7. **Уонем М.** Линейные многомерные системы управления.— М.: Наука, 1980.— 376 с.
8. **Беккенбах Э., Беллман Р.** Неравенства.— М.: Мир, 1965.— 276 с.
9. **Bucy R. S., Joseph P. D.** Filtering for stochastic process with applications to guidance.— New York: Wiley Interscience, 1968.
10. **Брамер К., Зиффлинг Г.** Фильтр Калмана — Бюсси.— М.: Наука, 1982.— 200 с.
11. **Булгаков А. Я.** Эффективно вычисляемый параметр качества устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Сиб. мат. журн.— 1980.— Т. 21, № 3.— С. 32—41.
12. **Булгаков А. Я., Годунов С. К.** Расчет положительно определенных решений уравнения Ляпунова // Тр. Ин-та математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 19—104.

А. М. БЛОХИН, А. А. ПОЗДЕЕВ, В. Р. ЦИМЕРМАН

МЕТОД ПРЯМЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ: ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В настоящей работе для нахождения приближенных решений уравнений газовой динамики предлагается так называемая **дифференциально-разностная вычислительная модель**, которая в конечном итоге сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (в конкретных расчетах эта система решается методом ортогональной прогонки).

В § 1—3 дается теоретическое обоснование предложенной вычислительной модели на примере **линейной смешанной задачи** для системы уравнений акустики с граничными условиями на ударной волне (теоретическое обоснование предложенной вычислительной модели в случае двух границ дано в работе А. М. Блохина и В. Р. Цимермана «Исследование дифференциально-разностной модели линейной смешанной задачи о сверхзвуковом обтекании клина», помещенной в этих же трудах).

Остальная часть работы посвящена вычислительным экспериментам. В качестве примера выбрана задача об обтекании бесконечного кругового конуса сверхзвуковым потоком идеального газа (это стационарное решение уравнений газовой динамики находится методом установления). С помощью предложенной вычислительной модели находится приближенное решение этой задачи. Результаты численных расчетов сравниваются с расчетами других авторов.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассматривается смешанная задача для системы уравнений акустики в области $\Pi = \{(t, x, y) \mid t > 0,\ (x, y) \in R^2_+\}$:

$$AU_t + BU_x + CU_y = 0,$$

с граничными условиями при $t > 0,\ x = 0,\ y \in R$:

$$u + dp = 0,\ v_t + \omega v_y - \lambda p_y = 0$$

и с начальными данными при $t = 0$:

$$(0, x, y) = U_0(x, y),\ (x, y) \in R^2_+.$$

Здесь

$$R^2_+ = \{(x, y) \mid x > 0,\ y \in R\};$$

$A = \mathrm{diag}(1,\ M^2,\ M^2)$ — диагональная матрица;

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix},$$

$$B = A + B_0,\ C = C_0 + \omega \cdot A;$$

$M\,(0 < M < 1)$, $\omega \geqslant 0$, d, λ — некоторые постоянные (более подробно постановка этой смешанной задачи описана в [1, гл. I, § 1]; там же показано, что при выполнении условий

$$m,\ n,\ \left(\gamma_1^2 - 4mn\right) > 0,$$

где $m = \beta d + \lambda M^2/\beta$, $n = -\lambda/\beta$, $\gamma_1 = \beta^2/M^2$, $\beta^2 = 1 - M^2$, сформулированная выше смешанная задача корректна).

Цель этой работы заключается в построении некоторых **дифференциально-разностных моделей** для нахождения приближенного решения поставленной смешанной задачи. Эти дифференциально-разностные модели конструируются так, чтобы они допускали построение аналога **диссипативного интеграла энергии** для исходной смешанной задачи (см. [1, 2]). Наличие такого аналога дает возможность доказать корректность предлагаемых дифференциально-разностных моделей.

В области П по переменным t, y проведем **дискретизацию** с шагами $\Delta t = \Delta$, $\Delta y = h_y$. Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{U}_j^k(x) = \mathbf{U} = \mathbf{U}(k\Delta,\ x,\ jh_y);$$

$$\varphi\mathbf{U}_j^k(x) = \varphi\mathbf{U} = \mathbf{U}_j^{k+1}(x);$$

$$\theta\mathbf{U}_j^k(x) = \theta\mathbf{U} = \mathbf{U}_{j+1}^k(x);$$

$$\theta^{-1}\mathbf{U}_j^k(x) = \theta^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{U}_{j-1}^k(x);$$

$$L_t\mathbf{U}_j^k(x) = L_t\mathbf{U} = \widetilde{\mathbf{U}};$$

$$L_t = \alpha\varphi + \delta,\ \ \widehat{\tau} = \frac{\varphi - 1}{\Delta},\ \ \xi = \frac{\partial}{\partial x},\ \ \widehat{\xi} = L_t\xi;$$

$$\eta = \theta - 1,\ \ \bar{\eta} = 1 - \theta^{-1},\ \ \widehat{\eta}_0 = \frac{\eta + \bar{\eta}}{2\cdot h_y},\ \ \widehat{\eta} = L_t\widehat{\eta}_0,$$

где α, $\delta \geqslant 0$ $(\alpha + \delta = 1)$ — некоторые постоянные.

Сформулируем следующую дифференциально-разностную модель исходной смешанной задачи:

$$A\widehat{\tau}\mathbf{U} + B\widehat{\xi}\mathbf{U} + \widehat{C}\eta\mathbf{U} = 0,\ x > 0,\ k,\ |j| = 0,\ 1,\ \ldots; \tag{1.1}$$

$$u_j^k(0) + dp_j^k(0) = 0;$$

$$\widehat{\tau}v_j^k(0) + \omega\widehat{\eta}v_j^k(0) - \lambda\cdot\widehat{\eta}p_j^k(0) = 0,\ k,\ |j| = 0,\ 1,\ \ldots; \tag{1.2}$$

$$\mathbf{U}_j^0(x) = \mathbf{U}_0(x,\ jh_y),\ x \geqslant 0,\ |j| = 0,\ 1,\ \ldots. \tag{1.3}$$

Если в области П провести дискретизацию только по переменной t, то можно сформулировать еще одну дифференциально-разностную модель:

$$A\widehat{\tau}\mathbf{U}^k + B\widehat{\xi}\mathbf{U}^k + C\widehat{\eta}\mathbf{U}^k = 0,\ (x,\ y) \in R_+^2,\ \ k = 0,\ 1,\ \ldots; \tag{1.4}$$

$$u^k + dp^k = 0,\ \widehat{\tau}v^k + \omega\widehat{\eta}v^k - \lambda\widehat{\eta}p^k = 0;\ x = 0,\ y \in R,\ k = 0,\ 1,\ \ldots; \tag{1.5}$$

$$\mathbf{U}^0(x,\ y) = \mathbf{U}_0(x,\ y),\ x \geqslant 0,\ y \in R. \tag{1.6}$$

Здесь

$$\mathbf{U}(k\Delta,\ x,\ y) = \mathbf{U}^k(x,\ y) = \mathbf{U}^k;\ \ \widehat{\eta} = L_t\eta;\ \ \eta = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Будем называть дифференциально-разностную модель (1.1)—(1.3) **моделью** I, а дифференциально-разностную модель (1.4)—(1.6) **моделью** II.

Для дифференциально-разностных моделей I и II справедливы следующие факты (см. [1, гл. III, § 1]). Умножим скалярно систему (1.1) (или систему (1.4)) на вектор:

$$\begin{pmatrix} M^2\cdot(\widehat{T}+\widehat{\xi}) \\ -\widehat{\xi} \\ -\widehat{\eta} \end{pmatrix},$$

где $\widehat{T}=\widehat{\tau}+\omega\cdot\widehat{\eta}$. После несложных выкладок получаем, что первая компонента вектора $\mathbf{U}-p$ удовлетворяет **дифференциально-разностному волновому уравнению**

$$\{M^2(\widehat{T}+\widehat{\xi})^2-\widehat{\xi}^2-\widehat{\eta^2}\}p=0. \tag{1.7}$$

Умножим теперь скалярно систему (1.1) на вектор

$$\begin{pmatrix} M^2\cdot\widehat{T} \\ -\widehat{T} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полученное выражение при $x=0$ принимает вид

$$\{M^2\cdot(1+d)\cdot\widehat{T}^2-\beta^2\cdot\widehat{T}\cdot\widehat{\xi}+M^2\cdot\lambda\cdot\widehat{\eta^2}\}\,p_j^k(0)=0. \tag{1.8}$$

Следовательно, вместо задачи (1.1)—(1.3) может быть рассмотрена другая дифференциально-разностная модель:

$$\begin{gathered}\{M^2\cdot(\widehat{T}+\widehat{\xi})^2-\widehat{\xi}^2-\widehat{\eta^2}\}p=0,\\ M^2\cdot(\widehat{T}+\widehat{\xi})u=-\widehat{\xi}p,\\ M^2\cdot(\widehat{T}+\widehat{\xi})v=-\widehat{\eta}p,\ x>0,\ k,\ |j|=0,\ 1,\ \ldots;\end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\begin{gathered}\{M^2\cdot(1+d)\cdot\widehat{T}^2-\beta^2\cdot\widehat{T}\widehat{\xi}+M^2\cdot\lambda\cdot\widehat{\eta^2}\}\,p_j^k(0)=0,\\ u_j^k(0)=-d\cdot p_j^k(0),\\ \widehat{T}v_j^k(0)=\lambda\cdot\widehat{\eta}p_j^k(0),\ k,\ |j|=0,\ 1,\ \ldots;\end{gathered} \tag{1.10}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{U}_j^0(x)=\mathbf{U}_0(x,\ j\cdot h_y),\\ (\widehat{T}+\widehat{\xi})\,p_j^0(x)+\widehat{\xi}u_j^0(x)+\widehat{\eta}v_j^0(x)=0,\\ x\geqslant 0,\ |j|=0,\ 1,\ \ldots.\end{gathered} \tag{1.11}$$

Покажем, что при определенных условиях задачи (1.1)—(1.3) и (1.9)—(1.11) эквивалентны. В самом деле, из (1.9) следует

$$\{M^2(\widehat{T}+\widehat{\xi})^2-\widehat{\xi^2}-\widehat{\eta^2}\}p=M^2(\widehat{T}+\widehat{\xi})\mathscr{P}=0,$$

где

$$\mathscr{P}=\mathscr{P}_j^k(x)=(\widehat{T}+\widehat{\xi})\,p_j^k(x)+\widehat{\xi}u_j^k(x)+\widehat{\eta}v_j^k(x).$$

Аналогично, из (1.10)

$$\{M^2(1+d)\,\widehat{T}^2-\beta^2\cdot\widehat{T}\widehat{\xi}+M^2\cdot\lambda\cdot\widehat{\eta^2}\}\,p_j^k(0)=M^2\cdot\widehat{T}\mathscr{P}_j^k(0)=0.$$

