразом элемента* y. Аналогично определяется полный образ $f(X')$ множества $X'\subset X$ и полный прообраз $f^*(Y')$ множества $Y'\subset Y$. Множества $f(X)$ и $f^*(Y)$ называются *областью изменения* и *областью определения соответствия* f.

1.3. Соответствие f называется *функциональным*, если для любого $x\in X$ его полный образ $f(x)$ пуст или состоит из единственного элемента. Функциональное соответствие называется *функцией* или *отображением*, если его область определения совпадает с областью отправления. Сужение функционального соответствия на его область определения является **функцией.**

1.4. *Декартовым произведением конечной последовательности соответствий* $f_1\colon X_1\to Y_1, \ldots, f_n\colon X_n\to Y_n$ называется такое соответствие

$$f=f_1\times\ldots\times f_n\colon X_1\times\ldots\times X_n\to Y_1\times\ldots\times Y_n,$$

что элемент $(y_1, \ldots, y_n)$ является образом элемента $(x_1, \ldots, x_n)$ относительно f, если и только если $(x_1, y_1)\in f_1, \ldots, (x_n, y_n)\in f_n$.

1.5. *Композицией соответствий* $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to Z$ называется такое соответствие $gf\colon X\to Z$, что $gf(x)=g(f(x))$ для любого $x\in X$. Обращаем внимание на то, что эта композиция существует только тогда, когда область прибытия первого соответствия точно совпадает с областью отправления второго. Очевидным образом определяется композиция некоторых конечных последовательностей соответствий.

1.6. Рассмотрим два множества соответствий F и Φ. В случае, когда область прибытия каждого соответствия из F совпадает с областью отправления каждого соответствия из Φ, определим композицию ΦF множества F на множество Φ как совокупность всех композиций φf, где $f\in F$, $\varphi\in\Phi$. Это определение очевидным образом распространяется на случай некоторых конечных последовательностей множеств соответствий.

1.7. Пусть для конечной последовательности множеств соответствий $H_1, \ldots, H_n$ существует композиция $H_n\ldots H_i\ldots H_1$. Будем говорить, что *множитель H_i допускает существенное расширение*, если для некоторого множества соответствий H_i' имеют место следующие два утверждения:

а) H_i — собственная часть множества H_i';

б) $H_n\ldots H_i\ldots H_1=H_n\ldots H_i'\ldots H_1$.

Каждый множитель композиции, не допускающий существенного расширения, называется *максимальным*. Легко видеть, что любой множитель в композиции можно однозначно расширить до максимального.

1.8. Прямоугольную $(r\times s)$-матрицу

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1s} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_{r1} & \ldots & x_{rs} \end{pmatrix},$$

составленную из элементов произвольного множества X, удобно считать отображением множества $\{1, \ldots, r\}\times\{1, \ldots, s\}$ в X. В дальнейшем нам придется иметь дело также и с усеченными $(r \times s)$-матрицами, т. е. такими матрицами, у которых некоторые места не заполнены. Говоря точнее, усеченная $(r \times s)$-матрица есть такое функциональное соответствие из $\{1, \ldots, r\} \times \{1, \ldots, s\}$ в X, которое отличается от функции. На функциональные соответствия из $\{1, \ldots, r_1\} \times \ldots \times \{1, \ldots, r_n\}$ можно смотреть как на обобщение матриц и усеченных матриц.

§ 2. Г-СТРУКТУРЫ И ФИЗИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

2.1. Пусть D — некоторый класс множеств, в который могут входить как абстрактные множества, т. е. множества без структур, так и множества, наделенные некоторыми структурами, например структурами группы, кольца, поля, декартова произведения, топологического или метрического пространства, гладкого или аналитического многообразия и т. д. Множества из D будем называть *объектами*. При постановке каждой задачи из теории физических структур вводится свой класс объектов.

2.2. Для каждой пары объектов (X, Y) обычно рассматривается не вся совокупность соответствий из X в Y, а только некоторая их часть, обозначаемая символом $H(X, Y)$. Каждый элемент этого множества $H(X, Y)$ будем называть *морфизмом*. Морфизмы, как правило, выбираются с учетом структур объектов. Например, для пары гладких (т. е. принадлежащих классу C^∞) многообразий в морфизмы естественно включить гладкие отображения или гладкие функциональные соответствия.

