Остается заметить, что условие (3.4) можно опустить. Действительно, в случае $M \geqslant \varepsilon/2$ при нарушении неравенства (3.4) правая часть (3.5) будет больше 1. В случае $M < \varepsilon/2$, как уже отмечалось, будет $F_{k,\varepsilon} = \varnothing$, так что в обоих случаях оценка (3.5) справедлива для любого $k \geqslant 3$, независимо от того, выполнено условие (3.4) или нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Nelson E.** Radically elementary probability theory.— Princeton University Press, 1987.— 98 p.— (Annals of Mathematics Studies, n°117).
2. **Nelson E.** Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc.— 1977.— V. 83, N 6.— P. 1165—1198.
3. **Robinson A.** Non-standard analysis.— Amsterdam: North-Holland, 1966.— 293 p.— (Studies in logic and the foundations of mathematics).
4. **Birkhoff G. D.** Proof of the ergodic theorem // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1931.— V. 17.— P. 656—660.
5. **Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.** Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.— 384 с.
6. **Рохлин В. А.** Избранные вопросы метрической теории динамических систем // Успехи мат. наук.— 1949.— Т. 4, вып. 2(30).— С. 57—128.
7. **Халмош П.** Лекции по эргодической теории: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1959.— 147 с.
8. **Качуровский А. Г.** Два предела в эргодической теореме Биркгофа — Хинчина.— Новосибирск, 1990.— 42 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 9).

А. Г. КУСРАЕВ, С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ K-ПРОСТРАНСТВ

А. Д. Александрову к его 80-летию

Общепризнанным фактом является особая роль тридцатых годов двадцатого столетия в развитии современной науки. В эти годы проявилась наметившаяся на рубеже веков тенденция к коренной перестройке математики, приведшая к созданию ряда новых математических дисциплин и, прежде всего оформлению функционального анализа. В последнее время стало осознаваться и специфическое место семидесятых годов, в которые произошли существенные перемены как в объеме, так и в существе математических теорий. В указанный период отмечается качественный скачок в уровне понимания взаимосвязей и взаимозависимостей в математических дисциплинах, происходят крупные продвижения, связанные как свыработкой новых синтетических подходов, так и с решением глубоких проблем, долго неподдававшихся решению.

Упомянутые процессы коснулись и теории упорядоченных векторных пространств — одного из актуальных и привлекательных разделов функционального анализа. Это направление, возникшее на рубеже тридцатых годов под влиянием работ Ф. Рисса, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др., переживает сейчас известный период обновления, связанный с освоением математических идей, относящихся к нестандартным моделям теории множеств. Булевозначные интерпретации, приобретшие популярность в связи с окончательным решением проблемы континуума, данным П. Дж. Коэном, открыли новые возможности в реализации эвристического принципа переноса Л. В. Канторовича в теории K-пространств.

Развитие инфинитезимальных методов, вновь легитимизированное нестандартным анализом А. Робинсона, обосновало логическую мечту Г. В. Лейбница и открыло перспективы общей монадологии векторных решеток. Новые нестандартные методы в теории K-пространств, находятся в процессе становления.

Расширяя известные строки Н. С. Гумилева [15, с. 309], можно сказать, что в настоящее время K-пространства «...сбрасывают кожи, чтоб душа старела и росла...». Многие возникающие лакуны еще не заполнены, и не только в связи с отсутствием должного понимания, но и просто из-за недолгого периода разработки соответствующих проблем. В то же время ряд принципиальных вопросов ждет своего осмысления и привлечения новых идей.

Цель настоящей работы — представить широкому кругу специалистов, интересующихся методами теории упорядоченных векторных пространств, обзор исследований по адаптации аппарата нестандартных моделей теории множеств для изучения K-пространств и классов действующих в них линейных операторов.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

В этой главе собраны необходимые для дальнейшего сведения о формальных теориях множеств, используемых в современных работах по K-пространствам. Прежде всего речь идет о классической аксиоматике Цермело — Френкеля. Помимо этого, освещены булевозначные модели, восходящие к работам Д. Скотта, Р. Соловея и П. Вопенки. Кроме того, мы представляем один из наиболее сильных и удачных вариантов теории внешних множеств, предложенный недавно Т. Каваи и широко применяемый в современном инфинитезимальном анализе.

1.1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ ЦЕРМЕЛО — ФРЕНКЕЛЯ

В качестве аксиоматического обоснования математики в настоящее время широко используется теория множеств Цермело — Френкеля, сокращенно ZF. Напомним вкратце некоторые ее понятия и введем необходимые обозначения. Подробности можно найти в [21, 78].

1.1.1. Язык теории множеств ZF использует следующие символы (совокупность которых называют алфавитом ZF): символы переменных x, y, z, ...; скобки (,); пропозициональные связки (= знаки алгебры высказываний) $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\urcorner$; кванторы $\forall$, $\exists$; знак равенства $=$ и символ специального двуместного предиката $\in$. Содержательно область изменения переменных теории ZF мыслят как мир — универсум — множеств. Вместо $\in(x, y)$ пишут $x \in y$ и говорят, что x — элемент y.

1.1.2. Формулы теории ZF определяются обычной рекурсивной процедурой. Иначе говоря, формулы ZF — это конечные тексты, получающиеся из атомарных формул вида $x = y$ и $x \in y$, где x, y — переменные ZF, с помощью разумной расстановки скобок, кванторов и пропозициональных связок. При этом теория ZF — это наименьшее множество формул, содержащее аксиомы ZF и замкнутое относительно правил вывода (см. ниже 1.1.4).

1.1.3. При работе с ZF для удобства привлекаются широко распространенные в математике сокращения. Вот некоторые из них:

$$\bigcup x := \{z\colon\ (\exists y \in x)\, z \in y\};$$
$$\bigcap x := \{z\colon\ (\forall y \in x)\, z \in y\};$$
$$x \subset y := (\forall z)\,(z \in x \to z \in y);$$
$$\mathscr{P}(x) := \{z\colon\ z \subset x\} := \text{класс всех подмножеств } x;$$
$$\mathbf{V} := \{x\colon\ x = x\} := \text{класс всех множеств};$$
$$A \in \mathbf{V} := \text{«класс } A \text{ является множеством»};$$
$$f\colon X \to Y := \text{«} f \text{ есть функция из } X \text{ в } Y\text{»};$$
$$\operatorname{dom}(f) := \text{область определения } f;$$
$$\operatorname{im}(f) := \text{область значения } f.$$

1.1.4. В теории множеств ZF приняты обычные аксиомы и правила вывода теорий первого порядка с равенством, фиксирующие стандартные способы классических умозаключений (силлогизмы, исключенное третье, modus ponens, обобщение и т. п.). Помимо этого, допущены шесть специальных или собственных аксиом (записанные с общепринятыми сокращениями, см. 1.1.3):

(1) Аксиома экстенсивности:

$$(\forall x)(\forall y)(x \subset y \wedge y \subset x \to x = y).$$

(2) Аксиома объединения: $(\forall x) \cup x \in \mathbf{V}$.

(3) Аксиома множества подмножеств: $(\forall x) \mathscr{P}(x) \in \mathbf{V}$.

(4) Схема аксиом подстановки:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \to y = z) \to (\forall a)(\{v\colon (\exists u \in a)\, \varphi(u, v)\} \in \mathbf{V}).$$

(5) Аксиома фундирования:

$$(\forall x)\,(x \neq \varnothing \to (\exists y \in x)\,(y \cap x = \varnothing)).$$

(6) Аксиома бесконечности:

$$(\exists \omega)(\varnothing \in \omega) \wedge (\forall x \in \omega)\, x \cup \{x\} \in \omega.$$

Теория ZFC (Цермело — Френкеля с аксиомой выбора) получается из ZF добавлением еще следующей аксиомы.

(7) Аксиома выбора:

$$(\forall F)(\forall x)(\forall y)(x \neq \varnothing \wedge F\colon\ x \to \mathscr{P}(y)) \to ((\exists f)(f\colon\ x \to y) \wedge (\forall z \in x)\, f(z) \in F(z)).$$

1.1.5. Теория множеств Цермело Z получается из ZFC путем удаления аксиомы фундирования 1.1.4 (5) и замены схемы аксиом подстановки 1.1.4 (4) следующими ее следствиями:

(1) схема аксиом выделения:

$$(\forall x)\{y \in x : \psi(y)\} \in \mathbf{V},$$

где ψ — формула ZF;

(2) Аксиома пары: $(\forall x)(\forall y)\{x, y\} \in \mathbf{V}$.

Тем самым специальные аксиомы теории Z — аксиомы 1.1.4 (1—3, 6, 7), 1.1.5 (1, 2).

Итак, теории Z, ZF и ZFC имеют один и тот же язык, одни и те же логические аксиомы и отличаются лишь набором специальных аксиом.

1.1.6. Примечания.

(1) Теория множеств Цермело — Френкеля несколько ограничивает математика-«филистера» аксиомой фундирования, по сути, предложенной Дж. фон Нейманом в 1925 г. В то же время именно она обеспечивает фундамент общепринятого теоретико-множественного взгляда на мир множеств как на «универсум фон Неймана», иерархически вырастающий из пустого множества — математического проатома.

(2) Аксиоматика Цермело — Френкеля не закрыла пути поиска альтернативных программ теоретико-множественного обоснования. По этому поводу см., в частности, [7].

1.2. БУЛЕВОЗНАЧНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Приведем здесь эскизное изложение теории булевозначных моделей теории множеств. Полное изложение имеется в [27, 43, 79].

1.2.1. Пусть $\mathbf{B}$ — фиксированная полная булева алгебра. *Булевозначной интерпретацией n-местного предиката P на классе X* называют отображение $R : X^n \to \mathbf{B}$. Предположим, что $\mathscr{L}$ — язык первого порядка с предикатами $P_0, P_1, \ldots, P_n$, а $R_0, R_1, \ldots, R_n$ — фиксированные булевозначные интерпретации этих предикатов на классе X. Для формулы $\varphi(u_1, \ldots, u_m)$ языка $\mathscr{L}$ и элементов $x_1, \ldots, x_m \in X$ обычной рекурсией по длине φ определяется *оценка* (*истинности*) $[\![\varphi(x_1, \ldots, x_m)]\!] \in \mathbf{B}$. Для атомных формул полагают

$$[\![P_k(x_1, \ldots, x_n)]\!] := R_k(x_1, \ldots, x_n).$$

На шагах индукции применяют правила:

$$[\![\varphi \vee \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!],$$
$$[\![\varphi \wedge \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!],$$
$$[\![\varphi \to \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\psi]\!],$$
$$[\![\neg \varphi]\!] := [\![\varphi]\!]^*,$$
$$[\![(\forall x)\,\varphi]\!] := \bigwedge_{x \in X} [\![\varphi(x)]\!],$$
$$[\![(\exists x)\,\varphi]\!] := \bigvee_{x \in X} [\![\varphi(x)]\!],$$

где в правых частях равенств знаки $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $(\cdot)^*$, $\bigvee$, $\bigwedge$ обозначают булевы операции в $\mathbf{B}$ $(a \Rightarrow b := a^* \vee b)$.

1.2.2. Говорят, что утверждение $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$, где $x_1, \ldots, x_m \in X$, а $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ — формула, *истинно* (*верно*, *справедливо* и т. п.) в системе $\mathfrak{X} := (X, R_0, \ldots, R_n)$, и пишут $\mathfrak{X} \vDash \varphi(x_1, \ldots, x_m)$, если $[\![\varphi(x_1, \ldots$ $\ldots, x_m)]\!] = 1$. Все логически истинные утверждения верны в $\mathfrak{X}$. Если предикат P_0 есть равенство, то требуют, чтобы в $\mathbf{B}$-системе $\mathfrak{X} := (X, =, R_1, \ldots, R_n)$ выполнялись аксиомы равенства. При выполнении этого требования в $\mathbf{B}$-системе $\mathfrak{X}$ будут справедливы все логически истинные предложения логики первого порядка с равенством, выразимые в языке $\mathscr{L} := \{=, P_1, \ldots, P_m\}$.

1.2.3. Рассмотрим теперь булевозначную интерпретацию на классе X языка теории множеств ZFC ($\mathscr{L} := \{=, \in\}$), т. е. языка первого порядка с двумя двуместными предикатами $=$ и $\in$. Интерпретации этих предикатов обозначим через $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ соответственно. Таким образом, $[\![\cdot = \cdot]\!]$, $[\![\cdot \in \cdot]\!]$: $X \times X \to \mathbf{B}$, причем

$$[\![=(x, y)]\!] = [\![x = y]\!], \ [\![\in(x, y)]\!] = [\![x \in y]\!] \quad (x, y \in X).$$

Наша ближайшая цель — охарактеризовать $\mathbf{B}$-системы $\mathfrak{X} := (X, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$, являющиеся моделями теории ZFC, т. е. такие, что $\mathfrak{X} \vDash$ ZFC. Последнее равносильно тому, что в $\mathfrak{X}$ выполняются все аксиомы ZFC. Так, например, согласно правилам 1.1.1 справедливость аксиомы экстенсиональности 1.1.4 (1) означает, что для любых $x, y \in X$ верно

$$[\![x = y]\!] = \bigwedge_{x \in X} [\![z \in x]\!] \Leftrightarrow [\![z \in y]\!],$$

где $a \Leftrightarrow b := (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ $(a, b \in \mathbf{B})$.

1.2.4. $\mathbf{B}$-систему $\mathfrak{X}$ называют *отделимой*, если для любых элементов $x, y \in X$ соотношение $[\![x = y]\!] = 1$ влечет $x = y$. Произвольную $\mathbf{B}$-систему $\mathfrak{X}$ можно преобразовать в отделимую путем факторизации по отношению эквивалентности $\sim := \{(x, y) \in X^2 \colon [\![x = y]\!] = 1\}$ (фактор-класс вводится с помощью хорошо известного приема Рассела — Скотта, см. [27]). Говорят, что $\mathfrak{X}$ *изоморфна* $\mathbf{B}$-*системе* $\mathfrak{X}' := (X', [\![\cdot = \cdot]\!]', [\![\cdot \in \cdot]\!]')$, если существует биекция $\beta \colon X \to X'$, для которой $[\![x = y]\!] = [\![\beta x = \beta y]\!]$, $[\![x \in y]\!] = [\![\beta x \in \beta y]\!]$ при всех $x, y \in X$.

1.2.5. Теорема. *Существует единственная с точностью до изоморфизма* $\mathbf{B}$-*система* $\mathfrak{X}$, *удовлетворяющая следующим требованиям*:

(1) $\mathfrak{X}$ — *отделимая* $\mathbf{B}$-*система* (*см.* 1.1.4);

(2) *аксиомы равенства истины в* $\mathfrak{X}$;

(3) *аксиомы экстенсиональности* 1.1.4 (1) *и фундирования* 1.1.4 (5) *истинны в* $\mathfrak{X}$ (*см.* 1.1.3);

(4) *если функция* f: $\mathrm{dom}(f) \to \mathbf{B}$ *такова, что* $\mathrm{dom}(f) \in \mathbf{V}$ *и* $\mathrm{dom}(f) \subset X$, *то существует* $x \in X$ *такой, что*

$$[\![y \in x]\!] = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}(f)} f(z) \wedge [\![z = y]\!] \quad (y \in X);$$

(5) *если* $x \in X$, *то существует функция* $f\colon \operatorname{dom}(f) \to \mathbf{B}$ *такая, что* $\operatorname{dom}(f) \in \mathbf{V}$, $\operatorname{dom}(f) \subset X$ *и выполнено равенство из* (4) *для каждого* $y \in X$.

1.2.6. B-систему, удовлетворяющую требованиям 1.1.5 (1—5), называют *булевозначной моделью* теории множеств и обозначают символом $V^{(\mathbf{B})} := \left(V^{(\mathbf{B})}, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!]\right)$. Класс $V^{(\mathbf{B})}$ именуют также *булевозначным универсумом*. Основные свойства $V^{(\mathbf{B})}$ выражены в следующих принципах.

(1) **Принцип переноса:** *любая аксиома, а значит, и любая теорема теории множеств* ZFC *истинна в* $V^{(\mathbf{B})}$; *символически* $V^{(\mathbf{B})} \models \mathrm{ZFC}$.

(2) **Принцип перемешивания.** *Если* $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — *разбиение единицы в* $\mathbf{B}$, $a(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — *семейство элементов* $V^{(\mathbf{B})}$, *то существует единственный элемент* $x \in V^{(\mathbf{B})}$ *такой, что* $b_\xi \leqslant [\![x = x_\xi]\!]$ $(\xi \in \Xi)$. Элемент x называют *перемешиванием семейства* (x_ξ) *относительно* (b_ξ) и обозначают $\operatorname{mix}_{\xi \in \Xi}(b_\xi x_\xi)$.

(3) **Принцип максимума.** *Для любой формулы* $\varphi(u)$ *теории* ZFC *(возможно, с константами из* $V^{(\mathbf{B})}$ *существует элемент* $x_0 \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ *такой, что*

$$[\![(\exists u)\, \varphi(u)]\!] = [\![\varphi(x_0)]\!].$$

Отсюда, в частности, следует, что если $[\![(\exists! u)\, \varphi(u)]\!] = \mathbf{1}$, то существует, и притом единственный, $x_0 \in V^{(\mathbf{B})}$, для которого $[\![\varphi(x_0)]\!] = \mathbf{1}$.

1.2.7. Существует единственное отображение $x \mapsto x^\wedge$ из $\mathbf{V}$ в $V^{(\mathbf{B})}$, удовлетворяющее требованиям:

(1) $x = y \leftrightarrow [\![x^\wedge = y^\wedge]\!] = \mathbf{1}$; $x \in y \leftrightarrow [\![x \in y]\!] = \mathbf{1}$ $\quad (x, y \in \mathbf{V})$,

(2) $[\![z \in y^\wedge]\!] = \bigvee\limits_{x \in y} [\![x^\wedge = z]\!] \left(z \in V^{(\mathbf{B})}, y \in \mathbf{V}\right)$.

Это отображение называют *каноническим вложением*.

(3) **Ограниченный принцип переноса.** *Пусть* $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ — *ограниченная формула, т. е. такая формула, в построении которой все кванторы имеют вид* $(\forall u)\,(u \in v \to \ldots)$ *или* $(\exists u)\,(u \in v \wedge \ldots)$, *или же в сокращенной записи* $(\forall u \in v)$, $(\exists u \in v)$. *Тогда для произвольных* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{V}$ *выполняется*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow V^{(\mathbf{B})} \models \varphi\left(x_1^\wedge, \ldots, x_n^\wedge\right).$$

1.2.8. Для элемента $X \in V^{(\mathbf{B})}$ его *спуск* $X\!\downarrow$ задан правилом $X\!\downarrow\; := \{x \in V^{(\mathbf{B})}\colon [\![x \in X]\!] = \mathbf{1}\}$. Множество $X\!\downarrow$ является *циклическим*, т. е. выдерживает всевозможные перемещения своих элементов.

1.2.9. Пусть F — соответствие из X в Y внутри $V^{(\mathbf{B})}$, т. е. $X, Y, F \in V^{(\mathbf{B})}$ и $[\![F \subset X \times Y]\!] = [\![F \neq \varnothing]\!] = \mathbf{1}$. Существует, и притом единственное, соответствие $F\!\downarrow$ из $X\!\downarrow$ в $Y\!\downarrow$ такое, что для любого множества $A \subset X$ внутри $V^{(\mathbf{B})}$ будет $F(A)\!\downarrow\; = F\!\downarrow(A\!\downarrow)$. При этом $[\![F$ — отображение из X в $Y]\!] = \mathbf{1}$ в том и только том случае, если $F\!\downarrow$ — отображение из $X\!\downarrow$ в $Y\!\downarrow$.

В частности, отображение $f\colon Z^\wedge \to Y$ внутри $V^{(\mathbf{B})}$, где $Z \in \mathbf{V}$, задает функцию спуск $f\!\downarrow\colon Z \to Y\!\downarrow$ такую, что $f\!\downarrow(x) = f(x^\wedge)$ $(x \in X)$.

