Ю. Г. РЕШЕТНЯК

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ СТРОЕНИИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

А. Д. Александрову к 80-летию

1. Пусть f — вещественная функция, определенная на полуоси (a, ∞). Предположим, что f дифференцируема в каждой точке $x \in (a, \infty)$. Будем говорить, что *функция f при $y \to \infty$ стабилизируется к функции* θ, определенной для всех x, если существует функция $\mu(y)$, где $y \in (L, \infty)$ такая, что:

1) $\mu(y) \to \infty$ и $\dfrac{\mu(y)}{y} \to 0$ при $y \to \infty$,

2) для всякого вещественного числа x

$$\theta(x) = \lim_{y \to \infty} [f(y + x\mu(y)) - x\mu(y) f'(y) - f(y)]. \tag{1}$$

Функцию μ, удовлетворяющую этим условиям, будем называть *стабилизатором функции f*.

Теорема 1. *Предположим, что функция f дифференцируема в промежутке (a, ∞) и ее производная f' есть неубывающая функция. Тогда если существует функция θ такая, что f стабилизируется к θ при $y \to \infty$, то $\theta(x) = Ax^2$, где A — постоянная, $A \geqslant 0$.*

Доказательство теоремы 1 излагается в п. 2. В п. 3 приводятся достаточные условия, обеспечивающие существование стабилизатора.

Результаты статьи могут быть полезными при изучении асимптотического строения функций, определяемых интегралами, зависящими от параметра (см., например, [1, 2]).

2. Доказательство теоремы 1. Предположим, что функция f удовлетворяет условиям теоремы. Будем считать, что $\theta(x)$ не обращается в нуль тождественно, ибо в противном случае доказывать нечего. Пусть $\mu(y)$ — стабилизатор функции f. Согласно определению $\mu(y) \to \infty$ при $y \to \infty$. В силу этого мы можем, не уменьшая общности, считать, что $\mu(y) > 0$ для всех $y \in [L, \infty)$. Положим

$$\theta(x, y) = f[y + x\mu(y)] - x\mu(y) f'(y) - f(y). \tag{2}$$

Так как $\mu(y) > 0$ для всех y, то если $y + x\mu(y) > 0$, то и для любого $x' \geqslant x$, очевидно, $y + x'\mu(y) > 0$. Отсюда следует, что для всякого $y \geqslant L$ множество тех x, для которых $\theta(x, y)$ определено, представляет собой полуось $(\xi(y), \infty)$. Для всякого x при $y \geqslant L'$ имеем

$$y + x\mu(y) = y\left[1 + \frac{x\mu(y)}{y}\right].$$

Так как $\dfrac{\mu(y)}{y} \to 0$ при $y \to \infty$, то $y + x\mu(y) \to \infty$ при $y \to \infty$ и, значит, для всякого x найдется $y_0(x)$ такое, что $y + x\mu(y) > a$ при всяком $y \geqslant y_0(x)$. При $y \geqslant y_0(x)$ имеем $\xi(y) < x$, и, поскольку x взято произвольно, это позволяет заключить, что $\xi(y) \to -\infty$ при $y \to \infty$. Функция f является выпуклой, и, следовательно, при каждом $y \geqslant L$ функция $\theta(x, y)$ выпукла по переменной x в промежутке $(\xi(y), \infty)$. При $y \to \infty$ имеем $\theta(x, y) \to \theta(x)$ для всех x. Отсюда вытекает, что функция θ выпукла. В силу известных свойств выпуклых функций при $y \to \infty$ $\theta(x, y)$ стремится к $\theta(x)$ равномерно в любом ограниченном промежутке $[-h, h]$. Имеем $\theta(x, y) \geqslant 0$ для всех $x \geqslant \xi(y)$ и $\theta(0, y) = 0$. Поэтому $\theta(x) \geqslant 0$ для всех x и $\theta(0) = 0$. По предположению $\theta(x)$ не обращается в нуль тождественно, и, значит, найдется число $\xi_1 \neq 0$ такое, что $\theta(\xi_1) > 0$. Пусть ξ_0 — точка, лежащая между ξ_1 и 0 такая, что $\theta(\xi_0) = (1/2)\theta(\xi_1)$. Положим