Выбор морфизмов производится не совсем произвольно, обязательно должны соблюдаться следующие два условия:

а) тождественное отображение 1_X каждого объекта X в себя входит в $H(X, X)$;

б) композиция двух морфизмов (в случае ее существования) является морфизмом.

2.3. Замечание. Классы объектов и морфизмов вместе с операцией композиции морфизмов образуют категорию. Это означает, что выполняются следующие четыре утверждения (аксиомы категории):

С.1. Каждой упорядоченной паре объектов (X, Y) сопоставлено множество морфизмов $H(X, Y)$ так, что каждый морфизм принадлежит $H(X, Y)$ только для одной пары объектов (X, Y).

С.2. Если $f \in H(X, Y)$ и $g \in H(Y, Z)$, то существует единственный элемент множества $H(X, Z)$, называемый *композицией* f и g и обозначаемый символом gf.

С.3. Если заданы $f \in H(X, Y)$, $g \in H(Y, Z)$, $h \in H(Z, W)$, то $(hg)f = h(gf)$.

С.4. Каждому объекту X сопоставлен такой элемент 1_X множества $H(X, X)$, что $f1_X = f$ и $1_X g = g$ для любых $f \in H(X, Y)$ и $g \in H(Y, X)$.

2.4. Зафиксируем пару объектов (A, B) и множество $\Gamma \subset \mathscr{P}(H(A, B))$. Тройка (X, F, Φ), где $X \in D$, $F \subset H(A, X)$, $\Phi \subset H(X, B)$, называется Γ-*пространством* (а пара (F, Φ) — его Γ-*структурой*), если выполняются две аксиомы:

Аксиома 1. $\Phi F \in \Gamma$.

Аксиома 2. Каждый множитель композиции ΦF максимален.

В дальнейшем для краткости часто будем называть Г-пространством множество X, а не тройку (X, F, Φ). Множества A, B и Γ назовем соответственно *входным*, *выходным* и *основным*.

2.5. Будем говорить, что Γ-*пространства* (X, F, Φ) и (X', F', Φ') и их Г-структуры (F, Φ) и (F', Φ') эквивалентны (в записи $X \sim X'$ и $(F, \Phi) \sim (F', \Phi')$), если существуют такие биективные морфизмы λ: $A \to A$, μ: $B \to B$ и ν: $X \to X'$, что справедливы следующие два утверждения:

а) существует биективное отображение F в F', переводящее произвольное $f \in F$ в $\nu f \lambda^{-1}$;

б) существует биективное отображение Φ в Φ', переводящее произвольное $\varphi \in \Phi$ в $\mu\varphi\nu^{-1}$.

Тройка (λ, μ, ν) называется *изоморфизмом* Г-пространств X и X' и их Г-структур (F, Φ) и (F', Φ').

Утверждение. *Существует биективное отображение* ΦF *в* $\Phi' F'$ (*в случае эквивалентности Г-структур* (F, Φ) *и* (F', Φ')), *переводящее произвольное* $h \in \Phi F$ *в* $\mu h \nu^{-1}$.

Доказательство. Подберем для h такие $f \in F$ и $\varphi \in \Phi$, что $h = \varphi f$. Так как

$$\mu h \lambda^{-1} = \mu\varphi f \lambda^{-1} = (\mu\varphi\nu^{-1})(\nu f \lambda^{-1}) \in \Phi' F',$$

то существует отображение τ: $\Phi F \to \Phi' F'$, определяемое формулой $\tau(h) = \mu h \lambda^{-1}$. Зафиксируем теперь произвольный морфизм $h' \in \Phi' F'$ и подберем такие $f' \in F'$ и $\varphi' \in \Phi'$, что $h' = \varphi' f'$. Как и для τ, доказывается существование отображения σ: $\Phi' F' \to \Phi F$, определяемого формулой $\sigma(h') = \mu^{-1} h' \lambda$. Очевидно, что композиции $\sigma\tau$ и $\tau\sigma$ — тождественные отображения, т. е. $\sigma = \tau^{-1}$. Отображение τ биективно, так как оно обратимо.