Таким образом, для агрегата $\mathscr{P}$ мы получили задачу

$$(\widehat{T}+\widehat{\xi})\,\mathscr{P}_j^k(x)=0,\ x>0,\ k,\ |j|=0,\ 1,\ \ldots; \tag{1.12}$$

$$\widehat{T}\mathscr{P}_j^k(0)=0,\ k,\ |j|=0,\ 1,\ \ldots; \tag{1.13}$$

$$\mathscr{P}_j^0(x)=0,\ x\geqslant 0,\ k,\ |j|=0,\ 1,\ \ldots. \tag{1.14}$$

Из (1.13) следует

$$\widehat{T}\mathscr{P}_j^k(0) = \widehat{\tau}\mathscr{P}_j^k(0) + \omega\cdot\widehat{\eta}_0\widetilde{\mathscr{P}}_j^k(0) = 0.$$

Умножая это соотношение на $2\cdot\widetilde{\mathscr{P}}_j^k(0)$ и учитывая очевидные соотношения:

$$2\mathscr{P}_j^k(0)\cdot\widehat{\tau}\mathscr{P}_j^k(0) = \widehat{\tau}\left(\mathscr{P}_j^k(0)\right)^2 - \Delta\cdot\left(\widehat{\tau}\mathscr{P}_j^k(0)\right)^2,$$

$$2\widetilde{\mathscr{P}}_j^k(0)\cdot\widehat{\eta}_0\widetilde{\mathscr{P}}_j^k(0) = \widehat{\eta}_0\left(\widetilde{\mathscr{P}}_j^k(0)\right)^2 - \frac{\eta}{2h_y}\left(\overline{\eta}\widetilde{\mathscr{P}}_j^k(0)\right)^2,$$

в итоге получаем

$$\widehat{\tau}\left(\mathscr{P}_j^k(0)\right)^2 + \omega\widehat{\eta}_0\left(\widetilde{\mathscr{P}}_j^k(0)\right)^2 + (\alpha-\delta)\,\Delta\left(\widehat{\tau}\mathscr{P}_j^k(0)\right)^2 - \omega\frac{\eta}{2h_y}\left(\overline{\eta}\widetilde{\mathscr{P}}_j^k(0)\right)^2 = 0,$$

откуда вытекает, что при $\alpha \geqslant \delta$ справедливо неравенство

$$\|\mathscr{P}^{k+1}\|_0^2 \leqslant \|\mathscr{P}^k\|_0^2,$$

где $\|\mathscr{P}^k\|_0^2 = h_y \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\left(\mathscr{P}_j^k(0)\right)^2$. Поскольку в силу (1.14): $\|\mathscr{P}^0\|_0^2 = 0$, то $\mathscr{P}_j^k(0) = 0$, k, $|j| = 0, 1, \ldots$. Аналогично, переписывая соотношение (1.12) в виде

$$\widehat{\tau}\mathscr{P} + \xi\widetilde{\mathscr{P}} + \omega\widehat{\eta}_0\widetilde{\mathscr{P}} = 0$$

и умножая его на $2\widetilde{\mathscr{P}}$, придем к следующему выражению:

$$\widehat{\tau}(\mathscr{P})^2 + \xi(\widetilde{\mathscr{P}})^2 + \omega\widehat{\eta}_0(\widetilde{\mathscr{P}})^2 + (\alpha-\delta)\,\Delta(\widehat{\tau}\mathscr{P})^2 - \omega\frac{\eta}{2h_y}\cdot(\overline{\eta}\widetilde{\mathscr{P}})^2 = 0.$$

Отсюда при условии $\alpha \geqslant \delta$ получаем

$$\|\mathscr{P}^{k+1}\|^2 \leqslant \|\mathscr{P}^k\|^2,$$

где $\|\mathscr{P}^k\|^2 = h_y \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\int\limits_{\infty}^{\infty}\left(\mathscr{P}_j^k(x)\right)^2 dx$. Поскольку в силу (1.14): $\|\mathscr{P}^0\|^2 = 0$, то $\mathscr{P}_j^k$ $x \geqslant 0$, k, $|j| = 0, 1, \ldots$. Таким образом, первое уравнение системы (1.1) выполнено всюду. Значит, задачи (1.1)—(1.3) и (1.9)—(1.11) эквивалентны.

Если p удовлетворяет уравнению (1.7), то вектор

$$\mathbf{Y}_j^k(x) = \mathbf{Y} = \begin{pmatrix}\widetilde{L}_1\\ L_2\\ \widetilde{L}_3\end{pmatrix}p$$

удовлетворяет системе (см. [1])

$$\{D\widehat{T} - Q\cdot\widehat{\xi} - R\widehat{\eta}\}\mathbf{Y} = 0. \tag{1.15}$$

Здесь

$$\widetilde{L}_1 = M\cdot L_1,\ L_1 = \widehat{T}/\beta^2,\ L_2 = \widehat{\xi} - M^2\cdot\widehat{T}/\beta^2,$$

$$\widetilde{L}_3 = L_3/\beta,\ L_3 = \widehat{\eta},\ D = (E + M^2Q)/\beta^2,$$

$$E = M\begin{pmatrix}1 & m_1 & 0\\ m_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad Q = \begin{pmatrix}m_1 & 1 & 0\\ 1 & m_1 & 0\\ 0 & 0 & -m_1\end{pmatrix},\quad R = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & m_1\\ 1 & m_1 & 0\end{pmatrix},$$

m_1 — некоторая константа. Заметим, что $D > 0$, если $|m_1| < 1$.

Из двух систем вида (1.15) составим расширенную систему

$$\left\{\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\cdot \widehat{T} - \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \widehat{\xi} - \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}\cdot \widehat{\eta}\right\} \mathbf{X} = 0, \tag{1.16}$$

где

$$\mathbf{X}_j^k(x) = \mathbf{X} = \{\widetilde{L}_1 L_+,\ L_2 L_+,\ \widetilde{L}_3 L_+,\ \widetilde{L}_1 L_-,\ L_2 L_-,\ \widetilde{L}_3 L_-\}^*,$$

$$L_\pm = (L_\pm)_j^k(x) = \left(a_1 L_1 + a_2^\pm \cdot L_2\right) p_j^k(x), \quad a_1 = \frac{m}{M},$$

$$a_2^\pm = -\frac{n}{a_\pm}, \quad a_\pm = M\cdot\left(\gamma_1 \pm \sqrt{\gamma_1^2 - 4m\cdot n}\right)\Big/ 2\cdot m.$$

При этом условие (1.8) можно переписать так:

$$\{\widetilde{L}_1 - a_\pm \cdot L_2\}\,(L_\pm)_j^k(0) = 0,\ k,\ |j| = 0, 1, \ldots. \tag{1.8'}$$

Пусть $m_1 = a_+/(1 + a_+^2)$ для первой системы и $m_1 = a_-/(1 + a_-^2)$ для второй. Тогда граничные условия (1.8′) **диссипативны** для системы (1.16), поскольку

$$\left(\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \mathbf{X}_j^k(0),\ \mathbf{X}_j^k(0)\right) = a_+\cdot\left(a_1\cdot L_1 L_2 p_j^k(0) + a_2^+ L_2^2 p_j^k(0)\right)^2 +$$

$$+\frac{a_+}{1 + a_+^2}\cdot\left(a_1\cdot L_1 \widetilde{L}_3 p_j^k(0) + a_2^+\cdot L_2 \widetilde{L}_3 p_j^k(0)\right)^2 + a_-\cdot\left(a_1 L_1 L_2 p_j^k(0) + a_2^-\cdot L_2^2 p_j^k(0)\right)^2 +$$

$$+\frac{a_-}{1 + a_-^2}\cdot\left(a_1\cdot L_2 \widetilde{L}_3 p_j^k(0) + a_2^-\cdot L_2 \widetilde{L}_3 p_j^k(0)\right)^2 > 0. \tag{1.17}$$

Замечание 1.1. Для дифференциально-разностной модели II все вышеприведенные результаты остаются в силе.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛОГА ДИССИПАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА ЭНЕРГИИ ДЛЯ МОДЕЛИ I

Вместо системы (1.1) удобно пользоваться ее следствием:

$$M \cdot \widehat{\tau}\mathbf{Z} + B_1 \cdot \widehat{\xi}\mathbf{Z} + C_1 \cdot \widehat{\eta}\mathbf{Z} + \mathbf{\Gamma} = 0, \tag{2.1}$$

где

$$\mathbf{Z}_j^k(x) = \mathbf{Z} = T_0 \cdot A^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{U},$$

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} M & -1 \\ -1 & M \end{pmatrix}\otimes I_2,$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} \omega\cdot M - 1 & 0 \\ 0 & \omega\cdot M + 1 \end{pmatrix}\otimes I_2 \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_j^k(x) = \mathbf{\Gamma} = \frac{M}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\Omega,$$

$$\Omega_j^k(x) = \Omega = \widehat{\eta}u - \widehat{\xi}v,$$

$A \otimes B$ — кронекерово произведение квадратных матриц A и B. Заметим, что агрегат Ω (дифференциально-разностный аналог вихря скорости) в силу (1.1) удовлетворяет следующему соотношению:

$$(\widehat{T}+\widehat{\xi})\Omega = 0,\ x>0,\ k,\ |j| = 0, 1, \ldots. \tag{2.2}$$

Умножая систему (2.1) скалярно на $2\cdot\widetilde{\mathbf{Z}}$ и учитывая соотношения

$$(2\widetilde{\mathbf{Z}},\ A\widehat{\tau}\mathbf{Z}) = \widehat{\tau}(\mathbf{Z},\ A\mathbf{Z}) + (\alpha-\delta)\Delta(\widehat{\tau}\mathbf{Z},\ A\widehat{\tau}\mathbf{Z}),$$

$$(2\widetilde{\mathbf{Z}},\ C\cdot\eta\widehat{\mathbf{Z}}) = \widehat{\eta}_0(\widetilde{\mathbf{Z}},\ C\widetilde{\mathbf{Z}}) - \frac{\eta}{2h_y}(\overline{\eta}\widetilde{\mathbf{Z}},\ C\overline{\eta}\widetilde{\mathbf{Z}}),$$

$$(2\widetilde{\mathbf{Z}},\ B\cdot\widetilde{\xi}\mathbf{Z}) = \xi(\widetilde{\mathbf{Z}},\ B\widetilde{\mathbf{Z}})$$

(A, B, C — симметрические матрицы!), в итоге получаем

$$M\cdot\widehat{\tau}(|\mathbf{Z}|^2) + \xi(\widetilde{\mathbf{Z}},\ B_1\cdot\widetilde{\mathbf{Z}}) + \widehat{\eta}_0(\widetilde{\mathbf{Z}},\ C_1\widetilde{\mathbf{Z}}) + M\Delta(\alpha-\delta)\cdot|\widehat{\tau}\mathbf{Z}|^2 -$$
$$-\frac{\eta}{2h_y}\cdot(\overline{\eta}\widetilde{\mathbf{Z}},\ C_1\overline{\eta}\widetilde{\mathbf{Z}}) + 2(\widetilde{\mathbf{Z}},\ \mathbf{\Gamma}) = 0,\quad |\mathbf{Z}|^2 = (\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}).$$

