С. К. ГОДУНОВ

НОРМЫ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛУРЬЕ — РИККАТИ КАК КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ И ДЕТЕКТИРУЕМОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

Эта работа содержит дальнейшее развитие соображений, высказанных в [1]. Там в качестве критериев стабилизируемости, детектируемости, управляемости и наблюдаемости было предложено использовать константы, участвующие в оценках матрицы Грина и в оценках типа Лопатинского решений краевых задач на полупрямой для гамильтоновой системы, с помощью которой строится оптимальное управление или наблюдение. На самом деле оценки влияния граничных условий в этих краевых задачах не являются независимыми от оценок матрицы Грина. В свою очередь, матрица Грина допускает оценку через норму решения матричного алгебраического уравнения Лурье — Риккати. Это решение участвует в формуле для обратной связи в оптимальном управлении. Чем норма решения больше, тем более сильную обратную связь приходится использовать. Эти обстоятельства и послужили причиной того, что вместо предложенных в [1] довольно громоздких критериев, характеризующих качество стабилизируемости (детектируемости, управляемости, наблюдаемости), в настоящей работе предлагаются критерии, допускающие более прозрачную формулировку через безразмерную оценку нормы решения уравнения Лурье — Риккати.

Основное внимание мы уделяем изучению случая стабилизируемой пары (A, B) и получению оценок для гамильтоновой системы, образованной с помощью матриц, входящих в эту пару.

Исследование проводится с помощью широко распространенных приемов, но мы обращаем внимание на ряд новых обстоятельств, существенных для выработки предлагаемой концепции. Детектируемость пары (A, C), как известно, эквивалентна стабилизируемости пары (A^*, C^*). Это позволило нам лишь схематически остановиться на мотивировке предлагаемого критерия детектируемости (см. § 4). Управляемость и наблюдаемость пар (A, B) и соответственно (A, C) определяются как одновременная стабилизируемость пар (A, B), $(-A, B)$ или (A^*, C^*), $(-A^*, C^*)$. § 3, в котором изучается решение специальной краевой задачи для гамильтоновой системы, носит в этой работе вспомогательный характер и предназначен для облегчения изложения в § 4.

Определение стабилизируемости и предлагаемая количественная характеристика стабилизируемости приведены в § 1 с использованием специальной формы уравнения Лурье — Риккати, образованной по матрицам A, B. § 2 посвящен детальному исследованию матрицы Грина гамильтоновой системы, естественным образом связанной с квадратным матричным уравнением Лурье — Риккати, введенным в § 1. Изучаются матрица Грина и разрешимость некоторых краевых задач для гамильтоновой системы на полубесконечной прямой и на отрезке.

§ 4 содержит исследование специальной краевой задачи на конечном отрезке. Решение этой задачи может быть использовано при приближенном вычислении матрицы Грина гамильтоновой системы. Для этого краевая задача для дифференциальных уравнений заменяется эквивалентной ей разностной, т. е. системой линейных алгебраических уравнений. Обусловленность решений этой системы оценивается с помощью изученных в § 2 свойств матрицы Грина через введенную в § 3 количественную характеристику стабилизируемости (или детектируемости). Вычислив матрицу Грина, можно с помощью ее элементов составить другую линейную систему, обусловленность которой также оценивается через ту же самую характеристику, а решение совпадает с решением уравнения Лурье — Риккати. В качестве алгоритма решения разностных уравнений для матрицы Грина удобно использовать модификацию предложенного А. Н. Малышевым [2, 3] варианта быстро сходящегося и широко распространенного метода матричной сигнум-функции (см. [4—6]).

Исследование алгоритма в § 5 несколько отличается от описанного в [3], так как нам удобно использовать другую нормировку уравнений разностной системы и связать обусловленность этой системы и скорость сходимости алгоритма непосредственно с числовой характеристикой стабилизируемости. В результате выясняется, что вычислительный процесс можно организовать так, что он безотказно приводит либо к положительно определенному решению матричного уравнения Лурье — Риккати, либо к строго доказанному утверждению о том, что это решение или имеет слишком большую норму (очень плохая стабилизируемость), или вообще не существует. Тем самым обосновывается вычислимость введенных характеристик матричных пар, участвующих в описании изучаемых линейных стационарных систем. С помощью алгоритма, описанного в § 5, можно, конечно, решать и матричные уравнения Лурье — Риккати общего вида. Как известно, для получения положительно определенных решений на матричные уравнения пары (A, B); (A, C), участвующие в формулировке уравнения

$$HA + A^*H + C^*FC - HBGB^*H = 0$$

с положительно определенными F, G, должны быть наложены ограничения. Например, при наблюдаемой паре (A, C) надо потребовать стабилизируемости от пары (A, B). Использование введенных в настоящей работе критериев для оценки скорости сходимости алгоритма и числа обусловленности положительно определенного решения H должно быть предметом дальнейших исследований. Идея сформулировать критерий разрешимости матричного уравнения с использованием нормы его решения возникла в работах [11, 12], посвященных устойчивости решений дифференциальных уравнений. При этом возникла необходимость связать норму решения матричного уравнения Ляпунова с «качеством устойчивости», введенным в [11] и допускающим наглядную интерпретацию, удобную для использования в приложениях.

Цель предлагаемого ниже исследования состоит в применении той же идеи к другому, широко распространенному в теории управления, классу матричных уравнений. При этом делается попытка предложить критерий с прозрачным для прикладников смыслом, который в то же самое время может быть использован и для оценки обусловленности решения, и для анализа сходимости итераций в вычислительной процедуре решения уравнения Лурье — Риккати.

Я благодарен А. Я. Булгакову и А. Н. Малышеву за ценные дискуссии в процессе постановки задачи и при написании этой работы.

§ 1. СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ

Общепринято пару матриц (A, B) называть стабилизируемой, если для любого $x(0)$ существует такое управление $u(t)$ в системе, описываемой векторным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)+Bu(t), \tag{1.1}$$

что при этом управлении $x(t)\to 0$, $u(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Среди стабилизирующих управлений, если они существуют, имеется единственное оптимальное, которое доставляет минимум интегральному функционалу

$$J=2\|A\|\int_0^\infty [\|x(t)\|^2+\|Bu(t)\|^2]\,dt. \tag{1.2}$$

Хорошо известно (см. [7]), что оптимальное управление имеет вид обратной связи:

$$u(t)=-(B^*B)^{-1}B^*\Lambda x(t) \tag{1.3}$$

с постоянной симметрической положительно определенной матрицей $\Lambda=\Lambda^*>0$. При этом $J_{\min}=(\Lambda x(0),\ x(0))$, а матрица Λ является единственным неотрицательно определенным решением матричного уравнения Лурье — Риккати

$$\Lambda A+A^*\Lambda+2\|A\|[I-\Lambda B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda]=0. \tag{1.4}$$

Если это уравнение не имеет положительно определенных решений, то пара (A,B) стабилизируемой не является.

Предлагается выбрать $\|\Lambda\|$ в качестве параметра, характеризующего стабилизируемость системы (1.1) или, короче, стабилизируемость пары (A,B). Если (1.4) не имеет положительно определенных решений, то мы будем полагать $\|\Lambda\|=\infty$.

Выбранные в (1.1) и (1.4) нормировки обеспечивают безразмерность критерия $\|\Lambda\|$. Как Λ, так и $\|\Lambda\|$ не изменяются, если A умножить на какой-либо положительный скалярный множитель и если заменить B на другую матрицу так, чтобы линейные оболочки столбцов исходной B и этой другой матрицы совпадали. Будет доказана

Теорема 1. *При оптимальном управлении* (1.3) *для решения уравнения* (1.1) *имеет место оценка*

$$\|x(t)\|\leqslant\|\Lambda\|\sqrt{2\left(1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}\right)}\,e^{-\frac{t\|A\|}{\|\Lambda\|}}\|x(0)\|. \tag{1.5}$$

Из рассмотрения оценки (1.5) становится понятным предложение считать $\|\Lambda\|$ характеристикой возможности стабилизации для (1.1). Чем больше $\|\Lambda\|$, тем «более сильную» обратную связь (1.3) приходится вводить и тем слабее затухание решения (его стабилизация), гарантируемое неравенством (1.5). Иными словами: чем меньше $\|\Lambda\|$, тем система (1.1) (или на общепринятом жаргоне, матричная пара (A,B)) лучше стабилизируема.

Из теоремы 1 легко выводится

Следствие 1.1. *Для любой стабилизируемой пары* (A,B) *справедливо неравенство* $\|\Lambda\|\geqslant\frac{1}{2}$.

Действительно, так как (1.5) выполнено при всех неотрицательных t, то, положив $t=0$, мы убедимся, что $2\|\Lambda\|^2+\|\Lambda\|\geqslant 1$ $((\|\Lambda\|+1)\times(2\|\Lambda\|-1\geqslant 0)$, откуда и следует, что $\|\Lambda\|\geqslant\frac{1}{2}$.