2.6. Пусть X и X' — объекты, а биективное отображение h: $X \to X'$ и обратное к нему отображение h^{-1}: $X' \to X$ — морфизмы. Тогда каждой Г-структуре (F, Φ), заданной на множестве X, можно единственным образом сопоставить Г-структуру (F', Φ') на множестве X', характеризуемую равенствами $F' = \{h\}F$, $\Phi' = \Phi\{h^{-1}\}$. Легко видеть, что тройка $(1_A, h, 1_B)$ является изоморфизмом Г-структур (F, Φ) и (F', Φ'). Будем говорить, что *Г-структура* (F', Φ') *порождена Г-структурой* (F, Φ) *и отображением* h.

2.7. Г-пространство X и его Г-структура (F, Φ) называются *связными*, если для любых двух точек $x, y \in X$ найдется такое соответствие $f \in F$, что $x, y \in f(A)$.

2.8. Г-пространство X и его Г-структура (F, Φ) называются *отделимыми*, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ найдется такое соответствие $\varphi \in \Phi$, что $x, y \in \varphi^*(B)$ и $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

2.9. Г-пространство (X, F, Φ) называется *физическим пространством* (а пара (F, Φ) — его *физической структурой*) ранга $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, где $n \geqslant 2$ и $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — целые положительные числа, если выполняются следующие условия:

а) $A \subset \{1, \ldots, r_1\} \times \{1, \ldots, r_2\} \times \ldots \times \{1, \ldots, r_n\}$;

б) существуют такие объекты $X_1, \ldots, X_n$, что $X \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$;

в) для того, чтобы соответствие f: $A \to X$ было морфизмом, необходимо и достаточно существование таких морфизмов f_i: $\{1, \ldots, r_i\} \to X_i$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$, что $f(t) = X \cap ((f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_n)(t))$ для любого $t \in A$;

г) $F = H(A, X)$.

Физическое пространство и его физическая структура называются *полными*, если в условиях а) и б) вложения являются равенствами.

Заметим, что из условия в) вытекает, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ множество $\{1, \ldots, r_i\}$ является объектом.

В дальнейшем без дополнительных оговорок будем рассматривать только полные физические пространства и структуры ранга (r, s), где $r \geqslant 2$, $s \geqslant 2$. Для объекта X введем обозначение: $X = \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$.

2.10. Множество $\Phi' \subset \Phi$ называется *базой физической структуры* (F, Φ), если $\Phi F = \Phi' F$. Если база Φ' состоит из единственного соответствия, то это соответствие называется *порождающим*. Часто на порождающее соответствие (в случае, когда оно является отображением) a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$ накладывают следующие естественные условия:

а) если $i, j \in \mathfrak{M}$ и $i \neq j$, то существует такой элемент $\alpha \in \mathfrak{N}$, что $a(i, \alpha) \neq a(j, \alpha)$;

б) если $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \neq \beta$, то существует такой элемент $i \in \mathfrak{M}$, что $a(i, \alpha) \neq a(j, \beta)$;

2.11. Приведем несколько примеров основных множеств. Для простоты будем считать, что выходное множество B является вещественной прямой $\mathbf{R}$, а множество морфизмов $H(A, B)$ состоит из всех отображений A в B. В этом случае множество $H(A, B)$ естественным образом наделяется структурой rs-мерного арифметического пространства $\mathbf{R}^{rs}$, так как оно является множеством всех вещественных прямоугольных $(r \times s)$-матриц. Основное множество Γ можно задать, например, следующими способами:

Γ — множество всех (гладких, аналитических или топологических $(rs-1)$-мерных многообразий;

Γ — множество всех подмножеств пространства $H(A, B)$, имеющих меру нуль;

Γ — множество всех нигде не плотных подмножеств пространства $H(A, B)$;

Γ — множество всех собственных замкнутых подмножеств пространства $H(A, B)$;

Γ — множество всех таких множеств $\Gamma' \subset H(A, B)$, что пересечение некоторой открытой области $U \subset H(A, B)$ с Γ' диффеоморфно R^{rs-1};

Γ — множество всех таких множеств $\Gamma' \subset H(A, B)$, характеризуемых функцией h: $B^{rs-1} \to B$, удовлетворяющей утверждению: матрица

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1s} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_{r1} & \dots & x_{rs} \end{pmatrix}$$

входит в Γ', если и только если

$$x_{11} = h(x_{12}, \dots, x_{1s}, x_{21}, \dots, x_{rs}).$$

Замечание. В последнем условии мы можем считать B произвольным множеством.