Аналогично, умножая (2.2) на $2\cdot\widetilde{\Omega}$, имеем

$$\widehat{\tau}(\Omega)^2 + \xi(\widetilde{\Omega})^2 + \omega\cdot\widehat{\eta}_0(\widetilde{\Omega})^2 + (\alpha-\delta)\cdot\Delta\cdot(\widehat{\tau}\Omega)^2 - \omega\cdot\frac{\eta}{2h_y}\cdot(\overline{\eta}\widetilde{\Omega})^2 = 0.$$

Учитывая эти соотношения, без труда выводим, что если $\alpha\geqslant\delta$, то

$$\widehat{\tau}\{\|\mathbf{Z}^k\|^2 + \|\Omega^k\|^2\} - h_y\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}\{(\widetilde{\mathbf{Z}}_j^k(0),\ B_1\cdot\widetilde{\mathbf{Z}}_j^k(0)) + (\widetilde{\Omega}_j^k(0))^2\}\leqslant$$
$$\leqslant N_1\cdot\{\|\mathbf{Z}^k\|^2 + \|\mathbf{Z}^{k+1}\|^2 + \|\Omega^k\|^2\}, \tag{2.3}$$

где

$$\|\mathbf{Z}^k\|^2 = M\cdot h_y\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}|\mathbf{Z}_j^k(x)|^2dx,$$

$$\|\Omega^k\|^2 = h_y\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}(\Omega_j^k(x))^2dx.$$

При получении неравенства (2.3) мы воспользовались следующими неравенствами:

$$2|(\widetilde{\mathbf{Z}},\ \mathbf{\Gamma})|\leqslant 2|\widetilde{\mathbf{Z}}|\cdot|\mathbf{\Gamma}|\leqslant M\cdot|\widetilde{\mathbf{Z}}|^2 + \frac{1}{M}|\mathbf{\Gamma}|^2\leqslant 2\alpha^2\cdot M\cdot|\varphi\mathbf{Z}|^2 +$$
$$+2\delta^2\cdot M\cdot|\mathbf{Z}|^2 + M\cdot(\Omega)^2,$$

при этом $N_1 = \max\{2\alpha^2M,\ M\}$. Заметим также, что в силу (1.2)

$$(\widetilde{\mathbf{Z}}_j^k(0),\ B_1\widetilde{\mathbf{Z}}_j^k(0)) = M\cdot(1+M^2\cdot d^2 - 2d)\cdot(\widetilde{p}_j^k(0))^2 + M^3\cdot(\widetilde{v}_j^k(0))^2,$$

$$(\widetilde{\Omega}^k(0))^2 = \left(\lambda + \frac{1}{M^2} - d\right)^2\cdot(\widetilde{\eta p_j^k}(0))^2.$$

Замечание 2.1. Для дифференциально-разностной модели II оценка, аналогичная (2.3), выглядит так:

$$\widehat{\tau}\{\|\mathbf{Z}^k\|^2 + \|\Omega^k\|^2\} - \int_R\{(\widetilde{\mathbf{Z}}^k(0,\ y),\ B_1\cdot\widetilde{\mathbf{Z}}^k(0,\ y)) + (\widetilde{\Omega}^k(0,\ y))^2\}dy\leqslant$$
$$\leqslant N_1\cdot\{\|\mathbf{Z}^k\|^2 + \|\mathbf{Z}^{k+1}\|^2 + \|\Omega^k\|^2\},$$

где

$$\|\mathbf{Z}^k\|^2 = M\cdot\int\int_{R_+^2}|\mathbf{Z}^k(x,\ y)|^2dx\,dy,$$

$$\|\Omega^k\|^2 = \int\int_{R_+^2}(\Omega^k(x,\ y))^2\,dx\,dy.$$

Из третьего уравнения системы (1.1) следует

$$(\widehat{T}+\widehat{\xi})\widehat{T}v = -\widehat{T}\widehat{\eta}p/M^2.$$

Отсюда получаем оценку

$$\widehat{\tau}(\|\widehat{T}v^k\|^2) - h_y\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}(\widetilde{\widehat{T}v}_j^k(0))^2 \leqslant N_2\{\|\widehat{T}\widehat{\eta}p^k\|^2 + \|\widehat{T}v^k\|^2 + \|\widehat{T}v^{k+1}\|^2\}, \quad (2.4)$$

где

$$\|\widehat{T}v^k\|^2 = h_y\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}(\widehat{T}v_j^k(x))^2dx,$$

$$\|\widehat{T}\widehat{\eta}p^k\|^2 = h_y\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}(\widehat{T}\widehat{\eta}p_j^k(x))^2dx,$$

$$N_2 = \max\{1, 2\alpha^2\}/M^2,$$

$$(\widetilde{\widehat{T}v}_j^k(0))^2 = \lambda^2\cdot(\widetilde{\widehat{\eta}p}_j^k(0))^2.$$

Замечание 2.2. Аналогичное неравенство для дифференциально-разностной модели II выглядит так:

$$\widehat{\tau}(\|\widehat{T}v^k\|^2) - \int_R(\widetilde{\widehat{T}v}^k(0, y))^2dy \leqslant N_2\cdot\{\|\widehat{T}\widehat{\eta}p^k\|^2 + \|\widehat{T}v^k\|^2 + \|\widehat{T}v^{k+1}\|^2\},$$

где

$$\|\widehat{T}v^k\|^2 = \int\int_{R_+^2}(\widehat{T}v^k(x, y))^2\,dx\,dy,$$

$$\|\widehat{T}\widehat{\eta}p^k\| = \int\int_{R_+^2}(\widehat{T}\widehat{\eta}p^k(x, y))^2dx\,dy.$$

Перейдем теперь к рассмотрению задачи (1.16), (1,8′). Вместо системы (1.16) будем пользоваться ее следствием:

$$\left\{\begin{pmatrix} D_1 & 0\\ 0 & D_1\end{pmatrix}\cdot\widehat{T} - \begin{pmatrix} Q_1 & 0\\ 0 & Q_1\end{pmatrix}\cdot\widehat{\xi} - \begin{pmatrix} R_1 & 0\\ 0 & R_1\end{pmatrix}\cdot\widehat{\eta}\right\}\mathbf{W} = 0. \quad (1.16')$$

Здесь

$$D_1 = \frac{M}{\beta^2}\begin{pmatrix} 1 & -M\\ -M & 1\end{pmatrix}\otimes H,\ Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\otimes H,$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes H,\ H = \begin{pmatrix} 1 & -m_1\\ -m_1 & 1\end{pmatrix} > 0\,(m_1 < 1!),$$

$$\mathbf{W}_j^k(x) = \mathbf{W} = \begin{pmatrix} T_0 & 0\\ 0 & T_0\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}.$$

Так как матрицы коэффициентов системы (1.16′) клеточно-диагональны, то следующую выкладку будем проводить для системы вида

$$\{D_1\cdot\widehat{\tau} - Q_1\cdot\widehat{\xi} + (\omega D_1 - R_1)\cdot\widehat{\eta}\}\widehat{\mathbf{W}} = 0,$$

где $\widehat{\mathbf{W}}$ — вектор, составленный из первых (или последних) четырех компонент вектора $\mathbf{W}$. Умножая эту систему скалярно на $2\widehat{\widehat{\mathbf{W}}}$, получим

$$\widehat{\tau}(\widehat{\mathbf{W}}, D_1\widehat{\mathbf{W}}) - \xi(\widehat{\widehat{\mathbf{W}}}, Q_1\widehat{\widehat{\mathbf{W}}}) + \widehat{\eta}_0(\widehat{\widehat{\mathbf{W}}}, [\omega D_1 - R_1]\widehat{\widehat{\mathbf{W}}}) +$$
$$+ (\alpha-\delta)\cdot\Delta\cdot(\widehat{\tau}\widehat{\mathbf{W}}, D_1\widehat{\tau}\widehat{\mathbf{W}}) - \frac{\eta}{2h_y}(\eta\widehat{\widehat{\mathbf{W}}}, [\omega\cdot D_1 - R_1]\cdot\eta\widehat{\widehat{\mathbf{W}}}) = 0.$$

При $\alpha \geqslant \delta$ отсюда получаем неравенство

$$\widehat{\tau}\left(\|\mathbf{W}^k\|^2_{D_1}\right) + h_y \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\widehat{\mathbf{W}}^k_j(0), \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix} \mathbf{W}^k_j(0)\right) \leqslant 0,$$

где

$$\|\mathbf{W}^k\|^2_{D_1} = h_y \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\mathbf{W}^k_j(x), \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} \mathbf{W}^k_j(x)\right) dx =$$

$$= h_y \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\mathbf{X}^k_j(x), \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X}^k_j(x)\right) dx = \|\mathbf{X}^k\|^2_D.$$

Поскольку в силу (1.17)

$$\left(\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{W}}^k_j(0), \widehat{\mathbf{W}}^k_j(0)\right) > 0,$$

то окончательно имеем оценку

$$\|\mathbf{X}^{k+1}\|^2_D \leqslant \|\mathbf{X}^k\|^2_D. \tag{2.5}$$

Замечание 2.3. Для модели II можно получить такую же оценку

$$\|\mathbf{X}^{k+1}\|^2_D \leqslant \|\mathbf{X}^k\|^2_D,$$

где

$$\|\mathbf{X}^k\|^2_D = \iint_{R^2_+} \left(\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \mathbf{X}^k(x, y), \mathbf{X}^k(x, y)\right) dx\, dy.$$

Так как

$$L_1 L_2 p = \frac{L_1 L_+ - L_1 L_-}{a_2^+ - a_2^-}, \quad L_1^2 p = \frac{L_1 L_+ - a_2^+ L_1 L_2 p}{a_1},$$

$$L_2^2 p = \frac{L_2 L_+ - L_2 L_-}{a_2^+ - a_2^-}, \quad \widetilde{L}_3^2 p = M^2 \cdot L_1^2 p - L_2^2 p,$$

$$L_2 \widetilde{L}_3 p = \frac{\widetilde{L}_3 L_+ - \widetilde{L}_3 L_-}{a_2^+ - a_2^-}, \quad L_1 \widetilde{L}_3 p = \frac{\widetilde{L}_3 L_+ - a_2^+ L_2 \widetilde{L}_3 p}{a_1},$$