1.2.10. Пусть $X \in \mathscr{P}\left(V^{(\mathbf{B})}\right)$. Определим функцию $f\colon \operatorname{dom}(f) \to \mathbf{B}$ формулами: $\operatorname{dom}(f) = X$ и $\operatorname{im}(f) = \{\mathbf{1}\}$. Согласно 1.1.5 (4) существует элемент $X\!\uparrow\; \in V^{(\mathbf{B})}$ такой, что

$$[\![y \in X\!\uparrow]\!] = \bigvee_{x \in X} [\![x = y]\!] \quad \left(y \in V^{(\mathbf{B})}\right).$$

Элемент $X\!\uparrow$ (единственный в силу аксиомы экстенсиональности) называют *подъемом* X. При этом справедливы формулы

(1) $Y\!\downarrow\uparrow\; = Y \quad \left(y \in V^{(\mathbf{B})}\right)$,

(2) $X\!\uparrow\downarrow\; = \operatorname{mix}(X) \; \left(X \in \mathscr{P}\left(V^{(\mathbf{B})}\right)\right)$.

где $\operatorname{mix}(X)$ — множество всех перемешиваний вида $\operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, $(x_\xi) \subset X$, (b_ξ) — разбиение единицы в $\mathbf{B}$.

1.2.11. Пусть $X, Y \in \mathscr{P}(V^{(\mathbf{B})})$ и F — соответствие из X в Y. Равносильны утверждения:

(1) существует, и притом единственное, соответствие $F\uparrow$ из $X\uparrow$ в $Y\uparrow$ внутри $V^{(\mathbf{B})}$ такое, что $\operatorname{dom}(F\uparrow) = \operatorname{dom}(F)\uparrow$ и для каждого подмножества A множества $\operatorname{dom}(F)$ выполнено

$$F\uparrow(A\uparrow) = F(A)\uparrow;$$

(2) соответствие F *экстенсионально*, т. е.

$$y_1 \in F(x_1) \to [\![x_1 = x_2]\!] \leqslant \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![y_1 = y_2]\!].$$

Соответствие F будет отображением из X в Y в том и только том случае, если $[\![F\uparrow\colon X\uparrow \to Y\uparrow]\!] = 1$.

В частности, отображение $f\colon Z \to Y\downarrow$ порождает функцию $f\uparrow\colon \widehat{Z} \to Y$ такую, что $f\uparrow(x^\wedge) = f(x)$ $(x \in Z)$.

1.2.12. Предположим, что на непустом множестве X задана $\mathbf{B}$-*структура*, т. е. определено отображение $d\colon X \times X \to \mathbf{B}$, удовлетворяющее «аксиомам метрики»:

(1) $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) \vee d(z, y)$.

Тогда существует элемент $\mathscr{X} \in V^{(\mathbf{B})}$ и инъекция $\iota\colon X \to X' := \mathscr{X}\downarrow$ такие, что $d(x, y) = [\![x \neq y]\!]$ и любой элемент $x' \in X'$ имеет представление $x' = \operatorname{mix}(b_\xi \iota x_\xi)$, где $(x_\xi) \subset X$, а (b_ξ) — разбиение единицы в $\mathbf{B}$. Этот факт позволяет рассматривать множества с $\mathbf{B}$-структурой как подмножества $V^{(\mathbf{B})}$ и оперировать с ними с помощью описанных выше правил.

Примечания.

(1) Булевозначным анализом (термин введен Г. Такеути) называют раздел функционального анализа, использующий булевозначные модели теории множеств. Любопытно отметить, что создание булевозначных моделей не было связано с теорией векторных решеток. Необходимые для этого языковые и технические средства окончательно сформировались в рамках математической логики уже к 1960 г. Однако все еще не было той генеральной идеи, которая впоследствие привела к бурному прогрессу, в теории моделей. Такая идея пришла с открытием П. Дж. Коэна, установившего в 1963 г. абсолютную неразрешимость (в точном математическом смысле) классической континуум-проблемы. Именно в связи с осмыслением метода форсинга Коэна возникли булевозначные модели теории множеств, создание которых принято связывать с именами П. Вопенки, Д. Скотта, Р. Соловея (см. [16, 21, 27, 43, 79]).

(2) Метод форсинга естественно делится на две части — общую и специальную. Общая часть — аппарат булевозначных моделей теории множеств. Здесь полная булева алгебра $\mathbf{B}$ совершенно произвольна. Специальная часть состоит в построении специфической булевой алгебры $\mathbf{B}$, обеспечивающей нужные (чаще патологические, экзотические) свойства объектов (например, K-пространства), получаемых из $\mathbf{B}$. Обе части имеют самостоятельный интерес, но наиболее впечатляющие результаты дает их сочетание. В большинстве исследований по булевозначному анализу используется лишь общая часть метода форсинга. Дальнейший прогресс в булевозначном анализе наверняка будет связан с применением метода форсинга в полном объеме.

(3) Подробное изложение материала этого параграфа имеется в [24, 27, 43, 79], см. также [16, 39]. Приемы, изложенные в 1.2.8—1.2.11, в разных вариантах широко используются в исследованиях по теории булевозначных моделей. В [23, 32] им придана форма техники спусков и подъемов, более приспособленная к задачам анализа. Погружение 1.2.12 множеств с булевой структурой в булевозначный универсум осуществлено в [23]. В основе такого погружения лежит метод Соловея — Тенненбаума, предложенный ранее ими для погружения полных булевых алгебр [72].

1.3. ТЕОРИЯ ВНЕШНИХ МНОЖЕСТВ

С точки зрения приложений имеющиеся варианты формального обоснования инфинитезимальных методов в рамках аксиоматических теорий внешних множеств практически равнозначны. В этой связи здесь мы приведем один из наиболее сильных вариантов теории внешних множеств NST, предложенный Т. Каваи [58, 59].

1.3.1. *Алфавит теории* NST получается обогащением алфавита ZFC двумя постоянными V^S и V^I. Содержательно V^S мыслят как *универсум стандартных множеств*, а V^I — как *мир внутренних множеств* (в любой содержательной интерпретации). При этом стоит подчеркнуть, что V^S и V^I рассматриваются как конкретные внешние множества, т. е. $V^S \in V^E$ и $V^I \in V^E$, где $V^E := \{x\colon\ x = x\}$ — *класс* всех *внешних множеств*. Иногда вместе $x \in V^S$ пишут $\mathrm{St}(x)$ или «x — стандартное множество». Аналогично вводят предикат $\mathrm{Int}(\cdot)$, выражающий свойство быть внутренним множеством.

Обычным способом определяются *формулы*. При этом для $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ символом φ^S (соответственно φ^I) обозначается *релятивизация* φ на V^S (соответственно на V^I), т. е. формула, получающаяся заменой всех переменных в φ на переменные, пробегающие стандартные (соответственно внутренние) множества.

Если $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$ и φ рассматривают как формулу теории NST, то иногда пишут φ^E и называют это выражение термином *E-формула*. Аналогичный смысл вложен в понятия *S-формулы* и *I-формулы*.

Используют обычные сокращения типа $(\forall^{\mathrm{st}} x)\varphi := (\forall x \in V^S)\varphi$; $(\exists^{\mathrm{Int}} x)\varphi := (\exists x \in V^I) \wedge \varphi$; $\mathrm{fin}(x) := x$ конечно ($=$ не имеет взаимно однозначного отображения на собственное подмножество) и т. п.

1.3.2. *Специальные аксиомы* NST делятся на три группы (так же обстоит дело и в иных вариантах теории внешних множеств). Первую группу составляют *правила образования внешних множеств*. Вторую — *аксиомы связи миров множеств* V^S, V^I и V^E. Наконец, в третью группу входят обычные *постулаты нестандартного анализа* — принципы переноса, идеализации и стандартизации.

1.3.3. Начнем с устройства универсума V^E.

(1) Суперправило образования внешних множеств: *если* φ — *аксиома* ZFC, *за исключением аксиомы фундирования, то* φ^E — *аксиома* NST.

Таким образом, в NST действуют аксиомы теории Цермело Z и выполнена схема аксиом подстановки. Более того, принимается

(2) Суженая аксиома фундирования:

$$(\forall A)\big(A \neq \varnothing \wedge A \cap V^I = \varnothing\big) \to (\exists x \in A)\, x \cap A = \varnothing,$$

иными словами, регулярность постулируется у внешних множеств, не имеющих внутренних элементов.

Подчеркнем, что $V^S \in V^E$. Иначе говоря, выполнена обычная *аксиома приемлемости* (3.4.7 в [27]). Напомним в этой связи, что внешнее множество A называют имеющим *приемлемый размер* (или *S-размер*), если существует внешняя функция, отображающая V^S на A. При этом пишут $A \in V^{\mathrm{a-size}}$.

1.3.4. Вторая группа аксиом NST содержит следующие утверждения:

(1) принцип моделирования (для стандартных множеств) — *мир* V^S — *это универсум фон Неймана*, т. е. для каждой аксиомы φ теории ZFC стандартизация φ^S — аксиома NST;

(2) аксиома транзитивности (для внутренних множеств) — $(\forall x \in V^I) x \subset V^I$, т. е. внутренние множества составлены только из внутренних элементов;

(3) аксиома вложения — $V^S \subset V^I$, т. е. стандартные множества являются внутренними.

1.3.5. Третью группу постулатов NST составляют такие схемы аксиом:

(1) принцип переноса

$$(\forall^{st} x_1) \ldots (\forall^{st} x_n) \ \ \varphi^S(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^I(x_1, \ldots, x_n)$$

для каждой формулы $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$;

(2) принцип стандартизации

$$(\forall A)(\exists^{st} t) \ \ ({}^\circ A \subset t) \rightarrow (\exists^{st} a)(\forall^{st} x)(x \in A \leftrightarrow x \in a),$$

где ${}^\circ A := A \cap V^S$ — *стандартное ядро* A. Возникающее a, очевидно, единственно. Его обозначают ${}^*A$ и называют *стандартизацией* A;

(3) принцип переноса (= схема аксиом насыщения)

$$(\forall^{\mathrm{Int}} x_1) \ldots (\forall^{\mathrm{Int}} x_n)(\forall A \in V^{\text{a-size}})(((\forall z \subset A \wedge \mathrm{fin}^E(z) \rightarrow$$

$$\rightarrow (\exists^{\mathrm{Int}} x)(\forall y \in z) \quad \varphi^I(x, y, x_1, \ldots, x_n)) \rightarrow$$

$$\rightarrow (\exists^{\mathrm{Int}} x)(\forall^{\mathrm{Int}} y \in A) \quad \varphi^I(x, y, x_1, \ldots, x_n))$$

для произвольной формулы $\varphi = \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi \in (\mathrm{ZFC})$.

1.3.6. Теорема Каваи. *Теория* NST *является консервативным расширением* ZFC.

1.3.7. Как обычно, в V^E можно выделить универсум V^C, составленный *классическими* (= стандартными или обычными в робинсоновском формализме) множествами, используя класс стандартных ординалов On^{st}. Именно

$$V^C_\beta := \{x\colon \ (\exists^{st} \alpha \in \beta) \ \ x \in \mathscr{P}(V^C_\alpha)\};$$

$$V^C := \bigcup_{\beta \in \mathrm{On}^{st}} V^C_\beta .$$

При этом возникает робинсоновская стандартизация $*\colon V^C \rightarrow V^S$, определенная схемой рекурсии:

$$*\varnothing := \varnothing, \ *A := *\{*a\colon \ a \in A\}.$$

Робинсоновская стандартизация обеспечивает справедливость *принципа Лейбница* в форме

$$(\forall x_1 \in V^C) \ldots (\forall x_n \in V^C) \quad \varphi^C(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^S(x_1, \ldots, x_n)$$

для произвольной формулы $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathrm{ZFC})$ и ее релятивизаций φ^C и φ^S на V^C и V^S соответственно.

1.3.8. Мир радикальной (и классической) установки нестандартного анализа также допускает аксиоматическое описание.

Опишем теорию UNST, проанализированную Т. Каваи.

В UNST переменные изображают внешние множества. Имеются выделенные костанты V^C, V^I и $*$. Соответствующие внешние множества, естественно, называют *классическим миром*, *универсумом внутренних множеств* и *робинсоновской стандартизацией*.

Специальные аксиомы UNST аналогичны NST.

1.3.9. Устройство универсума UNST определяют следующие постулаты.

(1) Суперправило образования внешних множеств (аналогичное 1.3.3 (1)).

(2) Суженная аксиома фундирования (ср. 1.3.3 (2)).

1.3.10. Аксиомы связи миров множеств содержат такие положения:

(1) принцип моделирования (для классических множеств) — мир V^C — *это универсум фон Неймана*;

(2) аксиома транзитивности (для внутренних множеств) — *в формуле* 1.3.9 (2);

(3) аксиома транзитивности (для классических множеств) — $(\forall x \in V^c)\ x \subset V^c$, т. е. *классические множества составлены из классических элементов*;

(4) аксиома внешней сборки (=аксиома суперструктуры) — *внешние подмножества классического множества являются классическими*;

(5) аксиома робинсоновской стандартизации — $*$ *является (внешним) отображением* V^c *в* V^I.

Очевидно, что в связи с 1.3.10 (5) существует единственное множество V^s, составленное в точности из стандартизации $V^s := *(V^c)$. В UNST элементы V^s называют *стандартными множествами*. По аналогии с 1.3.2 (2) говорят, что множество A имеет *классический размер* (или *C-размер*), если существует внешняя функция из V^c на A. При этом пишут $A \in V^{\text{c-size}}$.

1.3.11. Постулаты нестандартного анализа в UNST имеют следующий вид:

(1) принцип переноса в форме Лейбница 1.3.7;

(2) принцип идеализации в виде схемы аксиом насыщения для множеств классического размера (ср. 1.3.5 (3)).

Наконец, *стандартизация* $*A$ в UNST множества A (представляющего собой подмножество элемента V^s) состоит в процедуре

$$*A := *(*^{-1}(A \cap V^s)).$$

Из 1.3.6 непосредственно вытекает следующее утверждение.

1.3.12. *Теория* UNST *является консервативным расширением* ZFC.

В дальнейшем при работе с аналитическими объектами мы будем придерживаться свободной точки зрения, близкой к неоклассической и радикальной установкам нестандартного анализа. В частности, поле вещественных чисел нами рассматривается как стандартный элемент мира внутренних множеств, а классическая реализация $\mathbf{R}$ отождествляется со стандартным ядром $^\circ\mathbf{R}$. Символика, принятая в нестандартном анализе для бесконечно малых, монад и т. п., совпадает с представленной в [27].

1.3.13. Примечания.

(1) Аксиоматический подход к нестандартному анализу стал завоевывать популярность после работ Э. Е. Нельсона [66, 67], предложившего аксиоматику теории внутренних множеств. При этом произошло существенное изменение взглядов на существо инфинитезимальных методов (см. [27, 34]). Главное в произошедших переменах — отказ от «стыдливого» взгляда на инфинитезимали как на монстров, имеющих некоторое экзотическое значение.

(2) Аксиоматические теории внешних множеств предложили К. Хрбачек [53] и Т. Каваи [58]. Излагаемый вариант теории следует [59]. Из последних работ отметим также [14], [40], предлагающие, по сути, удобные формализмы «градуированной» теории внешних множеств, связанные с концепцией относительной стандартности.

ГЛАВА 2

БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ АНАЛИЗ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТОК

Принципиально новая — «нестандартная» — возможность, открытая сейчас в теории упорядоченных пространств, состоит в формализации эвристического представления о том, что элементы произвольного K-пространства — это своего рода аналоги вещественных чисел. Строго говоря, точки K-пространства служат изображениями чисел в подходящим образом выбранной модели теории множеств. Соответствующий формализм, представленный в текущей главе, относится сейчас к числу фундаментальных и обязательных концепций теории упорядоченных пространств.

2.1. ПРОСТРАНСТВА КАНТОРОВИЧА

Теория векторных решеток изложена в ряде превосходных монографий, см. [10, 18, 19, 48, 63, 69, 70, 82]. Векторные решетки принято называть также пространствами Рисса. Здесь мы коротко остановимся на порядково полных векторных решетках.

2.1.1. *Пространством Канторовича*, или, короче, *K-пространством*, называют такую векторную решетку, в которой всякое порядково ограниченное множество имеет точные границы. Если же в векторной решетке имеются точные границы лишь счетных множеств, то ее называют *K_σ-пространством.* Всюду ниже E — произвольное K-пространство.

Компонента (или *полоса*) в E — множество вида

$$M^{\perp} := \{x \in E\colon (\forall y \in M)\, |x| \wedge |y| = 0\},$$

где $M \subset E$, $M = \varnothing$. Совокупность всех компонент, упорядоченная по включению, образует полную булеву алгебру $\mathfrak{B}(E)$, в которой булевы операции выглядят так:

$$L \wedge K = L \cap K,\ L \vee K = (L \cup K)^{\perp\perp},\ L^* = L^{\perp}\ (L, K \in \mathfrak{B}(E)).$$

Алгебра $\mathfrak{B}(E)$ носит название *базы E*.

2.1.2. С каждой компонентой $K \subset E$ однозначно связан оператор проектирования $[K]$ (*= порядковый проектор*) такой, что $0 \leqslant [K]x \leqslant x$ для всех $0 \leqslant x \in E$. В множестве этих проекторов $\mathfrak{P}(E)$ вводят порядок, полагая $\rho \leqslant \pi \leftrightarrow \operatorname{im}\rho \subset \operatorname{im}\pi$.

Пусть $\mathbf{1}$ — единица в E, т. е. $\{\mathbf{1}\}^{\perp\perp} = E$. Элемент $e \in E$ называют *единичным*, или *осколком единицы*, если $e \wedge (\mathbf{1} - e) = 0$. Множество $\mathfrak{E}(E) := \mathfrak{E}(\mathbf{1})$ всех единичных элементов снабжают индуцированным из E порядком. Упорядоченные множества $\mathfrak{P}(E)$ и $\mathfrak{E}(E)$ являются полными булевыми алгебрами.

2.1.3. Теорема. *Отображение $K \mapsto [K]$ есть изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{B}(E)$ и $\mathfrak{P}(E)$. Если же в E имеется единица, то отображения $\pi \mapsto \pi\mathbf{1}$ из $\mathfrak{P}(E)$ в $\mathfrak{E}(E)$ и $e \mapsto \{e\}^{\perp\perp}$ из $\mathfrak{E}(E)$ в $\mathfrak{B}(E)$ также являются изоморфизмами булевых алгебр.*

2.1.4. K-пространство E называют *расширенным*, если в нем любое непустое множество попарно дизъюнктных положительных элементов имеет супремум. (Элементы x и y дизъюнктны, если $|x| \wedge |y| = 0$.) Перечислим важнейшие примеры расширенных K-пространств. Для экономии места ограничимся вещественным случаем.

(1) Пространство $M(\Omega, \Sigma, \mu)$ классов эквивалентности измеримых функций, где (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, причем μ σ-конечна (или, более общо, обладает свойством прямой суммы, см. [18]). База K-пространства $M(\Omega, \Sigma, \mu)$ изоморфна булевой алгебре $\Sigma/\mu^{-1}(0)$ измеримых множеств по модулю множеств нулевой меры.

(2) Пространство $C_\infty(Q)$ непрерывных функций, определенных на экстремально несвязном компакте Q, со значениями в расширенной числовой прямой и принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотном множестве [10, 19]. База этого K-пространства изоморфна булевой алгебре открыто-замкнутых множеств в Q.

(3) Пространство $\operatorname{Bor}(Q)$ классов эквивалентности борелевских функций, определенных на топологическом пространстве Q. Две функции *эквивалентны*, если они совпадают на дополнении к множеству первой категории. База K-пространства $\operatorname{Bor}(Q)$ изоморфна булевой алгебре борелевских подмножеств Q по модулю множеств первой категории.