§ 3. ФИЗИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ РАНГА (2.2)

3.1. В этом параграфе будут рассматриваться только физические пространства X и их физические структуры (F, Φ), удовлетворяющие условиям:

а) входное множество $A = \{1, 2\} \times \{1, 2\}$;

б) выходным множеством является произвольное непустое множество B;

в) морфизмами могут быть только отображения;

г) каждое отображение $\{1, 2\}$ в B есть морфизм;

д) $X = B \times B$;

е) для того, чтобы отображение f: $A \to X$ было морфизмом, необходимо и достаточно существование таких морфизмов f_1: $\{1, 2\} \to B$ и f_2: $\{1, 2\} \to B$, что $f(m, n) = (f_1(m), f_2(n))$ для любой пары $(m, n) \in A$;

ж) $F = H(A, X)$;

з) для того, чтобы множество $\Gamma' \subset H(A, B)$ входило как элемент в Γ, необходимо и достаточно существование такой функции h: $B^3 \to B$, для которой верно утверждение: матрица

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

входит в Γ', если и только если $x = h(y, z, w)$;

и) существует порождающее отображение a: $B \times B \to B$, т. е. $\Phi F = \{a\}F$;

к) для любой пары $(x, y) \in B^2$ найдется такая единственная пара $(z, w) \in B^2$, что $a(z, x) = y$, $a(x, w) = y$.

Последнее условие означает, что B вместе с бинарной операцией a образуют квазигруппу. В дальнейшем нам потребуются только начальные сведения о квазигруппах, их можно найти, например, в [5].

3.2. Обозначим через K' множество всех физических структур, удовлетворяющих условиям п. 3.1, а через K — фактор-множество множества K' относительно эквивалентности, определенной в 2.5. Обозначим через G' множество всех групповых структур g: $B \times B \to B$, а через G — множество всех классов изоморфных групповых структур, заданных на множестве B.

В этом параграфе мы построим биективное отображение $\varkappa$: $G \to K$. Другими словами, мы докажем, что задание физической структуры, удовлетворяющей условиям 3.1, определяет (с точностью до изоморфизма) групповую структуру на B, а задание групповой структуры на B определяет физическую структуру, удовлетворяющую условиям 3.1.

3.3. Определим вспомогательное отображение $\varkappa$: $G' \to K'$. Пусть отображение g: $B \times B \to B$ входит в G' и $g(x, y) = xy$ для любых $x, y \in B$. Положим что физическая структура $\varkappa'(g) = (F, \Phi)$ задается следующим образом:

а) $F = H(A, X)$;

б) для того, чтобы отображение φ: $X \to B$ входило в Φ, необходимо и достаточно существование двух таких функций φ_1 и φ_2, отображающих B в B, что $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ для любых $x, y \in B$.

Докажем корректность определения $\varkappa'$. Для этого установим, что пара (F, Φ) есть Γ-структура. Проверку условий п. 3.1 опустим, так как она не представляет трудностей. Определим множество $\Gamma' \subset H(A, B)$ следующим образом: для того, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

входила в Γ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $x = yw^{-1}z$. Ясно, что Γ' есть элемент множества Γ.

Убедимся, что $\Phi\Gamma' \subset F'$. Подберем для произвольной функции $\varphi \in \Phi$ две функции φ_1 и φ_2, отображающие B в себя и удовлетворяющие равенству $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ для любых $x, y \in B$. Так как для произвольной матрицы

$$f = \begin{pmatrix} (x, y) & (x, z) \\ (w, y) & (w, z) \end{pmatrix} \in F$$

имеем

$$\varphi f = \begin{pmatrix} \varphi_1(x)\varphi_2(y) & \varphi_1(x)\varphi_2(z) \\ \varphi_1(w)\varphi_2(y) & \varphi_1(w)\varphi_2(z) \end{pmatrix}$$

и $\varphi_1(x)\varphi_2(y) = \varphi_1(x)\varphi_2(z)(\varphi_1(w)\varphi_2(z))^{-1}\varphi_1(w)\varphi_2(y)$, то $\varphi f \in \Gamma'$.