Справедливо также неравенство

$$\|\Lambda\|\geqslant\|\Lambda_0\|\geqslant\frac{1}{2}, \tag{1.6}$$

где Λ_0 — положительно определенное решение уравнения

$$\Lambda_0A+A^*\Lambda_0+2\|A\|[I-\Lambda_0^2]=0. \tag{1.7}$$

Существование Λ_0 обеспечивается тем, что матричная пара (A,I) всегда управляема. Для обоснования неравенства (1.6) достаточно заметить, что, заменив в (1.1) B на I, т. е. уменьшив ограничения на допустимые управления, мы, тем самым, конечно, не увеличим $\|\Lambda\|$. Из (1.7) вытекают неравенства

$$2\|A\|\cdot\|\Lambda_0\|^2 \leqslant \|\Lambda_0\|\cdot\|A\| + \|A^*\|\cdot\|\Lambda_0\| + 2\|A\|,$$
$$\|\Lambda_0\|^2 \leqslant \|\Lambda_0\| + 1,$$

вследствие которых

$$\|\Lambda_0\| \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{1.8}$$

Определение 1. *Степенью стабилизируемости матричной пары* (A, B) *мы будем называть безразмерное, не превышающее единицы, отношение*

$$\operatorname{stab}[A, B] = \frac{\|\Lambda_0\|}{\|\Lambda\|} \leqslant 1. \tag{1.9}$$

Несколько огрубив (1.5), можно получить для траектории оптимального стабилизирующего управления оценку

$$\|x(t)\|/\|x(0)\| \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{\operatorname{stab}[A, B]}\cdot e^{-\frac{2t\|A\|\operatorname{stab}[A,B]}{1+\sqrt{5}}}. \tag{1.10}$$

Приступаем к доказательству теоремы 1.1. Переписав (1.4) в следующем виде:

$$\Lambda[A - 2\|A\|B(B^*B)^{-1}\Lambda] + [A - 2\|A\|B(B^*)^{-1}B^*\Lambda]^*\Lambda +$$
$$+ 2\|A\|[I + \Lambda B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda] = 0, \tag{1.11}$$

по известным свойствам матричного уравнения Ляпунова пользуясь тем, что $\Lambda > 0$, $I + \Lambda B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda \geqslant I > 0$, устанавливаем гурвицевость матрицы

$$K = \|A\|^{-1}[\mathrm{A} - 2\|A\|B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda] \tag{1.12}$$

и интегральное представление решения Λ:

$$\Lambda = 2\int_0^\infty e^{sK^*}[I + \Lambda B(B^*B)^{-1}\overline{B^*\Lambda}]e^{sK}ds. \tag{1.13}$$

Так как

$$\|K\| \leqslant 1 + 2\|\Lambda\|,$$
$$\|e^{sK}z\| \geqslant e^{-s\|K\|}\|z\| \geqslant e^{-s(1+2\|\Lambda\|)}\|z\|, \tag{1.14}$$
$$\|e^{sK^*}\| \geqslant e^{-s(1+2\|\Lambda\|)}\|z\|,$$

то

$$(\Lambda x, x) \geqslant 2\int_0^\infty e^{-2s(1+2\|\Lambda\|)}ds\|x\|^2 \geqslant \frac{\|x\|}{2\|\Lambda\|+1},$$

и, следовательно:

$$\|\Lambda^{-1}\|^{-1} = \lambda_{\min}(\Lambda) \geqslant \frac{1}{2\|\Lambda\|+1},$$
$$\|\Lambda^{-1}\| \leqslant 2\|\Lambda\|(1 + 1/2\|\Lambda\|), \tag{1.15}$$
$$\mu(\Lambda) \equiv \|\Lambda\|\cdot\|\Lambda^{-1}\| \leqslant 2\|\Lambda\|^2\left(1 + \frac{1}{2\|\Lambda\|}\right) \leqslant 4\|\Lambda\|^2.$$

Вытекающее из (1.11) равенство

$$\Lambda K + K^*\Lambda = -2[I + \Lambda B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda] \tag{1.16}$$

эквивалентно выполнению на решении $z(s)$ дифференциального уравнения $\frac{d}{ds}z(s)=Kz(s)$ тождества

$$\frac{d(\Lambda z,\ z)}{ds}+2\left[(z,\ z)+\left([B^*B]^{-1}B^*\Lambda z,\ B^*\Lambda z\right)\right]=0,$$

следствием которого будут неравенства:

$$\frac{d(\Lambda z,\ z)}{ds}+2(z,\ z)\leqslant 0,$$

$$\frac{d(\Lambda z,\ z)}{ds}+2\frac{(\Lambda z,\ z)}{\|\Lambda\|}\leqslant 0,$$

$$\|\Lambda^{-1}\|^{-1}\|z(s)\|^2\leqslant(\Lambda z(s),\ z(s))\leqslant e^{-\frac{2s}{\|\Lambda\|}}(\Lambda z(0),\ z(0))\leqslant e^{-\frac{2s}{\|\Lambda\|}}\cdot\|\Lambda\|\cdot\|z(0)\|^2,$$

$$\|z(s)\|\leqslant\sqrt{\|\Lambda\|\cdot\|\Lambda^{-1}\|}\cdot e^{-\frac{s}{\|\Lambda\|}}\cdot\|z(0)\|.$$

Пользуясь (1.15), приходим к оценке

$$\|e^{sK}\|\leqslant\|\Lambda\|\sqrt{2\left(1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}\right)}\cdot e^{-\frac{s}{\|\Lambda\|}} \tag{1.17}$$

и получаем для траектории $x(t)$ при стабилизирующем управлении (1.3) неравенство (1.5). Как мы уже отмечали, оптимальность управления (1.3) обеспечивается уравнением (1.4) и неотрицательной определенностью Λ. Теорема доказана.

§ 2. ОЦЕНКИ МАТРИЦЫ ГРИНА ГАМИЛЬТОНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Как известно, построение оптимального стабилизирующего управления, о котором шла речь в предыдущем параграфе, сводится к решению некоторой краевой задачи на полупрямой для гамильтоновой системы

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x&=Ax+2\|A\|B(B^*B)^{-1}B^*\lambda,\\ \frac{d}{dt}\lambda&=2\|A\|x-A^*\lambda,\end{aligned} \tag{2.1}$$

матрицу коэффициентов которой мы будем обозначать через $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{H}=\begin{bmatrix}A & 2\|A\|B(B^*B)^{-1}B^*\\ 2\|A\|I & -A^*\end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Укажем преобразование подобия, приводящее $\mathscr{H}$ к каноническому клеточно-диагональному виду, и дадим оценки преобразующей матрицы.

Непосредственной выкладкой устанавливается, что:

$$\begin{bmatrix}I & \Lambda^{-1}\\ -\Lambda & I\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}A & 2\|A\|B(B^*B)^{-1}B^*\\ 2\|A\|I & -A^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & \Lambda^{-1}\\ -\Lambda & \Gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12}\\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22}\end{bmatrix},$$

где $\widetilde{A}_{11}=\left[A-2\|A\|B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda\right]-\frac{1}{2}\Lambda^{-1}\{\Lambda A+A^*\Lambda+2\|A\|[I-$ $-\Lambda B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda]\}$,

$$\widetilde{A}_{12}=2\|A\|\left[B(B^*B)^{-1}B^*-\Lambda^{-2}\right]+\frac{1}{2}\Lambda^{-1}\{\Lambda A+A^*\Lambda+$$
$$+2\|A\|\left[I-\Lambda B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda\right]\}\Lambda^{-1},$$

$$A_{21} = \frac{1}{2}\{\Lambda A + A^*\Lambda + 2\|A\|[I - \Lambda B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda]\},$$

$$\tilde{A}_{22} = -[A^* - 2\|A\|\Lambda B(B^*B)^{-1}B^*] + \frac{1}{2}\{\Lambda A + A^*\Lambda + $$
$$+ 2\|A\|[I - \Lambda B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda]\}\Lambda^{-1}.$$

В этих формулах фигурные скобки оказываются равными нулю, если Λ — решение уравнения Лурье — Риккати (1.4), что и будет в дальнейшем предполагаться. При этом предположении

$$\begin{bmatrix} I & \Lambda^{-1} \\ -\Lambda & I \end{bmatrix} \mathscr{H} \begin{bmatrix} I & \Lambda^{-1} \\ -\Lambda & I \end{bmatrix} = \|A\| \begin{bmatrix} K & 2B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda - \Lambda^2 \\ 0 & -K^* \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

где (см. также (1.12)):

$$K = \frac{1}{\|A\|} A - 2B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda. \tag{2.4}$$

Так как

$$\begin{bmatrix} I & R \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K & -[KR + RK^*] \\ 0 & -K^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & R \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -K^* \end{bmatrix},$$