то с помощью (2.5) можно оценить все агрегаты $\widehat{T}^2 p$, $\widehat{T}\widehat{\xi} p$, $\widehat{T}\widehat{\eta} p$, $\widehat{\xi}^2 p$, $\widehat{\xi}\widehat{\eta} p$, $\widehat{\eta}^2 p$. Наконец, выпишем следующие очевидные соотношения:

$$\begin{gathered}
\widehat{\tau} p - \widehat{\xi} p + \omega \cdot \widehat{\eta} p - Tp + \widehat{\xi} p = 0, \\
\widehat{\tau}(\widehat{T} p) - \widehat{\xi}(\widehat{T} p) + \omega \widehat{\eta}(\widehat{T} p) - \widehat{T}^2 p + \widehat{T}\widehat{\xi} p = 0, \\
\widehat{\tau}(\widehat{\xi} p) - \widehat{\xi}(\widehat{\xi} p) + \omega \cdot \widehat{\eta}(\widehat{\xi} p) - \widehat{T}\widehat{\xi} p + \widehat{\xi}^2 p = 0, \\
\widehat{\tau}(\widehat{\eta} p) - \widehat{\xi}(\widehat{\eta} p) + \omega \cdot \widehat{\eta}(\widehat{\eta} p) - \widehat{T}\widehat{\eta} p + \widehat{\xi}\widehat{\eta} p = 0, \\
\widehat{\tau} v - \widehat{\xi} v + \omega \cdot \widehat{\eta} v - 2\widehat{T} v - \frac{1}{M^2} \widehat{\eta} p = 0.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Введем в рассмотрение агрегат

$$\widehat{J}_k = \varepsilon_1 \{\|\mathbf{Z}^k\|^2 + \|\Omega^k\|^2 + \|\widehat{T} v^k\|^2\} + \|X^k\|^2_D + \|p^k\|^2 +$$
$$+ \|\widehat{T} p^k\|^2 + \|\widehat{\xi} p^k\|^2 + \|\widehat{\eta} p^k\|^2 + \|v^{k2}\|,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — некоторая константа. Из (2.3)—(2.6) следует

$$\widehat{J}_{k+1} - \widehat{J}_k \leqslant K_1 \cdot \Delta \cdot (J_k + J_{k+1}), \tag{2.7}$$

где

$$J_k = \|\mathbf{U}^k\|^2 + \|\Omega^k\|^2 + \|\widehat{T}v^k\|^2 + \|\widehat{T}p^k\|^2 + \|\widehat{\xi}p^k\|^2 + \|\eta\widehat{p}^k\|^2 + \|\widehat{T^2}p^k\|^2 +$$
$$+ \|\widehat{T}\widehat{\xi}p^k\|^2 + \|\widehat{T}\widehat{\eta}p^k\|^2 + \|\widehat{\xi}^2p^k\|^2 + \|\widehat{\xi}\widehat{\eta}p^k\|^2 + \|\widehat{\eta}^2p^k\|^2,$$

$$\|\mathbf{U}^k\|^2 = h_y \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |\mathbf{U}_j^k(x)|^2\,dx,$$

$K_1 > 0$ — некоторая константа. Согласно лемме [3, с. 147], из (2.7) вытекает оценка

$$J_k \leqslant \mathrm{const}\, J_0, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2.8}$$

наличие которой позволяет говорить о корректности дифференциально-разностной модели I. Неравенство $\alpha \geqslant \delta$ является достаточным условием ее корректности.

Замечание 2.4. Без труда можно получить оценку вида (2.8) и для модели II.

Замечание 2.5. Можно получить (см. [1]) более тонкую оценку

$$G_k \leqslant \mathrm{const}\, G_0, \tag{2.9}$$

где

$$G_k = \|\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{T}\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{\xi}\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{\eta}\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{T}^2\mathbf{U}^k\|^2 +$$
$$+ \|\widehat{T}\widehat{\xi}\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{T}\widehat{\eta}\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{\xi}^2\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{\xi}\widehat{\eta}\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{\eta}^2\mathbf{U}^k\|^2,$$

$$\|\widehat{T}\mathbf{U}^k\|^2 = h_y \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |\widehat{T}\mathbf{U}_j^k(x)|^2\,dx \text{ и т. д.}$$

§ 3. РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Полученная в § 2 оценка (2.8) (точнее, оценка (2.9)) может быть применена для доказательства существования достаточно гладкого решения исходной смешанной задачи (см. [1, 2]). Однако для применения ее мы должны оценить агрегат G_0 через начальные данные. Следовательно, возникает вопрос о разрешимости предложенных дифференциально-разностных моделей. Рассмотрим этот вопрос на примере модели II. После несложных преобразований систему (1.4) можно переписать в следующем виде:

$$B\cdot\xi\mathbf{V}^k + C\cdot\eta V^k + \frac{1}{\alpha\cdot\Delta}\cdot A\cdot\mathbf{V}^k = -\frac{1}{\alpha}\,\Omega^k, \quad (x, y) \in R_+^2, \tag{3.1}$$

где

$$\mathbf{V}^k = (\varphi - 1)\,\mathbf{U}^k, \quad \mathbf{\Omega}^k = B\cdot\xi\mathbf{U}^k + C\eta\mathbf{U}^k.$$

Граничные условия (1.5) при этом перепишем так

$$S_0\cdot\mathbf{V}^k(0,\ y) = \Delta\cdot\mathbf{\Lambda}^k(0,\ y), \quad y \in R. \tag{3.2}$$

Здесь

$$S_0 = \begin{pmatrix} d & 1 & 0 \\ -\lambda\cdot\alpha\cdot\Delta\cdot\eta & 0 & 1+\omega\alpha\cdot\Delta\cdot\eta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Lambda}^k(0,\ y) = \{\lambda\eta p^k(0,\ y) - \omega\cdot\eta v^k(0,\ y)\}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Применим преобразование Фурье к системе (3.1) и граничным условиям (3.2). В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$B\cdot\xi\hat{\mathbf{V}}^k=-\left\{\frac{1}{\alpha\Delta}\cdot A+i\cdot\zeta\cdot C\right\}\cdot\hat{\mathbf{V}}^k-\frac{1}{\alpha}\cdot\hat{\Omega}^k, \tag{3.1'}$$

где

$$\hat{\Omega}^k=\hat{\Omega}(k\Delta,\ x,\ \zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_R e^{-i\zeta y}\Omega(k\Delta,\ x,\ y)\,dy,$$

$$\hat{\mathbf{V}}^k=\hat{\mathbf{V}}(k\Delta,\ x,\ \zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{-i\zeta y}\mathbf{V}(k\Delta,\ x,\ y)\,dy$$

— преобразования Фурье от Ω, $\mathbf{V}$. При этом граничные условия (3.2) примут вид

$$\tilde{S}_0\cdot\hat{\mathbf{V}}^k(0,\ \zeta)=\Delta\cdot\hat{\Lambda}^k(0,\ \zeta). \tag{3.2'}$$

Здесь

$$\tilde{S}_0=\begin{pmatrix} d & 1 & 0\\ -\lambda\tilde{\zeta}i & 0 & 1+\omega\cdot\tilde{\zeta}\cdot i\end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{V}}^k(0,\ \zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_R e^{-i\zeta y}\mathbf{V}(k\Delta,\ 0,\ y)\,dy,\quad \tilde{\zeta}=\alpha\Delta\zeta,$$

$$\hat{\Lambda}^k(0,\ \zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_R e^{-i\cdot\zeta\cdot y}\cdot\Lambda(k\cdot\Delta,\ 0,\ y)\,dy.$$

Умножая систему (3.1′) слева на матрицу B^{-1}, приведем ее к виду

$$\xi\hat{V}^k=\tilde{M}\cdot\hat{\mathbf{V}}^k+\psi, \tag{3.1''}$$

где

$$\tilde{M}=\begin{pmatrix}\frac{M^2\cdot\varkappa}{\beta^2} & -\frac{M^2\cdot\varkappa}{\beta^2} & i\cdot\zeta\cdot\frac{M^2}{\beta^2}\\ -\frac{\varkappa}{\beta^2} & \frac{M^2\varkappa}{\beta^2} & -i\cdot\zeta\cdot\frac{1}{\beta^2}\\ -\frac{i\cdot\zeta}{M^2} & 0 & -\varkappa\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{M^2}{\beta^2} & \frac{1}{\beta^2} & 0\\ \frac{1}{\beta^2} & -\frac{1}{\beta^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{M^2}\end{pmatrix},$$

$$\varkappa=\frac{1}{\alpha\Delta}+i\cdot\zeta\cdot\omega,$$

$$\psi=-\frac{1}{\alpha}\{\xi\hat{\mathbf{U}}^k+i\cdot\tilde{\zeta}\cdot B^{-1}\cdot C\cdot\hat{\mathbf{U}}^k\}.$$

Определим собственные числа матрицы $\tilde{M}$:

$$\lambda_{1,2}(\tilde{M})=\frac{M\cdot s\pm\sigma}{\alpha\cdot\Delta\cdot\beta^2},$$

$$\lambda_3(\tilde{M})=-\varkappa,$$

где

$$s=M+i\cdot\zeta\cdot\omega\cdot M=M+i\chi,$$

$$\sigma=\sqrt{s^2-w^2},\ w=\tilde{\zeta}\cdot\beta,\ \chi=\tilde{\zeta}\cdot\omega\cdot M.$$

Заметим, что

$$\operatorname{Re}\sigma=((((M^2-\chi^2+w^2)^2+4\cdot M^2\cdot\chi^2)^{1/2}+M^2-\chi^2+w^2)/2)^{1/2}>M>0$$

при всех значениях χ, w. Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re}\lambda_1(\tilde{\mathbf{M}})>0,\ \operatorname{Re}\lambda_2(\tilde{\mathbf{M}})<0.$$

Представим матрицу $\widetilde{\mathbf{M}}$ так:

$$\widetilde{M} = A^{-\frac{1}{2}} \cdot F^{-1} \cdot D \cdot F \cdot A^{\frac{1}{2}},$$

где
$$A^{\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}\,(1, M, M), \quad A^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right),$$

$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $F_2 = \mathrm{diag}(s - M\sigma, s + M\sigma, 1)$ — диагональные матрицы; $F = \dfrac{1}{s^2 - M^2 \cdot \tilde{\zeta}^2} \cdot F_2 \cdot F_1$,

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} s + M \cdot \sigma & s - M \cdot \sigma & 0 \\ -(\sigma + M \cdot s) & \sigma - M \cdot s & i \cdot \tilde{\zeta} \cdot M \\ -i \cdot \tilde{\zeta} \cdot \beta^2 & -i \cdot \tilde{\zeta} \cdot \beta^2 & s \end{pmatrix},$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\beta^2} & -\dfrac{s}{2\sigma \cdot \beta^2} & \dfrac{i \cdot \tilde{\zeta} \cdot M}{2\sigma \cdot \beta^2} \\ \dfrac{1}{2\beta^2} & \dfrac{s}{2\sigma \cdot \beta^2} & -\dfrac{i \cdot \tilde{\zeta} \cdot M}{2\sigma \cdot \beta^2} \\ i \cdot \tilde{\zeta} & -i \cdot \tilde{\zeta} \cdot M & s \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $s^2 - M^2 \cdot \tilde{\zeta}^2 \neq 0$ при всех $\zeta \in R$, если $\omega \neq 0$.