Теперь докажем вложение $\Gamma' \subset \Phi F$ и тем самым завершим доказательство равенства $\Phi F = \Gamma'$, означающего справедливость аксиомы 1 п. 2.4. Пусть матрица

$$\gamma = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

входит в Γ', т. е. $x = yw^{-1}z$. Зафиксируем в Φ и F соответственно два отображения: групповую операцию g и матрицу

$$f = \begin{pmatrix} (yw^{-1}, z) & (yw^{-1}, w) \\ (\varepsilon, z) & (\varepsilon, w) \end{pmatrix},$$

где ε — единица группы B. Так как $gf = \gamma$ и γ — произвольный элемент из Γ' то $\Gamma' \subset \Phi F$.

Осталось проверить справедливость аксиомы 2 для пары (F, Φ). Множитель F максимален в композиции ΦF, так как F состоит из всех возможных морфизмов из A в X. Зафиксируем произвольно функцию φ: $X \to B$, удовлетворяющую условию:

если $f \in F$, то $\varphi f \in \Gamma'$.

Определим две функции φ_1 и φ_2, отображающие B в себя, равенствами $\varphi_1(u) = \varphi(u, \varepsilon)$, $\varphi_2(u) = (\varphi(\varepsilon, \varepsilon))^{-1}\varphi(\varepsilon, u)$. Для любых элементов x, y группы B матрица

$$f = \begin{pmatrix} (x, y) & (x, \varepsilon) \\ (\varepsilon, y) & (\varepsilon, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

принадлежит F. Тогда матрица

$$\varphi f = \begin{pmatrix} \varphi(x, y) & \varphi(x, \varepsilon) \\ \varphi(\varepsilon, y) & \varphi(\varepsilon, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

принадлежит Γ'. Этот факт означает, что $\varphi(x, y) = \varphi(x, \varepsilon)(\varphi(\varepsilon, \varepsilon))^{-1} \times \varphi(\varepsilon, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$, т. е. $\varphi \in \Phi$.

3.4. Классы эквивалентности, содержащие групповую операцию $g \in G'$ и физическую структуру $(F, \Phi) \in K'$, обозначим соответственно через $[g]$ и $[(F, \Phi)]$. Определим отображение $\varkappa\colon G \to K$ формулой $\varkappa([g]) = [\varkappa'(g)]$. Докажем корректность этого определения. Достаточно установить, что из изоморфизма групповых структур g и g' (в записи $g \sim g'$) вытекает эквивалентность физических структур $(F, \Phi) = \varkappa'(g)$ и $(F', \Phi') = \varkappa'(g')$ (в записи $(F, \Phi) \sim (F'\ \Phi')$). Легко видеть справедливость утверждений а) и б) п. 2.5, если положить $\lambda = 1_A$, $\nu = \mu \times \mu$, $X = X' = B \times B$.

3.5.. *Отображение $\varkappa$ сюръективно.*

Доказательство. Пусть (F, Φ) — произвольная физическая структура, удовлетворяющая всем условиям п. 3.1. Обозначим через Φ_* множество всех отображений $a \in \Phi$, удовлетворяющих условиям и), к). Ясно, что $\Phi_* \neq \varnothing$ и каждая функция из Φ_* является квазигрупповой операцией на множестве B.

(α) Покажем, что любые две квазигрупповые операции $a, \varphi \in \Phi_*$ изотропны. Зафиксируем произвольный элемент $\varepsilon \in B$ и определим биективные преобразования μ и ν множества B равенствами $a(\varepsilon, y) = \varphi(\varepsilon, \nu(y))$, $a(x, \varepsilon) = \varphi(\mu(x), \nu(\varepsilon))$. Ясно, что $\mu(\varepsilon) = \varepsilon$. Пусть

$$f = \begin{pmatrix} (x, y) & (x, \varepsilon) \\ (\varepsilon, y) & (\varepsilon, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

для произвольных $x, y \in B$. Так как φ, a и композиция $\varphi\{\mu \times \nu\}$ входят в Φ, а f входит в F, то φf, af и $\varphi\{\mu \times \nu\} f$ входят в $\Gamma' = \Phi F$. Из вложений

$$af = \begin{pmatrix} a(x, y) & a(x, \varepsilon) \\ a(\varepsilon, y) & a(\varepsilon, \varepsilon) \end{pmatrix} \in \Gamma',$$

$$\varphi\{\mu \times \nu\} f = \begin{pmatrix} \varphi(\mu(x), \nu(y)) & \varphi(\mu(x), \nu(\varepsilon)) \\ \varphi(\mu(\varepsilon), \nu(y)) & \varphi(\mu(\varepsilon), \nu(\varepsilon)) \end{pmatrix} \in \Gamma'$$

в силу условия з) п. 3.1 и определений преобразований μ и ν вытекает

$$a(x, y) = \varphi(\mu(x), \nu(y)) = h(a(x, \varepsilon), a(\varepsilon, y), a(\varepsilon, \varepsilon)).$$

Предпоследнее равенство означает изотопность квазигрупповых операций a и φ.