то, выбрав в качестве $R = R^*$ решение уравнения Ляпунова

$$KR + RK^* = 2\Lambda^{-2} - 2B(B^*B)^{-1}B^*, \tag{2.5}$$

однозначно разрешимого, так как K — гурвицева (см. § 1), и обозначив

$$\begin{bmatrix} I & \Lambda^{-1} \\ -\Lambda & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & R \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \Lambda^{-1} + R \\ -\Lambda & \Lambda(\Lambda^{-1} - R) \end{bmatrix} = W, \tag{2.6}$$

мы приходим к следующему каноническому представлению:

$$\mathscr{H} = \|A\| W \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -K^* \end{bmatrix} W^{-1}. \tag{2.7}$$

Будет доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Симметричные матрицы* $\Lambda^{-1} + R$, $\Lambda^{-1} - R$ *соответственно неотрицательно и строго положительно определены*:

$$\Lambda^{-1} + R \geqslant 0, \quad \Lambda^{-1} - R > 0,$$

вследствие чего (*см.* (1.15))

$$\|R\| \leqslant \|\Lambda^{-1}\| \leqslant 2\|\Lambda\| + 1. \tag{2.8}$$

Кроме того,

$$\|[\Lambda^{-1} - R]^{-1}\| \leqslant \|\Lambda\|^3 \left(1 + \frac{1}{2\|\Lambda\|}\right). \tag{2.9}$$

Оценки из этой теоремы используются при изучении матрицы Грина.

Матрица Грина $G(t)$ гамильтоновой системы (2.1) — это стремящееся при $t \to \pm\infty$ к нулю решение матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} G(t) = \mathscr{H} G(t) + \delta(t) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Справедливо представление

$$G(t) = \begin{cases} W \begin{bmatrix} e^{t\|A\|K} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W^{-1} & \text{при } t > 0, \\ W \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e^{-t\|A\|K^*} \end{bmatrix} W^{-1} & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

которое после подстановки W из (2.6) принимает вид

$$G(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}I\\-\Lambda\end{bmatrix}e^{t\|A\|K}\left[(\Lambda^{-1}-R)\Lambda \,\vdots\, -(\Lambda^{-1}+R)\right] & \text{при } t>0,\\ \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\Lambda^{-1}+R\\ \Lambda(\Lambda^{-1}-R)\end{bmatrix}e^{-t\|A\|K^*}[\Lambda \,\vdots\, I] & \text{при } t<0.\end{cases} \tag{2.11}$$

Теорема 2.2. *Матрица Грина допускает следующую оценку:*

$$\|G(t)\|\leqslant 2\sqrt{2}\|\Lambda\|^4\left(1+\frac{1}{\|\Lambda\|^2}\right)\left(1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}\right)e^{-\frac{|t|\|A\|}{\|\Lambda\|}}. \tag{2.12}$$

Из представления (2.11), в частности, следует, что если мы сумеем вычислить

$$G(-0)=\begin{bmatrix}G_{11}(-0) & G_{12}(-0)\\ G_{21}(-0) & G_{22}(-0)\end{bmatrix},$$

то, решив совместное, но переопределенное матричное уравнение

$$\mathfrak{G}_2 Y\equiv\begin{bmatrix}G_{12}(-0)\\ G_{22}(-0)\end{bmatrix}Y\equiv\begin{bmatrix}G_{11}(-0)\\ G_{21}(-0)\end{bmatrix}\equiv\mathfrak{G}_1, \tag{2.13}$$

мы в качестве решения получим $Y=\Lambda$. В процессе решения придется вычислить псевдообратную к составной прямоугольной матрице

$$\mathfrak{G}_2=\begin{bmatrix}G_{12}(-0)\\ G_{22}(-0)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\Lambda^{-1}+R)\\ \frac{1}{2}\Lambda(\Lambda^{-1}-R)\end{bmatrix}.$$

Вычислимость этой псевдообратной при не слишком большой $\|\Lambda\|$ следует из оценки числа обусловленности

$$\mu(\mathfrak{G}_2)\equiv\frac{\sigma_{\max}(\mathfrak{G}_2)}{\sigma_{\min}(\mathfrak{G}_2)}\leqslant 4\sqrt{2}\|\Lambda\|^4\left(1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}\right). \tag{2.14}$$

Это неравенство без труда выводится из представления $\mathfrak{G}_2$ в виде произведения

$$\mathfrak{G}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}I & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I\\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Lambda^{-1}(\Lambda^{-2}+R^2)^{-\frac{1}{2}}\\ \cdots\cdots\cdots\\ -R(\Lambda^{-2}+R^2)^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}(\Lambda^{-2}+R^2)^{\frac{1}{2}},$$

в котором второй слева множитель — ортогональная матрица, а в прямоугольном третьем сомножителе все столбцы ортонормированы. При этом выводе будем опираться на неравенства (1.15) и (2.8), второе из которых содержится в еще не доказанной теореме 2.1. Очевидно, что

$$\mu(\mathfrak{G}_2)\leqslant\mu\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}I & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda\end{bmatrix}\right\}\cdot\mu\left\{[\Lambda^{-2}+R^2]^{\frac{1}{2}}\right\}\leqslant\max\{\|\Lambda\|\|\Lambda^{-1}\|,\|\Lambda\|,\|\Lambda^{-1}\|\}\times$$

$$\times\sqrt{(\|\Lambda^{-2}\|+\|R^2\|)\|\Lambda^2\|}\leqslant\sqrt{2\|\Lambda^{-1}\|^2\|\Lambda\|^2}\cdot\max\{\|\Lambda\|\cdot\|\Lambda^{-1}\|,\|\Lambda\|,\|\Lambda^{-1}\|\}=$$

$$=\sqrt{2}\|\Lambda^{-1}\|\|\Lambda\|\cdot\max\{\|\Lambda\|\cdot\|\Lambda^{-1}\|,\|\Lambda\|,\|\Lambda^{-1}\|\}\leqslant 4\sqrt{2}\|\Lambda\|^4\left(1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}\right)^2.$$

Таким образом, если нам удалось вычислить $G(-0)$, то, анализируя и решая, если это возможно, уравнение (2.13), мы либо установим, что оно плохо обусловлено, т. е. получим гарантированное утверждение, что $\|\Lambda\|$ очень велика, либо сумеем это Λ вычислить. В § 5 будет описан алгоритм расчета $G(-0)$, во время которого мы также или находим решение, или убеждаемся, что $\|\Lambda\|$ велика.

Доказательство теоремы 2.1. Сначала заметим, что, умножив (1.4) для Λ справа и слева на Λ^{-1}, мы приведем его к виду

$$K\Lambda^{-1}+\Lambda^{-1}K^* = -2\left[\Lambda^{-2}+B(B^*B)^{-1}B^*\right]. \tag{2.15}$$

После этого, беря сумму и разность равенств (2.5), (2.15), получим уравнения Ляпунова для $\Lambda^{-1}\pm R$:

$$K(\Lambda^{-1}+R)+(\Lambda^{-1}+R)K^* = -4B(B^*B)^{-1}B^*, \tag{2.16}$$

$$K(\Lambda^{-1}-R)+(\Lambda^{-1}-R)K^* = -4\Lambda^{-2}. \tag{2.17}$$

Так как правая часть в (2.16) неположительно определена, а в (2.17) строго отрицательно определенная и, так как K — гурвицева, то по теореме Ляпунова $\Lambda^{-1}+R\geqslant 0$, $\Lambda^{-1}-R>0$, откуда и вытекает неравенство (2.8) теоремы. Чтобы обосновать неравенство (2.9), воспользуемся вытекающим из (2.17) интегральным представлением

$$\left(\left[\Lambda^{-1}-R\right]z, z\right) = 4\int_0^\infty \left(\Lambda^{-1}e^{sK^*}z, \Lambda^{-1}e^{sK^*}z\right)ds.$$

Так как (см. (2.4)):

$$\lambda_{\min}(\Lambda^{-1}) = \|\Lambda\|^{-1},$$

$$\left\|e^{sK^*}z\right\| \geqslant e^{-s\|K\|}\|z\| \geqslant e^{-(1+2\|\Lambda\|)s}\|z\|,$$

$$\left(\left[\Lambda^{-1}-R\right]z, z\right) \geqslant 4\|\Lambda\|^{-2}\int_0^\infty e^{-2(1+2\|\Lambda\|)s}ds\cdot\|z\|^2 = \frac{4}{2\|\Lambda\|^2(2\|\Lambda\|+1)}\|z\|^2 =$$

$$= \frac{\|z\|^2}{\|\Lambda\|^3(1+1/2\|\Lambda\|)}.$$

Отсюда непосредственно и вытекает неравенство (2.9). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Воспользуемся неравенствами (1.17), (1.15), (2.8):

$$\left\|e^{t\|A\|K}\right\| \leqslant \sqrt{2}\|\Lambda\|\sqrt{1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}}\,e^{-\frac{t\|A\|}{\|\Lambda\|}}, \quad (t>0),$$

$$\left\|e^{-t\|A\|K^*}\right\| \equiv \left\|e^{|t|\|A\|K^*}\right\| = \left\|e^{|t|\|A\|K}\right\| \leqslant \sqrt{2}\|\Lambda\|\sqrt{1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}}\,e^{-\frac{|t|\|A\|}{\|\Lambda\|}}, \quad (t<0),$$

$$\|R\| \leqslant \|\Lambda^{-1}\| \leqslant 2\|\Lambda\|\left(1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}\right),$$

$$\|\Lambda^{-1}+R\| \leqslant 2\|\Lambda^{-1}\|, \quad \|\Lambda(\Lambda^{-1}-R)\| \leqslant 2\|\Lambda\|\cdot\|\Lambda^{-1}\|$$