(4) Пространство $\overline{\mathfrak{A}}$ самосопряженных (не обязательно ограниченных) операторов в гильбертовом пространстве, присоединенных к коммутативной алгебре фон Неймана $\mathfrak{A}$ (см. [10]). База K-пространства изоморфна булевой алгебре всех проекторов, входящих в $\mathfrak{A}$.

2.1.5. Пусть E и F — векторные решетки. Оператор T: $E \to F$ называют *положительным*, если $Tx \geqslant 0$ для каждого $0 \leqslant x \in E$, и *регулярным*, если $T = T_1 - T_2$, где T_1, T_2 — положительные операторы. Говорят, что оператор T *порядково ограничен* (или *о-ограничен*), если $T(M)$ — порядково ограниченное множество в F для любого порядково ограниченного $M \subset E$. Если F — это K-пространство, то классы регулярных и порядково ограниченных операторов совпадают. Более того, справедливо следующее утверждение.

2.1.6. Теорема Рисса — Канторовича. *Если E — векторная решетка и F — K-пространство, то пространство $L^{\sim}(E, F)$ всех регулярных операторов из E в F само является K-пространством.*

2.1.6. Примечания.

(1) Создание теории векторных решеток принято связывать с исследованиями Г. Биркгофа, Л. В. Канторовича, М. Г. Крейна, Х. Накано, Ф. Рисса, Г. Фрейденталя и др. В наше время теория и приложения векторных решеток — обширная область математики. Она хорошо представлена в монографической литературе [10, 18, 19, 48, 63, 69, 70, 82]. Необходимые сведения из теории булевых алгебр см. в [8].

(2) Класс порядково полных векторных решеток, т. е. K-пространств, был выделен Л. В. Канторовичем в его первой основополагающей работе [17]. Здесь же он выдвинул эвристический принцип переноса для K-пространств, суть которого в том, что элементы K-пространства — обобщенные числа. Позже этот принцип находил многочисленные подтверждения в исследованиях как самого автора, так и его последователей. По существу, он оказался одной из тех стержневых идей, которые, играя организующую и направляющую роль в становлении нового направления, привели в конечном итоге к глубокой и изящной теории K-пространств, богатой разнообразными приложениями.

(3) Уже в начальный период развития теории предпринимались попытки формализации указанных эвристических соображений. На этом пути появились так называемые теоремы о сохранении соотношений, которые утверждают, что если некоторое высказывание, включающее конечное число функциональных соотношений, доказано для вещественных чисел, то аналогичный факт автоматически оказывается верным и для элементов K-пространства (см. [10, 19]). Однако оставались неясными внутренний механизм, управляющий феноменом сохранения соотношений, границы применимости подобных утверждений, а также общие причины многих аналогий и параллелей с классической теорией функций. Вся глубина и универсальный характер принципа Канторовича были раскрыты в рамках булевозначного анализа (см. 2.2, 2.3, а также [5, 24, 27]).

2.2. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА В БУЛЕВОЗНАЧНЫХ МОДЕЛЯХ

Булевозначный анализ начинается с изображения поля действительных чисел в булевозначной модели. Последнее представляет собой расширенное K-пространство. В зависимости от того, какая булева алгебра $\mathbf{B}$ (алгебра измеримых множеств, или регулярных открытых множеств, или проекторов в гильбертовом пространстве) положена в основу построения булевозначной модели $V^{(\mathbf{B})}$, будут получаться различные K-пространства (пространства измеримых функций, или полунепрерывных функций, или самосопряженных операторов). Тем самым возникает замечательная возможность перенесения на многие классические объекты анализа всей совокупности знаний о числах.

2.2.1. Под полем действительных чисел мы понимаем алгебраическую систему, на которой выполняются аксиомы архимедова упорядоченного поля (с различным нулем и единицей) и аксиома полноты. Напомним два известных утверждения.

(1) *Существует, и притом единственное с точностью до изоморфизма, поле действительных чисел* $\mathbf{R}$.

(2) *Если P — архимедово упорядоченное поле, то найдется изоморфное вложение h поля P в $\mathbf{R}$ такое, что образ $h(P)$ есть подполе $\mathbf{R}$, содержащее подполе рациональных чисел. В частности, $h(P)$ плотно в $\mathbf{R}$.*

2.2.2. Применив к 2.2.1 (1) последовательно принципы переноса и максимума, найдем элемент $\mathcal{R} \in V^{(\mathbf{B})}$, для которого $[\![\mathcal{R}$ — поле действительных чисел $]\!] = \mathbf{1}$. Более того, для любого $\mathcal{R}' \in V^{(\mathbf{B})}$, удовлетворяющего условию $[\![\mathcal{R}'$ — поле действительных чисел$]\!] = \mathbf{1}$, выполняется также $[\![$упорядоченные поля $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ изоморфны$]\!] = \mathbf{1}$. Иными словами, в модели $V^{(\mathbf{B})}$ существует поле действительных чисел $\mathcal{R}$, единственное с точностью до изоморфизма.

2.2.3. Отметим также что формула $\varphi(\mathbf{R})$, представляющая собой формальную запись аксиом архимедова упорядоченного поля, ограничена, поэтому $[\![\varphi(\mathbf{R}^{\wedge})]\!] = \mathbf{1}$, т. е. $[\![\mathbf{R}^{\wedge}$ — архимедово упорядоченное поле $]\!] = \mathbf{1}$. «Пропустив» утверждение 2.2.1 (2) через принцип переноса, заключаем, что $[\![\mathbf{R}^{\wedge}$ изоморфно плотному подполю поля $\mathcal{R}]\!] = \mathbf{1}$. На этом основании будем считать в дальнейшем, что $\mathcal{R}$ — поле действительных чисел в модели $V^{(\mathbf{B})}$, причем $\mathbf{R}^{\wedge}$ — плотное его подполе.

Рассмотрим теперь спуск $\mathcal{R}\downarrow$ алгебраической системы $\mathcal{R}$. Иными словами, спуск несущего множества системы $\mathcal{R}$ рассматриваем вместе со спущенными операциями и порядком. Для простоты операции и порядок в $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}\downarrow$ обозначим одинаковыми символами $+$, $\cdot$, $\leqslant$.

2.2.4. Теорема Гордона. *Пусть $\mathcal{R}$ — упорядоченное поле действительных чисел в модели $V^{(\mathbf{B})}$. Тогда $\mathcal{R}\downarrow$ (со спущенными операциями и порядком) представляет собой расширенное K-пространство с единицей* $\mathbf{1}$. *При этом существует изоморфизм χ булевой алгебры $\mathbf{B}$ на базу $\mathfrak{P}(\mathcal{R}\downarrow)$ такой, что справедливы эквивалентности*

$$\chi(b)x = \chi(b)y \leftrightarrow b \leqslant [\![x = y]\!],$$
$$\chi(b)x \leqslant \chi(b)y \leftrightarrow b \leqslant [\![x \leqslant y]\!]$$

для всех $x, y \in \mathcal{R}$ и $b \in \mathbf{B}$.

2.2.5. Расширенное K-пространство $\mathcal{R}\downarrow$ является в то же время точной f-алгеброй с кольцевой единицей $\mathbf{1}$, причем для каждого $b \in \mathbf{B}$ проектор $\chi(b)$ есть оператор умножения на единичный элемент $\chi(b)\mathbf{1}$. Из сказанного выше видно, что отображение $b \mapsto \chi(b)\mathbf{1}$ $(b \in \mathbf{B})$ есть булев изоморфизм $\mathbf{B}$ и алгебры единичных элементов $\mathfrak{E}(\mathcal{R}\downarrow)$. Этот изоморфизм обозначают той же буквой χ.

2.2.6. Напомним, что если E — это K-пространство с единицей и $x \in E$, то проекцию единицы на компоненту $\{x\}^{\perp\perp}$ называют *следом* x и обозначают символом e_x. Для вещественного числа λ через e_λ^x обозначают след положительной части элемента $\lambda\mathbf{1} - x$, т. е. $e_\lambda^x := e_{(\lambda\mathbf{1}-x)^+}$. Отображение $\lambda \mapsto e_\lambda^x$ $(\lambda \in \mathbf{R})$ называют *спектральной функцией* или *характеристикой элемента* x.

Для каждого элемента $x \in \mathcal{R}\downarrow$ имеют место соотношения:

$$e_x = \chi([\![x \neq 0]\!]),\ e_\lambda^x = \chi([\![x < \lambda^{\wedge}]\!])\ (\lambda \in \mathbf{R}).$$

Следующий результат утверждает, что всякая архимедова векторная решетка реализуется как подрешетка $\mathcal{R}$ в подходящей булевозначной модели.

2.2.7. Теорема. *Пусть E — архимедова векторая решетка, $\mathscr{R}$ — поле действительных чисел в модели $V^{(\mathbf{B})}$, а j — изоморфизм $\mathbf{B}$ на базу $\mathfrak{B}(E)$. Существует элемент $\mathscr{E} \in V^{(\mathbf{B})}$, удовлетворяющий условиям:*

(1) $V^{(\mathbf{B})} \models \mathscr{E}$ — *векторная подрешетка поля $\mathscr{R}$, рассматриваемого как векторная решетка над $\mathbf{R}^{\wedge}$;*

(2) $E' := \mathscr{E}{\downarrow}$ — *векторная подрешетка $\mathscr{R}{\downarrow}$, инвариантная относительно каждого проектора $\chi(b)$ $(b \in \mathbf{B})$, в которой всякое множество положительных попарно дизъюнктных элементов имеет супремум;*

(3) *существует o-непрерывный решеточный изоморфизм ι: $E \to E'$ такой, что $\iota(E)$ — минорантная подрешетка в $\mathscr{R}{\downarrow}$ $(=(\forall\, 0 < x \in \mathscr{R}{\downarrow}) \times$ $\times (\exists y \in \iota(E))\, 0 < y \leqslant x)$;*

(4) *для каждого $b \in \mathbf{B}$ оператор проектирования на компоненту, порожденную в $\mathscr{R}{\downarrow}$ множеством $\iota(j(b))$, совпадает с $\chi(b)$.*

2.2.8. Элемент $\mathscr{E} \in V^{(\mathbf{B})}$ из теоремы 2.1.7 называют *булевозначной реализацией векторной решетки E*. Таким образом, булевозначными реализациями архимедовых векторных решеток служат векторные подрешетки поля действительных чисел $\mathscr{R}$, рассматриваемого как векторная решетка над полем $\mathbf{R}^{\wedge}$.

Укажем теперь несколько следствий из 2.1.4 и 2.1.7, сохранив те же обозначения:

(1) Если E — это K-пространство, то $\mathscr{E} = \mathscr{R}$, $E' = \mathscr{R}{\downarrow}$ и $\iota(E)$ — фундамент K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$. При этом $\iota^{-1} \circ \chi(b) \circ \iota$ — проектор на компоненту $j(b)$ для каждого $b \in B$.

(2) Образ $\iota(E)$ совпадает со всем $\mathscr{R}{\downarrow}$ тогда и только тогда, когда E — расширенное K-пространство.

(3) Расширенные K-пространства изоморфны в том и только том случае, если изоморфны их базы.

(4) Пусть E — расширенное K-пространство с единицей $\mathbf{1}$. Тогда в E можно, и притом единственным образом, определить умножение так, что E превращается в точную f-алгебру, а $\mathbf{1}$ — в единицу умножения.

2.2.9. К подсистемам поля $\mathscr{R}$ приводят булевозначные реализации не только архимедовых векторных решеток, см. 2.1.7. Сформулируем, например, несколько утверждений из [25].

Теорема. (1) *Булевозначной реализацией архимедовой решеточно упорядоченной группы служит подгруппа аддитивной группы поля $\mathscr{R}$.*

(2) *Архимедово f-кольцо содержит две взаимно дополнительные компоненты, одна из которых есть группа с нулевым умножением и реализуется как в* (1), *а другая имеет в качестве булевозначной реализации подкольцо кольца $\mathscr{R}$.*

(3) *Архимедова f-алгебра содержит две взаимно дополнительные компоненты, одна из которых есть векторная решетка с нулевым умножением и реализуется как в* 2.1.7, *а другая — как подкольцо и подрешетка поля $\mathscr{R}$, рассматриваемого как f-алгебра над $\mathbf{R}^{\wedge}$.*

2.2.10. Примечания.

(1) Булевозначный статус понятия K-пространства устанавливает теорема Гордона 2.1.4, полученная в [11]. Этот факт можно сформулировать так: расширенное K-пространство есть интерпретация поля вещественных чисел в подходящей булевозначной модели. При этом оказывается, что любая теорема (в рамках теории ZFC) о вещественных числах имеет свой аналог для соответствующего K-пространства. Перевод одних теорем в другие осуществляется посредством точно определенных процедур: подъем, спуск, каноническое вложение, т. е., по сути дела, алгоритмически. Тем самым установка Канторовича «элементы K-пространства — суть обобщенные числа» обретает в булевозначном анализе четкую математическую формулировку. С другой стороны, эвристический принцип переноса, игравший вспомогательную наводящую роль во многих исследованиях в добулевозначной теории K-пространств, превращается с помощью булевозначного анализа в точный исследовательский метод.

(2) Если в 2.1.4 **B** — это σ-алгебра измеримых множеств по модулю множеств нулевой меры μ, то $\mathscr{R}\downarrow$ изоморфно расширенному K-пространству измеримых функций $M(\Omega, \Sigma, \mu)$. Этот факт (для лебеговой меры на отрезке) был известен еще Скотту и Соловею (см. [71]). Если **B** — полная булева алгебра проекторов в гильбертовом пространстве, то $\mathscr{R}\downarrow$ изоморфно пространству тех самосопряженных операторов, у которых спектральная функция действует в **B**. Указанных два частных случая теоремы Гордона интенсивно и плодотворно эксплуатировал Г. Такеути, см. [75], а также библиографию в [27]. Объект $\mathscr{R}\downarrow$ для общих булевых алгебр рассмотрел также Т. Йех [55, 56], переоткрыв по существу теорему Гордона. Отличие состоит в том, что в [55] (комплексное) расширенное K-пространство с единицей определяется другой системой аксиом и именуется полной стоуновой алгеброй.

(3) Реализационную теорему 2.1.7 получил А. Г. Кусраев [25]. Близкий результат (в других терминах) имеется в работе [57], в которой развивается булевозначная интерпретация теории линейно упорядоченных множеств. Следствия 2.1.7 (3, 4) хорошо известны (см. [10, 19]). Понятие максимального расширения для K-пространства другим способом ввел А. Г. Пинскер. Им же доказано существование единственного с точностью до изоморфизма максимального расширения для произвольного K-пространства. Существование порядкового пополнения архимедовой векторной решетки установил А. И. Юдин. Соответствующие ссылки имеются в [10, 19]. Все эти факты без труда выводятся из 2.1.4 и 2.1.7 (подробности см. в [5]).

(4) Как уже отмечалось в 2.1.10 (1), первоначальные попытки формализации эвристического принципа Канторовича приводили к теоремам о сохранении соотношений (см. [10, 19]). Современные формы теорем о сохранении соотношений, использующих метод булевозначных моделей, можно найти в [13, 56], см. также [27].

2.3. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В K-ПРОСТРАНСТВАХ

Важнейшие структурные свойства векторных решеток — представление пространствами функций, спектральная теорема, функциональное исчисление и т. п. — являются изображениями свойств поля действительных чисел в подходящей булевозначной модели. Остановимся коротко на булевозначном подходе к функциональному исчислению в K-пространствах.

2.3.1. Ниже нам потребуется понятие интеграла по спектральной мере. Пусть (Ω, Σ) — измеримое пространство, т. е. Ω — непустое множество и Σ — фиксированная σ-алгебра подмножеств Ω. Отображение μ: $\Sigma \to \mathbf{B}$ будет *спектральной мерой*, если $\mu(\Omega - A) = \mathbf{1} - \mu(A)$ и

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

для любой последовательности (A_n) элементов σ-алгебры Σ.

Пусть $\mathbf{B} := \mathfrak{E}(E)$ — булева алгебра единичных элементов K-пространства E с фиксированной единицей **1**. Возьмем измеримую функцию f: $\Omega \to \mathbf{R}$. Для произвольного разбиения числовой прямой $\beta := (\lambda_k)_{k \in \mathbf{Z}}$, $\lambda_k < \lambda_{k+1} (k \in \mathbf{Z}) \lim\limits_{n \to \pm\infty} \lambda_n = \pm\infty$, положим $A_k := f^{-1}([\lambda_k, \lambda_{k+1}))$ и составим интегральные суммы

$$\underline{\sigma}(f, \beta) := \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k \mu(A_k), \quad \overline{\sigma}(f, \beta) := \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{k+1} \mu(A_k),$$

где суммы вычисляются в E. Если существует такой элемент $x \in E$, что $\sup\{\underline{\sigma}(f, \beta)\} = x = \inf\{\overline{\sigma}(f, \beta)\}$, где точные границы берутся по всевозможным разбиениям $\beta := (\lambda_k)$ числовой прямой, то говорят, что функция

f интегрируема по спектральной мере μ или что существует *спектральный интеграл* $I_\mu(f)$, и пишут при этом

$$I_\mu(f) := \int_\Omega f\,d\mu := \int_\Omega f(t)\,d\mu(t) := x.$$

2.3.2. Теорема. *Пусть* $E := \mathscr{R}\downarrow$, а μ — *спектральная мера со значениями в* $\mathbf{B} := \mathfrak{C}(E)$. *Тогда для любой измеримой функции* f *интеграл* $I_\mu(f)$ — *единственный элемент* K-*пространства* E, *удовлетворяющий условию*

$$[\![I_\mu(f) < \lambda^\wedge]\!] = \mu(\{f < \lambda\}) \quad (\lambda \in \mathbf{R}),$$

где $\{f < \lambda\} := \{t \in \Omega\colon f(t) < \lambda\}$.

Из этой теоремы видно, что если существует интеграл $I_\mu(f) \in E$, то отображение $\lambda \mapsto \mu(\{f < \lambda\})$ совпадает со спектральной функцией элемента $I_\mu(f)$. В частности, если E расширенно, то $I_\mu(f)$ существует для любой измеримой функции f. Более того, из теоремы 2.2.2, используя элементарные свойства поля $\mathscr{R}$, можно легко получить следующий результат.

2.3.3. Теорема. *Пусть* E — *расширенное* K-*пространство, а* $\mu\colon \Sigma \to \mathbf{B} := \mathfrak{C}(E)$ — *некоторая спектральная мера. Спектральный интеграл* $I_\mu(\cdot)$ *представляет собой секвенциально о-непрерывный (линейный мультипликативный и решеточный) гомоморфизм из* f-*алгебры измеримых функций* $\mathscr{M}(\Omega, \Sigma)$ *в* E.

2.3.4. Пусть $e_1, \ldots, e_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{B}$ — конечный набор спектральных функций со значениями в σ-алгебре $\mathbf{B}$. Тогда существует единственная $\mathbf{B}$-значная спектральная мера μ, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ пространства $\mathbf{R}^n$, для которой

$$\mu\left(\prod_{k=1}^{n}(-\infty,\ \lambda_k)\right) = \bigwedge_{k=1}^{n} e_k(\lambda_k),$$

каковы бы ни были $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$.