Продолжим вектор-функцию $\boldsymbol{\psi}$ нулем при $x < 0$. Поскольку $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2,3}(\widetilde{M}) = 0$ при всех $\zeta \in R$, то можно построить единственное ограниченное решение системы (3.1″) при $x \in R$ следующего вида:

$$\mathbf{Y}(x, \zeta) = \int_R H(x - \rho, \zeta) \cdot \tilde{\boldsymbol{\psi}}(\rho, \zeta)\, d\rho.$$

Здесь $H(\rho, \zeta)$ — матрица Грина, которая определяется следующим образом:

$$H(\rho, \zeta) = \begin{cases} A^{-\frac{1}{2}} \cdot F^{-1} \cdot D_- \cdot F \cdot A^{\frac{1}{2}}, & \rho > 0; \\ -A^{-\frac{1}{2}} \cdot F^{-1} \cdot D_+ \cdot F \cdot A^{\frac{1}{2}}, & \rho < 0; \end{cases}$$

$$D_+ = \mathrm{diag}(\exp(\rho \cdot \lambda_1(\widetilde{M})), 0, 0),$$

$$D_- = \mathrm{diag}(0, \exp(\rho \cdot \lambda_2(\widetilde{M})), \exp(\rho \cdot \lambda_3(\widetilde{M})))$$

— диагональные матрицы;

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\rho, \zeta) = \begin{cases} \boldsymbol{\psi}(\rho, \zeta), & \rho \geqslant 0; \\ 0, & \rho < 0. \end{cases}$$

Используя вектор-функцию $\mathbf{Y}(x, \zeta)$, будем искать решение краевой задачи (3.1″), (3.2′) так:

$$\hat{\mathbf{V}}^k(x, \zeta) = \mathbf{q}(x, \zeta) + \mathbf{Y}(x, \zeta),$$

где вектор-функция $\mathbf{q}$ — решение краевой задачи

$$\xi \mathbf{q} = \widetilde{M} \cdot \mathbf{q}, \quad x > 0; \tag{3.3}$$

$$\tilde{S}_0 \cdot \mathbf{q}(0, \zeta) = \Delta \hat{\boldsymbol{\Lambda}}^k(0, \zeta) - \tilde{S}_0 \cdot \mathbf{Y}(0, \zeta), \quad x = 0. \tag{3.4}$$

Из (3.3) следует, что

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, \zeta) = A^{-\frac{1}{2}} \cdot F^{-1} \cdot e^{x \cdot D} \cdot F \cdot A^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{q}(0, \zeta) =$$

$$= A^{-\frac{1}{2}} \cdot F^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1(\widetilde{M}) \cdot x) \cdot c^1 \\ \exp(\lambda_2(\widetilde{M}) \cdot x) \cdot c^2 \\ \exp(\lambda_3(\widetilde{M}) \cdot x) \cdot c^3 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix} = F \cdot A^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{q}(0, \zeta).$$

Заметим, что требование ограниченности $\mathbf{q}$ при всех $x \geqslant 0$ эквивалентно требованию $c^1 = 0$. Итак,

$$\mathbf{q} = A^{-\frac{1}{2}} \cdot F^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(\lambda_2(\widetilde{M}) \cdot x) \cdot c^2 \\ \exp(\lambda_3(\widetilde{M}) \cdot x) \cdot c^3 \end{pmatrix}.$$

Подставляя это выражение в граничные условия (3.4), находим

$$\begin{pmatrix} c^2 \\ c^3 \end{pmatrix} = \widehat{S}_0^{-1} \{\Delta \cdot \widehat{\mathbf{\Lambda}}^k (0, \zeta) - \widetilde{S}_0 \cdot \mathbf{Y}(0, \zeta)\},$$

где

$$\widehat{S}_0 = \begin{pmatrix} s(d-1) + \sigma \dfrac{1 - d \cdot M^2}{M} & i\widetilde{\zeta} \\ -i \cdot \widetilde{\zeta} \cdot M \left(\lambda(\widetilde{\varkappa} - \sigma) + \widetilde{\varkappa} \cdot \dfrac{\beta^2}{M^2} \right) & \widetilde{\varkappa}^2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\varkappa} = \alpha \cdot \Delta \cdot \varkappa.$$

Таким образом, если при всех $\zeta \in R$ выполнено условие Лопатинского

$$\mathscr{L} = \det \widehat{S}_0 \neq 0, \tag{3.5}$$

то задача (3.3), (3.4) (а вместе с ней и задача (3.1″), (3.2′)) однозначно разрешима. Как показывают численные расчеты, для случая так называемого политропного газа с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$ (см. [1]) условие Лопатинского выполнено, если $\omega \neq 0$.

Оценим полученное решение. Используя неравенство Минковского, легко получаем

$$\left(\int_0^\infty |\widehat{\mathbf{V}}^k|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^\infty |\mathbf{q}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^\infty |\mathbf{Y}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^\infty |\mathbf{q}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\int_R |\mathbf{Y}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.6}$$

где $|\widehat{V}^k|^2 = (\widehat{\mathbf{V}}^k, \overline{\widehat{\mathbf{V}}}^k)$ и т. д.

Оценим слагаемые в правой части неравенства (3.6). Используя известные интегральные неравенства, имеем

$$\left(\int_R |\mathbf{Y}|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \int_R \|H(x,\zeta)\|\,dx \left(\int_R |\widetilde{\mathbf{\Psi}}|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{\alpha\cdot M}\cdot\|F^{-1}\|\cdot\|F\|\cdot\|B^{-1}\|\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_1(\widetilde{M})} - \frac{2}{\operatorname{Re}(\lambda_2(\widetilde{M})+\lambda_3(\widetilde{M}))}\right\}\cdot\left(\int_0^\infty |\widehat{\mathbf{\Omega}}|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.7}$$

где $\|F\|$ — операторная норма матрицы F и т. д. Далее, справедливы следующие легко проверяемые оценки:

$$|\mathbf{Y}(0,\zeta)| = \left|\int_R H(-\rho,\zeta)\cdot\widetilde{\mathbf{\Psi}}(\rho,\zeta)\,d\rho\right| \leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha\cdot M}\cdot\|F^{-1}\|\cdot\|F\|\cdot\|B^{-1}\|\cdot\left(\frac{1}{2\operatorname{Re}\lambda_1(\widetilde{M})}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^\infty|\widehat{\mathbf{\Omega}}|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|\mathbf{q}(x,\zeta)|\leqslant\frac{1}{M}\cdot\|F^{-1}\|\cdot\|\widehat{S}_0^{-1}\|\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}\operatorname{Re}(\lambda_2(\widehat{M})+\lambda_3(\widehat{M}))\right\}\times$$

$$\times\{\Delta\cdot|\widehat{\mathbf{\Lambda}}^k(0,\zeta)| + \|\widetilde{S}_0\|\cdot|\mathbf{Y}(0,\zeta)|\},$$

из которых следует

$$\left(\int_0^\infty |\mathbf{q}(x,\zeta)|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{M}\cdot\|F^{-1}\|\cdot\|\widehat{S}_0^{-1}\|\left(\frac{1}{|\operatorname{Re}(\lambda_2(\widetilde{M})+\lambda_3(\widetilde{M}))|}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left\{\Delta\cdot|\widehat{\mathbf{\Lambda}}^k(0,\zeta)| + \frac{1}{\alpha\cdot M}\cdot\|F^{-1}\|\cdot\|F\|\cdot\|B^{-1}\|\cdot\|\widetilde{S}_0\|\left(\frac{1}{2\operatorname{Re}\lambda_1(\widetilde{M})}\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^\infty|\widehat{\mathbf{\Omega}}^k|^2dx\right)^{1/2}\right\}. \tag{3.8}$$

Оценим теперь некоторые постоянные, входящие в неравенства (3.7), (3.8). Поскольку $-M^2+\operatorname{Re}\sigma+\beta^2\neq0$ при всех $\zeta\in R$, то нетрудно получить следующие оценки:

$$\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_1(\widetilde{M})} - \frac{2}{\operatorname{Re}(\lambda_2(\widetilde{M})+\lambda_3(\widetilde{M}))} = \alpha\cdot\beta^2\cdot\Delta\cdot\frac{3\operatorname{Re}\sigma+1}{(M^2+\operatorname{Re}\sigma)(\beta^2+\operatorname{Re}\sigma-M^2)}\leqslant$$

$$\leqslant q_1\cdot\frac{\Delta}{A_1\cdot|\widetilde{\zeta}|+B_1},$$

$$\frac{1}{2\operatorname{Re}\lambda_1(\widetilde{M})} = \frac{\alpha\cdot\beta^2\cdot\Delta}{2(M^2+\operatorname{Re}\sigma)}\leqslant q_2\cdot\Delta,$$

$$\frac{1}{|\operatorname{Re}(\lambda_2(\widetilde{M})+\lambda_3(\widetilde{M}))|} = \frac{\alpha\cdot\beta^2\cdot\Delta}{\beta^2+\operatorname{Re}\sigma-M^2}\leqslant q_3\cdot\frac{\Delta}{A_2\cdot|\widetilde{\zeta}|+B_2}, \tag{3.9}$$

$$\|F\|\cdot\|F^{-1}\|\leqslant A_3\cdot|\widetilde{\zeta}|+B_3,$$

$$\|\widehat{S}_0^{-1}\|\leqslant\frac{1}{A_4\cdot|\widetilde{\zeta}|+B_4},\qquad \|\widetilde{S}_0\|\leqslant A_5\cdot|\widetilde{\zeta}|+B_5,$$

где $q_{1,2,3}$, A_l, $B_l>0$, $l=\overline{1,\ 5}$,— некоторые постоянные, не зависящие от ζ. Из (3.6)—(3.9) получаем неравенство

$$\left(\int_0^\infty|\widehat{\mathbf{V}}^k|^2\,dx\right)^{1/2}\leqslant C_1\cdot\Delta^{3/2}\cdot|\widehat{\mathbf{\Lambda}}^k(0,\zeta)|+\Delta(C_2+C_3\cdot\Delta\cdot|\zeta|)\cdot\left(\int_0^\infty|\widehat{\mathbf{\Omega}}^k(x,\zeta)|^2dx\right)^{1/2}$$

где $C_{1,2,3}>0$ — некоторые постоянные. Возводя полученное неравенство в квадрат и пользуясь равенством Парсеваля, имеем окончательную оценку:

$$\|\mathbf{V}^k\|^2_{L_2(R^2_+)} = \iint\limits_{R^2_+} |\mathbf{V}^k(x, y)|^2\,dx\,dy = \|\widehat{\mathbf{V}}^k\|^2_{L_2(R^2_+)} = \iint\limits_{R^2_+} |\widehat{\mathbf{V}}^k(x, \zeta)|^2\,dx\,d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant 3C_1^2\cdot\Delta^3\cdot\|\mathbf{\Lambda}^k(0)\|^2_{L_2(R)} + 3C_2^2\cdot\Delta^2\cdot\|\mathbf{\Omega}^k\|^2_{L_2(R^2_+)} + 3C_3^2\cdot\Delta^4\cdot\|\eta\mathbf{\Omega}^k\|^2_{L_2(R^2_+)}. \quad (3.10)$$

Здесь
$$\|\mathbf{\Lambda}^k(0)\|^2_{L_2(R)} = \int\limits_R |\mathbf{\Lambda}^k(0, y)|^2\,dy = \int\limits_R |\widehat{\mathbf{\Lambda}}^k(0, \zeta)|^2\,d\zeta,$$

$$\|\mathbf{\Omega}^k\|^2_{L_2(R^2_+)} = \iint\limits_{R^2_+} |\mathbf{\Omega}^k(x, y)|^2\,dx\,dy = \iint\limits_{R^2_+} |\widehat{\mathbf{\Omega}}^k(x, \zeta)|^2\,dx\,d\zeta \text{ и т. д.}$$

Поскольку $\|\mathbf{U}^{k+1}\|_{L_2(R^2_+)} \leqslant \|\mathbf{V}^k\|_{L_2(R^2_+)} + \|\mathbf{U}^k\|_{L_2(R^2_+)}$, то с помощью неравенства (3.10) можно оценить норму $\|\mathbf{U}^1\|_{L_2(R^2_+)}$ через нормы начальных данных. Поделив обе части неравенства (3.10) на Δ^2, мы с помощью (3.10) можем оценить также агрегат $\|\widehat{\tau}\mathbf{U}^0\|_{L_2(R_2^+)}$ через начальные данные. Рассуждая аналогичным образом, мы сможем оценить все нормы, входящие в агрегат G_0.