и применим их к представлению (2.11) матрицы Грина. Имеем

$$\|G(t)\| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{1+\|\Lambda\|^2}\cdot\left\|e^{|t|\cdot\|A\|K}\right\|\cdot 2\left\|\Lambda^{-1}\right\|\cdot\sqrt{1+\|\Lambda\|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\Lambda^{-1}\right\|\cdot\|\Lambda\|^2\left(1+\frac{1}{\|\Lambda\|^2}\right)\sqrt{2}\|\Lambda\|\sqrt{1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}}\cdot e^{-\frac{|t|\|A\|}{\|\Lambda\|}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{2}\|\Lambda\|^4\left(1+\frac{1}{\|\Lambda\|^2}\right)\left(1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{|t|\|A\|}{\|\Lambda\|}}.$$

Доказательство завершено.

Дополнение к теореме 2.2. В дальнейшем (см. § 5) нам наряду с $G(t)$, определенной при $t \neq 0$, придется еще рассматривать матрицу $\widetilde{G}(t) = G(t-0)$, которая при $t \neq 0$ совпадает с $G(t)$. Для $\widetilde{G}(0) = G(-0)$ справедливо представление

$$\widetilde{G}(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\Lambda^{-1}+R)\Lambda & -\frac{1}{2}(\Lambda^{-1}+R) \\ -\frac{1}{2}\Lambda(\Lambda^{-1}-R)\Lambda & -\frac{1}{2}\Lambda(\Lambda^{-1}-R) \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

и оценка

$$\|\widetilde{G}(0)\| = \|G(-0)\| \leqslant 2\|\Lambda\|^3\left(1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}\right)\left(1+\frac{1}{\|\Lambda\|^2}\right), \tag{2.19}$$

обоснование которой основывается на тех же соображениях и неравенствах, что и оценка, составляющая содержание теоремы 2.2.

§ 3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ

Переходим к изучению краевых задач для системы (см. (2.1)):

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & 2\|A\|B(B^*B)^{-1}B^* \\ 2\|A\|I & -A^* \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

на бесконечной полупрямой $t \geqslant 0$ или $t \leqslant T$. Канонический вид (2.7) гамильтоновой матрицы $\mathscr{H}$ позволяет установить, что ограниченное при $t \to +\infty$ решение системы (3.1), принимающее при $t = 0$ заданное граничное значение $x(0) = \varphi$, существует, единственно и имеет вид

$$x(t) = e^{t\|A\|K}\varphi; \quad \lambda(t) = -\Lambda e^{t\|A\|K}\varphi. \tag{3.2}$$

Его векторные компоненты $x(t)$, $\lambda(t)$, как это следует из (1.5), (1.17), удовлетворяют оценкам:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leqslant \sqrt{2}\|\Lambda\|\sqrt{1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}}\, e^{-\frac{t\|A\|}{\|\Lambda\|}}\cdot\|\varphi\|, \\ \|\lambda(t)\| &\leqslant \sqrt{2}\|\Lambda\|^2\sqrt{1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}}\, e^{-\frac{t\|A\|}{\|\Lambda\|}}\cdot\|\varphi\|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Решение той же системы, ограниченное на полупрямой $t \leqslant T$ и такое, что $\lambda(T) = \psi$, имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= (\Lambda^{-1}+R)e^{(T-t)\|A\|K^*}(\Lambda^{-1}-R)^{-1}\Lambda^{-1}\psi, \\ \lambda(t) &= \Lambda(\Lambda^{-1}-R)e^{(T-t)\|A\|K^*}(\Lambda^{-1}-R)^{-1}\Lambda^{-1}\psi, \end{aligned} \tag{3.4}$$

и оценивается (см. (1.15), (2.8), (2.9)) следующим образом:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leqslant 8\sqrt{2}\|\Lambda\|^6\left(1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}\right)^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{(T-t)\|A\|}{\|\Lambda\|}}\cdot\|\psi\|, \\ \|\lambda(t)\| &\leqslant 8\sqrt{2}\|\Lambda\|^7\left(1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}\right)^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{(T-t)\|A\|}{\|\Lambda\|}}\cdot\|\psi\|. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Следствием приведенных представлений и оценок является разрешимость при достаточно большом T краевой задачи для (3.1) на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ с граничными условиями $x(0) = \varphi$, $\lambda(T) = \psi$.

Для нас особый интерес представляет задача с матричными неизвестными $X(t)$, $Y(t)$, столбцы которых при $0 \leqslant t \leqslant T$ удовлетворяют (3.1), что эквивалентно уравнениям:

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + 2\|A\|B(B^*B)^{-1}B^*Y(t),$$
$$\frac{d}{dt}Y(t) = 2\|A\|X(t) - A^*Y(t), \tag{3.6}$$

а граничные условия имеют вид

$$X(0) = I, \quad Y(T) = 0. \tag{3.7}$$

Будем искать столбцы матриц $X(t)$, $Y(t)$ в виде линейных комбинаций решений, описываемых формулами (3.2), (3.5), т. е. воспользуемся представлениями:

$$X(t) = e^{t\|A\|K}\Phi + (\Lambda^{-1} + R)e^{(T-t)\|A\|K^*}(\Lambda^{-1} - R)^{-1}\Lambda^{-1}F,$$
$$Y(t) = -\Lambda e^{t\|A\|K}\Phi + \Lambda(\Lambda^{-1} - R)e^{(T-t)\|A\|K^*}(\Lambda^{-1} - R)^{-1}\Lambda^{-1}F.$$

Из граничных условий (3.7) находим Φ, F:

$$\Phi = [I + (\Lambda^{-1} + R)e^{T\|A\|K^*}(\Lambda^{-1} - R)^{-1}e^{T\|A\|K}]^{-1},$$
$$F = \Lambda e^{T\|A\|K}[I + (\Lambda^{-1} + R)e^{T\|A\|K^*}(\Lambda^{-1} - R)^{-1}e^{T\|A\|K}]^{-1}$$

и определяем $Y(0)$:

$$Y(0) = -\Lambda[I - (\Lambda^{-1} - R)e^{T\|A\|K^*}(\Lambda^{-1} - R)^{-1}e^{T\|A\|K}]\times$$
$$\times[I + (\Lambda^{-1} + R)e^{T\|A\|K^*}(\Lambda^{-1} - R)^{-1}e^{T\|A\|K}]^{-1} =$$
$$= -\Lambda + 2e^{T\|A\|K^*}[(\Lambda^{-1} - R) + e^{T\|A\|K}(\Lambda^{-1} + R)e^{T\|A\|K^*}]^{-1}e^{T\|A\|K}. \tag{3.8}$$

Важно, что из (3.8) следует симметричность $Y(0)$ $(Y(0) = Y^*(0))$.

Заметим, что выражение для Φ допускает еще и следующую запись:

$$\Phi = e^{-T\|A\|K}(\Lambda^{-1} - R)\{(\Lambda^{-1} - R) + e^{T\|A\|K}(\Lambda^{-1} + R)e^{T\|A\|K^*}\}^{-1}e^{T\|A\|K}.$$

Напомним, что согласно теореме 2.1 $\Lambda^{-1} - R$ строго положительно, а $\Lambda^{-1} + R$ неотрицательно определены, из чего следует строгая положительная определенность и обратимость выражения в фигурной скобке. Поэтому Φ, F, $Y(0)$ однозначно определяются при всех $T > 0$, а не только достаточно больших. Из (3.8) и (1.17) следует, что при $T\|A\| \to \infty$ матрица $Y(0)$ стремится к $-\Lambda$. Тем самым доказана теорема.

Теорема 3.1. *Краевая задача* (3.6), (3.7) *при любом T однозначно разрешима. При увеличении T до бесконечности матрица $Y(0)$ стремится к $-\Lambda$.*

На основании этой теоремы решение краевой задачи (3.6), (3.7) может быть использовано для приближенного вычисления решения Λ матричного уравнения (1.4), но мы в дальнейшем предложим для этого другой путь. Здесь мы подробно изучаем краевую задачу (3.6), (3.7) с другой целью. Она будет сведена к решению нелинейного матричного дифференциального уравнения, которое после смены обозначений окажется уравнением, описывающим фильтр Калмана — Бюсси. Свойства такого фильтра найдут применение в следующем параграфе при определении понятия детектируемой матричной пары.