(β) Квазигрупповая операция $\psi\colon B \times B \to B$ называется *структурой лупы*, а соответствующая квазигруппа — *лупой*, если существует такой элемент $\varepsilon \in B$ (называемый *единицей лупы B*), что $\psi(x, \varepsilon) = \psi(\varepsilon, x) = x$ для любого $x \in B$. Докажем, что в Φ_* существуют структуры лупы.

Выберем произвольно функцию $a \in \Phi_*$, элемент $\varepsilon \in B$ и зададим два биективных преобразования μ и ν множества B так, чтобы выполнялись равенства $a(\varepsilon, \nu(y)) = y$, $a(\mu(x), \nu(\varepsilon)) = x$ для любых $x, y \in B$. Ясно, что $\mu(\varepsilon) = \varepsilon$. Нетрудно видеть, что композиция $a(\mu \times \nu)$ входит в Φ_* и является структурой лупы, в которой роль единицы играет элемент ε.

(γ) Докажем, что каждая структура лупы $a \in \Phi_*$ ассоциативна, т. е. является групповой структурой. Так как при этом выполняется равенство $\varkappa([a]) = [(F, \Phi)]$, то тем самым будет закончено доказательство сюръективности отображения $\varkappa$. Введем обозначение $a(x, y) = xy$ для любых $x, y \in B$. Зафиксируем произвольно тройку (x, y, z) элементов лупы B и две матрицы

$$f = \begin{pmatrix} (xy, z) & (xy, \varepsilon) \\ (y, z) & (y, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} (x, yz) & (x, y) \\ (\varepsilon, yz) & (\varepsilon, y) \end{pmatrix}$$

из множества F. Так как матрицы

$$af = \begin{pmatrix} (xy)z & xy \\ yz & y \end{pmatrix}, \quad ag = \begin{pmatrix} x(yz) & xy \\ yz & y \end{pmatrix}$$

входят в $\Gamma' \in \Gamma$, то в силу условия з) п. 3.1 имеем $(xy)z = x(yz) = h(xy, yz, y)$.

3.6. *Отображение $\varkappa$ биективно.*

Доказательство. Вследствие 3.5 достаточно установить инъективность $\varkappa$. Пусть φ, $a \in G'$ и $\varkappa([a]) = \varkappa([\varphi]) = [(F, \Phi)]$. Без ограничения общности будем считать, что $\varkappa'(a) = (F, \Phi)$. Положим $\varkappa'(\varphi) = (F', \Phi')$. Очевидно, $F' = F$. Так как физические структуры (F, Φ) и (F', Φ') эквивалентны, то существует изоморфизм $(\lambda, \mu, \nu) = (\nu_1 \times \nu_2)$, удовлетворяющий условиям а) и б) п. 2.5. По определению изотопии групповая операция φ изотопна квазигрупповой операции $\mu^{-1}\varphi\nu$, которая изотопна групповой операции a по предложению (α) п. 3.5. Таким образом, мы пришли к выводу: групповые операции a и φ изотопны, что в силу теоремы Алберта [5] означает их изоморфность.

3.7. Интересно выяснить строение отделимых (см. определение в 2.8) физических структур, удовлетворяющих только условиям а) — з) п. 3.1. Пока мы не имеем доказательства, но предполагаем, что и в этом случае физическая структура определяет (с точностью до изоморфизма) групповую операцию на множестве B.

§ 4. ФИЗИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ РАНГА (r, s)

Здесь приводятся некоторые конкретные примеры физических структур, взятые из дополнения к книге [1], написанного Г. Г. Михайличенко.