$$R(t, y) = f(y + \xi_0 t) - \xi_0 t f'(y) - f(y),$$

где t такое, что $\xi_0 t \geqslant a-y$. Очевидно,

$$R\left(\frac{x\mu(y)}{\xi_0}, y\right)=\theta(x, y).$$

Полагая $x=\xi_1$, получим, что при $y\to\infty$

$$R\left(\frac{\xi_1\mu(y)}{\xi_0}, y\right)=\theta(\xi_1, y)\to\theta(\xi_1)>\theta(\xi_0)=\frac{1}{2}\theta(\xi_1). \qquad (3)$$

Знаки чисел ξ_0 и ξ_1 совпадают, и $\mu(y)>0$. Имеем $R(0, y)>0$. Из соотношений (3) вытекает, что найдется $L_0>0$ $(L_0\geqslant L)$ такое, что при $y\geqslant L_0$ существуют значения $t>0$, для которых $R(t, y)>\theta(\xi_0)$. Имеем $R(t, y)\geqslant \geqslant 0$ при всех t и $R(0, y)=0$. Функция $t\mapsto R(t, y)$ выпукла. Следовательно, она возрастает при $t\geqslant 0$. При этом если t_0 $(t_0\geqslant 0)$ — самая правая из точек t таких, что $R(t, y)=0$ при $0\leqslant t\leqslant t_0$, то справа от t_0 функция $t\mapsto R(t, y)$ является строго возрастающей. Из доказанного вытекает, что для данного y найдется, и притом единственное, значение $t>0$ такое, что $R(t, y)=\theta(\xi_0)$. Это значение t обозначим через $\mu_0(y)$. Мы получаем, таким образом, некоторую функцию $\mu_0(y)$. Она определена в промежутке $[L_0, \infty)$, и

$$\mu_0(y)>0, \quad R[\mu_0(y), y]=\theta(\xi_0) \qquad (4)$$

для всех $y\geqslant L_0$. Установим некоторые дальнейшие свойства функции $\mu_0(y)$. Зададим произвольно $\varepsilon>0$. При $y\to\infty$

$$\theta[\xi_0/(1+\varepsilon), y]\to\theta[\xi_0/(1+\varepsilon)], \qquad \theta[\xi_0(1+\varepsilon), y]\to\theta[\xi_0(1+\varepsilon)],$$

т. е. при $y\to\infty$

$$R\left[\frac{\mu(y)}{1+\varepsilon}, y\right]\to\theta\left(\frac{\xi_0}{1+\varepsilon}\right), \quad R[\mu(y)(1+\varepsilon), y]\to\theta[\xi_0(1+\varepsilon)].$$

Так как θ неотрицательна выпукла и $\theta(0)=0$, то функция $\theta(x)$ убывает на полуоси $(-\infty, 0)$ и возрастает на полуоси $(0, \infty)$. Пусть p — самая левая, q — самая правая точка x среди таких, что $\theta(x)=0$. Очевидно, $p\leqslant 0\leqslant q$. В промежутке $(-\infty, p)$ функция θ в силу выпуклости является строго убывающей, а в промежутке (q, ∞) — строго возрастающей. Если $\xi_0<0$, то $(1+\varepsilon)\xi_0<\xi_0<\xi_0/(1+\varepsilon)$, а если $\xi_0>0$, то $(1+\varepsilon)\xi_0> >\xi_0>\xi_0/(1+\varepsilon)$. В обоих случаях получаем

$$\theta[\xi_0(1+\varepsilon)]>\theta(\xi_0)>\theta[\xi_0/(1+\varepsilon)]. \qquad (5)$$

(Каждое из неравенств здесь строгое, как следует из сказанного выше о поведении θ в промежутках $(-\infty, p)$, (q, ∞).) Имеем

$$R\left[\frac{\mu(y)}{1+\varepsilon}, y\right]=\theta[\xi_0/(1+\varepsilon), y]\to\theta[\xi_0/(1+\varepsilon)],$$

$$R[(1+\varepsilon)\mu(y), y]=\theta[(1+\varepsilon)\xi_0, y]\to\theta[\xi_0(1+\varepsilon)]$$