2.3.5. Возьмем теперь упорядоченный набор элементов $x_1, \ldots, x_n$ K-пространства E с единицей $\mathbf{1}$. Пусть $e^{x_k}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{B}\colon = \mathfrak{P}(\mathbf{1})$ — спектральная функция элемента x_k. В соответствии с доказанным предложением существует спектральная мера $\mu\colon \mathscr{B}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{B}$, для которой

$$\mu\left(\prod_{k=1}^{n}(-\infty, \lambda_k)\right) = \bigwedge_{k=1}^{n} e^{x_k}(\lambda_k).$$

Как видно, мера μ однозначно определяется упорядоченным набором $\mathfrak{X} := (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Поэтому пишут $\mu_\mathfrak{X} := \mu$ и говорят, что $\mu_\mathfrak{X}$ — спектральная мера набора $\mathfrak{X}$. Для интеграла от измеримой функции $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ по спектральной мере $\mu_\mathfrak{X}$ приняты обозначения

$$\widehat{\mathfrak{X}}(f) := f(\mathfrak{X}) := f(x_1, \ldots, x_n) := I_\mu(f).$$

Если $\mathfrak{X} := (x)$, то пишут также $\widehat{x}(f) := f(x) := I_\mu(f)$, а $\mu_x := \mu_\mathfrak{X}$ именуют *спектральной мерой элемента* x. Для функции $f(t) = t\ (t \in \mathbf{R})$ из 2.2.2 вытекает спектральная теорема Фрейденталя:

$$x = \int_\mathbf{R} t\,d\mu_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,de_t^x.$$

Напомним, что пространство $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ всех борелевских функций в $\mathbf{R}^n$ является расширенным K_σ-пространством и точной f-алгеброй.

2.3.6. Теорема. *Спектральные меры набора* $\mathfrak{X} := (x_1, \ldots, x_n)$ *и элемента* $f(\mathfrak{X})$ *связаны соотношением*

$$\mu_{f(\mathfrak{X})} = \mu_\mathfrak{X} \circ f^{\leftarrow},$$

где $f^{\leftarrow}\colon \mathscr{B}(\mathbf{R}) \to \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ — *гомоморфизм, действующий по правилу* $A \to f^{-1}(A)$. *В частности, для измеримых функций* $f \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ *и* $g \in \mathscr{B}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ *будет* $(g \circ f)(\mathfrak{X}) = g(f(\mathfrak{X}))$, *если только существуют* $f(\mathfrak{X})$ *и* $g(f(\mathfrak{X}))$.

◁ Согласно 2.3.2 для каждого $\lambda \in \mathbf{R}$ верно

$$\mu_{\mathfrak{X}}(-\infty, \lambda) = e_{\lambda}^{f(\mathfrak{X})} = [\![f(\mathfrak{X}) < \lambda^{\wedge}]\!] = \mu_{\mathfrak{X}} \circ f^{-1}(-\infty, \lambda).$$

Значит, спектральные меры $\mu_{f(\mathfrak{X})}$ и $\mu_{\mathfrak{X}} \circ f^{-1}$, определенные на $\mathscr{B}(\mathbf{R})$, совпадают на интервалах вида $(-\infty, \lambda)$. Отсюда обычными в теории меры рассуждениями выводится, что эти меры совпадают везде. Для обоснования второй части нужно лишь заметить что $(g \circ f)^{\leftarrow} = f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}$ и применить дважды уже установленное. ▷

Из 2.3.3 и 2.3.6 выводится следующий факт.

2.3.7. Теорема. *Для любого упорядоченного набора* $\mathfrak{X} := (x_1, \ldots, x_n)$ *элементов расширенного K-пространства E отображение*

$$\widehat{\mathfrak{X}}\colon f \to \widehat{\mathfrak{X}}(f) \quad (f \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}))$$

представляет собой единственный секвенциально o-непрерывный гомоморфизм f-алгебры $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ *в E, удовлетворяющий условию*

$$\widehat{\mathfrak{X}}(d\lambda_k) = x_k (k := 1, \ldots, n),$$

где $d\lambda_k\colon (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_k$ — *координатная функция в* $\mathbf{R}^n$.

2.3.8. Вкратце остановимся на двух реализациях расширенного K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$, которые можно получить с помощью 2.1.4. Напомним необходимые определения. Для компакта Q символом $Q_{\infty}(Q)$ обозначается множество всех непрерывных функций из Q в $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотном множестве.

Разложением единицы в булевой алгебре $\mathbf{B}$ называют отображение $e\colon \mathbf{R} \to \mathbf{B}$, удовлетворяющее условиям:

(1) $s \leqslant t \to e(s) \leqslant e(t) \quad (s, t \in \mathbf{R})$;

(2) $\bigvee\limits_{t \in \mathbf{R}} e(t) = \mathbf{1}, \quad \bigwedge\limits_{t \in \mathbf{R}} e(t) = \mathbf{O}$;

(3) $\bigvee\limits_{s \in \mathbf{R}, s < t} e(s) = e(t) \quad (t \in \mathbf{R})$.

Пусть $\mathfrak{R}(\mathbf{B})$ — множество всех разложений единицы в $\mathbf{B}$.

2.3.9. Теорема. *Пусть* $\mathbf{B}$ — *полная булева алгебра. Множество* $\mathfrak{R}(\mathbf{B})$ *с подходящими операциями и порядком представляет собой расширенное K-пространство. Отображение, сопоставляющее элементу* $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ *разложение единицы* $\lambda \to [\![x < \lambda^{\wedge}]\!]$ $(\lambda \in \mathbf{R})$, *является изоморфизмом K-пространств* $\mathscr{R}{\downarrow}$ *и* $\mathfrak{R}(\mathbf{B})$.

2.3.10. Теорема. *Пусть* Q — *стоуновский компакт полной булевой алгебры* $\mathbf{B}$, *а* $\mathscr{R}$ — *поле действительных чисел в модели* $V^{(\mathbf{B})}$. *Векторная решетка* $C_{\infty}(Q)$ *изоморфна расширенному K-пространству* $\mathscr{R}{\downarrow}$. *Изоморфизм устанавливается сопоставлением элементу* $x \in \mathscr{R}{\downarrow}$ *функции* $\widehat{x}\colon Q \to \overline{\mathbf{R}}$ *по формуле*

$$\widehat{x}(q) = \inf \{\lambda \in \mathbf{R} \colon [\![x < \lambda^{\wedge}]\!] \in q\}.$$

2.3.11. Примечания.

(1) Понятия единицы, единичного элемента и характеристики (спектральной функции элемента) ввел Г. Фрейденталь. Им же установлена спектральная теорема, см. 2.3.5, а также [10, 19]. Из теоремы 2.3.9 вытекает, что для полной булевой алгебры $\mathbf{B}$ множество разложений единицы является расширенным K-пространством, база которого изоморфна $\mathbf{B}$. Этот факт принадлежит Л. В. Канторовичу [19]. Реализацию произвольного K-пространства в виде фундамента в $\mathfrak{R}(\mathbf{B})$ получил А. Г. Пинскер (см. [19]). Из 2.2.8 (1) и 2.3.10 вытекает реализация произвольного

K-пространства в виде фундамента в $C_\infty(Q)$. Этот факт впервые установили независимо Б. З. Вулих и Т. Огасавара (см. [10, 19]).

(2) Из 2.3.4 вытекает, что всякая спектральная функция со значениями в σ-алгебре определяет спектральную меру на борелевской σ-алгебре действительной прямой. Этот факт впервые указал В. И. Соболев в [41]. Однако в [41] предполагалось, что такую меру можно получить методом продолжения Каратеодори. Как показал Д. А. Владимиров, для полной булевой алгебры счетного типа продолжения по Каратеодори возможно лишь в том случае, когда она регулярна. Итак, метод продолжения, приводящий к 2.3.4, существенно отличается от продолжения по Каратеодори и основан на представлении Люмиса — Сикорского булевых σ-алгебр. М. Райт получил утверждение 2.3.4 как следствие из установленной им теоремы Рисса для операторов со значениями в K-пространстве.

(3) Борелевские функции от элементов произвольного K-пространства с единицей, по-видимому, впервые рассмотрел В. И. Соболев (см. [10, 41]). Теорема 2.3.6 в приведенной общности получена в [29]. В [29] строится также борелевское функциональное исчисление (счетных или несчетных) наборов элементов произвольного K-пространства. Булевозначное доказательство теоремы 2.3.7 приводится также в [55].

(4) Другие аспекты булевозначного анализа векторных решеток см. [12, 13, 24, 27, 39, 55—57, 75—77].

ГЛАВА 3

ИНФИНИТЕЗИМАЛИ В ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ

Апология инфинитезимали, данная А. Робинсоном, немедленно открыла новые возможности в теории банаховых пространств. Центральной конструкцией здесь стало понятие нестандартной оболочки пространства, т. е. фактора внешнего подпространства элементов с конечной нормой по монаде пространства (=набору элементов с бесконечно малой нормой). Об адаптации нестандартных оболочек к теории решеток идет речь в первом параграфе текущей главы. Оставшаяся ее часть посвящена мало разработанной теме о комбинировании булевозначных и инфинитезимальных методов. Теоретически тут мыслимы два подхода. Первый может состоять в изучении булевозначной модели, реализованной во внутреннем мире теории внешних множеств. Этот подход намечен во втором параграфе. Другой подход состоит в изучении подходящего фрагмента нестандартной теории множеств (например, в форме ультрапроизведения или ультрапредела), размещенного внутри соответствующего булевозначного универсума. Такой подход изложен в третьем параграфе главы. Важно подчеркнуть, что при внешней схожести рассматриваемые формализмы приводят к принципиально различным конструкциям в теории K-пространств. Мы иллюстрируем возникающие особенности в связи с теорией циклических топологий и циклической компактностью, имеющих важное значение в булевозначном анализе.

3.1. НЕСТАНДАРТНЫЕ ОБОЛОЧКИ И БАНАХОВЫ РЕШЕТКИ

В геометрической теории банаховых пространств важное место занимает понятие нестандартной оболочки.

3.1.1. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — внутреннее нормированное пространство. Элемент $x \in E$ называют *конечным* (*бесконечно малым*), если $\|x\|$ — конечное (бесконечно малое) число. Обозначим через $\mathrm{fin}(E)$ и $\mu(E)$ внешние множества соответственно всех конечных и всех бесконечно малых элементов пространства E. Тогда $\mathrm{fin}(E)$ — (внешнее) векторное пространство над полем ${}^\circ\mathbf{R}$, а $\mu(E)$ — его подпространство. Фактор-пространство $\operatorname{fin}(E)/\mu(E)$ обозначают символом $\widehat{E}$. На $\widehat{E}$ вводят норму формулой

$$\|\pi x\| = \operatorname{st}(\|x\|) \in {}^\circ\mathbf{R} \quad (x \in \operatorname{fin}(E)),$$

где $\pi\colon \operatorname{fin}(E) \to \widehat{E}$ — фактор-гомоморфизм. При этом $(\widehat{E}, \|\cdot\|)$ — внешнее нормированное пространство, именуемое *нестандартной оболочкой*. Если внутренняя размерность E конечна, то пространство $\widehat{E}$ называют *гиперконечномерным*. Если пространство $(E, \|\cdot\|)$ стандартно, то ${}^\circ E$ с индуцированной из E нормой будет внешним нормированным пространством, а ограничение π на ${}^\circ E$ — изометрическим вложением ${}^\circ E$ в $\widehat{E}$. Обычно считают, что ${}^\circ E \subset \widehat{E}$.

3.1.2. Теорема. *Пространство $\widehat{E}$ банахово для каждого внутреннего (не обязательно полного) нормированного пространства E.*

$\triangleleft$ *Пусть* $B_X(a, r)$ — замкнутый шар в X с центром в a радиуса r. Возьмем последовательность вложенных шаров $B_{\widehat{E}}(\widetilde{x}_n, r_n)$, где $(x_n)_{n\in{}^\circ\mathbf{N}} \subset E$, $\widetilde{x}_n = \pi x_n$, $(r_n)_{n\in{}^\circ\mathbf{N}} \subset {}^\circ\mathbf{R}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Можно считать, что r_n убывает. Тогда последовательность внутренних замкнутых шаров $B_E(x_n, r_n + r_n/2^{n+1}) \subset E$ вложенная. В силу принципа идеализации существует элемент $x \in E$, содержащийся в каждом из этих шаров. Элемент $\widetilde{x} = \pi x$ — общая точка шаров $B_{\widehat{E}}(\widetilde{x}_n, r_n)$. $\triangleright$

3.1.3. Допустим, что E — внутренняя нормированная решетка. Тогда в $\widehat{E}$ можно ввести отношение порядка так, чтобы фактор-гомоморфизм π оказался положительным. Точнее, если $\widetilde{x} := \pi x$ и $\widetilde{y} := \pi y$, то полагают по определению

$$\widetilde{x} \leqslant \widetilde{y} \leftrightarrow (\exists z \in \mu(E))\, x \leqslant y + z.$$

Теорема. *Нестандартная оболочка $\widehat{E}$ — банахова решетка с секвенциально o-непрерывной нормой. Более того, всякая возрастающая и ограниченная по норме последовательность в $\widehat{E}$ будет порядково ограниченной.*

В то же время следует подчеркнуть, что нестандартная оболочка внутренней нормированной решетки может и не быть K-пространством (и даже K_σ-пространством; например, $\widehat{c_0}$, где c_0 — решетка сходящихся к нулю последовательностей).

3.1.4. Теорема. *Для внутренней нормированной решетки E равносильны утверждения:*

(1) *$\widehat{E}$ есть K-пространство;*

(2) *$\widehat{E}$ есть K_σ-пространство;*

(3) *$\widehat{E}$ имеет o-непрерывную норму;*

(4) *в E не существует замкнутой подрешетки, изоморфной изометрически и порядково банаховой решетке c_0.*

3.1.5. Говорят, что *нормированная решетка богата конечномерными подрешетками*, если для каждого конечного набора $x_1, \ldots, x_n \in {}^\circ E$, $n \in {}^\circ\mathbf{N}$, и произвольного $0 < \varepsilon \in {}^\circ\mathbf{R}$ существует конечномерная подрешетка $E_0 \subset {}^\circ E$ и элементы $y_1, \ldots, y_n \in E_0$ такие, что $\|x_k - y_k\| < \varepsilon$ $(k := 1, \ldots, n)$.

Стандартная банахова решетка E богата конечномерными подрешетками в том и только том случае, если ${}^\circ E$ содержится в некотором гиперконечномерном подпространстве оболочки $\widehat{E}$.

3.1.6. Предположим теперь, что E и F — внутренние нормированные пространства и $T\colon E \to F$ — внутренний линейный ограниченный оператор. Множество

$$c(T) := \{C \in \mathbf{R}\colon (\forall x \in E)\, \|Tx\| \leqslant C\|x\|\}$$

внутреннее и ограничено снизу. Поэтому существует $\|T\| := \inf c(T)$.

Если $\|T\|$ — конечное число, то из неравенства $\|Tx\| \leqslant \|T\| \, \|x\| \, (x \in E)$. Видно, что $T(\mathrm{fin}(E)) \subset \mathrm{fin}(E)$ и $T(\mu(E)) \subset \mu(F)$. Следовательно, корректно определен внешний оператор $\widehat{T}$: $\widehat{E} \to \widehat{F}$ формулой

$$\widehat{T}\pi x = \pi T x \quad (x \in E).$$

Оператор $\widehat{T}$ линеен (над ${}^{\circ}\mathbf{R}$) и ограничен, причем $\|\widehat{T}\| = \mathrm{st}\,\|T\|$. Естественно называть $\widehat{T}$ нестандартной оболочкой T.

Если E и F — нормированные решетки, а оператор T положителен, то $\widehat{T}$ — положительный секвенциально o-непрерывный оператор.

3.1.7. Нетрудно видеть, что для ограниченных операторов S и T выполняется $(S \circ T)^{\wedge} = \widehat{S} \circ \widehat{T}$, а кроме того, $\widehat{I}_E = I_{\widehat{E}}$, где I_X — тождественный оператор на X. Таким образом, операция нестандартной оболочки представляет собой ковариантный функтор (в подходящих категориях нормированных пространств). Возникает огромное число вопросов относительно общих свойств этого функтора. Как взаимодействует функтор нестандартной оболочки с другими функторами теории банаховых пространств (решеток)? Как преобразуются известные в геометрической теории банаховых пространств свойства (Радона — Никодима, Крейна — Мильмана и т. п.) при действии этого функтора? Как устроены оболочки конкретных пространств? Аналогичные вопросы можно сформулировать и для операторов, и т. д. С основными идеями и методами можно ознакомиться по обзорам [47, 50, 52]. Здесь же коротко отметим три важнейших направления и сформулируем простые иллюстрирующие утверждения.

3.1.8. Аналитическое описание нестандартных оболочек. Наиболее полно этот вопрос изучен для классических банаховых пространств, см. [52].

Теорема. **(1)** *Если E — внутреннее AL_p-пространство, где $1 \leqslant p$ — конечный элемент* $\mathbf{R}$, *то $\widehat{E}$ — это AL_r-пространство для $r := \mathrm{st}(p)$.*

(2) *Если E — внутреннее AL_p-пространство, где p — бесконечный элемент* $\mathbf{R}$, *или если E — внутреннее AM-пространство, то $\widehat{E}$ — это AM-пространство.*

(3) *Если Q — внутренний компакт, а $C(Q)$ — внутреннее пространство непрерывных функций из Q в* $\mathbf{R}$, *то $C(Q)^{\wedge}$ линейно изометрично $C(\widehat{Q})$, где $\widehat{Q}$ — внешнее пополнение Q в некоторой равномерности.*

В аксиоматической теории внешних множеств можно получать лишь общие результаты такого рода. Однако если работать в классической установке нестандартного анализа (т. е. в конечном фрагменте универсума фон Неймана), то возможно детальное описание нестандартных оболочек. Так, например, если нестандартная суперструктура ω_0-насыщена (ограничение снизу) и имеет свойство ω_0-изоморфизма (ограничение сверху), то нестандартная оболочка банаховой решетки $L_p([0, 1])$ изометрически изоморфна l_p-сумме k экземпляров пространства $L_p([0, 1]^k)$, где $k = 2^{\omega_0}$.

3.1.9. Локальная геометрия нормированных пространств. Некоторые свойства нормированного пространства являются «локальными» в том смысле, что определяются устройством и расположением его конечномерных подпространств. В этом смысле нестандартные оболочки устроены намного лучше. Так, например, часто случается, что если какое-то свойство выполнено «приближенно» на конечномерных подпространствах, то это же свойство в нестандартной оболочке выполняется уже «точно».

Пусть E и F — банаховы решетки. Говорят, что E финитно представима в F (как банахова решетка), если для каждой конечномерной подрешетки $E_0 \subset E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует линейный и решеточный изоморфизм T: $E_0 \to F$ такой, что $\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|x\| \; (x \in E_0)$.

Теорема. *Предположим, что E — стандартная банахова решетка, богатая конечномерными подрешетками* (3.1.5), *а F — внутренняя банахо-*

ва решетка. Тогда $^\circ E$ финитно представима в $\widehat{F}$ в том и только том случае, если $^\circ E$ линейно изометрична и решеточно изоморфна подрешетке в $\widehat{F}$.

3.1.10. Теоретико-модельные свойства. Введем язык первого порядка $\mathscr{L}_B$. Сигнатура языка — $\{=, +, P, Q\} \cup \mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел. Всякое банахово пространство E можно рассматривать как модель $\mathscr{L}_B$, интерпретируя $=$ и $+$ соответственно как равенство и сложение, P — как $\{x \in E\colon \|x\| \leqslant 1\}$, Q — как $\{x \in E\colon \|x\| \geqslant 1\}$ и, наконец, каждое $r \in \mathbf{Q}$ — как операцию умножения на r. Формулу φ языка $\mathscr{L}_B$ вида $(\mathrm{S}x_1), \ldots, (\mathrm{S}x_n)(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n)$, где S — ограниченный квантор, а φ_k — конъюнкция формул вида $u = v$, $P(u)$, $Q(u)$, называют ограниченной позитивной. Если φ — формула и m — натуральное число $(\neq 0)$, то φ^m — новая формула, которая строится так: в подформулах $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ заменяют $u = v$ на $P(m(u - v))$, $P(u)$ на $P((1 - 1/m)u)$, $Q(u)$ на $Q((1 + 1/m)u)$. Если φ^m выполняется в E для всех $m \in \mathbf{N}$, то говорят, что φ *выполнено в E аппроксимативно*. Банаховы пространства E и F называют *аппроксимативно эквивалентными*, если в них выполняются аппроксимативно одни и те же ограниченные позитивные формулы.