Займемся пока детальным изучением зависимости $Y(0) \equiv Y(0, T)$ от длины отрезка T, на котором поставлена задача (3.6), (3.7).

Из матричного уравнения (2.17) вытекает представление его решения $\Lambda^{-1} - R$ в виде интеграла

$$\Lambda^{-1} - R = 4\|A\|\int_0^\infty e^{t\|A\|K}\Lambda^{-2}e^{t\|A\|K^*}\,dt. \tag{3.9}$$

Из этого представления

$$e^{-T\|A\|K}\left(\Lambda^{-1}-R\right)e^{-T\|A\|K^*}=4\|A\|\int\limits_0^\infty e^{(t-T)\|A\|K}\Lambda^{-2}e^{(t-T)\|A\|K^*}\,dt=$$

$$=4\|A\|\int\limits_{-T}^\infty e^{t\|A\|K}\Lambda^{-2}e^{t\|A\|K^*}\,dt=\left(\Lambda^{-1}-R\right)+4\|A\|\int\limits_{-T}^0 e^{t\|A\|K}\Lambda^{-2}e^{t\|A\|K^*}\,dt.$$

Отсюда

$$e^{-T\|A\|K}\left(\Lambda^{-1}-R\right)e^{-T\|A\|K^*}>\left(\Lambda^{-1}-R\right),$$

$$\frac{1}{2}\left[e^{-T\|A\|K}\left(\Lambda^{-1}-R\right)e^{-T\|A\|K^*}+\left(\Lambda^{-1}+R\right)\right]>$$

$$>\frac{1}{2}\left[\left(\Lambda^{-1}-R\right)+\left(\Lambda^{-1}+R\right)\right]=\Lambda^{-1}.$$

Мы пишем в этих неравенствах $S_2>S_1$, если симметричные S_1, S_2 таковы, что S_2-S_1 строго положительно определена. Как известно, если S_1, S_2 — строго положительно определенные и если, к тому же, $S_2>S_1$, то $S_2^{-1}<S_1^{-1}$ (см., например, [8, гл. 2, § 47]). Поэтому

$$\Lambda>2\left[e^{-T\|A\|K}\left(\Lambda^{-1}-R\right)e^{-T\|A\|K^*}+\left(\Lambda^{-1}+R\right)\right]^{-1}, \tag{3.10}$$

вследствие чего $Y(0)\equiv Y(0,\ T)$ в (3.8) строго отрицательно определенная матрица при $T>0$. (При $T=0$ правая часть формулы (3.8) для $Y(0)$, очевидно, обращается в нуль.) Отметим еще, что матрица в правой части неравенства (3.10) с ростом T строго убывает. Точнее: если $T_2>T_1$, то разность

$$S_1^{-1}-S_2^{-1}=2\left[e^{-T_1\|A\|K}\left(\Lambda^{-1}-R\right)e^{-T_1\|A\|K^*}+\left(\Lambda^{-1}+R\right)\right]^{-1}-$$

$$-2\left[e^{-T_2\|A\|K}\left(\Lambda^{-1}-R\right)e^{-T_2\|A\|K^*}+\left(\Lambda^{-1}+R\right)\right]^{-1}$$

строго положительно определена, что вытекает из строгой положительной определенности S_2-S_1:

$$S_2-S_1=2\|A\|\int\limits_{-T_2}^{-T_1} e^{t\|A\|K}\Lambda^{-2}e^{t\|A\|K^*}\,dt>0.$$

Итак, доказана

Теорема 3.2. *Матричная функция $Y(0,\ T)$ числового аргумента $T\,(T\geqslant 0)$ такова, что*

$$Y(0,\ 0)=0,\quad Y(0,\ T)\to-\Lambda \ \textit{при}\ T\to+\infty,$$

$$Y(0,\ T_1)>Y(0,\ T_2)\ \text{при}\ T_2>T_1.$$

Выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $Y(0,\ T)$. Во-первых, отметим, что из приведенных представлений $X(t)$, Φ, F может быть выведена формула

$$X(t)=\left[e^{(t-T)\|A\|K}\left(\Lambda^{-1}-R\right)e^{(t-T)\|A\|K^*}+\left(\Lambda^{-1}+R\right)\right]e^{-t\|A\|K^*}\times$$

$$\times\left[e^{-T\|A\|K}\Lambda^{-1}\left(\Lambda^{-1}-R\right)e^{-T\|A\|K^*}+\left(\Lambda^{-1}+R\right)^{-1}\right],$$

в которой обе квадратные скобки являются строго положительно определенными. Поэтому при всех t из отрезка $[0,\ T]$ матрица $X(t)$ обратима. Пользуясь первым равенством в (3.6), найдем для производной от $X^{-1}(t)$ выражение

$$\frac{d}{dt}\left[X^{-1}(t)\right]=X^{-1}\left[\frac{d}{dt}X\right]X^{-1}=-X^{-1}A-2\|A\|X^{-1}B\left(B^*B\right)^{-1}B^*YX^{-1},$$

которое вместе со вторым равенством в (3.6) приводит к выполненному при $0 \leqslant t \leqslant T$ уравнению для $Y(t)X^{-1}(t) \equiv Y(t, T)X^{-1}(t, T)$:

$$\frac{d}{dt}\left[YX^{-1}\right] = -A^*\left[YX^{-1}\right] - \left[YX^{-1}\right]A +$$
$$+ 2\|A\|\{I - \left[YX^{-1}\right]B(B^*B)^{-1}B^*\left[YX^{-1}\right]\}.$$

Из граничных условий (3.7) следует, что

$$[Y(0, T)\cdot X^{-1}(0, T)] = Y(0, T); \ [Y(T, T)X^{-1}(T, T)] = 0.$$

Сделав замену переменных $t' = T - t$ и обозначив $H(t') = -Y(t, T)\times \times X^{-1}(t, T)$, так что

$$H(T) = -Y(0, T)X^{-1}(0, T) = -Y(0, T),$$

мы приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt}H(T) = HA + A^*H + 2\|A\|\left[I - HB(B^*B)^{-1}B^*H\right], \tag{3.11}$$

нужное нам решение которого удовлетворяет граничному условию $H(0) = 0$.

Из (3.8) вытекает следующая формула для $H(T)$:

$$H(T) = \Lambda - 2e^{T\|A\|K^*}\left[(\Lambda^{-1} - R) + e^{T\|A\|K}(\Lambda^{-1} + R)e^{T\|A\|K^*}\right]^{-1}e^{T\|A\|K}. \tag{3.12}$$

Как было показано выше, $H(T) = H^*(T) = -Y(0, T)$ — строго возрастающая с ростом T положительно определенная матрица, которая при $T \to \infty$ стремится к Λ:

$$\lim_{T\to\infty} H(T) = \Lambda.$$

Из (3.12), воспользовавшись неравенствами (см. (1.17), (2.9)):

$$\left[(\Lambda^{-1} - R) + e^{T\|A\|K}(\Lambda^{-1} + R)e^{T\|A\|K^*}\right] \geqslant \Lambda^{-1} - R \geqslant \frac{1}{\|\Lambda\|^3\left(1 + \frac{1}{2\|\Lambda\|}\right)}I,$$

$$\left\|e^{T\|A\|K}\right\| = \left\|e^{T\|A\|K^*}\right\| \leqslant \sqrt{2}\|\Lambda\|\sqrt{1 + \frac{1}{2\|\Lambda\|}}\, e^{-\frac{T\|A\|}{\|\Lambda\|}},$$

легко выводится оценка

$$\|\Lambda - H(T)\| \leqslant 4\|\Lambda\|^4\left(1 + \frac{1}{2\|\Lambda\|}\right)^2 e^{-\frac{2T\|A\|}{\|\Lambda\|}} \tag{3.13}$$

скорости убывания нормы разности $\Lambda - H(T)$ с ростом T.

Уравнение (3.11) носит название матричного дифференциального уравнения Риккати. Проведенное выше исследование его решения $H(T)$ основывалось на том, что алгебраическое уравнение Лурье — Риккати (1.4):

$$\Lambda A + A^*\Lambda + 2\|A\|[I - \Lambda B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda] = 0$$

имеет неотрицательно определенное решение Λ, т. е. на том, что матричная пара (A, B) стабилизируема. Все полученные для $H(T)$ оценки выражаются через $\|\Lambda\|$ или на основании неравенства

$$\|\Lambda\| \leqslant \frac{1 + \sqrt{5}}{2\,\mathrm{stab}\,[A, B]}$$

— через качество стабилизируемости $\mathrm{stab}[A, B]$. Аналогичное (3.11) дифференциальное уравнение Риккати используется для построения так называемого фильтра Калмана — Бюсси, о котором пойдет речь в следующем параграфе при обсуждении понятий детектируемости и наблюдаемости. Мы здесь подробно осветили хорошо известные свойства решений дифференциального уравнения Риккати из методических соображений.