при $y\to\infty$. Согласно (5) отсюда следует, что найдется y_2, $y_2\geqslant y_1$, такая, что при $y\geqslant y_2$

$$R[\mu(y)/(1+\varepsilon)y]<\theta(\xi_0)<R[\mu(y)(1+\varepsilon), y]. \qquad (6)$$

В силу (4) $\theta(\xi_0)=R[\mu_0(y), y]$. Так как функция $t\mapsto R(t, y)$ возрастает при $t>0$ и $\mu(y)>0$, $\mu_0(y)>0$, то из (6), очевидно, следует, что при $y\geqslant y_2$ $\mu(y)/(1+\varepsilon)<\mu_0(y)<\mu(y)(1+\varepsilon)$. Ввиду произвольности $\varepsilon>0$ отсюда вытекает, что

$$\lambda(y)=\frac{\mu_0(y)}{\mu(y)}\to 1$$

при $y\to\infty$. Положим

$$\theta_0(x, y)=f[y+x\mu_0(y)]-x\mu_0(y)f'(y)-f(y)=\theta[x\lambda(y), y].$$

Так как $\theta(x, y) \to \theta(x)$ равномерно на всяком ограниченном промежутке $[-h, h]$ при $y \to \infty$ и $\lambda(y) \to 1$ при $y \to \infty$, то при $y \to \infty$, очевидно, также $\theta_0(x, y) \to \theta(x)$ при любом x. Следовательно, функция μ_0 также является стабилизатором функции f.

Покажем, что функция μ_0 непрерывна. (Заметим, что непрерывность μ в условиях теоремы не предполагается.) Пусть даны точка $y^{(0)}$, $y^{(0)} > y_1$, и последовательность $\{y^{(m)}\}$, $m = 1, 2, \ldots$, такие, что $y^{(m)}$ сходится к $y^{(0)}$ при $m \to \infty$ и $y^{(m)} > y_1$ при всех m. Тогда $\mu_0(y^{(m)})$ определено при любом m. Требуется доказать, что $\mu_0(y^{(m)}) \to \mu_0(y^{(0)})$ при $m \to \infty$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда

$$R[\mu_0(y^{(m)}), y^{(m)}] = \theta(\xi_0) > 0.$$

При каждом t функция $y \mapsto R(t, y)$ непрерывна и, значит,

$$R[\mu_0(y^{(0)})/(1+\varepsilon), y^{(m)}] \to R[\mu_0(y^{(0)})/(1+\varepsilon), y^{(0)}],$$
$$R[\mu_0(y^{(0)})(1+\varepsilon), y^{(m)}] \to R[\mu_0(y^{(0)})(1+\varepsilon), y^{(0)}]$$

при $m \to \infty$. Имеем $R[\mu_0(y^{(0)})/(1+\varepsilon), y^{(0)}] < R[\mu_0(y^{(0)}), y^{(0)}] = \theta(\xi_0) < R[\mu_0(y^{(0)})(1+\varepsilon), y^{(0)}]$ в силу того, что $R(t, y)$ есть строго возрастающая функция переменной t на множестве $\{t > 0: R(t, y) > 0\}$. Поэтому при достаточно больших m, $m > \bar{m}$,

$$R[\mu_0(y^{(0)})/(1+\varepsilon), y^{(m)}] < \theta(\xi_0) = R[\mu_0(y^{(m)}), y^{(m)}] < R[\mu_0(y^{(0)})(1+\varepsilon), y^{(m)}].$$

В силу строгой монотонности R на множестве $\{t > 0: R(t, y) > 0\}$ отсюда следует, что при $m \geqslant \bar{m}$

$$\frac{\mu_0(y^{(0)})}{1+\varepsilon} < \mu_0(y^{(m)}) < \mu_0(y^{(0)})(1+\varepsilon).$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, этим доказано, что $\mu_0(y^{(m)}) \to \mu_0(y^{(0)})$ при $m \to \infty$. Непрерывность функции μ_0 тем самым установлена.