Замечание 3.1. Аналогичный результат справедлив в отношении модели I. В самом деле, перепишем систему (1.1) так:

$$B\cdot\xi\mathbf{V}^k + C\cdot\widehat{\eta}_0\mathbf{V}^k + \frac{1}{\alpha\cdot\Delta}\cdot A\cdot\mathbf{V}^k = -\frac{1}{\alpha}\cdot\Omega^k,\ x>0,\ |j|=0, 1, \ldots, \quad (3.11)$$

где
$$\mathbf{V}^k = \mathbf{V}^k(x, y) = \mathbf{U}_j^{k+1}(x) - \mathbf{U}_j^k(x),\ y = j\cdot h_y,$$
$$\mathbf{\Omega}^k = B\cdot\xi\mathbf{U}^k + C\cdot\widehat{\eta}_0\mathbf{U}^k,\ \mathbf{U}^k = \mathbf{U}^k(x, y) = \mathbf{U}_j^k(x).$$

Граничные условия (1.2) перепишем так:

$$S_0\cdot\mathbf{V}^k(0, y) = \Delta\cdot\mathbf{\Lambda}^k(0, y),\ |j| = 0, 1, \ldots. \quad (3.12)$$

Здесь
$$S_0 = \begin{pmatrix} d & 1 & 0 \\ -\lambda\cdot\alpha\cdot\Delta\cdot\widehat{\eta}_0 & 0 & 1+\omega\cdot\alpha\cdot\Delta\cdot\widehat{\eta}_0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{\Lambda}^k(0, y) = \{\lambda\cdot\widehat{\eta}_0 p^k(0, y) - \omega\cdot\widehat{\eta}_0 v^k(0, y)\}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Применяя преобразование Фурье к задаче (3.11), (3.12), получим следующую краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$B\cdot\xi\widehat{\mathbf{V}}^k = -\{\frac{1}{\alpha\cdot\Delta}\cdot A + i\cdot\widehat{\zeta}\cdot C\}\widehat{\mathbf{V}}^k - \frac{1}{\alpha}\cdot\widehat{\mathbf{\Omega}}^k, \quad (3.11')$$
$$\widetilde{S}_0\cdot\widehat{\mathbf{V}}^k(0, \zeta) = \Delta\cdot\widehat{\mathbf{\Lambda}}^k(0, \zeta). \quad (3.12')$$

Здесь
$$\widetilde{S}_0 = \begin{pmatrix} d & 1 & 0 \\ -\lambda\cdot\widetilde{\zeta}\cdot i & 0 & 1+\omega\cdot\widetilde{\zeta}i \end{pmatrix},$$
$$\widehat{\mathbf{V}}^k(x, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_R e^{-i\zeta y}\mathbf{V}^k(x, y)\,dy \text{ и т. д.};$$
$$\widehat{\zeta} = \frac{\sin(h_y\zeta)}{h_y},\quad \widetilde{\zeta} = \alpha\Delta\widehat{\zeta}.$$

Далее, действуя как и выше и считая отношение h_y/Δ постоянным, для задачи (3.11′), (3.12′) получим оценку

$$\left(\int_0^\infty |\widehat{\mathbf{V}}^k(0,\zeta)|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant C_1\cdot\Delta\,|\,\widehat{\mathbf{\Lambda}}^k(0,\zeta)\,| + C_2\cdot\Delta\cdot\left(\int_0^\infty |\widehat{\Omega}^k(x,\zeta)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

где $C_{1,2} > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от ζ. Отсюда окончательно получаем следующую оценку:

$$\|\mathbf{V}^k\|^2 \leqslant 2C_1^2\cdot\Delta^2\cdot\|\mathbf{\Lambda}^k(0)\|^2 + 2C_2^2\Delta^2\cdot\|\mathbf{\Omega}^k\|^2.$$

Здесь

$$\|\mathbf{V}^k\|^2 = h_y\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty |\mathbf{V}_j^k(x)|^2\,dx,$$

$$\|\mathbf{\Lambda}^k(0)\|^2 = h_y\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\mathbf{\Lambda}_j^k(0)|^2 \quad \text{и т. д.}$$

§ 4. НЕСТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ ОБТЕКАНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО КРУГОВОГО КОНУСА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Как уже отмечалось, с помощью предложенной в § 1 вычислительной модели будем искать приближенное решение задачи об обтекании бесконечного кругового конуса сверхзвуковым потоком идеального газа. Следуя [1, гл. 1, § 3], сформулируем следующую смешанную задачу. В области $t>0$, $0<s<1$, $0<\varphi<\pi$ ищется решение системы

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}u - v^2 - w^2 = 0,\\
\frac{d}{dt}v + \frac{c^2}{\varepsilon}\cdot\mathscr{P}_s + uv - w^2\cdot\operatorname{ctg}\theta = 0,\\
\frac{d}{dt}w - \frac{c^2}{\varepsilon}a_2\cdot\mathscr{P}_s + \frac{c^2}{\sin\theta}\cdot\mathscr{P}_\varphi + uw + vw\cdot\operatorname{ctg}\theta = 0,\\
\frac{d}{dt}\mathscr{P} + \frac{1}{\varepsilon}v_s - \frac{a_2}{\varepsilon}\cdot w_s + \frac{1}{\sin\theta}w_\varphi + 2u + v\operatorname{ctg}\theta = 0,\\
\frac{d}{dt}\Psi = 0,
\end{gathered}\tag{4.1}$$

которое удовлетворяет граничным условиям при $s=1$ (на головной ударной волне):

$$\begin{gathered}
u = u_\infty,\\
v = v_\infty + G(p)\Big/\sqrt{1+a_2^2(1)},\\
w = w_\infty - a_2(1)\cdot G(p)\Big/\sqrt{1+a_2^2(1)},\\
V = V_\infty\cdot\frac{h\cdot p_\infty + p}{h\cdot p + p_\infty},\\
\frac{\partial}{\partial t}\theta_s + w_\infty\cdot a_2(1) = v_\infty + G_1(p)\cdot\sqrt{1+a_2^2(1)};
\end{gathered}\tag{4.2}$$

при $s=0$ (условие непротекания на конусе):

$$v = 0,\tag{4.3}$$

следующим условиям симметрии при $\varphi = 0,\ \pi$:

$$\begin{gathered}
w = \mathscr{P}_\varphi = u_\varphi = v_\varphi = \psi_\varphi = 0,\\
\frac{\partial\theta_s}{\partial\varphi} = 0
\end{gathered}\tag{4.4}$$

и начальным данным при $t=0$:

$$u=u_0(s,\ \varphi),\ v=v_0(s,\ \varphi),\ w=w_0(s,\ \varphi),$$
$$\mathscr{P}=\mathscr{P}_0(s,\ \varphi),\ \psi=\psi_0(s,\ \varphi),\ \theta_s=\theta_{s0}(\varphi). \tag{4.5}$$

Здесь

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\tilde{\Delta}\frac{\partial}{\partial s}+\frac{w}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi},\ \tilde{\Delta}=\frac{a_1}{\varepsilon},$$
$$a_1=v-s\frac{\partial\theta_s}{\partial t}-wa_2,\ a_2=\frac{s}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial\theta_s}{\partial\varphi};$$

$(R,\ \theta,\ \varphi)$ — сферическая система координат (в системе (4.1) положено $R=1$); u, v, w — компоненты вектора скорости, обезразмеренные путем деления на максимальную скорость $W_{\max}$:

$$\mathscr{P}=\frac{1}{\gamma}\cdot\ln p,\ \Psi=\mathscr{P}+\ln V,\ \gamma=1,4;$$

p, ρ — давление и плотность, обезразмеренные путем деления на параметры торможения p_T, ρ_T; $s=(\theta-\theta_b)/\varepsilon$, $\varepsilon=\theta_s-\theta_b$, θ_b — угол полураствора кругового конуса, $\theta=\theta_s(t,\ \varphi)$ — уравнение ударной волны (на сфере $R=1$),

$$c^2=\frac{\gamma-1}{2}\cdot\exp\{(\gamma-1)\cdot\mathscr{P}+\Psi\}$$

— квадрат скорости звука;

$$u_\infty=U_\infty\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\theta_s-\sin\alpha\cdot\sin\theta_s\cdot\cos\varphi);$$
$$v_\infty=-U_\infty\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\theta_s\cdot\cos\varphi+\cos\alpha\cdot\sin\theta_s);$$
$$w_\infty=U_\infty\cdot\sin\alpha\cdot\sin\varphi;$$

α — угол атаки (вектор скорости набегающего потока лежит в плоскости симметрии);

$$U_\infty=\sqrt{\frac{\frac{\gamma-1}{2}\cdot M_\infty^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2}};$$

$M_\infty>1$ — число Маха набегающего потока;

$$G(p)=\sqrt{k\cdot(p-p_\infty)\cdot(V_\infty-V)},\ G_1(p)=V_\infty\cdot G(p)/(V_\infty-V),$$
$$V=1/\rho,\ V_\infty=1/\rho_\infty,\qquad p_\infty=\rho_\infty^\gamma,$$
$$\rho_\infty=\left(\frac{U_\infty^2}{\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},\ a_2(1)=\frac{1}{\sin\theta_s}\cdot\frac{\partial\theta_s}{\partial\varphi},$$
$$h=\frac{\gamma+1}{\gamma-1},\ k=\frac{\gamma-1}{2\gamma}.$$

Заметим также, что из второго и третьего соотношений (4.2) следует выражение $(s=1)$:

$$a_2(1)=\frac{w_\infty-w}{v-v_\infty}. \tag{4.6}$$

Если функции u, v, w, $\mathscr{P}$, ψ, θ_s не зависят от t, то задача (4.1)—(4.4) описывает стационарное обтекание кругового конуса сверхзвуковым потоком газа. В соответствии с идеей метода установления, это стационарное решение будем искать, численно решая задачу (4.1)—(4.5).