Теорема. (1) *Банаховы пространства аппроксимативно эквивалентны в том и только том случае, если они имеют изометричные нестандартные оболочки.*

(2) *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, а μ и ν — σ-конечные меры. Пространства $L_p(\mu)$ и $L_p(\nu)$ аппроксимативно эквивалентны в том и только том случае, если меры μ и ν имеют одно и то же конечное число атомов или же обе имеют бесконечное число атомов.*

3.1.11. Примечания.

(1) Нестандартная оболочка банахова пространства была введена Люксембургом [61]. Разновидностью нестандартной оболочки является ультрапроизведение банаховых пространств, введенное Дакуня — Кастелем и Кривиным [45]. О роли этих понятий в теории банаховых пространств и важнейших результатах, а также дальнейшую библиографию см. [47, 50, 52].

(2) Язык первого порядка, описанный в 3.1.10, применил Хенсон [48], а затем Штерн [73, 74]. Понятия финитной представимости возникли в теории банаховых пространств задолго до привлечения теоретико-модельной техники. Оно введено А. Дворецким (термин принадлежит Джеймсу).

(3) Относительно 3.1.4, 3.1.5 и 3.1.9 см. [44, 52]. Результаты из 3.1.8 установлены в [51] и [49], а 3.1.10 — в [49].

3.2. БУЛЕВОЗНАЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В НЕСТАНДАРТНОМ УНИВЕРСУМЕ

В булевозначном анализе выделен новый важный класс математических структур, обладающих свойством цикличности (=устойчивости относительно перемешиваний, см. 1.2.6 (2)). Эти объекты представляют собой спуски соответствующих образований в $V^{(\mathbf{B})}$, см. 1.2.8. Развитая инфинитезимальным анализом методология, по существу, связана с созданием специального аппарата для изучения фильтров — монадологии.

В самом деле, пусть $\mathscr{F}$ — стандартный фильтр, $^\circ\mathscr{F}$ — его *стандартное ядро* и $^a\mathscr{F} := \mathscr{F} \setminus {}^\circ\mathscr{F}$ — внешнее множество удаленных элементов $\mathscr{F}$. Если

$$\mu(F) := \cap {}^\circ\mathscr{F} = \cup {}^a\mathscr{F}$$

— *монада* $\mathscr{F}$, то $\mathscr{F} = {}^*\{\widetilde{\mu(\mathscr{F})}\}$, т. е. $\mathscr{F}$ — стандартизация надмножеств монады. Понятие монады — центральное в теории внешних множеств. В этой связи развитие комбинированных нестандартных методов, в частности, одновременное применение инфинитезималей и подъемов в теории K-пространств, требует адаптации понятия монады для фильтров и их изображений. В этом параграфе изучается подход, при котором обычная монадология применяется к изображениям — спускам объектов. Альтернативный путь — применение стандартной монадологии внутри $V^{(\mathbf{B})}$ с последующим спуском — рассмотрим в следующем параграфе.

3.2.1. Напомним некоторые конструкции из теории фильтров в $V^{(\mathbf{B})}$. Пусть $\mathcal{G}$ — базис фильтра в X, причем $X \in \mathcal{P}(V^{(\mathbf{B})})$. Положим

$$\mathcal{G}' := \{F \in \mathcal{P}(X\uparrow)\downarrow : (\exists G \in \mathcal{G})\, [\![F \supset G\uparrow]\!] = 1\};$$

$$\mathcal{G}'' := \{G\uparrow :\ G \in \mathcal{G}\}.$$

Тогда $\mathcal{G}'\uparrow$ и $\mathcal{G}''\uparrow$ — базисы одного и того же фильтра $\mathcal{G}^\uparrow$ в $X\uparrow$ внутри $V^{(\mathbf{B})}$. Фильтр $\mathcal{G}^\uparrow$ называют *подъемом* $\mathcal{G}$. Если $\operatorname{mix}(\mathcal{G})$ — совокупность перемешиваний непустых семейств элементов $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}$ состоит из циклических множеств, то $\operatorname{mix}(\mathcal{G})$ — базис фильтра в X и $\mathcal{G}^\uparrow = \operatorname{mix}(\mathcal{G})^\uparrow$.

Если $\mathcal{F}$ — фильтр в X внутри $V^{(\mathbf{B})}$, то полагают $\mathcal{F}^\downarrow := \widetilde{\{F\downarrow :\ F \in \mathcal{F}\downarrow\}}$. Фильтр $\mathcal{F}^\downarrow$ в $X\downarrow$ называют *спуском* $\mathcal{F}$. Базис фильтра $\mathcal{G}$ в $X\downarrow$ называют *экстенсиональным*, если имеется фильтр $\mathcal{F}$ в X такой, что $\widetilde{\mathcal{G}} = \mathcal{F}^\downarrow$.

Наконец, спуски ультрафильтров в X называют *проультрафильтрами* в $X\downarrow$. Фильтр, имеющий базис из циклических множеств, называется *циклическим.* Проультрафильтры — это максимальные циклические фильтры.

3.2.2. Фиксируем стандартную полную булеву алгебру $\mathbf{B}$ и соответствующий булевозначный универсум $V^{(\mathbf{B})}$, мыслимый как состоящий из внутренних множеств. Если A — внешнее множество, то *циклическую оболочку* $\operatorname{mix}(A)$ вводят следующим образом. Говорят, что элемент $x \in V^{(\mathbf{B})}$ лежит в $\operatorname{mix}(A)$, если для некоторого внутреннего семейства $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов A и внутреннего разбиения $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ единицы в $\mathbf{B}$ точка x есть перемешивание $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, т. е. $b_\xi x = b_\xi a_\xi$ при $\xi \in \Xi$, или, что то же самое, $x = \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi a_\xi)$.

3.2.3. Теорема. *Для фильтра $\mathcal{F}$ в $X\downarrow$ рассмотрим*

$$\mathcal{F}\uparrow\downarrow := \widetilde{\{F\uparrow\downarrow :\ F \in \mathcal{F}\}}.$$

Тогда $\operatorname{mix}(\mu(\mathcal{F})) = \mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow)$ *и* $\mathcal{F}\uparrow\downarrow$ *— наибольший циклический фильтр, более грубый, чем* $\mathcal{F}$.

В связи с этой теоремой монаду $\mathcal{F}$ называют *циклической*, если $\mu(\mathcal{F}) = \operatorname{mix}(\mu(\mathcal{F}))$. К сожалению, цикличность монады не характеризует полностью экстенсиональность фильтров. В этой связи следует ввести *циклически монадную оболочку* $\mu_c(U)$ внешнего множества U. Именно

$$x \in \mu_c(U) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} V = V\uparrow\downarrow)\quad V \supset U \rightarrow x \in V.$$

В частности, если $\mathbf{B} = \{0, 1\}$, то $\mu_c(U)$ совпадает с монадой стандартизации внешнего фильтра надмножеств U — с *(дискретной) монадной оболочкой* $\mu_d(U)$.

3.2.4. *Циклически монадная оболочка множества представляет собой циклическую оболочку его монадной оболочки:*

$$\mu_c(U) = \operatorname{mix}(\mu_d(U)).$$

Особую роль играют *существенные точки* $X\downarrow$, составляющие внешнее множество ${}^eX$. По определению в ${}^eX$ попадают элементы монад проультрафильтров в $X\downarrow$.

3.2.4. Критерий существенности. *Точка существенна в том и только том случае, если ее можно отделить стандартным циклическим множеством от любого не содержащего ее стандартного циклического множества.*

3.2.5. *Если в монаде ультрафильтра $\mathcal{F}$ есть существенная точка, то $\mu(\mathcal{F}) \subset {}^eX$ и, кроме того, $\mathcal{F}\uparrow\downarrow$ — проультрафильтр.*

На основе приведенных конструкций выводим следующие утверждения.

3.2.6. Критерий экстенсиональности фильтра. *Фильтр является экстенсиональным в том и только том случае, если его монада представляет собой циклически монадную оболочку множества своих существенных точек.*

3.2.7. *Стандартное множество циклично в том и только том случае, если оно является циклически монадной оболочкой своих существенных точек.*

3.2.8. Нестандартный критерий перемешивания фильтров. *Пусть* $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *— стандартное семейств экстесиональных фильтров и* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *— стандартное разбиение единицы. Фильтр* $\mathscr{F}$ *является перемешиванием* $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *с вероятностями* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *в том и только том случае, если*

$$(\forall^{st}\xi\in\Xi)\quad b_\xi\mu(\mathscr{F})=b_\xi\mu(\mathscr{F}_\xi).$$

Особенность применений излагаемого подхода при изучении спусков топологических пространств — в специальной новой роли существенных точек. Отметим в этой связи некоторые их свойства.

3.2.9. *Справедливы утверждения:*

(1) *образ существенной точки при экстенсиональном отображении — существенная точка в образе;*

(2) *пусть E — некоторое стандартное множество и X — стандартный элемент $V^{(\mathbf{B})}$. Рассмотрим произведение $X^{E^\wedge}$ внутри $V^{(\mathbf{B})}$, где $E^\wedge$ — стандартное имя E в $V^{(\mathbf{B})}$. Если x — существенная точка $X^{E^\wedge}{\downarrow}$, то для всякого стандартного $e\in E$ точка $x{\downarrow}(e)$ — существенная в $X{\downarrow}$;*

(3) *пусть $\mathscr{F}$ — циклический фильтр в $X{\downarrow}$ и ${}^e\mu(\mathscr{F}):=\mu(\mathscr{F})\cap{}^eX$ — множество существенных точек его монады. Тогда*

$${}^e\mu(\mathscr{F})={}^e\mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}).$$

Пусть $(X,\mathscr{U})$ — равномерное пространство внутри $V^{(\mathbf{B})}$. Равномерное пространство $(X{\downarrow},\mathscr{U}^{\downarrow})$ называют *прокомпактным* (=циклически компактным), если $(X,\mathscr{U})$ компактно внутри $V^{(\mathbf{B})}$. Аналогичный смысл вкладывают в термин *прополная ограниченность* и т. п.

3.2.10. Нестандартный критерий прокомпактности. *Каждая существенная точка $X{\downarrow}$ околостандартна в том и только том случае, если $X{\downarrow}$ прокомпактно.*

Из приведенной теоремы 3.2.10 легко видеть отличия булевозначного критерия прокомпактности от привычного: «компактное пространство — это пространство с околостандартными точками». Наличие колоссального количества прокомпактных и некомпактных пространств обеспечивает разнообразие примеров несущественных точек. Отметим здесь же, что совместное применение 3.2.9 и 3.2.10 (2) позволяет, конечно же, дать нестандартное доказательство естественного аналога теоремы Тихонова для произведения прокомпактных пространств — «спуска теоремы Тихонова в $V^{(\mathbf{B})}$».

3.2.11. Нестандартный критерий пропредкомпактности. *Стандартное пространство является спуском вполне ограниченного равномерного пространства в том и только том случае, если каждая его существенная точка предоколостандартна.*

Применим изложенный подход для описания o-сходимости в K-пространстве Y. Для экономии слов мы ограничимся рассмотрением фильтров, содержащих порядковые интервалы (или, что то же самое, фильтров с *ограниченными монадами*). Помимо этого, в соответствии с названной целью K-пространство Y считается *расширенным*. На основании теоремы Гордона пространство Y считаем канонически реализованным как спуск $\mathscr{R}{\downarrow}$ элемента $\mathscr{R}$, представляющего поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ в булевозначном универсуме $V^{(\mathbf{B})}$, построенном над *базой* $\mathbf{B}$ пространства Y.

Условимся символом $\mathscr{E}$ обозначать *порядковый фильтр единиц* в Y, т. е. $\mathscr{E} := \{\varepsilon \in Y_+ : [\![\varepsilon = 0]\!] = 0\}$. Запись $x \approx y$ выражает бесконечную близость элементов x, $y \in Y$, порожденную спуском обычной топологии $\mathscr{R}$ в $V^{(\mathbf{B})}$, т. е. $x \approx y \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon \in \mathscr{E})\ |x - y| < \varepsilon$. Здесь и в дальнейшем считается, что $a < b$ для a, $b \in Y$, если $[\![a < b]\!] = \mathbf{1}$, т. е. $a > b \leftrightarrow a - b \in \mathscr{E}$. Таким образом, тут имеется отступление от соглашений теории упорядоченных векторных пространств. Разумеется, это обстоятельство вызвано необходимостью соблюдать принципы введения обозначений при спусках и подъемах. Пусть ${}^{\approx}Y$ — *околостандартная часть* Y. Для $y \in {}^{\approx}Y$ символом ${}^{\circ}y$ (или $\mathrm{st}(y)$) указана *стандартная часть* y, т. е. единственный стандартный элемент, бесконечно близкий к y.

3.2.12. Теорема. *Для стандартного фильтра $\mathscr{F}$ в Y и стандартного $z \in Y$ справедливы утверждения:*

(1) $\inf\limits_{F \in \mathscr{F}} \sup F \leqslant z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y \leqslant z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y \leqslant z$;

(2) $\sup\limits_{F \in \mathscr{F}} \inf F \geqslant z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y \geqslant z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y \geqslant z$;

(3) $\inf\limits_{F \in \mathscr{F}} \sup F \geqslant z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y \geqslant z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y \geqslant z$;

(4) $\sup\limits_{F \in \mathscr{F}} \inf F \leqslant z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y \leqslant z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y \leqslant z$;

(5) $\mathscr{F} \overset{\circ}{\to} z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{e}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow))\, y \approx z \leftrightarrow (\forall y \in \mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}))\, y \approx z$.

Здесь ${}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow) := \mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow) \cap {}^{\approx}Y$ и, как обычно, ${}^{e}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow)$ — множество существенных точек монады $\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow)$, т. е. ${}^{e}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow) = \mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow) \cap {}^{e}\mathscr{R}$.

$\lhd$ Для иллюстрации установим (3).

Пусть сначала в более широком множестве ${}^{\cdot}\mu(\mathscr{F})\uparrow\downarrow)$ есть элемент y, для которого ${}^{\circ}y \geqslant z$. При всяком стандартном $F \in \mathscr{F}$ выполнено $y \in F\uparrow\downarrow$. Значит, для $\varepsilon \in {}^{\circ}\mathscr{E}$ будет $y > z - \varepsilon$ и $\sup F = \sup F\uparrow\downarrow > z - \varepsilon$. По принципу Лейбница заключаем $(\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathscr{F})\, (\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\ \sup F \geqslant z$, т. е. $(\forall F \in \mathscr{F})\ \sup F \geqslant z$ и $\inf_{F \in \mathscr{F}} \sup F \geqslant z$.

Для доказательства еще не проверенных соотношений, прежде всего, заметим, что в силу свойств верхнего предела в $\mathbf{R}$ и принципа переноса булевозначного анализа выполнено

$$[\![(\exists \mathscr{G})(\mathscr{G} \text{ — ультрафильтр в } \mathscr{R} \wedge \mathscr{G} \supset \mathscr{F}^{\uparrow}) \wedge \inf_{G \in \mathscr{G}} \sup G \geqslant z]\!] = \mathbf{1}.$$

На основании принципа максимума имеется проультрафильтр $\mathscr{G}$ такой, что $\mathscr{G} \supset \mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}$ и $\inf_{G \in \mathscr{G}} \sup G \geqslant z$. Используя принципы переноса и идеализации, последовательно получаем

$$\begin{gathered}
(\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\ \sup G \geqslant z \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\ [\![\sup G\uparrow \geqslant z]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})\ [\![(\forall \varepsilon > 0)(\exists g \in G\uparrow)\ g > z - \varepsilon]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\forall \varepsilon > 0)(\exists g \in G\uparrow\downarrow)\ g > z - \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\exists g \in G\uparrow\downarrow)\ g > z - \varepsilon \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{G}_0 \subset \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st\,fin}} \mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E})(\exists g) \\
(\forall G \in \mathscr{G}_0)(\forall \varepsilon \in \mathscr{E}_0)\ (g \in G\uparrow\downarrow \wedge g > z - \varepsilon) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists g)(\forall^{\mathrm{st}} G \in \mathscr{G})(\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)\ (g \in G\uparrow\downarrow \wedge g > z - \varepsilon) \leftrightarrow \\
\leftrightarrow (\exists g \in \mu(\mathscr{G}^{\uparrow\downarrow}))\, {}^{\circ}g \geqslant z \leftrightarrow (\exists g \in \mu(\mathscr{G}))\ {}^{\circ}g \geqslant z.
\end{gathered}$$

Остается отметить, что

$$\mu(\mathscr{G}) \subset {}^{e}\mu(\mathscr{F}^{\uparrow\downarrow}) = {}^{e}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow) \subset {}^{\cdot}\mu(\mathscr{F}\uparrow\downarrow).\ \rhd$$

3.2.13. Примечания.

(1) Монадология как философское учение развита Г. В. Лейбницем [37]. Общая теория монад фильтров предложена В. Люксембургом [61].

Циклические топологии широко используются в булевозначном анализе. Теория циклической компактности и принципы изображения фильтров представлены в [24, 33, 35]. Наше изложение циклической монадологии следует, в основном, в [33, 35].

(2) Рассмотрение ультрапроизведений внутри булевозначного универсума не вызывает принципиальных сложностей и предпринималось в некоторых работах. Мы не обсуждаем здесь характера возникновения робинсоновской стандартизации в $V^{(\mathbf{B})}$, — по сути, здесь возможен аксиоматический подход. Принципиально возникновение наростов на K-пространствах, происходящее, вообще говоря, не так, как при появлении идеальных элементов при стандартизации исходного пространства (эффект существенных точек). Наше изложение следует [28].

3.3. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНУТРИ БУЛЕВОЗНАЧНОГО УНИВЕРСУМА

В этом параграфе мы считаем фиксированной некоторую полную булеву алгебру $\mathbf{B}$ и отделимый универсум $V^{(\mathbf{B})}$.

Применяя средства инфинитезимального анализа, мы имеем в виду классический подход А. Робинсона, реализованный внутри $V^{(\mathbf{B})}$. Иными словами, в конкретных ситуациях подразумеваются классический и внутренний универсумы и соответствующее $*$-изображение — робинсоновская стандартизация, представленные элементами $V^{(\mathbf{B})}$. При этом нестандартный мир предполагается должным образом насыщенным.

3.3.1. Под *спуск-стандартизацией* по определению понимается спуск $*$-изображения. Наряду с термином «спуск-стандартизация» используются также выражения: «$\mathbf{B}$-стандартизация», «простандартизация» и т. п. При этом для робинсоновской стандартизации $\mathbf{B}$-множества A применяется символ $^*A$. Соответственно *спуск-стандартизация множества A* с $\mathbf{B}$-структурой (т. е. подмножества $V^{(\mathbf{B})}$), по определению представленная $(^*(A\uparrow))\downarrow$, обозначается символом $_*A$ (здесь подразумевается, что $A\uparrow$ — это элемент рассматриваемого в $V^{(\mathbf{B})}$ стандартного мира классических множеств). Таким образом, $^*a \in {}_*A \leftrightarrow a \in A\uparrow\downarrow$. Естественным путем определена и *спуск-стандартизация* $_*\Phi$ *экстенсионального соответствия* Φ. При необходимости рассматривать спуск-стандартизации стандартных имен элементов *универсума фон Неймана* $\mathbf{V}$ мы для удобства используем сокращения, полагая $^*x := {}^*(x^\wedge)$ и соответственно $_*x := (^*x)\downarrow$ для $x \in \mathbf{V}$. Правила расстановки и опускания (по умолчанию) звездочек при использовании спуск-стандартизации без особых оговорок считаются столь же свободными, как и применяемые для робинсоновского $*$-изображения.