Докажем, что для всякого $x \in \mathbf{R}$ найдется последовательность $\{y_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_0[y_0 + x\mu(y_n)]}{\mu_0(y_n)} = 1. \tag{7}$$

Сначала рассмотрим случай $x > 0$. Пусть $n_1 \in \mathbf{N}$ такое, что

$$n_1 \geqslant \mu_0(L_0) \geqslant L_0/n_1. \tag{8}$$

Пусть n целое, $n \geqslant n_1$. В силу (8) $n \geqslant \mu_0(L_0)$. При $y \to \infty$ имеем $\mu_0(y) \to \infty$, значит, при достаточно больших y имеем $\mu_0(y) > n$. Так как $\mu_0(L_0) \leqslant n_1 \leqslant n$ и функция μ_0 непрерывна, то найдутся значения $y \geqslant L_0$, для которых $\mu_0(y) = n$. Выберем из таких y самое правое и обозначим его через y_n'. Во всяком промежутке $[L_0, L']$, где $L_0 < L' < \infty$, функция μ_0 ограничена, поэтому если $n > \max\limits_{L_0 \leqslant y \leqslant L'} \mu_0(y)$, то $y_n' > L'$. Отсюда следует, что $y_n' \to \infty$ при $n \to \infty$. Имеем

$$\frac{\mu_0(L_0)}{L_0} \geqslant \frac{1}{n_1},$$

откуда $\mu_0(L_0)/L_0 \geqslant 1/n$ при $n \geqslant n_1$. Так как $\mu_0(y)/y \to 0$ при $y \to \infty$, то $\mu_0(y)/y < 1/n$ при достаточно большом y и, следовательно, при каждом $n \geqslant n_1$ найдется $y \geqslant L_0$, для которого $\mu_0(y) = y/n$. Выберем из таких значений y самое правое и обозначим его через y_n''. При всех $y \geqslant L_0$ имеем $\mu_0(y)/y > 0$. Функция $y \mapsto \mu_0(y)/y$ непрерывна. Отсюда аналогично случаю последовательности $\{y_n'\}$ вытекает, что $y_n'' \to \infty$ при $n \to \infty$.

Пусть $n \geqslant n_1$. Так как $x > 0$, то $y_n' + x\mu_0(y_n') > y_n'$ и согласно определению y_n'

$$\mu_0[y_n' + x\mu_0(y_n')] > n = \mu_0(y_n').$$

Следовательно,

$$\frac{\mu_0[y_n' + x\mu_0(y_n')]}{\mu_0(y_n')} > 1. \tag{9}$$

Аналогично, $y_n'' + x\mu_0(y_n'') > y_n''$, и поскольку y_n'' — самая правая из точек y, для которых $\mu_0(y) = y/n$, то $\mu_0(y) < y/n$ при $y > y_n''$ и, в частности,

$$\mu_0[y_n'' + x\mu_0(y_n'')] < [y_n'' + x\mu_0(y_n'')]/n = \mu_0(y_n)\left(1 + \frac{x}{n}\right). \tag{10}$$

Таким образом,

$$1 < \frac{\mu_0[y_n' + x\mu_0(y_n')]}{\mu_0(y_n')}, \quad 1 + \frac{x}{n} > \frac{\mu_0[y_n'' + x\mu_0(y_n'')]}{\mu_0(y_n'')}.$$

В силу непрерывности функции

$$y \mapsto \frac{\mu_0[y + x\mu_0(y)]}{\mu_0(y)}$$

найдется значение y_n, лежащее между y_n' и y_n'' такое, что

$$1 < \frac{\mu_0[y_n + x\mu_0(y_n)]}{\mu_0(y_n)} < 1 + \frac{x}{n}. \tag{11}$$

При $n \to \infty$ имеем $y_n \to \infty$. Полагаем $y_n = L_0$ при $n < n_1$. При $n \geqslant n_1$ выполняются неравенства (11), откуда следует, что последовательность $\{y_n\}$ и есть требуемая.