§ 5. ОПИСАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ЗАДАЧИ (4.1)—(4.5)

Второе, третье и четвертое уравнения системы (4.1) запишем в виде следующей системы:

$$\mathbf{U}_s = M_1 \cdot \mathbf{U}_t + M_2 \cdot \mathbf{U}_\varphi + N, \tag{5.1}$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathcal{P} \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad M_1 = -\frac{\varepsilon}{d} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & -1 & a_2 \\ -c^2 & a_1 & 0 \\ c^2 \cdot a_2 & 0 & a_1 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = -\frac{\varepsilon}{d \cdot \sin\theta} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & -w & b_2 \\ -c^2 \cdot w & b_1 & -c^2 \\ c^2 \cdot b_2 & -c^2 & b_1 \end{pmatrix},$$

$$N = -\frac{\varepsilon}{d} \cdot \begin{Vmatrix} a_1 \cdot F_1 - F_2 + a_2 \cdot F_3 \\ -c^2 \cdot F_1 + a_1 \cdot F_2 + \dfrac{c^2 \cdot a_2}{\varepsilon} \cdot \Omega \\ c^2 \cdot a_2 \cdot F_1 + a_1 \cdot F_3 + \dfrac{c^2}{\varepsilon} \cdot \Omega \end{Vmatrix},$$

$$d = a_1^2 - c^2 \cdot a_2^2 - c^2, \; b_1 = a_1 \cdot w + c^2 \cdot a_2, \; b_2 = a_1 + a_2 \cdot w,$$

$$F_1 = 2 \cdot u + v \cdot \operatorname{ctg}\theta, \; F_2 = u \cdot v - w^2 \cdot \operatorname{ctg}\theta,$$

$$F_3 = u \cdot w + v \cdot w \cdot \operatorname{ctg}\theta, \; \Omega = a_2 \cdot v_s + w_s - \frac{\varepsilon}{\sin\theta} \cdot v_\varphi.$$

Следуя § 1, проведем по переменным t, φ дискретизацию:

$$\xi \mathbf{U}_j^{k+1}(s) = \frac{1}{\Delta} \cdot (M_1)_j^{(k)} \cdot \left(\mathbf{U}_j^{k+1}(s) - \mathbf{U}_j^k(s)\right) + \frac{1}{2 \cdot h_\varphi} \cdot (M_2)_j^{(k)} \cdot \left(\mathbf{U}_{j+1}^{k+1}(s) - \mathbf{U}_{j-1}^{k+1}(s)\right) +$$

$$+ (N)_j^{(k)}, \; j = 2, \ldots, J-1, \; k = 0, 1, \ldots. \tag{5.2}$$

Здесь

$$\xi = \frac{\partial}{\partial s}, \quad \mathbf{U}_j^k(s) = \mathbf{U}(k \cdot \Delta, s, (j-1) \cdot h_\varphi);$$

Δ, h_φ — шаги дискретизации; $\pi = (J-1) \cdot h_\varphi$. Заметим также, что индекс k в скобках означает усреднение значений искомых функций, входящих в коэффициенты матриц $M_{1,2}$, вектора N:

$$(\cdot)^{(k)} = \frac{(\cdot)^{k+1} + (\cdot)^k}{2}.$$

В силу нелинейности исходной задачи вычисления на $k+1$ слое фактически должны вестись итерациями.

При $\varphi = 0, \pi$ $(j = 1, J)$: $w_j^k = 0$. Рассматривая второе и четвертое уравнения системы (4.1) при $\varphi = 0$, π, запишем их в виде системы

$$(\mathbf{W}_j)_s = (M_0)_j \cdot (\mathbf{W}_j)_t + (N_0)_j,$$

или после дискретизации по t:

$$\xi \mathbf{W}_j^{k+1}(s) = \frac{1}{\Delta} \cdot (M_0)_j^{(k)} \cdot \left(\mathbf{W}_j^{k+1}(s) - \mathbf{W}_j^k(s)\right) + (N_0)_j^{(k)}, \; k = 0, 1, \ldots, \; j = 1, J, \tag{5.3}$$

где

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathcal{P} \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_1^k(s) = \mathbf{W}(k \cdot \Delta, s, 0),$$

$$\mathbf{W}_J^k(s) = \mathbf{W}(k \cdot \Delta, s, \pi),$$

$$M_0 = \frac{\varepsilon}{c^2 - b^2} \cdot \begin{pmatrix} b & -1 \\ -c^2 & b \end{pmatrix}, \quad b = v - s \cdot \frac{\partial \theta_s}{\partial t},$$

$$N_0 = \frac{\varepsilon}{c^2 - b^2} \cdot \begin{pmatrix} b \cdot \left(2 \cdot u + v \cdot \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \cdot w_\varphi\right) - u \cdot v \\ b \cdot u \cdot v - c^2 \cdot \left(2 \cdot u + v \cdot \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \cdot w_\varphi\right) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для вектора $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1^{k+1} \\ \mathbf{U}_2^{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{J-1}^{k+1} \\ \mathbf{W}_J^{k+1} \end{pmatrix}$$

мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\xi \mathbf{Y} = \widetilde{A} \cdot \widetilde{\mathbf{Y}} + \widetilde{\mathbf{F}}. \tag{5.4}$$

Здесь $\widetilde{A}$ — квадратная матрица порядка $L = 3 \cdot J - 2$, $\widetilde{\mathbf{F}}$ — вектор той же размерности. Элементы матрицы $\widetilde{A}$ и вектора $\widetilde{\mathbf{F}}$ легко могут быть найдены с помощью (5.2), (5.3).

Для системы (5.4) могут быть выписаны граничные условия при $s = 0, 1$. Так, в силу (4.3) имеем

$$v_j^k(0) = 0, \; j = 1, \ldots, J; \; k = 0, 1, \ldots,$$

т. е.

$$\widetilde{C} \cdot \mathbf{Y}(0) = 0, \tag{5.5}$$

где $\widetilde{C}$ — прямоугольная матрица размерности $J \times L$, имеющая следующий вид:

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & - & - & - & - & - & - & - & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & - & - & - & - & - & - & - & 0 & & \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & & 0 & 0 & - & - & - & - & - & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & & 0 & 0 & - & - & - & - & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}.$$

Из (4.2) получаем

$$\begin{aligned} (\lambda_1)_j^k \cdot \mathscr{P}_j^{k+1}(1) - v_j^{k+1}(1) &= (\lambda_1)_j^k \cdot \mathscr{P}_j^k(1) - v_j^k(1), \\ (\lambda_2)_j^k \cdot \mathscr{P}_j^{k+1}(1) + w_j^{k+1}(1) &= (\lambda_2)_j^k \cdot \mathscr{P}_j^k(1) + w_j^k(1). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Здесь $j = 2, \ldots, J - 1$;

$$\lambda_1 = \gamma \cdot p \cdot G'(p) \Big/ \sqrt{1 + a_2^2(1)},$$

$$\lambda_2 = a_2(1) \cdot \lambda_2, \; G'(p) = \frac{k}{4 \cdot G_1(p)} \cdot \{(3 - \gamma) \cdot V_\infty + (\gamma + 1) \cdot V\}.$$

При $j = 1, J$ вместо (5.6) имеем следующее соотношение:

$$(\lambda_0)_j^k \cdot \mathscr{P}_j^{k+1}(1) - v_j^{k+1}(1) = (\lambda_0)_j^k \cdot \mathscr{P}_j^k(1) - v_j^k(1), \tag{5.7}$$

где $\lambda_0 = \gamma \cdot p \cdot G'(p)$.

С учетом (5.6), (5.7) получаем

$$\widetilde{B} \cdot \mathbf{Y}(1) = \widetilde{\varphi}, \tag{5.8}$$

где $\widetilde{B}$ — прямоугольная матрица размерности $(2 \cdot J - 2) \times L$, $\widetilde{\varphi}$ — вектор, размерности $2 \cdot J - 2$. Элементы матрицы $\widetilde{B}$ и вектора $\widetilde{\varphi}$ могут быть найдены с помощью соотношений (5.6), (5.7). Заметим также, что возможны и другие способы получения граничных условий для системы (5.4) при $s=1$.

Сформулированная таким образом краевая задача (5.4), (5.5), (5.8) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений решалась затем методом ортогональной прогонки (см. по этому поводу [4]).

Функции u, ψ находятся по схеме бегущего счета:

$$\psi_{ij}^{k+1} = \frac{1}{\widetilde{d}}\cdot\{\psi_{ij}^{k} - d_1\cdot\psi_{i+1,j}^{k+1} + d_2\cdot\psi_{i,j-1}^{k+1}\},$$

$$i=2,\ \ldots,\ I-1;\ j=2,\ \ldots,\ J-1;$$

$$\psi_{i,1}^{k+1} = \psi_{I,1}^{k+1},\ i=1,\ \ldots,\ I-1;$$

$$\psi_{1,j}^{k+1} = \psi_{I,1}^{k+1},\ j=2,\ \ldots,\ J-1;$$

$$\psi_{i,J}^{k+1} = \psi_{I,J}^{k+1},\ i=1,\ I-1;$$

$$u_{ij}^{k+1} = \frac{1}{\widetilde{d}}\cdot\{u_{ij}^{k} - d_1\cdot u_{i+1,j}^{k+1} + d_2\cdot u_{i,j-1}^{k+1} + \Delta\left[(v^2)_{(i),(j)}^{(k)} + (w^2)_{(i),(j)}^{(k)}\right]\},$$

$$i=2,\ \ldots,\ I-1;\ j=2,\ \ldots,\ J-1;$$

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{1-\widetilde{d}_1}\cdot\{u_{i,j}^{k} - \widetilde{d}_1\cdot u_{i+1,j}^{k+1} + \Delta\cdot(v^2)_{(i),(j)}^{(k)}\},$$

$$i=1,\ \ldots,\ I-1;\ j=1,\ J.$$

Здесь

$$\psi_{i,j}^{k} = \psi(k\cdot\Delta,\ (i-1)\cdot h_s,\ (j-1)\cdot h_\varphi),\ i=\overline{1,I},$$

$$(I-1)\cdot h_s = 1,\ d_1 = \Delta\cdot(\widetilde{\Delta})_{(i),(j)}^{(k)}/h_s,$$

$$d_2 = \Delta\cdot\left(\frac{w}{\sin\theta}\right)_{(i),(j)}^{(k)}\Big/h_\varphi,\quad \widetilde{d}_2 = 1 - d_1 + d_2;$$

$$\widetilde{d}_1 = \Delta\cdot\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)_{(i),j}^{(k)},\ j=1,\ J;$$

$$\psi_{I,j}^{k} = \mathscr{P}_{I,j}^{k} + \ln\left\{V_\infty\cdot\frac{h\cdot p_\infty + p_{I,j}^{k}}{h\cdot p_{I,j}^{k} + p_\infty}\right\},\ j=1,\ \ldots,\ J;$$

$$u_{I,j}^{k+1} = (u_\infty)_{(j)}^{(k)},\ j=1,\ \ldots,\ j;$$

$$(\cdot)_{(i)} = \frac{(\cdot)_{i+1} + (\cdot)_i}{2},\quad (\cdot)_{(j)} = \frac{(\cdot)_j + (\cdot)_{j-1}}{2}.$$

Затем, используя последнее соотношение (4.2), находим функцию $\theta_s(t,\ \varphi)$:

$$(\theta_s)_j^{k+1} = (\theta_s)_j^k + \Delta\cdot\left\{v_\infty - w_\infty a_2(1) + G_1(p)\sqrt{1+a_2^2(1)}\right\}_{(j)}^{(k)}.$$

Замечание 5.1. Начальные данные при $\alpha=0$ задавались с помощью простых аналитических формул. В качестве начальных данных при $\alpha\neq 0$ брались уже найденные функции для меньших значений угла атаки α.