4.1. Пусть (r, s) — пара целых чисел, каждое из которых больше единицы. В этом параграфе рассматриваются только такие физические пространства X и их физические структуры (F, Φ), которые удовлетворяют следующим условиям:

а) входное множество A имеет вид $\{1, \ldots, r\} \times \{1, \ldots, s\}$;

б) выходным множеством является вещественная прямая $\mathbf{R}$;

в) морфизмами могут быть только функциональные соответствия;

г) существуют такие два объекта $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, что $X = \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$;

д) для того, чтобы соответствие из $\{1, \ldots, r\}$ в $\mathfrak{M}$ или из $\{1, \ldots, s\}$ в $\mathfrak{N}$ было морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы оно было функцией;

е) для того, чтобы соответствие $f\colon A \to X$ было морфизмом, необходимо и достаточно существование таких функций $f_1\colon \{1, \ldots, r\} \to \mathfrak{M}$, $f_2\colon \{1, \ldots, s\} \to \mathfrak{N}$, что $f = f_1 \times f_2$;

ж) $F = H(A, X)$;

з) для того, чтобы множество $\Gamma' \subset H(A, B)$ входило как элемент в основное множество Γ, необходимо и достаточно существование такой гладкой (т. е. принадлежащей классу C^∞) функции $h\colon U \to \mathbf{R}$, где U — открытое подмножество пространства $\mathbf{R}^{rs-1}$, для которой верно утверждение: если вещественная матрица

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{r1} & \ldots & x_{rs} \end{pmatrix}$$

входит в Γ' и $(x_{12}, \ldots, x_{1s}, x_{21}, \ldots, x_{rs}) \in U$, то $x_{11} = h(x_{12}, \ldots, x_{1s}, x_{21}, \ldots, x_{rs})$;

и) существует порождающее соответствие a: $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to\mathbf{R}$, т. е. $\Phi F=\{a\}F$;

к) если $i, j\in\mathfrak{M}$ и $i\neq j$, то существует такой элемент $\alpha\in\mathfrak{N}$, что $a(i,\alpha)\neq a(j,\alpha)$ и $a(i,\alpha)\neq\varnothing$, $a(j,\alpha)\neq\varnothing$;

л) если α, $\beta\in\mathfrak{N}$ и $\alpha\neq\beta$, то существует такой элемент $i\in\mathfrak{M}$, что $a(i,\alpha)\neq a(i,\beta)$ и $a(i,\alpha)\neq\varnothing$, $a(i,\beta)\neq\varnothing$.

Замечание 1. Последние два условия вытекают из условия к) п. 3.1, если считать, что $B=\mathfrak{M}=\mathfrak{N}=\mathbf{R}$.

Замечание 2. В дальнейшем, без специальных оговорок, будем предполагать что каждое физическое пространство (X, F, Φ) удовлетворяет всем условиям п. 4.1.

4.2. Пусть $r=s=2$; $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}=\mathbf{R}$; множество U состоит из всех троек $(y, z, w)\in\mathbf{R}^3$, удовлетворяющих неравенству $w\neq 0$; соответствие φ: $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ входит в Φ, если и только если оно является функцией и существуют такие функции φ_1 и φ_2, отображающие $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, что $\varphi(x, y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ для любых $x, y\in\mathbf{R}$. Нетрудно показать, что пара $(F=H(A, X), \Phi)$ — физическая структура ранга (2.2). Ясно что множество $\Gamma'=\Phi F$ состоит из всех вырожденных (2×2)-матриц.

4.3. Пусть $r=s=2$; $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}=\mathbf{R}$; $U=\mathbf{R}^3$; соответствие φ: $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ входит в Φ, если и только если оно является функцией и существуют такие функции φ_1 и φ_2, отображающие $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, что $\varphi(x, y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(y)$ для любых $x, y\in\mathbf{R}$. Можно показать что пара $(F=H(A, X), \Phi)$ — физическая структура ранга $(2, 2)$, а множество $\Gamma'=\Phi F$ состоит из всех (2×2)-матриц

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

удовлетворяющих равенству $x+w=y+z$.