3.3.2. Принцип переноса. *Пусть $\varphi = \varphi(x, y)$ — формула теории Цермело — Френкеля (не содержащая никаких свободных переменных, кроме x и y). Для непустого в $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ элемента F и каждого z выполнено*

$$(\exists x \in {}_*F)[\![\varphi(x, {}^*z)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow (\exists x \in F\downarrow)[\![\varphi(x, z)]\!] = \mathbb{1};$$

$$(\forall x \in {}_*F)[\![\varphi(x, {}^*z)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow (\forall x \in F\downarrow)[\![\varphi(x, z)]\!] = \mathbb{1}.$$

Если G — некоторое подмножество $V^{(\mathbf{B})}$, то справедливы эквивалентности

$$(\exists x \in {}_*G)[\![\varphi(x, {}^*z)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow (\exists x \in G\uparrow\downarrow)[\![\varphi(x, z)]\!] = \mathbb{1};$$

$$(\forall x \in {}_*G)[\![\varphi(x^*, z)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow (\forall x \in G)[\![\varphi(x, z)]\!] = \mathbb{1}.$$

3.3.3. Принцип идеализации. *Пусть $X\uparrow$, Y — (классические) элементы $V^{(\mathbf{B})}$ и $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — формула теории Цермело — Френкеля. Для внутреннего в $V^{(\mathbf{B})}$ элемента z выполнено:*

$$(\forall^{\mathrm{fin}} A \subset X)(\exists y \in {}_*Y)(\forall x \in A)[\![\varphi({}^*x, y, z)]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists y \in {}_*Y)(\forall x \in X)[\![\varphi({}^*x, y, z)]\!] = \mathbb{1}.$$

Для фильтра $\mathscr{F}$ из множеств с B-структурой его *спуск-монаду* $m(\mathscr{F})$ *определяют соотношением*

$$m(\mathscr{F}) := \bigcap_{F \in \mathscr{F}} {}_*F.$$

3.3.4. Теорема. *Пусть* $\mathscr{S}$ — *множество фильтров и* $\mathscr{S}^\uparrow := \{\mathscr{F}^\uparrow : \mathscr{F} \in \mathscr{S}\}$ — *его подъем в* $V^{(\mathbf{B})}$. *Эквивалентны утверждения:*

(1) *множество циклических оболочек* $\mathscr{S}\uparrow\downarrow := \{\mathscr{F}\uparrow\downarrow : \mathscr{F} \in \mathscr{S}\}$ *ограничено сверху;*

(2) *множество* $\mathscr{S}^\uparrow$ *ограничено сверху внутри* $V^{(\mathbf{B})}$;

(3) $\bigcap\{m(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in \mathscr{S}\} \neq \varnothing$.

При выполнении эквивалентных условий (1) — (3) *выполнено*

$$m(\sup \mathscr{S}\uparrow\downarrow) = \bigcup\{m(\mathscr{F}) : \mathscr{F} \in \mathscr{S}\};$$

$$\sup \mathscr{S}^\uparrow = (\sup \mathscr{S})^\uparrow.$$

Полезно подчеркнуть, что для бесконечного множества спуск-монад их объединение и даже циклическая оболочка этого объединения спуск-монадой, вообще говоря, не является. Ситуация здесь повторяет общеизвестную для обычных монад.

3.3.5. Нестандартные критерии проультрафильтра. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\mathfrak{A}$ — *это проультрафильтр;*

(2) $\mathfrak{A}$ — *это экстенсиональный фильтр с минимальной по включению спуск-монадой;*

(3) *имеет место представление*

$$\mathfrak{A} = (x)^\downarrow := \{A\uparrow\downarrow : x \in {}_*A\}$$

для каждой точки x *из спуск-монады* $m(\mathfrak{A})$;

(4) $\mathfrak{A}$ — *это экстенсиональный фильтр, спуск-монаду которого легко поймать циклическим множеством, т. е. для всякого* $U = U\uparrow\downarrow$ *верно либо* $m(\mathfrak{A}) \subset {}_*U$, *либо* $m(\mathfrak{A}) \subset {}_*(U')$;

(5) $\mathfrak{A}$ — *это циклический фильтр такой, что для всякого циклического* U *при* $U_* \cap m(\mathfrak{A}) \neq \varnothing$ *будет* $U \in \mathfrak{A}$.

3.3.6. Нестандартный критерий перемешивания фильтров. *Пусть* $(\mathscr{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *семейство фильтров,* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — *разбиение единицы и* $\mathscr{F} = \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi \mathscr{F}_\xi^\uparrow)$ — перемешивание $(\mathscr{F}_\xi^\uparrow)_{\xi\in\Xi}$ *с вероятностями* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$. *Тогда*

$$m(\mathscr{F}^\downarrow) = \operatorname*{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi m(\mathscr{F}_\xi)).$$

Полезно сопоставить 3.3.6 с 3.2.8.

Точку y из множества ${}_*X$ называют *спуск-околостандартной* или просто *околостандартной*, если нет опасности недоразумений, если для некоторого $x \in X\downarrow$ будет ${}^*x \approx y$ (т. е. $(x; y) \in m(\mathscr{U}^\downarrow)$, где $\mathscr{U}$ — равномерность на X).

3.3.7. Нестандартный критерий прокомпактности. *Множество* $A\uparrow\downarrow$ *прокомпактно в том и только том случае, если каждая точка* ${}_*A$ *спуск-околостандартна.*

Стоит сравнить 3.3.7 с 3.2.9.

Наконец, сформулируем общие принципы использования спуск-стандартизации.

3.3.8. *Пусть* $\varphi = \varphi(x)$ — *формула теории Цермело — Френкеля. Оценка истинности* φ *постоянна на спуск-монаде любого проультрафильтра* $\mathfrak{A}$, *т. е.*

$$(\forall x, y \in m(\mathfrak{A}))\, [\![\varphi(x)]\!] = [\![\varphi(y)]\!].$$

3.3.9. Теорема. *Пусть* $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — *формула теории Цермело — Френкеля и* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — *некоторые фильтры множеств с* B-*структурой. Име-*

ют место следующие правила квантификации (*при внутренних* y, z *в* $V^{(\mathbf{B})}$):

(1) $(\exists x \in m(\mathcal{F}))\,[\![\varphi(x, y, z)]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\forall F \in \mathcal{F})(\exists x \in {}_*F)\,[\![\varphi(x, y, z)]\!] = \mathbf{1}$;

(2) $(\forall x \in m(\mathcal{F}))\,[\![\varphi(x, y, z)]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\exists F \in F^{\uparrow\downarrow})(\forall x \in {}_*F)\,[\![\varphi(x, y, z)]\!] = \mathbf{1}$;

(3) $(\forall x \in m(F))(\exists y \in m(\mathcal{G}))\,[\![\varphi(x, y, z)]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall G \in \mathcal{G})(\exists F \in \mathcal{F}^{\uparrow\downarrow})(\forall x \in {}_*F)(\exists y \in {}_*G)\,[\![\varphi(x, y, z)]\!] = \mathbf{1}$;

(4) $(\exists x \in m(\mathcal{F}))(\forall y \in m(\mathcal{G}))\,[\![\varphi(x, y, z)]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists G \in \mathcal{G}^{\uparrow\downarrow})(\forall F \in \mathcal{F})(\exists x \in {}_*F)(\forall y \in {}_*G)\,[\![\varphi(x, y, z)]\!] = \mathbf{1}$.

При этом для стандартизованных свободных переменных будет

(1′) $(\exists x \in m(F))\,[\![\varphi(x, {}^*y, {}^*z)]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\forall F \in \mathcal{F})(\exists x \in F\uparrow\downarrow)\,[\![\varphi(x, y, z)]\!] = \mathbf{1}$;

(2′) $(\forall x \in m(\mathcal{F}))\,[\![\varphi(x, {}^*y, {}^*z)]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\exists F \in \mathcal{F}^{\uparrow\downarrow})(\forall x \in F)\,[\![\varphi(x, y, z)]\!] = \mathbf{1}$;

(3′) $(\forall x \in m(\mathcal{F}))(\exists y \in m(\mathcal{G}))\,[\![\varphi(x, y, {}^*z)]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\forall G \in \mathcal{G})(\exists F \in \mathcal{F}^{\uparrow\downarrow})(\forall x \in F)(\exists y \in G\uparrow\downarrow)\,[\![\varphi(x, y, z)]\!] = \mathbf{1}$;

(4′) $(\exists x \in m(F))(\forall y \in m(\mathcal{G}))\,[\![\varphi(x, y, {}^*z)]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists G \in \mathcal{G}^{\uparrow\downarrow})(\forall F \in \mathcal{F})(\exists x \in F\uparrow\downarrow)(\forall y \in G)\,[\![\varphi(x, y, z)]\!] = \mathbf{1}$.

ГЛАВА 4

НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Положительные операторы — центральный объект теории упорядоченных векторных пространств.

Принципиальная возможность, доставляемая нестандартными методами, состоит в том, что возникающие формализмы позволяют существенно упростить анализ операторов, сводя дела к фукционалам, а иногда даже и к обыкновенным числам. В текущей главе общие приемы нестандартного анализа операторов мы иллюстрируем в связи с проблемами продолжения и разложения операторов, в связи с устройствами гомоморфизмов и операторов Магарам.

Особое внимание мы уделили также проблеме порождения осколков положительного оператора, так как их полное описание удалось легко осуществить последовательным использованием нестандартного анализа и в булевозначном, и в инфинитезимальном вариантах.

4.1. ПРОДОЛЖЕНИЕ И РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Здесь мы покажем, что многие вопросы теории порядково ограниченных операторов сводятся с помощью булевозначных моделей к случаю функционалов.

4.1.1. Утверждение о том, что E есть векторная решетка, записывается ограниченной формулой, скажем $\varphi(E, \mathbf{R})$. Поэтому в силу принципа ограниченного переноса будет $[\![\varphi(E^\wedge, \mathbf{R}^\wedge)]\!] = \mathbf{1}$, т. е. $E^\wedge$ — векторная решетка над упорядоченным полем $\mathbf{R}^\wedge$ внутри $V^{(\mathbf{B})}$. Пусть $E^{\wedge\sim}$ — пространство всех $\mathbf{R}^\wedge$-линейных регулярных функционалов из $E^\wedge$ в $\mathcal{R}$. Нетрудно видеть, что $E^{\wedge\sim} := L^\sim(E^\wedge, \mathcal{R})$ — это K-пространство в модели $V^{(\mathbf{B})}$. Спуск $E^{\wedge\sim}\downarrow$, как и спуск всякого K-пространства, будет K-пространством. Рассмотрим расширенное K-пространство $F := \mathcal{R}\downarrow$ (см. 2.2.4). Напомним, что для $T \in L^\sim(E, F)$ подъем $T\uparrow$ определен правилом $[\![Tx = T\uparrow(x^\wedge)]\!] = \mathbf{1}$ $(x \in E)$. Заметим, что если $\tau \in E^{\wedge\sim}$, то $[\![\tau : E^\wedge \to \mathcal{R}]\!] = \mathbf{1}$, поэтому определен оператор $\tau\downarrow$: $E \to F$. При этом $\tau\downarrow\uparrow = \tau$. С другой стороны, $T\uparrow\downarrow = T$.

4.1.2. Теорема. *Для любого $T \in L^{\sim}(E, F)$ подъем $T\uparrow$ есть регулярная $\mathbf{R}^{\wedge}$-форма на $E^{\wedge}$ внутри $V^{(\mathbf{B})}$, т. е $[\![T\uparrow \in E^{\wedge\sim}]\!] = 1$. Отображение $T \mapsto T\uparrow$ является линейным и решеточным изоморфизмом K-пространств $L^{\sim}(E, F)$ и $E^{\wedge\sim}\downarrow$.*

4.1.3. Отметим некоторые следствия из 4.1.2. Сначала дадим необходимые определения. Оператор $S \in L^{\sim}(E, F)$ называют осколком оператора $T \geqslant 0$, если $S \wedge (T - S) = 0$. Будем говорить, что T — *F-дискретный оператор*, если $[0, T] = [0, I_F] \circ T$, т. е. для каждого $0 \leqslant S \leqslant T$ существует оператор $0 \leqslant \alpha \leqslant I_F$, для которого $S = \alpha T$. Пусть $L_a^{\sim}(E, F)$ — компонента в $L^{\sim}(E, F)$, порожденная F-дискретными операторами и $L_d^{\sim}(E, F) := L_a^{\sim}(E, F)^{\perp}$. Аналогично вводятся $(E^{\wedge\sim})_a$ и $(E^{\wedge\sim})_d$. Элементы $L_d^{\sim}(E, F)$ принято называть F-размазанными или F-диффузионными операторами. Вместо $\mathbf{R}$-дискретности или $\mathbf{R}$-размазанности говорят просто о дискретных и размазанных функционалах. Возьмем S, $T \in L^{\sim}(E, F)$ и положим $\tau := T\uparrow$, $\sigma := S\downarrow$. Имеют место эквивалентности:

(1) $T \geqslant 0 \leftrightarrow [\![\tau \geqslant 0]\!] = 1$;

(2) «S есть осколок T» $\leftrightarrow [\![\sigma$ — осколок $\tau]\!] = 1$;

(3) «TF-дискретен» $\leftrightarrow [\![\tau$ дискретен$]\!] = 1$;

(4) $T \in L_a^{\sim}(E, F) \leftrightarrow [\![\tau \in (E^{\wedge\sim})_a]\!] = 1$;

(5) $T \in L_d^{\sim}(E, F) \leftrightarrow [\![\tau \in (E^{\wedge\sim})_d]\!] = 1$.

Потребуется еще один факт, который не следует из 4.1.2, но устанавливается путем прямого подсчета булевых оценок.

(6) «T — решеточный гомоморфизм» $\leftrightarrow [\![\tau$ — решеточный гомоморфизм$]\!] = 1$.

4.1.4. Теорема. *Пусть E — векторная решетка, F — K-пространство и $T \in L^{\sim}(E, F)_+$. Равносильны утверждения:*

(1) *T есть F-дискретный элемент пространства $L^{\sim}(E, F)$;*

(2) *T — решеточный гомоморфизм;*

(3) *T сохраняет дизъюнктность, т. е. если x, $y \in E$ и $x \perp y$, то $Tx \perp Ty$.*

$\lhd$ Нужно привлечь 4.1.2, 4.1.3 и воспользоваться хорошо известным результатом о характеризации дискретных функционалов (=теорема 4.1.4 при $F = \mathbf{R}$). $\rhd$

4.1.5. Легко видеть, что если регулярный функционал $f \in E^{\sim}$ сохраняет дизъюнктность, то этим же свойством обладает и $|f|$ (см. [54]). В силу 4.1.4 (1) функционалы f^+ и f^- пропорциональны $|f|$, а так как $f^+ \perp f^-$, то либо $f^+ = 0$, либо $f^- = 0$. Это означает, что $f \geqslant 0$ или $f \leqslant 0$. В частности, для функционала $\tau := T\uparrow$ получаем $[\![\tau \geqslant 0]\!] \vee [\![\tau \leqslant 0]\!] = 1$. Если $\pi := \chi[\![\tau \geqslant 0]\!]$, то $\pi^{\perp} \leqslant \chi[\![\tau \leqslant 0]\!]$ и выполнены неравенства $\pi\tau \geqslant 0$ и $\pi^{\perp}\tau \leqslant 0$. Переход к спускам приводит к такому заключению.

Для регулярного оператора $T \in L^{\sim}(E, F)$, сохраняющего дизъюнктность, существует проектор $\pi \in \mathfrak{P}(F)$ такой, что $\pi T = T^+$ и $\pi^{\perp} T = T^-$. В частности, для любых $0 \leqslant x$, $y \in E$ верно $(Tx)^+ \perp (Ty)^-$.

4.1.6. Подпространство $E_0 \subset E$ называют *массивным*, если для каждого $x \in E$ найдутся $\underline{x}$ и $\bar{x} \in E_0$ такие, что $\underline{x} \leqslant x \leqslant \bar{x}$. Пусть $T_0 \in L(E_0, E)$ и $\tau_0 := T_0\uparrow$. Понятно, что имеют место утверждения:

(1) «E_0 массивно в E» $\leftrightarrow [\![E_0^{\wedge}$ массивно в $E^{\wedge}]\!] = 1$;

(2) «T — продолжение T_0» $\leftrightarrow [\![\tau$ — продолжение $\tau_0]\!] = 1$.

Теорема Крейна — Рутмана утверждает, что положительный функционал, определенный на массивном подпространстве, допускает положительное продолжение на все пространство. Теорема остается в силе, если в ней слово «положительный» заменить на «дискретный». Пропустив эти факты через $V^{(\mathbf{B})}$ и пользуясь утверждениями (1), (2) и 4.1.3 (3), получим следующие результаты.

4.1.7. Теорема Канторовича. *Пусть F — произвольное K-пространство. Если E_0 — массивное подпространство E, то всякий положительный оператор T_0: $E_0 \to F$ допускает положительное продолжение $T \in L^{\sim}(E, F)$.*

4.1.8. Теорема. *При тех же условиях, что и в 4.1.6, всякий F-дискретный оператор T_0: $E_0 \to E$ допускает F-дискретное продолжение T: $E \to F$. В частности, если E_0 — массивная подрешетка, то для решеточного гомоморфизма T_0: $E_0 \to F$ существует решеточный гомоморфизм, продолжающий T_0.*

4.1.9. Теорема. *Для положительного оператора T: $E \to F$ равносильны следующие утверждения:*

(1) *T — это F-размазанный оператор;*

(2) *для любых $0 \in x \in E$, $0 \leqslant \varepsilon \in F$ и $b \in \mathbf{B}$ при $b\varepsilon \neq 0$ существуют ненулевой проектор $\rho \leqslant b$ и попарно дизъюнктные положительные операторы $T_1, \ldots, T_n$ такие, что*

$$T = T_1 + \ldots + T_n, \quad |\rho T_k x| \leqslant \varepsilon \ (k := 1, \ldots, n);$$

(3) *для любых $0 \leqslant x \in E$, $0 \leqslant \varepsilon \in F$ и $b \in \mathbf{B}$ при $b\varepsilon \neq 0$ существует счетное разбиение единицы (b_n) такое, что при каждом $n \in \mathbf{N}$ выполнено условие: T можно разложить в сумму попарно дизъюнктных положительных операторов $T_{1,n}, \ldots, T_{k_n,n}$, причем $b_n|T_{k,n}x| \leqslant \varepsilon$ $(k := 1, \ldots, k_n)$.*

$\triangleleft$ Доказательство получается путем интерпретации в $V^{(\mathbf{B})}$ следующего скалярного факта: положительный функционал f является размазанным, если для любых $x \geqslant 0$ и $0 < \varepsilon \in \mathbf{R}$ найдутся положительные попарно дизъюнктные функционалы $f_1, \ldots, f_n$ такие, что $f = f_1 + \ldots + f_n$ и $|f_k(x)| < \varepsilon$ $(k := 1, \ldots, n)$ (см. [46]).

4.1.10. Теорема. *Для любого положительного оператора T: $E \to F$ имеет место представление*

$$Tx = T_0 x + \sum_{\xi \in \Xi} T_\xi x \ (x \in E),$$

где T_0 — это F-размазанный оператор, а $(T_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство попарно дизъюнктных решеточных гомоморфизмов.

$\triangleleft$ Оператор T_0 определяется однозначно, а семейство (T_ξ) — однозначно с точностью до перестановки и «перемешивания». Для доказательства сформулированной теоремы нужно воспользоваться тем, что в силу принципа переноса внутри $V^{(\mathbf{B})}$ всякое K-пространство (в нашем случае $E^{\wedge\sim}$) разлагается в прямую сумму компоненты размазанных элементов и компоненты, порожденной дискретными элементами; последняя же представляет собой соединение одномерных компонент, т. е. компонент, порожденных дискретными элементами. Затем нужно привлечь 4.1.3 (3—5). $\triangleright$

4.1.11. Примечания.

(1) Материал этого параграфа можно рассматривать как иллюстрацию к следующему эвристическому принципу, высказанному Л. В. Канторовичем в заметке [17], в которой им были введены K-пространства: «Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».