§ 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Численные расчеты проводились по описанному в § 5 алгоритму. В силу того, что начальные данные задавались достаточно грубо, на первых нескольких шагах по времени проводились итерации, затем

Таблица 1

s	u	v	p	ρ
0.0	1.0395 (1.0374)	0.6001 (0.5989)	1.3357 (1.3304)	2.0485 (2.0491)
0.6	1.1532 (1.1528)	0.4380 (0.4377)	1.2499 (1.2505)	1.9535 (1.9542)
1.0	1.2201 (1.2198)	0.3709 (0.3709)	0.1504 (0.1509)	1.8412 (1.8417)

Таблица 2

s		φ = 0	45	90	135	180
0.0	u	1.0024 (0.9951)	1.0057 (1.0047)	1.0285 (1.0283)	1.0622 (1.0523)	1.0805 (1.0716)
	v	0.5787 (0.5745)	0.5807 (0.5801)	0.5938 (0.5937)	0.6133 (0.6045)	0.6238 (0.6216)
	w	0.0 (0.0)	0.0474 (0.0540)	0.0737 (0.0779)	0.0559 (0.0562)	0.0 (0.0)
	p	1.4327 (1.4328)	1.4045 (1.4025)	1.3319 (1.3331)	1.2644 (1.2693)	1.2404 (1.2446)
	ρ	2.1430 (2.1433)	2.1149 (2.1108)	2.0426 (2.0356)	1.9742 (1.9656)	1.9516 (1.9559)
0.6	u	1.1196 (1.1167)	1.1248 (1.1265)	1.1497 (1.1506)	1.1767 (1.1751)	1.1883 (1.1854)
	v	0.4061 (0.4040)	0.4149 (0.4137)	0.4391 (0.4372)	0.4629 (461045)	0.4707 (0.4709)
	w	0.0 (0.0)	0.0491 (0.0481)	0.0710 (0.0689)	0.0504 (0.0493)	0.0 (0.0)
	p	1.3386 (1.3389)	1.3148 (1.3126)	1.2502 (1.2506)	1.1868 (1.1908)	1.1620 (1.1667)
	ρ	2.0414 (2.0419)	2.0183 (2.0160)	1.9539 (1.9539)	1.8890 (1.8927)	1.8627 (1.8676)
1.0	u	1.1851 (0.1857)	1.1944 (1.1947)	1.2197 (1.2170)	1.2459 (1.2402)	1.2536 (1.2501)
	v	0.3346 (0.3340)	0.3452 (0.3452)	0.3701 (0.3712)	0.3947 (0.3969)	0.4061 (0.4047)
	w	0.0 (0.0)	0.0482 (0.0460)	0.0680 (0.0654)	0.0474 (0.0466)	0.0 (0.0)
	p	1.2333 (1.2323)	1.2029 (1.2089)	1.1481 (1.1527)	1.0880 (1.0972)	1.0688 (1.0743)
	ρ	1.9255 (1.9245)	1.9013 (1.9091)	1.8388 (1.8436)	1.7754 (1.7852)	1.7548 (1.7607)
F_x		1.0999 (1.0991)	1.1047 (1.1041)	1.1124 (1.1165)	1.1198 (1.1290)	1.1286 (1.1342)

счет проводился без итераций до установления. Установление решения считалось достигнутым, если

$$\left(\sum_{j=1}^{J}\left\{\left|(\theta_s)_j^{k+1}-(\theta_s)_j^{k}\right|+\left|\left(\frac{\partial\theta_s}{\partial t}\right)_j^{k+1}-\left(\frac{\partial\theta_s}{\partial t}\right)_j^{k}\right|\right\}\right)<10^{-6}.$$

Таблица 3

s		φ				
		0	45	90	135	180
0.0	u	0.9614 (0.9499)	0.9667 (1.9689)	0.9999 (1.0160)	1.0606 (1.0652)	1.1181 (1.1130)
	v	0.5551 (0.5484)	0.5581 (0.5594)	0.5773 (0.5866)	0.6123 (0.6150)	0.6455 (0.6426)
	w	0.0 (0.0)	0.0802 (0.01064)	0.1453 (0.1567)	0.1238 (0.1153)	0.0 (0.0)
	p	1.5342 (1.5330)	1.4737 (1.4672)	1.3224 (1.2329)	1.1923 (1.2012)	1.1515 (1.1580)
	ρ	2.2379 (2.2371)	2.1777 (2.1680)	2.0261 (2.0135)	1.8896 (1.8794)	1.8576 (1.8642)
0.6	u	1.0820 (1.0772)	1.0916 (1.0963)	1.1393 (1.1438)	1.1941 (1.1933)	1.2188 (1.2123)
	v	0.3732 (0.3693)	0.3900 (0.3886)	0.4384 (0.4358)	0.4872 (0.4836)	0.45033 (0.5037)
	w	0.0 (0.0)	0.0960 (0.0949)	0.1414 (0.1374)	0.1029 (0.0997)	0.0 (0.0)
	p	1.4348 (1.4310)	1.3829 (1.3765)	1.2519 (1.2508)	1.1275 (1.1339)	1.0810 (1.0883)
	ρ	2.1301 (2.1297)	2.0837 (2.0774)	1.9546 (1.9530)	1.8260 (1.8321)	1.7756 (1.7834)
1.0	u	1.1461 (1.1482)	1.1637 (1.1653)	1.2133 (1.2087)	1.2665 (1.2558)	1.2824 (1.2766)
	v	0.2976 (0.2971)	0.3191 (0.3191)	0.3696 (0.3717)	0.4185 (0.4231)	0.4414 (0.4440)
	w	0.0 (0.0)	0.0957 (0.0912)	0.1357 (0.1305)	0.0955 (0.0935)	0.0 (0.0)
	p	1.3208 (1.3173)	1.2723 (1.2702)	1.1498 (1.1579)	1.0308 (1.0479)	0.9938 (1.0030)
	ρ	2.0108 (2.0075)	1.9640 (1.9618)	1.8406 (1.8490)	1.7132 (1.7320)	1.6721 (1.6823)
F_x		1.0928 (1.0893)	1.1031 (1.0995)	1.1188 (1.1248)	1.1332 (1.1504)	1.1513 (1.1609)

Расчеты проводились при следующих значениях величин M_∞, θ_b:

$$M_\infty = 2,\ 7;\ \theta_b = 10°,\ 30°.$$

При $\alpha = 0$, $M_\infty = 7$, $\theta_b = 10°$, $30°$ установление решения происходило за 15 шагов по времени, при $\alpha = 0$, $M_\infty = 2$, $\theta_b = 10°$, $30°$ — за 30 шагов по времени. При этом вычисленные значения параметров полностью совпали с табличными значениями, приведенными в монографии [5].

С увеличением угла атаки α увеличивалось число шагов по времени до установления решения. При этом также получалось удовлетворительное совпадение вычислительных значений параметров с табличными значениями из [5].

Результаты расчетов приведены для режима $M_\infty = 2$, $\theta_b = 30°$ для углов атаки $\alpha = 0°$ (табл. 1), $\alpha = 2°30'$ (табл. 2), $\alpha = 5°$ (табл. 3). В таблицах u, v, w — безразмерные компоненты скорости в цилиндрической системе координат; p, ρ — безразмерные давление и плотность; F_x — тангенс угла отхода ударной волны.

В скобках приводятся для сравнения табличные значения из [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Блохин А. М.** Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики.— Новосибирск: Наука, 1986.— 240 с.
2. **Блохин А. М.** Применение разностных аналогов диссипативных интегралов энергии для исследования устойчивости разностных схем // Труды ИМ СО АН СССР, «Вычислительные проблемы в задачах математической физики».— 1988.— Т. 11.— С. 67—93.
3. **Рихтмайер Р., Мортон К.** Разностные методы решения краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 418 с.
4. **Кузнецов С. В.** Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычислительные методы линейной алгебры/Труды Института математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 6.— С. 85—110.
5. **Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В.** Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом.— М.: Наука, 1964.— 505 с.

А. М. БЛОХИН, В. Р. ЦИМЕРМАН

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ О СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ КЛИНА

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В [1] изучалась корректность линейной смешанной задачи о сверхзвуковом обтекании бесконечного клина. Эта задача может быть сформулирована так. Ищется решение системы уравнений акустики

$$\mathbf{U}_t + \frac{1}{r}\cdot B\mathbf{U}_\theta + C\mathbf{U}_r + \frac{1}{r}Q\mathbf{U} = 0,$$

$$t > 0, \ (r, \theta) \in \Pi;$$

которое удовлетворяет следующим граничным условиям при $\theta = \theta_{s0}$:

$$u_1 + \widehat{d}\cdot u_3 + M_1\cdot F = 0,$$

$$u_2 = M_0\cdot(\widehat{\rho} - 1)\cdot r\cdot F_r + M_0\cdot\widehat{\rho}\cdot F,$$

$$r\cdot F_t + r\cdot M_1\cdot F_r + M_1\cdot F = \widehat{\mu}\cdot u_3, \ t, \ r > 0;$$

при $\theta = \theta_b$:

$$u_1 = 0, \ t, \ r > 0;$$

начальным данным при $t = 0$:

$$\mathbf{U}(0, r, \theta) = \mathbf{U}_0(r, \theta), \ (r, \theta) \in \Pi,$$

$$F(0, r) = F_0(r), \ r > 0.$$

Здесь

$$B = B_0 + M_0\cdot I_3, \quad C = C_0 + M_1\cdot I_3,$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

I_3 — единичная матрица порядка 3,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & M_0 & 0 \\ -M_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi = \{(r, \theta) \mid r > 0, \ \theta_b < \theta < \theta_{s0}\};$$

M_0, M_1 — известные функции от θ, причем:

$$M_1 = -\frac{dM_0}{d\theta}, \quad M_0 = \frac{dM_1}{d\theta}, \quad M_0(\theta_b) = 0, \quad M_0(\theta_{s0}) < 0,$$