§ 4. ДЕТЕКТИРУЕМОСТЬ, НАБЛЮДАЕМОСТЬ, УПРАВЛЯЕМОСТЬ

Изучение проблемы фильтрации результатов измерения для получения информации о наблюдаемом процессе обычно начинается со следующей модели. Пусть $x(t)$ управляется векторным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + f(t) + 2\|A\|\xi(t), \tag{4.1}$$

в правой части которого стоит «случайная» функция $\xi(t)$ (помеха) из распределения типа белого шума, характеризуемого несмещенностью, т. е. нулевым математическим ожиданием при любом t, взаимной независимостью $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$, и независящей от времени ковариационной матрицей, символически записываемой в виде

$$E[\xi(t_1),\ \xi^*(t_2)] = \delta(t_1 - t_2)Q.$$

Наблюдение над $x(t)$ состоит в рассмотрении вектора

$$\frac{d}{dt}y(t) = (CC^*)^{-\frac{1}{2}}Cx(t) + \eta(t). \tag{4.2}$$

Через $\eta(t)$ обозначена аналогичная $\xi(t)$ случайная функция с нулевым математическим ожиданием, для которой

$$E[\eta(t_1),\ \eta^*(t_2)] = \delta(t_1 - t_2)R.$$

Мы здесь используем не непосредственный результат измерения $Cx(t)$, а полученный его нормировкой вектор $(CC^*)^{-\frac{1}{2}}Cx(t)$, представляющий из себя кратчайший в евклидовой метрице отрезок между одной из точек «ненаблюдаемой» плоскости $Cx = 0$ и концом вектора x.

Процедура фильтрации состоит в решении уравнения

$$\frac{d}{dt}\widehat{x} = A\widehat{x} + f(t) + 2\|A\|L(t)\left[\frac{d}{dt}y(t) - (CC^*)^{-\frac{1}{2}}C\widehat{x}(t)\right] \tag{4.3}$$

со специально подбираемой матрицей усиления $L(t)$ так, что ошибка оценивания $z(t) = \widehat{x}(t) - x(t)$ описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}z(t) = \left[A - 2\|A\|L(t)(CC^*)^{-\frac{1}{2}}C\right]z(t) + 2\|A\|[\xi(t) - L(t)\eta(t)]. \tag{4.4}$$

Матрица усиления $L(t)$ подбирается так, чтобы обеспечить при каждом t наименьший из возможных след для ковариационной матрицы ошибки оценивания $E[z(t)z^*(t)] = s(t)$. Эта схематически здесь намеченная процедура носит название фильтрации Калмана — Бюсси (см. [9, 10]). Оказывается, что при такой фильтрации мы должны выбирать $L(t)$ в виде

$$L(t) = M(t)C^*(CC^*)^{-\frac{1}{2}}R^{-1}, \tag{4.5}$$

где $M(t)$ — решение дифференциального матричного уравнения Риккати:

$$\frac{d}{dt}M = AM + MA^* - 2\|A\|\left[MC^*(CC^*)^{-\frac{1}{2}}R^{-1}(CC^*)^{-\frac{1}{2}}CM - Q\right]. \tag{4.6}$$

Начальное значение $M(0)$ выбирается равным нулю $M(0) = 0$, если $x(0)$ известно точно и положено $\widehat{x}(0) = x(0)$. При этом $M(t)$ будет совпадать с экстремальной $S(t)$, т. е. с $S(t)$, имеющей наименьший из возможных след $\operatorname{tr} S(t)$.

Пара матриц (A, C) называется детектируемой, если при положительно определенных Q, R у алгебраического уравнения Лурье — Риккати:

$$AM_\infty + M_\infty A^* + 2\|A\|\left[Q - M_\infty C^*(CC^*)^{-\frac{1}{2}}R^{-1}(CC^*)^{-\frac{1}{2}}CM_\infty\right] = 0 \tag{4.7}$$

существует положительно определенное решение M_∞. В этом случае решение дифференциального уравнения (4.6) с начальным условием $M(0) = 0$ существует для всех $t > 0$ и при $t \to +\infty$ стремится к постоянной матрице M_∞ — к решению уравнения (4.7).

Степень детектируемости пары (A, C) предлагается характеризовать нормой $\|M_\infty\|$ положительно определенного решения уравнения Лурье — Риккати

$$AM_\infty + M_\infty A^* + 2\|A\|[I - M_\infty C^*(CC^*)^{-1}CM_\infty] = 0, \tag{4.8}$$

которое отвечает специально выбранным модельным R, Q: $R = I$, $Q = I$. Уравнение (4.8) только обозначениями отличается от изучавшегося в § 1, 2 уравнения Лурье — Риккати:

$$\Lambda A + A^*\Lambda + 2\|A\|[I - \Lambda B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda] = 0. \tag{4.9}$$

Соответствующие переобозначения таковы:

$$M_\infty \leftrightarrow \Lambda;\ A \leftrightarrow A^*;\ C^* \leftrightarrow B.$$

Это обстоятельство обычно формулируется в виде принципа двойственности: детектируемость пары (A, C) эквивалентна стабилизируемости пары (A^*, C^*).

Пусть M_0 — это единственное положительно определенное решение матричного уравнения

$$AM_0 + M_0A^* + 2\|A\|[I - M_0^2] = 0. \tag{4.10}$$

Числовую характеристику степени детектируемости пары (A, C) определим формулой

$$\operatorname{dtc}[A, C] = \begin{cases} \dfrac{\|M_0\|}{\|M_\infty\|}, & \text{если положительно определенное решение} \\ & \text{уравнения (4.8) существует,} \\ 0 - & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{4.11}$$

Это определение полностью аналогично приведенному в § 1 определению числовой характеристики стабилизируемости $\operatorname{stab}[A, B]$ и связано с ней соотношением

$$\operatorname{dtc}[A, C] = \operatorname{stab}[A^*, C^*]. \tag{4.12}$$

В частности, отсюда следует, что $\operatorname{dtc}[A, C] \leqslant 1$. Так как уравнение (4.10) для M_0 отличается от уравнения (1.7) для Λ_0 лишь обозначениями, то для $\|M_0\|$ выполнены аналогичные (1.6), (1.8) оценки:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant \|M_0\| \geqslant \frac{1}{2},$$

в силу которых

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2\operatorname{dtc}[A, C]} \leqslant \|M_\infty\| \leqslant \frac{2}{\operatorname{dtc}[A, C]}. \tag{4.13}$$

Решение дифференциального уравнения Риккати (4.6), в котором положено $R = Q = I$, при $t \to \infty$, как уже отмечалось, стремится к пределу M_∞. В частности, это следует из рассмотрений конца § 3 (с учетом соответствующих переобозначений). Применив к нашему случаю оценку (3.13), мы получим, что

$$\|M_\infty - M(t)\| \leqslant 4\|M_\infty\|^4\left(1 + \frac{1}{2\|M_\infty\|}\right)^2 e^{-\frac{2T\|A\|}{\|M_\infty\|}}. \tag{4.14}$$

Наряду с понятиями стабилизируемости и детектируемости матричных пар (A, B), (A, C) широко используются также понятия управляемости и наблюдаемости. Пара (A, B) управляема, если линейная оболочка столбцов составной матрицы

$$[B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \ldots\ldots A^{N-1}B]$$

имеет максимально возможный ранг N. Пара (A, B) стабилизируема, если та же линейная оболочка содержит все инвариантные для A корневые подпространства, отвечающие всем точкам спектра, не лежащим строго в левой полуплоскости. Поэтому пара (A, B) управляема тогда и только тогда, когда стабилизируемы обе пары (A, B); $(-A, B)$. Точно так же, пара (A, C) наблюдаема, если детектируемы обе пары (A, C); $(-A, C)$. Количественные характеристики управляемости $\operatorname{contr}[A, B]$ и наблюдаемости $\operatorname{obs}[A, C]$ поэтому естественно определить так:

$$\begin{gathered}\operatorname{contr}[A, B] = \min\{\operatorname{stab}[A, B], \operatorname{stab}[-A, B]\} \\ \operatorname{obs}[A, C] = \min\{\operatorname{dtc}[A, C], \operatorname{dtc}[-A, C]\}.\end{gathered} \tag{4.15}$$

Важно отметить, что все четыре предлагаемые характеристики $\operatorname{stab}[A, B]$, $\operatorname{contr}[A, B]$, $\operatorname{dtc}[A, C]$, $\operatorname{obs}[A, C]$ матричных пар рассчитываются при помощи одной и той же вычислительной процедуры.