Пусть теперь $x < 0$. В этом случае обозначим через y_n' самую правую из точек y: $y \geqslant L_0$, для которых $\mu_0[y + x\mu_0(y)] = n$. При достаточно больших n, $n \geqslant n_2$, точка y_n', удовлетворяющая этому условию, существует. Имеем $y_n' + x\mu_0(y_n') < y_n'$ и

$$y + x\mu_0(y) = y\left(1 + \frac{x\mu_0(y)}{x}\right) \to \infty$$

при $y \to \infty$. Значит, найдется y, $y > y_n'$, для которой $y + x\mu_0(y) = y_n'$. Так как $y > y_n'$, то согласно определению y_n' имеем:

$$\mu_0(y_n') > n = \mu_0[y_n' + x\mu_0(y_n')].$$

Таким образом, мы получили, что

$$1 > \frac{\mu_0[y_n' + x\mu_0(y_n')]}{\mu_0(y_n')}. \tag{12}$$

Точно так же, как в случае с $x > 0$, устанавливаем, что $y_n' \to \infty$ при $n \to \infty$. Далее, пусть y_n'' — самое правое значение $y \geqslant L_0$ такое, что $\mu_0[y + x\mu_0(y)] = [y + x\mu_0(y)]/n$. Так как $y + x\mu_0(y) \to \infty$ при $y \to \infty$, то

$$\frac{\mu_0[x + \mu_0(y)]}{y + x\mu_0(y)} \to 0$$

при $y \to \infty$, откуда вытекает, что искомое значение y_n'' существует. Как и в случае y_n', найдем y, $y > y_n''$, такое, что $y + x\mu_0(y) = y_n''$. Для этого y имеем $\mu_0[y + x\mu_0(y)] < [y + x\mu_0(y)]/n$, т. е. $\mu_0(y_n'') < y_n''/n$. Следовательно

$$\mu_0[y_n'' + x\mu_0(y_n'')] = \frac{y_n'' + \mu_0(y_n'')}{n} > \mu_0(y_n'') + \frac{x\mu(y_n'')}{n},$$

поэтому

$$\frac{\mu_0\left[y_n'' + x\mu_0\left(y_n''\right)\right]}{\mu_0\left(y_n''\right)} > 1 + \frac{x}{n}. \tag{13}$$

Так как $y_n'' \to \infty$ при $n \to \infty$, то из (11), (13) в силу непрерывности функции $y \mapsto \mu_0[y + x\mu_0(y)]/\mu_0(y)$ следует, что найдется y_n, лежащее между y_n' и y_n'', такое, что

$$1 > \frac{\mu_0\left[y_n + x\mu_0\left(y_n\right)\right]}{\mu_0\left(y_n\right)} > 1 + \frac{x}{n}.$$

Последовательность $\{y_n\}$, очевидно, удовлетворяет требуемым условиям. Положим

$$\theta_0(x,\ y) = f[y + x\mu_0(y)] - x\mu_0(y)f'(y) - f(y) =$$
$$= f[y + x\lambda(y)\mu(y)] - x\lambda(y)f'(y) - f(y) = \theta(\lambda(y)x,\ y),$$

где $\lambda(y) = \mu_0(y)/\mu(y)$. При $y \to \infty$ имеем $\lambda(y) \to 1$, а $\theta(x,\ y) \to \theta(x)$ равномерно во всяком промежутке $[-h,\ h]$, поэтому $\theta_0(x,\ y) = \theta(x\lambda(y),\ y) \to \theta(x)$ для всех x.

Функция $\theta_0(x,\ y)$ определена в некотором промежутке $[\xi_0(y),\ \infty)$, где $\xi_0(y) \to -\infty$ при $y \to \infty$ и при каждом y выпукла относительно x. Тогда при $y \to \infty$ имеем $\theta_0(x,\ y) \to \theta(x)$ равномерно во всяком ограниченном промежутке $[-h,\ h]$, где $h > 0$. В силу выпуклости функция θ имеет в каждой точке $x \in \mathbf{R}$ левую и правую производные $\theta_{\text{л}}'(x)$ и $\theta_{\text{п}}'(x)$. Функции $\theta_{\text{л}}'$ и $\theta_{\text{п}}'$ неубывающие и $\theta_{\text{л}}'(x) \leqslant \theta_{\text{п}}'(x)$ для всех x. Пусть E — множество тех x, для которых $\theta_{\text{л}}'(x) < \theta_{\text{п}}'(x)$. Множество E не более чем счетно, и в каждой точке $x \notin E$ функции $\theta_{\text{л}}'$ и $\theta_{\text{п}}'$ непрерывны. Для $x \notin E$