(2) Элементарная теорема 4.1.2 служит основным техническим средством, позволяющим поднять сформулированный эвристический принцип до уровня точного метода исследования (в рассмотренном круге вопросов). Другие варианты имеются в [24].

(3) Эквивалентность (1) $\leftrightarrow$ (2) в теореме 4.1.4 установлена С. С. Кутателадзе в 1976 г. (см. [3, 26]) стандартными средствами. Скалярный случай ($F = \mathbf{R}$) хорошо известен. По поводу 4.1.5 см. [42].

(4) Стандартное доказательство теоремы 4.1.7 изложено во многих монографиях (см., например, [3, 24, 26]). Она имеет место и в том случае, если E — упорядоченное векторное пространство. Продолжение положительного оператора с дополнительными свойствами (дискретность или сохранение решеточных операций, как в 4.1.8) — довольно обширная тема. Здесь лишь отметим, что она тесно связана с экстремальной структурой специальных выпуклых множеств, см., например, [26].

(5) Теоремы 4.1.9 и 4.1.10, по-видимому, новые. Для векторных мер аналогичные факты установлены в [30].

4.2. ОСКОЛКИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этом параграфе остановимся на вопросе о вычислении осколков положительных операторов, который удается изучить довольно основательно путем последовательного применения нестандартных методов. Как и в предыдущем параграфе, E — векторная решетка, F — это K-пространство.

4.2.1. Говорят, что множество проекторов $\mathscr{P}$ в K-пространстве $L^{\sim}(E, F)$ *порождает осколки* $0 \leqslant T \in L^{\sim}(E, F)$, если $Tx^{+} = \sup\{PTx\colon P \in \mathscr{P}\}$ для всех $x \in E$. В случае, когда последнее выполнено для каждого $0 \leqslant T \in L^{\sim}(E, F)$, множество $\mathscr{P}$ называют *порождающим*. Пусть $F := \mathscr{R}{\downarrow}$ и P — проектор в $L^{\sim}(E, F)$. Тогда:

(1) существует единственный элемент $P{\uparrow} \in V^{(\mathbf{B})}$ такой, что $[\![P{\uparrow}$ — проектор в $E^{\wedge\sim}]\!] = \mathbf{1}$ и $(PT){\uparrow} = P{\uparrow}T{\uparrow}$ для всех $T \in L^{\sim}(E, F)$.

Возьмем теперь множество проекторов $\mathscr{P}$ в $L^{\sim}(E, F)$ и оператор $0 \leqslant T \in L^{\sim}(E, F)$. Положим $\tau := T{\uparrow}$ и $\mathscr{P}{\uparrow} := \{P{\uparrow}\colon P \in \mathscr{P}\}{\uparrow}$. Тогда $[\![\mathscr{P}{\uparrow}$ — множество проекторов в $E^{\wedge\sim}]\!] = \mathbf{1}$ и справедливы утверждения:

(2) "$\mathscr{P}$ порождает осколки T" $\leftrightarrow$ $[\![\mathscr{P}{\uparrow}$ порождает осколки $\tau]\!] = \mathbf{1}$;

(3) "$\mathscr{P}$ — порождающее множество" $\leftrightarrow$ $[\![\mathscr{P}{\uparrow}$ — порождающее множество $]\!] = \mathbf{1}$.

4.2.2. Для множества A в K-пространстве через $A^{\vee}$ обозначим результат добавления к A супремумов всех его непустых конечных подмножеств. Символ $A^{(\uparrow)}$ используется для результата присоединения к A супремумов непустых возрастающих сетей элементов A. Естественным образом трактуют знаки $A^{(\uparrow\downarrow)}$ и $A^{(\uparrow\downarrow\uparrow)}$. Знак $\approx$ имеет в K-пространстве F обычный смысл: $x \approx y$ для $x, y \in F$ означает, что $(\forall^{\mathrm{st}} e \in \mathscr{E})\ |x - y| \leqslant e$. Ясно, что при $F := \mathbf{R}$ речь идет о бесконечной малости числа $x - y$. ($\mathscr{E}$ — фильтр единиц в F).

Наши результаты о положительных операторах мы получим с помощью булевозначных моделей по той же схеме, что и в 4.1. Но сначала нужно разобраться со случаем функционалов. Будем использовать обозначение $\mathscr{P}(f) := \{Pf\colon P \in \mathscr{P}\}$. В следующих ниже пунктах 2.4.3—2.4.5 E — векторная решетка над плотным подполем поля $\mathbf{R}$, $\mathscr{P}$ — множество проекторов в $E^{\sim}$.

4.2.3. Теорема. *Эквивалентны следующие утверждения*:

(1) $\mathscr{P}(f)^{\vee(\uparrow\downarrow\uparrow)} = \mathfrak{E}(f)$;

(2) $\mathscr{P}$ *порождает осколки* f;

(3) $(\forall x \in {}^{\circ}E)\,(\exists p \in \mathscr{P})\quad pf(x) \approx f(x^{+})$;

(4) *функционал* g *из* $[0, f]$ *служит осколком* f *в том и только том случае, если для каждого* $0 \leqslant x \in E$ *имеет место равенство*

$$\inf_{p \in \mathscr{P}} \left(p^{\perp} g(x) + p(f - g)(x)\right) = 0;$$

(5) $(\forall g \in {}^{\circ}\mathfrak{E}(f))\,(\forall x \in {}^{\circ}E_{+})\,(\exists p \in \mathscr{P})\,|pf - g|(x) \approx 0$;

(6) $\inf\{|pf - g|(x)\colon p \in \mathscr{P}\} = 0$ *для каждого осколка* $g \in \mathfrak{E}(f)$ *и положительного элемента* $x \geqslant 0$;

(7) *для* $x \in E_{+}$ *и* $g \in \mathfrak{E}(f)$ *найдется элемент* $p \in \mathscr{P}(f)^{\vee(\uparrow\downarrow\uparrow)}$, *обеспечивающий равенство* $|pf - g|(x) = 0$.

$\triangleleft$ Импликации $(1) \to (2) \to (3)$ не вызывают сомнений.

$(3) \to (4)$. Будем работать в стандартном антураже. Заметим прежде всего, что выполнение интересующего нас равенства для каких-либо функционалов g и f таких, что $0 \leqslant g \leqslant f$, обеспечивает для стандартного $x \geqslant 0$ наличие $p \in \mathscr{P}$, для которого $p^{\perp}g(x) \approx 0$ и $p(f-g)(x) \approx 0$. Стало быть, $\quad {}^{\circ}p(g \wedge (f-g))(x) \leqslant {}^{\circ}p(f-g)(x) = 0 \quad$ и $\quad {}^{\circ}p^{\perp}((f-g) \wedge g)(x) \leqslant \leqslant {}^{\circ}p^{\perp}g(x) = 0$, т. е. $g \wedge (f-g) = 0$.

Установим теперь, что в условиях (3) необходимое нам равенство гарантируется обычным критерием дизъюнктности:

$$\inf_{\substack{x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 = x}} (g(x_1) + (f-g)(x_2)) = 0.$$

Для фиксированного стандартного x отыщем внутренние положительные x_1 и x_2 такие, что $x = x_1 + x_2$ и, кроме того, $g(x_1) \approx 0$ и $f(x_2) \approx \approx g(x_2)$. В силу условия (3) на основании теоремы Крейна — Мильмана осколок g лежит в слабом замыкании $\mathscr{P}(f)$. В частности, имеется элемент $p \in \mathscr{P}$, для которого $g(x_1) = pf(x_1)$ и $g(x_2) \approx pf(x_2)$. Стало быть, $p^{\perp}g(x_2) \approx 0$, ибо $p^{\perp}g \leqslant p^{\perp}f$. Окончательно, $p^{\perp}g(x) \approx 0$. Отсюда $p(f-g) \times \times (x) = pf(x_2) + pf(x_1) - pg(x) \approx g(x_2) + g(x_1) - pg(x) \approx p^{\perp}g(x) \approx 0$. Это и обеспечивает нужное равенство.

$(4) \to (5)$. В силу тождества $|pf - g|(x) = p^{\perp}g(x) + p(f-g)(x)$, подбирая $p \in \mathscr{P}$ так, чтобы было $p^{\perp}g(x) \approx 0$ и $p(f-g)(x) \approx 0$, видим требуемое.

Эквивалентность $(5) \leftrightarrow (6)$ очевидна. Импликации $(5) \to (7) \to (1)$ доказываются с помощью приемов, изложенных в [2, 20, 31].

4.2.4. Теорема. *Для положительных функционалов f и g и порождающего множество проекторов $\mathscr{P}$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $g \in \{f\}^{\perp\perp}$;

(2) *для каждого конечного* $x \in {}^{\text{fin}}E := \{x \in E\colon (\exists \bar{x} \in {}^{\circ}E)\, |x| \leqslant \bar{x}\}$ *будет* $pg(x) \approx 0$, *как только* $pf(x) \approx 0$ *при* $p \in \mathscr{P}$;

(3) $(\forall x \in E_{+})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall p \in \mathscr{P})\ \ pf(x) \leqslant \delta \to pg(x) \leqslant \varepsilon$.

4.2.5. Теорема. *Пусть f, g — положительные функционалы E и x — положительный элемент E. Для проектора π_f на компоненту $\{f\}^{\perp\perp}$ имеют место следующие представления:*

(1) $\pi_f g(x) \doteq \inf{}^{*}\{{}^{\circ}pg(x)\colon p^{\perp}f(x) \approx 0,\ p \in \mathscr{P}\}$ (*знак* $\doteq$ *символизирует точность формулы, т. е. достижимость равенства*);

(2) $\pi_f g(x) = \sup\limits_{\varepsilon > 0} \inf\{pg(x)\colon\ p^{\perp}f(x) \leqslant \varepsilon,\ p \in \mathscr{P}\}$;

(3) $\pi_f g(x) \geqslant \inf{}^{*}\{{}^{\circ}g(y)\colon\ f(x-y) \approx 0,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$;

(4) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall p \in \mathscr{P})\, pf(x) \leqslant \delta \to \pi_f g(x) \leqslant p^{\perp}g(x) + \varepsilon$;
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists p \in \mathscr{P})\, pf(x) \leqslant \delta \wedge p^{\perp}g(x) \leqslant \pi_f g(x) + \varepsilon$;

(5) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall 0 \leqslant y \leqslant x)\, f(x-y) \leqslant \delta \to \pi_f g(x) \leqslant g(y) + \varepsilon$;
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists 0 \leqslant y \leqslant x)\, f(x-y) \leqslant \delta \wedge g(y) \leqslant \pi_f g(x) + \varepsilon$.

Пропустив утверждения 4.2.3—4.2.5 через $V^{(B)}$ и воспользовавшись при этом 4.2.1, получим следующие ниже результаты 4.2.6—4.2.9.

4.2.6. *Для множества проекторов $\mathscr{P}$ в $L^{\sim}(E, F)$ и $0 \leqslant S \in L^{\sim}(E, F)$ эквивалентны утверждения:*

(1) $\mathscr{P}(S)^{\vee(\uparrow\downarrow\uparrow)} = \mathfrak{E}(S)$;

(2) *$\mathscr{P}$ порождает осколки S*;

(3) *оператор $T \in [0, S]$ служит осколком S в том и только том случае, если для каждого $0 \leqslant x \in E$ имеет место равенство*

$$\inf_{P \in \mathscr{P}} (P^{\perp}Tx + P(S-T)x) = 0;$$

(4) $(\forall x \in {}^{\circ}E)\,(\exists P \in \mathscr{P}\uparrow\downarrow)\ PSx \approx Sx^{+}$.

4.2.7. *Для положительных операторов S и T и порождающего множества $\mathscr{P}$ проекторов в $L^{\sim}(E, F)$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $T \in \{S\}^{\perp\perp}$;

(2) $(\forall x \in {}^{\text{fin}}E)\,(\forall P \in \mathscr{P})\,(\forall \pi \in B)\, \pi PSx \approx 0 \to \pi PTx \approx 0$;

(3) $(\forall x \in {}^{\mathrm{fin}}E)(\forall \pi \in B)\pi S x \approx 0 \to \pi T x \approx 0$;

(4) $(\forall x \geqslant 0)(\forall \varepsilon \in \mathscr{E})(\exists \delta \in \mathscr{E})(\forall P \in \mathscr{P})(\forall \pi \in \mathbf{B})\pi P S x \leqslant \delta \to$
$\to \pi P T x \leqslant \varepsilon$;

(5) $(\forall x \geqslant 0)(\forall \varepsilon \in \mathscr{E})(\exists \delta \in \mathscr{E})(\forall \pi \in \mathbf{B})\pi S x \leqslant \delta \to \pi T x \leqslant \varepsilon$.

4.2.8. Теорема. *Пусть E — векторная решетка, F — некоторое K-пространство с фильтром единиц $\mathscr{E}$ и базой* $\mathbf{B}$. *Пусть, далее, S, T — положительные операторы из $L^{\sim}(E, F)$ и R — проекция T на компоненту $\{S\}^{\perp\perp}$. Для положительного $x \in E$ справедливы представления:*

(1) $$Rx = \sup_{\varepsilon \in \mathscr{E}} \inf \{\pi T y + \pi^{\perp} S x\colon\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ \pi \in \mathbf{B},\ \pi S(x - y) \leqslant \varepsilon\};$$

(2) $$Rx = \sup_{\varepsilon \in \mathscr{E}} \inf \{(\pi P)^{\perp} T x\colon\ \pi P S x \leqslant \varepsilon,\ P \in \mathscr{P},\ \pi \in \mathbf{B}\},$$

где $\mathscr{P}$ — порождающее множество проекторов в $L^{\sim}(E, F)$.

4.2.9. Для элемента $0 \leqslant e \in E$ введем оператор $\pi_e S$ по формулам

$$(\pi_e S)x := \sup_{n \in \mathbb{N}} S(x \wedge ne)\quad (x \in E_+),$$

$$(\pi_e S)x := (\pi_e S)x^+ - (\pi_e S)x^-\quad (x \in E).$$

Легко понять, что $\pi_e S \in L^{\sim}(E, F)$. Более того, $\pi_e S$ — осколок оператора S, а отображение $S \mapsto \pi_e S\ (S \geqslant 0)$, естественным образом продолженное на $L^{\sim}(E, F)$, будет порядковым проектором. Множество проекторов $\mathscr{P} := \{\pi_e\colon\ 0 \leqslant e \in E\}$ является порождающим. Поэтому из 4.2.6 вытекает формула

$$\mathfrak{E}(S) = \{(\rho \circ \pi_e)S\colon\ \rho \in \mathfrak{P}(F),\ 0 \leqslant e \in E\}^{\vee(\uparrow\downarrow\uparrow)}.$$

4.2.10. Примечания. (1) Формулы проектирования типа 4.2.8 (1, 2) формировались постепенно. Некоторое представление об этой истории можно получить по [42, 68]. Общий подход, предложенный в [36], положен в основу данного параграфа. Он позволяет получать различные формулы проектирования, если брать конкретные порождающие множества проекторов.

(2) Формулу типа 4.2.9 (1) впервые установил де Пагте (см. [68]) с двумя существенными ограничениями: F имеет тотальное множество o-непрерывных функционалов, а E порядково полно. Первое ограничение устранено в [31], второе — в [2, 20]. Все эти случаи соответствуют различным порождающим множествам проекторов.

(3) Основная идея, предложенная в [36], такова. Осколки положительного оператора T — суть крайние точки порядкового отрезка $[0, T]$. Последнее множество совпадает с субдифференциалом в нуле (опорным множеством) ∂P сублинейного оператора $Px = Tx^+$. Тем самым изучение осколков положительного оператора сводится к описанию экстремальной структуры субдифференциалов. Такое описание для общих сублинейных операторов впервые получено в работе С. С. Кутателадзе (подробное изложение см. в [26]). Отметим, что этот подход решает, в частности, и задачу о крайнем продолжении положительного оператора (литературу по этому поводу см. в [4, 26]).

4.3. ПОРЯДКОВО НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Приемы, изложенные в предыдущих двух параграфах, непосредственно к порядково непрерывным операторам не применимы, ибо при подъеме оператора (см. 4.1.2) теряется свойство порядковой непрерывности. Здесь рассмотрим другой подход, основанный на идеях Д. Магарам.

4.3.1. Говорят, что положительный оператор $T\colon E \to F$ удовлетворяет условию Магарам, если для каждого $0 \leqslant x \in E$ выполняется $T[0, x] = [0, Tx]$, т. е. если для любых $0 < x \in E$ и $0 \leqslant z \leqslant Tx$ существует такой $y \in E$, что $Ty = z$ и $0 \leqslant y \leqslant x$. Положительный порядково непрерывный оператор, удовлетворяющий этому условию, принято называть оператором Магарам.

Всюду в этом параграфе E и F — K-пространство, причем для простоты считаем F расширенным. Символом E_T обозначим носитель T, т. е. множество $\{x \in E\colon T(|x|) = 0\}^{\perp}$. Пусть $F_T := (\operatorname{im} T)^{\perp\perp}$ и пусть $\mathscr{D}_m(T)$ обозначает наибольший фундамент в максимальном расширении E, на который распространяется оператор T по порядковой непрерывности. Если $E_T = E$ и $T \geqslant 0$, то говорят, что оператор T существенно положителен.

4.3.2. Теорема. *Пусть E — это K-пространство $F := \mathscr{R}\!\downarrow$, а $T\colon E \to F$ — оператор Магарам такой, что $E = E_T = \mathscr{D}_m(T)$ и $F = F_T$. Тогда существуют $\mathscr{E} \in V^{(\mathbf{B})}$ и $\tau \in V^{(\mathbf{B})}$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(1) *$V^{(B)} \models$ «$\mathscr{E}$ — это K-пространство, а $\tau\colon \mathscr{E} \to \mathscr{R}$ — существенно положительный порядково непрерывный функционал»;*

(2) *$\mathscr{E}\!\downarrow$ — также K-пространство, $\tau\!\downarrow\colon \mathscr{E}\!\downarrow \to \mathscr{R}\!\downarrow$ — оператор Магарам, причем $\mathscr{E}\!\downarrow = \mathscr{D}_m(\tau\!\downarrow)$;*

(3) *существует линейный и решеточный изоморфизм h из E на $\mathscr{E}\!\downarrow$ такой, что $T = \tau\!\downarrow \circ h$.*

4.3.3. Для оператора Магарам разложение 4.1.10 можно уточнить. Пусть e — порядковая единица в E. Тогда $[\![e$ — порядковая единица $\mathscr{E}]\!] = \mathbb{1}$. Функционал τ можно представить в виде $\tau = \tau_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k$, где τ_0 — диффузионный функционал, а τ_k — порядково непрерывный решеточный гомоморфизм. Все эти функционалы однозначно определяются мерами, определенными на базе единичных элементов. При этом τ_0 соответствует безатомная мера, а τ_k — двузначная мера. Интерпретируя все это в модели $V^{(\mathbf{B})}$, получим следующий ниже результат. Условие Магарам для положительной векторной меры $\mu\colon \mathfrak{E}(e) \to F$ понимается так же, как и в 4.2.1, т. е. $\mu[0, a] = [0, \mu(a)]$ $(a \in \mathfrak{E}(e))$. Если μ — изоморфизм булевых алгебр, то μ^* — изоморфизм соответствующих расширенных K-пространств.

4.3.4. Теорема. *Пусть E — это K-пространство с единицей e и $T\colon E \to F$ — существенно положительный оператор Магарам. Тогда существуют последовательности $(e_k)_{k=0}^{\infty}, (c_k)_{k=1}^{\infty}, (\mu_k)_{k=1}^{\infty}, (\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ такие, что:*

(1) *(e_k) — разбиение единицы в булевой алгебре $\mathfrak{E}(e)$, а (c_k) — последовательность осколков элемента $c := Te$;*

(2) *$\mu_0\colon \mathfrak{E}(e_0) \to F$ — строго положительная порядково непрерывная мера, удовлетворяющая условию Магарам;*

(3) *$\mu_k\colon \mathfrak{E}(e_k) \to \mathfrak{E}(c_k)$ — булев изоморфизм, α_k — положительный обратимый ортоморфизм в $\{c_k\}^{\perp\perp}$;*

(4) *имеет место представление*

$$Tx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\mu_0(e_\lambda^{x_0}) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu_k^*(x_k),$$

где x_k — проекция элемента x на компоненту $\{e_k\}^{\perp\perp}$.