4.4. Пусть $r=3$, $s=2$, $\mathfrak{M}=\mathbf{R}$, $\mathfrak{N}=\mathbf{R}^2$; множество U состоит из всех пятерок

$$(x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32})\in\mathbf{R}^5,$$

удовлетворяющих неравенству $x_{22}\neq x_{32}$; соответствие φ: $X=\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ входит в Φ, если и только если оно является функцией и существуют такие три функции λ: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, u: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, v: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, что $\varphi(x; \xi, \eta)=\lambda(x)u(\xi, \eta)+v(\xi, \eta)$ для любых вещественных чисел x, ξ, η. Можно показать, что пара $(F=H(A, X), \Phi)$ — физическая структура ранга $(3, 2)$, а множество $\Gamma'=\Phi F$ состоит из всех таких вещественных прямоугольных (3×2)-матриц

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix},$$

что

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & 1 \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{vmatrix}=0.$$

4.5. Пусть $r=4$, $s=2$; $\mathfrak{M}=\mathbf{R}$, $\mathfrak{N}=\mathbf{R}^3$; множество U состоит из всех семерок

$$(x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}, x_{41}, x_{42})\in\mathbf{R}^7,$$

удовлетворяющих неравенству

$$\begin{vmatrix} x_{22} & (x_{21}x_{22}) & 1 \\ x_{32} & (x_{31}x_{32}) & 1 \\ x_{42} & (x_{41}x_{42}) & 1 \end{vmatrix}+x_{12}\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & 1 \\ x_{31} & x_{32} & 1 \\ x_{41} & x_{42} & 1 \end{vmatrix}\neq 0;$$

соответствие φ: $X = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ входит в Φ, если и только если существуют такие три функции u, v, w, отображающие $\mathbf{R}^3$ в $\mathbf{R}$, и функция λ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, что выполняются следующие три условия:

а) если $\lambda(x) + w(\xi, \eta, \zeta) \neq 0$, то

$$\varphi(x; \xi, \eta, \zeta) = \frac{\lambda(x)\, u(\xi, \eta, \zeta) + v(\xi, \eta, \zeta)}{\lambda(x) + w(\xi, \eta, \zeta)};$$

б) если $\lambda(x) + w(\xi, \eta, \zeta) = 0$, $\lambda(x) u(\xi, \eta, \zeta) + v(\xi, \eta, \zeta) \neq 0$, то $\varphi(x; \xi, \eta, \zeta) = \varnothing$;

в) если $\lambda(x) + w(\xi, \eta, \zeta) = 0$, $\lambda(x) u(\xi, \eta, \zeta) + x(\xi, \eta, \zeta) = 0$, то $\varphi(x; \xi, \eta, \zeta) \in \mathbf{R}$.

Можно показать, что пара $(F = H(A, X), \Phi)$ — физическая структура ранга $(4, 2)$, а множество $\Gamma' = \Phi F$ состоит из всех матриц

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющих равенству

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & (x_{11}x_{12}) & 1 \\ x_{21} & x_{22} & (x_{21}x_{22}) & 1 \\ x_{31} & x_{32} & (x_{31}x_{32}) & 1 \\ x_{41} & x_{42} & (x_{41}x_{42}) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4.6. Пусть n — целое число, $n \geqslant 2$, $r = s = n$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = \mathbf{R}^{n-1}$, множество U состоит из всех конечных последовательностей

$$(x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{nn}) \in \mathbf{R}^{n^2-1},$$

удовлетворяющих неравенству

$$\begin{vmatrix} x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

Φ состоит из функций, причем функция φ: $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$ входит в Φ, если и только если существуют такие функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$, отображающие $\mathbf{R}^{n-1}$ в $\mathbf{R}$, что

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(x_1, \ldots, x_{n-1})\, \psi_i(y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

Можно показать, что пара $(F = H(A, X), \Phi)$ является физической структурой ранга (n, n), а множество $\Gamma' = \Phi F$ состоит из всех вырожденных вещественных $(n \times n)$-матриц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кулаков Ю. И.** Элементы теории физических структур // Новосибирский госуниверситет.— Новосибирск, 1968.— 226 с.
2. **Владимиров Ю. С.** Биспиноры и физическая структура ранга (3, 3) // Методологические проблемы информационно-логических систем.— Новосибирск, 1988. Вычислительные системы. Вып. 125.— С. 42—60.
3. **Владимиров Ю. С.** Описание взаимодействий в рамках теории бинарных физических структур // Там же.— С. 61—87.
4. **Владимиров Ю. С.** Пространство — время: явные и скрытые размерности.— М.: Наука, 1989.— 191 с.
5. **Белоусов В. Д.** Основы теории квазигрупп и луп.— М.: Наука, 1967.— 224 с.