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial x}(x,\ y) \to \theta'(x) = \theta_{\text{л}}'(x) = \theta_{\text{п}}'(x)$$

при $y \to \infty$, следовательно,

$$\mu_0(y)\,[f'(y + x\mu_0(y)) - f'(y)] \to \theta'(x) \tag{14}$$

при $y \to \infty$. Пусть x_1, x_2 такие, что $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ и $x_1 + x_2 \in E$. Покажем, что тогда

$$\theta'(x_1 + x_2) = \theta'(x_1) + \theta'(x_2). \tag{15}$$

Из соотношения (14) вытекает

$$\mu_0(y)\,[f'(y + (x_1 + x_2)\mu_0(y)) - f'(y)] \to \theta'(x_1 + x_2)$$

при $y \to \infty$. С другой стороны,

$$\mu_0(y)\,[f'(y + (x_1 + x_2)\mu_0(y)) - f'(y)] =$$
$$= \mu_0(y)\,[f'(y + x_1\mu_0(y) + x_2\mu_0(y)) - f'(y + x_1\mu_0(y))] +$$
$$+ \mu_0(y)\,[f'(y + x_1\mu_0(y)) - f'(y)].$$

Положим

$$y + x_1\mu_0(y) = z, \quad \alpha(y) = \frac{\mu_0(y)}{\mu_0(z)} = \frac{\mu_0(y)}{\mu_0(y + x\mu_0(y))}.$$

Тогда

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}(x,\ y) = \alpha(y)\,\mu_0(z)\,[f'(z + x_2\alpha(y)\,\mu_0(z)) - f'(z)] + \mu_0(y)\,[f'(y + x_1\mu_0(y)) -$$
$$- f'(y)] = \alpha(y)\frac{\partial\theta_0}{\partial x}(\alpha(y)\,x_2,\ z) + \frac{\partial\theta_0}{\partial x}(x_1,\ y). \tag{16}$$

Пусть $\{y_n\}$, $n = 1,\ 2,\ \ldots,$ — построенная выше последовательность значений y. Обозначим $z_n = y_n + x_1\mu_0(y_n)$. В силу (7)

$$\alpha(y_n) = \frac{\mu_0(y_n)}{\mu_0(z_n)} \to 1$$

при $n \to \infty$. Так как функция $\theta_0(x, y_n)$ выпукла относительно переменной x при $n \to \infty$, то

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(x_2\alpha(y_n), z_n) \to \theta'(x_2).$$

Полагая в равенстве (16) $y = y_n$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial\theta_0}{\partial x}(x_1 + x_2, y) = \theta'(x_1) + \theta'(x_2),$$

откуда вытекает (15). Для всякой точки x_0

$$\theta'_л(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} \theta'_л(x) = \lim_{x\to x_0+0} \theta'_п(x),$$

ввиду этого из (15), очевидно, следует

$$\theta'_л(x_1 + x_2) = \theta'_л(x_1) + \theta'_л(x_2)$$

для любых x_1, $x_2 \in \mathbf{R}$. Таким образом, функция $\theta'_л$ удовлетворяет классическому функциональному уравнению Коши и, значит, $\theta'(x) = 2Ax$, где A — постоянная. Таким образом, $\theta(x) = Ax^2$. Кроме того, $A \geqslant 0$ ввиду выпуклости θ, и теорема тем самым установлена.

3. Укажем достаточное условие существования стабилизатора.

Лемма. *Пусть* φ: $[a, \infty) \to \mathbf{R}$ — *невозрастающая функция такая, что* $\varphi(x) > 0$ *для всех* x *и*

$$\frac{\varphi(2x)}{\varphi(x)} \to 1$$

при $x \to \infty$. *Тогда* $x^\alpha\varphi(x) \to \infty$ *для всякого* $\alpha > 0$ *при* $x \to \infty$.