§ 5. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ

Начнем с напоминания, что в § 2 (см. (2.2)) мы обозначили через $\mathscr{H}$ гамильтонову матрицу (см. 2.2)):

$$\mathscr{H} = \begin{bmatrix} A & 2\|A\| B (B^*B)^{-1} B^* \\ 2\|A\| I & -A^* \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

так, что $\|\mathscr{H}\| \leqslant 3\|A\|$. Положив

$$\Psi = e^{-\tau\mathscr{H}}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} -I_N & 0 \\ 0 & -I_N \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

образуем бесконечную систему уравнений

$$e^{-\tau\mathscr{H}} z_{q+1} - z_q = \zeta_q, \tag{5.3}$$

которую нам удобно записывать в виде

$$\Phi z_q + \Psi z_{q+1} = \zeta_q. \tag{5.4}$$

Неизвестными в этой системе являются $2N$-мерные векторы z_q, а правыми частями — векторы той же размерности ζ_q. В настоящем параграфе мы все время будем предполагать, что пара (A, B) стабилизируема. Из этого предположения вытекает отсутствие у $\mathscr{H}$ чисто мнимых собственных значений, благодаря чему при ограниченных ζ_q ($\|\zeta_q\| \leqslant \text{const}$) существует и единственно ограниченное ($\|z_q\| \leqslant \text{const}$) решение системы (5.4) или (5.5). С помощью матрицы Грина

$$G(t) = \begin{bmatrix} G_{11}(t) \vdots G_{12}(t) \\ G_{21}(t) \vdots G_{22}(t) \end{bmatrix},$$

являющейся (см. (2.10)) стремящимся к нулю при $t \to \pm\infty$ решением матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} G(t) = \mathscr{H} G(t) + \delta(t) I_{2N},$$

нетрудно построить представление ограниченных решений системы (5.3) или, в других обозначениях, (5.4):

$$z_q = G(-0)\zeta_q + \sum_{\substack{p=-\infty \\ p\neq 0}}^{p=+\infty}{}' G((p-q)\tau)\zeta_p.$$

Удобно положить

$$\tilde{G}(t) = G(t-0) = \begin{cases} G(-0) & (t=0), \\ G(t) & (t\neq 0) \end{cases} \tag{5.5}$$

и использовать для решения уравнений (5.4) формулу

$$z_q = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \tilde{G}((q-p)\tau)\zeta_p. \tag{5.6}$$

Решая систему уравнений с матричными неизвестными Z_q

$$\Phi Z_q + \Psi Z_{q+1} = \delta(q) I_{2N} \tag{5.7}$$

и отыскивая при этом ограниченные решения, мы, очевидно, получим

$$Z_0 = \tilde{G}(0) \equiv G(-0). \tag{5.8}$$

Напомним (см. (2.13)), что, зная $G(-0)$, мы уже без труда сумеем вычислить положительно определенное решение Λ квадратного матричного уравнения (1.4):

$$\Lambda A + A^*\Lambda + 2\|A\|[I - \Lambda B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda] = 0.$$

Одна из трудностей, с которыми мы сталкиваемся при решении уравнений (5.7), состоит в том, что этих уравнений бесконечное число, и прежде, чем пытаться их решать, нужно (5.7) заменить конечной системой с близкими решениями. Для этого удобно использовать уравнения с периодическими правыми частями, решения которых тоже будут периодическими.

Пусть в системе (5.4) правые части и решения периодические:

$$\zeta_q = \zeta_{q+(2\cdot 2^l+1)}, \quad z_q = z_{q+(2\cdot 2^l+1)},$$

и будем эти решения и правые части считать векторами $(2\cdot 2^l+1)\cdot 2N$-мерных евклидовых пространств с нормами:

$$\sqrt{\sum_{-2^l}^{+2^l}\|\zeta_q\|^2}, \quad \sqrt{\sum_{-2^l}^{+2^l}\|z_q\|^2}.$$

Удобно обозначить через z составной вектор, составленный из векторных компонент $z_q(-2^l \leqslant q \leqslant 2^l)$ и, аналогично, через ζ — вектор, образованный векторными компонентами ζ_q с теми же индексами. Матрицу системы (5.4), переводящую z в ζ, обозначим через $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}_z = \zeta$). Легко убедиться, что

$$\|\mathcal{F}\| \leqslant \max\begin{cases} \|\Phi\| + \|\Psi\| = \|\Psi\| + 1, \\ \|\Phi^*\| + \|\Psi^*\| = \|\Phi\| + \|\Psi\| = \|\Psi\| + 1 \end{cases}$$

и пользуясь (5.2), обосновать неравенство

$$\|\mathcal{F}\| \leqslant 1 + e^{3\tau\|A\|}. \tag{5.9}$$

Пользуясь периодичностью правых частей, можно формулу (5.6) преобразовать к виду

$$z_q = \sum_{p=-2^l}^{p=2^l} \tilde{G}^{(l)}_{q-p}\zeta_p, \tag{5.10}$$

в котором при $-2^l \leqslant r \leqslant 2$

$$\widetilde{G}_r^{(l)} = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} G\{[r+s(2\cdot 2^l+1)]\tau\} = \widetilde{G}(r\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} \widetilde{G}\{[r+s(2\cdot 2^l+1)]\tau\} + \\ + \sum_{s=1}^{\infty} \widetilde{G}\{[r-s(2\cdot 2^l+1)]\tau\}. \tag{5.11}$$

Пользуясь оценкой (2.12) для $\|G(t)\|$, устанавливаем, что

$$\|\widetilde{G}_r^l - \widetilde{G}(r\tau)\| \leqslant 4\sqrt{2}\|\Lambda\|^4\left(1+\frac{1}{\|\Lambda\|^2}\right)\left(1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{-(2^l+1)\tau\|A\|/\|\Lambda\|}}{1-e^{-2(2^l+1)\tau\|A\|/\|\Lambda\|}} \tag{5.12}$$

и что

$$\sum_{r=-2^l}^{r=2^l} \|\widetilde{G}_r^{(l)}\| \leqslant \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \|\widetilde{G}(r\tau)\| + \\ + 4\sqrt{2}\|\Lambda\|^4\left(1+\frac{1}{\|\Lambda\|^2}\right)\left(1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{(2\cdot 2^l+1)\, e^{-(2^l+1)\tau\|A\|/\|\Lambda\|}}{1-e^{-2(2^l+1)\tau\|A\|/\|\Lambda\|}}. \tag{5.13}$$

При помощи (2.12), (2.20), (5.5) оценивается первое слагаемое (сумма) в (5.13):

$$\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} \|\widetilde{G}(r\tau)\| \leqslant 2\|\Lambda\|^2\left(1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}\right)\left(1+\frac{1}{\|\Lambda\|^2}\right) + \\ + 4\sqrt{2}\|\Lambda\|^4\left(1+\frac{1}{2\|\Lambda\|}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{\|\Lambda\|^2}\right)\frac{e^{-\tau\|A\|/\|\Lambda\|}}{1-e^{-\tau\|A\|/\|\Lambda\|}}. \tag{5.14}$$

Оценками (5.9), (5.13), (5.14) удобно пользоваться, выбирая $\tau = m/\|A\|$ (например, положив $m = \frac{1}{2}$ или $m = \frac{1}{5}$). При этом оказывается, что $\sum_{r=-2^l}^{r=2^l} \|\widetilde{G}_r^{(l)}\|$ при достаточно больших l оценивается только через $\|\Lambda\|$, тогда как $\|\mathcal{F}\|$ ограничена сверху абсолютной постоянной.

Пользуясь представлением (5.10), несложно оценить $\|\mathcal{F}^{-1}\|$ — норму оператора, переводящего правые части ζ_q в решение z_q. При этом получается оценка

$$\|\mathcal{F}^{-1}\| \leqslant \sum_{p=-2^l}^{p=+2^l} \|\widetilde{G}_p^{(l)}\|. \tag{5.15}$$

Отсюда ясно, что при фиксированном m и при достаточно большом l удается обусловленность $\|\mathcal{F}\|\cdot\|\mathcal{F}^{-1}\|$ системы (5.4) с периодическими правыми частями оценить только через $\|\Lambda\|$. (С ростом $\|\Lambda\|$ система становится хуже обусловленной).

Приступим теперь к описанию схемы, по которой можно провести решение системы с периодическими правыми частями. Интересующие нас уравнения имеют следующий вид:

$$\Phi z_{2^l+1} + \Psi z_0 = \zeta_0, \tag{5.16}$$

$$\Phi z_q + \Psi z_{q+1} = 0 \quad (q = 0, 1, \ldots, 2^{l+1}-1). \tag{5.17}$$

Идея, положенная в основу алгоритма, состоит в исключении из однородных уравнений (5.17) всех промежуточных неизвестных с индексами 1, 3, 5, ..., $2^{l+1}-1$ с помощью ортогональных преобразований уравнений.