Для операторов Магарам справедливы двойственные аналоги 4.1.4 и 4.1.5.

4.3.5. Теорема. *Пусть $T\colon E \to F$ — положительный порядково непрерывный оператор. Равносильны утверждения:*

(1) *T удовлетворяет условию Магарам;*

(2) *для любого оператора $0 \leqslant S \leqslant T$ существует ортоморфизм $\alpha\colon E \to E$, $0 \leqslant \alpha \leqslant I_E$, такой, что $Sx = S\alpha x$ $(x \in E)$;*

(3) *если $Tx = f_1 + f_2$, для некоторых $0 \leqslant x \in E$ и $0 \leqslant f_1, f_2 \in F$, причем $f_1 \perp f_2$, то найдутся такие $0 \leqslant x_1, x_2 \in F$, что $x = x_1 + x_2$, $x_1 \perp x_2$ и $Tx_k = f_k$ $(k = 1, 2)$.*

◁ Без ограничения общности можно считать T существенно положительным. Если верно (1), то $T = \tau\!\downarrow \circ h$ (см. 4.3.2). Так как τ $\mathscr{R}$-линеен, то T будет $\mathscr{R}\!\downarrow$-линейным. Если $0 \leqslant S \leqslant T$, то S также будет $\mathscr{R}\!\downarrow$-линейным, а значит, оператором Магарам. Согласно 4.3.2 $S = \sigma\!\downarrow \circ h$, где $[\![\sigma \in \mathscr{E}^{\sim}]\!] = [\![0 \leqslant \sigma \leqslant \tau]\!] = \mathbf{1}$. Из теоремы Радона — Никодима выводится утверждение (2) для функционалов τ и σ. Переходя к спускам, получим (2) для операторов T и S. Остальные импликации элементарны. $\triangleright$

4.3.6. *Пусть S: $E \to F$ — регулярный оператор, причем $T := |S|$ — оператор Магарам. Тогда существует проектор $\pi \in \mathfrak{P}(F)$ такой, что $S^+ = S\pi$ и $S^- = S\pi^\perp$.*

$\triangleleft$ Вновь можем считать, что $T := \tau\!\downarrow$, где τ — существенно положительный o-непрерывный фукционал внутри $V^{(\mathbf{B})}$. Так же, как и в 4.3.5, устанавливается, что существует регулярный функционал $\sigma \in \mathscr{E}^{\sim}$, для которого $\tau = |\sigma|$. Пусть p — проектор в $\mathscr{E}$ на носитель (=компоненту существенной положительности) σ^+. Порядково непрерывные функционалы дизъюнктны лишь в том случае, когда дизъюнктны их носители. Поэтому $\sigma^+ = \sigma p$ и $\sigma^- = \sigma^\perp p$. Остается положить $\pi := p\!\downarrow$ и перейти к спускам. $\triangleright$

4.3.7. Итак, общие свойства операторов Магарам можно вывести из соответствующих фактов для функционалов с помощью теоремы 4.3.2. Однако описанные выше приемы могут быть полезны и при изучении произвольных регулярных операторов.

Возьмем положительный оператор Φ из векторной решетки X в F. Согласно теореме 4.1.2 существует положительный $\mathbf{R}^\wedge$-линейный функционал φ: $X^\wedge \to \mathscr{R}$, для которого $[\![\Phi(x) = \varphi(x^\wedge)]\!] = \mathbf{1}$ для всех $x \in X$. Введем в $X^\wedge$ полунорму $\rho(x) := \rho(|x|)$. Пусть $\mathscr{X}$ — пополнение фактор-решетки $X^\wedge/\rho^{-1}(0)$ по фактор-норме. Тогда $\mathscr{X}$ — банахова решетка и существует единственный положительный ($\mathscr{R}$-линейный) функционал $\bar{\varphi}$: $\mathscr{X} \to \mathscr{R}$ такой, что $\varphi = \bar{\varphi} \circ \iota$, где ι: $X^\wedge \to \mathscr{X}$ — фактор-гомоморфизм. Кроме того, $\bar{\varphi}$ порядково непрерывен и существенно положителен. Теперь, поработав со спусками и подъемами, можно получить такой результат.

4.3.8. Теорема. *Существуют K-пространство $\bar{X}$ и существенно положительный оператор Магарам $\bar{\Phi}$: $\bar{X} \to F$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(1) *имеются решеточные гомоморфизмы i: $X \to \bar{X}$ и j: $\mathscr{Z}(F) \to \mathscr{Z}(\bar{X})$ такие, что j — также кольцевой гомоморфизм и $\alpha\Phi x = \bar{\Phi}(j(\alpha)i(x))$ для всех $x \in X$ и $\alpha \in \mathscr{Z}(F)$; в частности, $\Phi = \bar{\Phi} \circ i$;*

(2) *$i(X)$ — массивная подрешетка в $\bar{X}$, а $j(\mathscr{Z}(F))$ — это o-замкнутая подрешетка и подкольцо в $\mathscr{Z}(\bar{X})$;*

(3) *$\bar{X} = b(X \otimes \mathscr{Z}(F))^{\downarrow\uparrow}$, где b: $X \otimes \mathscr{Z}(F) \to \bar{X}$ — линейный оператор, определяемый соотношением $b(x \otimes \alpha) := j(\alpha)i(x)$ $(x \in X,\ \alpha \in \mathscr{Z}(F))$.*

Пара $(\bar{X}, \bar{\Phi})$ определена однозначно с точностью до изоморфизма. Более того, если существенно положительный оператор Магарам $\bar{\Phi}_1$: $\bar{X}_1 \to F$ и решеточный гомоморфизм i_1: $\bar{X}_1 \to F$ удовлетворяют условию $\Phi = \bar{\Phi}_1 \circ i_1$, то найдется изоморфизм h из $\bar{X}$ на o-замкнутую подрешетку в $\bar{X}_1$ такой, что $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_1 \circ h$ и $h \circ i = i_1$.

Обозначим через $m\bar{X}$ максимальное расширение K-пространства $\bar{X}$. Фиксируем в $m\bar{X}$ порядковую единицу — тем самым однозначно определяется структура f-алгебры. Пусть $L_1(\Phi)$ — наибольший фундамент в $m\bar{X}$, на который можно распространить $\bar{\Phi}$ по o-непрерывности. Следующий результат — вариант теоремы Радона — Никодима для положительных операторов.

4.3.9. Теорема. *Для любого оператора $T \in \{\Phi\}^{\perp\perp}$ существует единственный элемент $z \in m\bar{X}$ такой, что*

$$Tx = \bar{\Phi}(z \cdot i(x)) \quad (x \in X).$$

Сопоставление $T \to z$ осуществляет линейный и решеточный изоморфизм *компоненты* $\{\Phi\}^{\perp\perp}$ *и фундамента в* $m\overline{X}$, *определяемого формулой* $\{z\in \in m\overline{X}\colon z\cdot i(X)\subset L_1(\Phi)\}$.

4.3.10. Примечания.

(1) В большой серии работ, опубликованных в пятидесятых годах, Д. Магарам предложила оригинальный подход к изучению положительных операторов (см. обзор [65]). К этим работам восходят концепция оператора Магарам, а также идея расширения положительного оператора до оператора Магарам (см. 4.1.8). Следует отметить, что в рамках булевозначного анализа подход Д. Магарам отличается идейной ясностью и определенными упрощениями, ибо значительная часть теории сводится к работе с числовой мерой и интегралом в подходящей булевозначной модели.

(2) Некоторые результаты Д. Магарам были перенесены на векторные решетки в работе Люксембурга и Шэпа [62]. Теорему 4.3.2 установил А. Г. Кусраев [22].

(3) Эквивалентность (1) $\leftrightarrow$ (2) из 4.3.5 — это ограниченная версия теоремы Радона — Никодима для оператора Магарам. В полном объеме эта теорема доказывается в [62] стандартными средствами, а в [22, 24] — на основе 4.3.2. Утверждение 4.3.6 — операторный вариант теоремы Хана о разложении меры (см. [62, 64]). Для оператора, действующего в пространствах измеримых функций, теорему 4.3.4 установила Д. Магарам своими методами.

(4) Вопрос о расширении положительного оператора до оператора Магарам изучался в [2, 24]. В этих же работах можно найти подробности относительно 4.3.8 и 4.3.9. Такое расширение имеет довольно сложную структуру, но иногда допускает функциональное описание, т. е. реализуется как пространство классов эквивалентности измеримых функций двух переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Альбеверио С., Фенстад Й., Хёэг-Крон Р., Линдстрем Т.** Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике.— М.: Мир, 1990.

2. **Акилов Г. П., Колесников Е. В., Кусраев А. Г.** О порядково непрерывном расширении положительного оператора // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 5.— С. 24—35.

3. **Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.** Упорядоченные векторные пространства.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1978.— 368 с.

4. **Бухвалов А. В.** Порядково ограниченные операторы в векторных решетках и пространствах измеримых функций // Математический анализ.— М.: ВИНИТИ, 1988.— Т. 26.— С. 3—63.

5. **Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М.** Векторные решетки и интегральные операторы.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.— 214 с.

6. **Ван Хао, Мак-Нотон Р.** Аксиоматические системы теории множеств.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.— 54 с.

7. **Вдовин А. М.** Основы новой аксиоматической теории множеств // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1990.— Т. 54, № 5.— С. 1113—1118.

8. **Владимиров Д. А.** Булевы алгебры.— М.: Наука, 1969.— 320 с.

9. **Вопенка П.** Математика в альтернативной теории множеств.— М.: Мир, 1983.— 150 с.

10. **Вулих Б. З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств.— М.: Физматгиз, 1961.— 407 с.

11. **Гордон Е. И.** Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 237, № 4.— С. 773—775.

12. **Гордон Е. И.** K-пространства в булевозначных моделях теории множеств // Там же.— 1981.— Т. 258, № 4.— С. 777—780.

13. **Гордон Е. И.** К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах // Сиб. мат. журн.— 1982.— Т. 23, № 5.— С. 55—65.

14. **Гордон Е. И.** Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Е. Нельсона // Там же.— 1989.— Т. 30, № 1.— С. 89—95.

15. **Гумилев Н. С.** Стихотворения и поэмы.— Л.: Сов. писатель, 1988.— 631 с.

16. **Йех Т.** Теория множеств и метод форсинга.— М.: Мир, 1973.— 150 с.

17. **Канторович Л. В.** О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР.— 1935.— Т. 4, № 1/2.— С. 11—14.

18. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ.— М.: Наука, 1984.— 752 с.

19. **Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.— 548 с.

20. **Колесников Е. Н.** Разложение положительного оператора // Сиб. мат. журн.— 1989.— Т. 30, № 5.— С. 70—73.

21. **Коэн П.** Теория множеств и континуум-гипотеза.— М.: Мир, 1973.— 348 с.

22. **Кусраев А. Г.** Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР.— 1982.— Т. 265, № 6.— С. 1312—1316.

23. **Кусраев А. Г.** О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа // Там же.— 1983.— Т. 271, № 1.— С. 281—284.

24. **Кусраев А. Г.** Векторная двойственность и ее приложения.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.— 254 с.

25. **Кусраев А. Г.** Числовые системы в булевозначных моделях теории множеств // VIII Всесоюз. конф. по мат. логике.— Москва, 1986.— С. 99.

26. **Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.** Субдифференциальное исчисление.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.— 224 с.

27. **Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.** Нестандартные методы анализа.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.— 354 с.

28. **Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.** О комбинировании нестандартных методов // Сиб. мат. журн.— 1990.— Т. 31, № 5.— С. 111—119.

29. **Кусраев А. Г., Малюгин С. А.** Произведение и проективный предел векторных мер // Современные проблемы геометрии и анализа.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.— С. 132—152.

30. **Кусраев А. Г., Малюгин С. А.** Об атомическом разложении векторной меры // Сиб. мат. журн.— 1989.— Т. 30, № 5.— С 101—110.

31. **Кусраев А. Г., Стрижевский В. З.** Решеточно нормированные пространства и мажорируемые операторы // Исследования по геометрии и функциональному анализу.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.— С. 132—157.

32. **Кутателадзе С. С.** Спуски и подъемы // Докл. АН СССР.— 1983.— Т. 272, № 2.— С. 521—524.

33. **Кутателадзе С. С.** Циклические монады и их применения // Сиб. мат. журн.— 1986.— Т. 27, № 1.— С. 100—110.

34. **Кутателадзе С. С.** Установки нестандартного анализа // Тр. Ин-та математики/АН СССР. Сиб. отд-ние.— 1989.— Т. 14: Современные проблемы анализа и геометрии.

35. **Кутателадзе С. С.** Монады проультрафильтров и экстенсиональных фильтров // Сиб. мат. журн.— 1989.— Т. 30, № 1.— С. 129—133.

36. **Кутателадзе С. С.** Об осколках положительных операторов // Сиб. мат. журн.— 1989.— Т. 30, № 5.— С. 111—119.

37. **Лейбниц Г. В.** Монадология // Сочинения. Т. 1.— М.: Мысль, 1982.— С. 143—429.

38. **Любецкий В. А.** Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа // Успехи мат. наук.— 1979.— Т. 44, № 6.— С. 99—153.

39. **Любецкий В. А., Гордон Е И.** Булевы расширения равномерных структур // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам.— М.: Наука, 1983.— С. 82—153.

40. **Перэр И.** Общая теория бесконечно малых // Сиб. мат. журн.— 1990.— Т. 31, № 3.— С. 103—124.

41. **Соболев В. И.** О полуупорядоченной мере множеств, измеримых функциях и некоторых абстрактных интегралах // Докл. АН СССР.— 1953.— Т. 91, № 1.— С. 23—26.

42. **Aliprantis C. D., Burkinshaw D.** Positive operators.— New York: Acad. Press, 1985.— 367 p.

43. **Bell T. L.** Boolean-valued models and independence prooſts in set theory.— Oxford: Clarendon Press, 1979.— 126 p.

44. **Cozart D., Moore L. C. Jr.** The nonstandard hull of a normed Riesz space // Duke Math. J.— 1974.— V. 41.— P. 263—275.

45. **Dacunha-Castelle D., Krivine J.-L.** Applications des ultraproducts a l'etude des espaces et des algebres de Banach // Studia Math.— 1972.— V. 41.— P. 315—334.

46. **Gordon H.** Decomposition of linear functionals on Riesz spaces // Duke Math. J.— 1960.— V. 27.— P. 323—332.

47. **Heinrich S.** Ultraproducts in Banach space theory // J. Reine Angem. Math.— 1980.— V. 313.— P. 72—104.

48. **Henson C. W.** When do the Banach spaces have isometically isomorphic nonstandard hulls? // Israel J. Math.— 1975.— V. 22.— P. 57—67.

49. **Henson C. W.** Nonstandard hulls of Banach spaces // Ibid.— 1976.— V. 25.— P. 108—114.

50. **Henson C. W.** Infinitesimals in functional analysis // Nonstandard analysis and its applications.— Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 1988.— P. 140—181.

51. **Henson C. W., Moore L. C. Jr.** Nonstandard hulls of the classical Banach spaces // Duke Math. J.— 1974.— V. 41.— P. 227—284.

52. **Henson C. W., Moore L. C. Jr.** Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces // Nonstandard analysis. Recent development.— Berlin at. ol.: Springer, 1983.— P. 27—112.— (Lecture Notes in Math., 983.)

53. **Hrbacek K.** Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fund. Math.— 1978.— V. 98, N 1.— P. 1—24.

54. **Jameson G. J. O.** Ordered linear spaces.— Berlin etc.: Springer, 1970.— 194 p.— (Lecture Notes in Math., 141.)

55. **Jech T.** Abstract theory of Abelian operator algebras: an application of forcing // Trans. Amer. Math. Soc.— 1985.— V. 289, N 1.— P. 133—162.

56. **Jech T.** First order theory of complete Stonean algebras // Canad. Math. Bull.— 1987.— V. 30, N 4.— P. 385—392.

57. **Jech T.** Boolean linear spaces // Advances in Math.— 1990.— V. 81, N 2.— P. 117—197.

58. **Kawai T.** Axiom system of nonstandard set theory // Logic symposia, Hakone 1979, 1980.— Berlin etc.: Springer, 1981.— P. 57—65.

59. **Kawai T.** Nonstandard analysis by axiomatic method // Southeast Asian conference on logic.— Amsterdam at. ol.: North — Holland, 1983.— P. 55—76.

60. **Krivine J. L.** Langage a valeurs reelles at applications // Fund. Math.— 1974.— V. 4, N 3.— P. 229—308.

61. **Luxemburg W. A. J.** A general theory of monads // Applications of model theory to algebra, analysis and probability/ed. Luxemburg W. A. J.— New York: Holt, Rinehart and Minston...— P. 18—86.

62. **Luxemburg W. A. J., Schep A. R.** A Radon-Nokodym type theorem for positive operators and a dual // Indag. Math.— 1978.— V. 40, N 3.— P. 357—375.

63. **Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.** Riesz spaces.— Amsterdam; London: North-Holland, 1971.— V. 1.— 514 p.

64. **Maharam D.** On kernel representation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc.— 1955.— V. 70, N 1.— P. 229—255.

65. **Maharam D.** On positive operators // Contemporary Math.— 1984.— V. 26.— P. 263—277.

66. **Nelson E.** Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc.— 1977.— V. 83, N 6.— P. 1165—1198.

67. **Nelson E.** The syntax of nonstandard analysis // Ann. Pure Appl. Logic.— 1988.— V. 38, N 2.— P. 123—134.

68. **de Pagter B.** The components of a positive operator // Indag. Math.— 1983.— V. 45, N 2.— P. 229—241.

69. **Schaeter H. H.** Banach lattices and positive operators.— Berlin at. ol.: Springer, 1974.— 376 p.

70. **Schwarz H.-U.** Banach lattices and operators.— Leipzig: Teubner, 1984.— 208 p.

71. **Solovay R.** A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. Math.— 1970.— V. 92, N 2.— P. 1—56.

72. **Solovay R., Tennenbaum S.** Iterated Cohen extensions and Souslin s problem // Ibid.— 1972.— V. 94, N 2.— P. 201—245.

73. **Stern J.** The problem of envelopes for Banach spaces // Israel J. Math.— 1976.— V. 24, N 1.— P. 1—15.

74. **Stern J.** Some applications of model theory in Banach space theory // Ann. Math. Logic.— 1976.— V. 9, N 1.— P. 49—121.

75. **Takeuti G.** Two Applications of Logic to Mathematics.— Tokio, Princeton: Ivanami and Princeton Univ. Press, 1978.— 137 p.

76. **Takeuti G.** Boolean-valued analysis // Applications of sheaves: Proc./Res. Symp. Durhan, July 1977.— Berlin at. ol.: Springer, 1979.— P. 714—731.— (Lecture Notes in Math., 753.)

77. **Takeuti G.** A transfer principle in harmonic analysis // J. Symbolic Logic.— 1979.— V. 44, N 3.— P. 417—440.

78. **Takeuti G., Zaring W. M.** Introduction to the axiomatic set theory.— New York at. ol.: Springer, 1971.— 348 p.

79. **Takeuti G., Zaring W. M.** Axiomatic set theory.— New York at. ol.: Springer, 1973.— 228 p.

80. **Vopenka P.** General theory of ∇-models // Comment. Math. Univ. Carolinae.— 1967.— V. 7, N 1.— P. 147—170.

81. **Vopenka P., Hajek P.** The theory of semisets.— Amsterdam: North-Holland, 1972.

82. **Zaanen A. Z., Riesz Spaces.** V. II.— Amsterdam at. ol.: North Holland, 1983.— 720 p.