Доказательство. Пусть φ удовлетворяет условиям леммы. Докажем сначала, что $x\varphi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Пусть $x_0 > 0$, $x_0 \in [a, \infty)$ такое, что $\varphi(2x)/\varphi(x) > 3/4$ при $x \geqslant x_0$. Положим $x_0\varphi(x_0) = h$. Очевидно, $h > 0$. Положим $x_n = 2^n x_0$. При каждом n имеем $x_{n+1} = 2x_n$, $x_n \geqslant x_0$ и, значит, $\varphi(x_{n+1}) > (3/4)\varphi(x_n)$, откуда $x_{n+1}\varphi(x_{n+1}) = 2x_n\varphi(x_{n+1}) > (3/2)x_n\varphi(x_n)$. Следовательно, $x_n\varphi(x_n) > (3/2)^n h$ при всяком n и, значит, $x_n\varphi(x_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Зададим произвольно $L > 0$, и пусть n_0 такое, что $x_n\varphi(x_n) > 2L$ при всех $n \geqslant n_0$. Возьмем произвольно $x > x_{n_0}$. Найдем n такое, что $x_n \leqslant x < x_{n+1}$. Тогда

$$x\varphi(x) \geqslant x_n\varphi(x) \geqslant x_n\varphi(x_{n+1}) = (1/2)x_{n+1}\varphi(x_{n+1}) > L.$$

Таким образом, для всякого $x > x_{n_0}$ имеем $x\varphi(x) > L$ и так как $L < \infty$ произвольно, то доказано, что $x\varphi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Зададим произвольно $\alpha > 0$. Функция $\varphi_1(x) = [\varphi(x)]^{1/\alpha}$ удовлетворяет всем условиям леммы и, значит, $x[\varphi(x)]^{1/\alpha} = x\varphi_1(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Отсюда заключаем, что $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha\varphi(x) = \infty$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть функция* $f(y)$, *определенная в промежутке* $[a, \infty)$, *выпукла, имеет непрерывные производные первого и второго порядка, причем производная* $f''(y)$ *есть невозрастающая функция такая, что* $f''(y) > 0$ *для всех* $y \in [a, \infty)$, $\lim\limits_{y\to\infty} f''(y) = 0$ *и* $\lim\limits_{y\to\infty} [f''(2y)/f''(y)] = 1$. *Тогда функция* f *стабилизируется при* $y \to \infty$, *и в качестве стабилизатора можно взять функцию* $\mu(y) = 1/\sqrt{f''(y)}$.

Доказательство. При любом вещественном t таком, что $y + t \geqslant a$, имеем $f(y+t) - tf'(y) - f(y) = \frac{t^2}{2} f''(y + \theta t)$, где $0 < \theta < 1$. Положим $t = x/\sqrt{f''(y)}$. Тогда

$$f\left(y + \frac{x}{\sqrt{f''(y)}}\right) - \frac{x}{\sqrt{f''(y)}} f'(y) - f(y) = \frac{x^2}{2} \frac{f''\left[y + \theta\frac{x}{\sqrt{f''(y)}}\right]}{f''(y)}.$$

Следовательно,

$$y+\theta\frac{x}{\sqrt{f''(y)}}=y\left(1+\theta\frac{x}{y\sqrt{f''(y)}}\right).$$

В силу леммы $y^2f''(y)\to\infty$ при $y\to\infty$ и, значит, $1+\theta x/y\sqrt{f''(y)}\to 1$. Найдем $y_0>0$ такое, что при $y>y_0$

$$2>1+\frac{\theta x}{y\sqrt{f''(y)}}>\frac{1}{2}.$$

При $y>y_0$ будем иметь

$$\frac{f''(y/2)}{f''(y)}\geqslant\frac{f''(y+\theta x/\sqrt{f''(y)})}{f''(y)}\geqslant\frac{f''(2y)}{f''(y)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{f''(y+\theta x/\sqrt{f''(y)})}{f''(y)}\to 1$$

при $y\to\infty$, следовательно,

$$f(y+x/\sqrt{f''(y)})-(x/\sqrt{f''(y)})f'(y)-f(y)\to x^2/2$$

при $y\to\infty$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Федорюк М. В.** Метод перевала.— М.: Наука, 1977.
2. **Евграфов М. А.** Асимптотические оценки и целые функции.— М.: Наука, 1979.