В результате такого исключения получаются новые уравнения

$$\widehat{\Phi}\widehat{z}_q + \widehat{\Psi}\widehat{z}_{q+1} = 0, \tag{5.18}$$

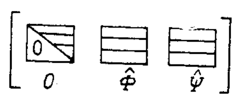
неизвестные в которых совпадают с частью неизвестных первоначальной системы:

$$\widehat{z}_q = z_{2q} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots, 2^l - 1). \tag{5.19}$$

Процесс исключения проводится следующим образом. Объединяя два последовательных матричных уравнения из (5.17) с учетом переобозначений (5.19), мы получаем уравнение с составной матрицей

$$\begin{bmatrix} \Psi & \Phi & 0 \\ \Phi & 0 & \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{2q+1} \\ \widehat{z}_q \\ \widehat{z}_{q+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.20}$$

Затем подбирается ортогональное преобразование $\mathscr{P}$, которое, действуя слева на составную матрицу коэффициентов в левой части (5.20), преобразует ее к следующему виду,



в котором клетки $\widehat{\Phi}$, $\widehat{\Psi}$ как раз и будут коэффициентами полученного в результате исключения уравнения (5.18). Подбор ортогонального $\mathscr{P}$ осуществляется в виде произведения ортогональных отражений таким же образом, как это делается в широко распространенной процедуре вычислительной линейной алгебры. Эта процедура носит название QR-разложения.

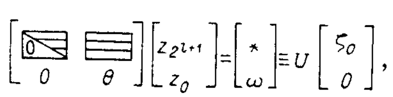
У полученных в результате исключения уравнений (5.18) опять исключим новые четные неизвестные и т. д. до тех пор, пока не придем к уравнению

$$\widetilde{\Phi}z_0 + \widetilde{\Psi}z_{2^l+1} = 0, \tag{5.21}$$

являющемуся следствием (5.17) и связывающему только крайние неизвестные векторы с индексами 0, 2^{l+1}. Для этого придется осуществить исключение l раз. Теперь из уравнений (5.16), (5.21) образуем составную систему

$$\begin{bmatrix} \Phi & \Psi \\ \widetilde{\Psi} & \widetilde{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{2^l+1} \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

и подберем, опять-таки с помощью QR-разложения, левый ортогональный множитель, умножение на который приводит (5.22) к треугольному виду



из которого выделяется подсистема

$$\Theta z_0 = \omega \tag{5.23}$$

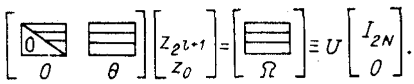
с треугольной матрицей коэффициентов Θ, позволяющая без труда вычислить нужное нам z_0. Важно отметить, что Θ представляет собой главный минор некоторой матрицы, полученной умножением слева на ортогональное преобразование исходной матрицы $\mathscr{F}$ коэффициентов системы, составленной из (5.16), (5.17), и поэтому обусловленность $\|\Theta\|\,\|\Theta^{-1}\|$ системы (5.23) не превышает $\|\mathcal{F}\|\,\|\mathcal{F}^{-1}\|$. Выше было показано, что $\|\mathcal{F}\|\,\|\mathcal{F}^{-1}\|$ оценивается через $\|\Lambda\|$.

Таким образом, если при осуществлении описанного алгоритма окажется, что решить уравнения (5.23) не удается из-за плохой обусловленности, то в этом случае можно ручаться, что либо $\|\Lambda\|$ очень велика, либо положительно определенного решения Λ у уравнения (1.4) не существует. Иными словами, в этом случае пара (A, B) либо очень плохо стабилизируема, либо не стабилизируема.

Остановимся кратко на использовании описанной процедуры при расчете $\tilde{G}(0) \equiv G(-0)$, т. е. при решении уравнений (5.7) с матричной правой частью. В этом случае вместо вектора ζ_0 в правой части (5.16) мы должны использовать единичную матрицу I_{2N}, считать неизвестные Z_{2l+1}, Z_0 квадратными матрицами, а систему (5.22) записывать так:

$$\begin{bmatrix} \Phi & \Psi \\ \tilde{\Psi} & \tilde{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{2l+1} \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{2N} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.24}$$

После умножения этой системы слева на U, подобранное как указано выше, она принимает вид:



(5.25)

После этого $G(-0) \approx Z_0$ найдется по формуле

$$G(-0) \approx \Theta^{-1}\Omega. \tag{5.26}$$

Выбором достаточно большого l можно обеспечить высокую точность расчета $G(-0)$. Вычислив $G(-0)$:

$$G(-0) = \begin{bmatrix} G_{11}(-0) & G_{12}(-0) \\ G_{21}(-0) & G_{22}(-0) \end{bmatrix},$$

образуем (см. (2.13)) составные матрицы

$$\mathfrak{G}_2 = \begin{bmatrix} G_{12}(-0) \\ G_{22}(-0) \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{G}_1 = \begin{bmatrix} G_{11}(-0) \\ G_{21}(-0) \end{bmatrix},$$

с помощью которых строится переопределенная система для расчета Λ:

$$\mathfrak{G}_2\Lambda = \mathfrak{G}_1. \tag{5.27}$$

Если $G_{ik}(-0)$ удалось вычислить с малой погрешностью, то и система (5.27) будет практически совместной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Годунов С. К.** Количественная характеристика основных понятий теории управления // ПМТФ.— 1989.— № 2.— С. 49—52.
2. **Малышев А. Н.** Вычисление инвариантных подпространств регулярного пучка матриц.— Новосибирск, 1988.— 20 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 6).
3. **Малышев А. Н.** Гарантированная точность в спектральных задачах линейной алгебры // Тр. Ин-та математики СО АН СССР.— 1990.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 19—104.
4. **Roberts J. D.** (1971). Report CUED/B — control/TR-13 Engineering Dep. Cambridge University.
5. **Roberts J. D.** Linear model reduction and Solution of the algebraic Riccati equation by use of the sign-function // Intern. J. Contr.— 1980.— Vol. 32, N 4.— P. 677—687.
6. **Алиев Ф. А.** Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем.— Баку: ЭЛМ, 1989.— 320 с.

7. **Уонем М.** Линейные многомерные системы управления.— М.: Наука, 1980.— 376 с.
8. **Беккенбах Э., Беллман Р.** Неравенства.— М.: Мир, 1965.— 276 с.
9. **Bucy R. S., Joseph P. D.** Filtering for stochastic process with applications to guidance.— New York: Wiley Interscience, 1968.
10. **Брамер К., Зиффлинг Г.** Фильтр Калмана — Бюсси.— М.: Наука, 1982.— 200 с.
11. **Булгаков А. Я.** Эффективно вычисляемый параметр качества устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Сиб. мат. журн.— 1980.— Т. 21, № 3.— С. 32—41.
12. **Булгаков А. Я., Годунов С. К.** Расчет положительно определенных решений уравнения Ляпунова // Тр. Ин-та математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 19—104.

А. М. БЛОХИН, А. А. ПОЗДЕЕВ, В. Р. ЦИМЕРМАН

МЕТОД ПРЯМЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ: ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В настоящей работе для нахождения приближенных решений уравнений газовой динамики предлагается так называемая **дифференциально-разностная вычислительная модель**, которая в конечном итоге сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (в конкретных расчетах эта система решается методом ортогональной прогонки).

В § 1—3 дается теоретическое обоснование предложенной вычислительной модели на примере **линейной смешанной задачи** для системы уравнений акустики с граничными условиями на ударной волне (теоретическое обоснование предложенной вычислительной модели в случае двух границ дано в работе А. М. Блохина и В. Р. Цимермана «Исследование дифференциально-разностной модели линейной смешанной задачи о сверхзвуковом обтекании клина», помещенной в этих же трудах).

Остальная часть работы посвящена вычислительным экспериментам. В качестве примера выбрана задача об обтекании бесконечного кругового конуса сверхзвуковым потоком идеального газа (это стационарное решение уравнений газовой динамики находится методом установления). С помощью предложенной вычислительной модели находится приближенное решение этой задачи. Результаты численных расчетов сравниваются с расчетами других авторов.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассматривается смешанная задача для системы уравнений акустики в области $\Pi = \{(t, x, y) \mid t > 0,\ (x, y) \in R^2_+\}$:

$$A\mathbf{U}_t + B\mathbf{U}_x + C\mathbf{U}_y = 0,$$

с граничными условиями при $t > 0,\ x = 0,\ y \in R$:

$$u + dp = 0,\ v_t + \omega v_y - \lambda p_y = 0$$

и с начальными данными при $t = 0$:

$$(0, x, y) = \mathbf{U}_0(x, y),\ (x, y) \in R^2_+.$$

Здесь

$$R^2_+ = \{(x, y) \mid x > 0,\ y \in R\};$$