СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Блохин А. М.** Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики.— Новосибирск: Наука, 1986.— 240 с.
2. **Блохин А. М.** Применение разностных аналогов диссипативных интегралов энергии для исследования устойчивости разностных схем // Труды ИМ СО АН СССР, «Вычислительные проблемы в задачах математической физики».— 1988.— Т. 11.— С. 67—93.
3. **Рихтмайер Р., Мортон К.** Разностные методы решения краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 418 с.
4. **Кузнецов С. В.** Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычислительные методы линейной алгебры/Труды Института математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 6.— С. 85—110.
5. **Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В.** Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом.— М.: Наука, 1964.— 505 с.

А. М. БЛОХИН, В. Р. ЦИМЕРМАН

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ О СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ КЛИНА

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В [1] изучалась корректность линейной смешанной задачи о сверхзвуковом обтекании бесконечного клина. Эта задача может быть сформулирована так. Ищется решение системы уравнений акустики

$$\mathbf{U}_t + \frac{1}{r}\cdot B\mathbf{U}_\theta + C\mathbf{U}_r + \frac{1}{r}Q\mathbf{U} = 0,$$

$$t > 0,\ (r,\ \theta) \in \Pi;$$

которое удовлетворяет следующим граничным условиям при $\theta = \theta_{s0}$:

$$u_1 + \widehat{d}\cdot u_3 + M_1\cdot F = 0,$$

$$u_2 = M_0\cdot(\widehat{\rho} - 1)\cdot r\cdot F_r + M_0\cdot\widehat{\rho}\cdot F,$$

$$r\cdot F_t + r\cdot M_1\cdot F_r + M_1\cdot F = \widehat{\mu}\cdot u_3,\ t,\ r > 0;$$

при $\theta = \theta_b$:

$$u_1 = 0,\ t,\ r > 0;$$

начальным данным при $t = 0$:

$$\mathbf{U}(0,\ r,\ \theta) = \mathbf{U}_0(r,\ \theta),\ (r,\ \theta) \in \Pi,$$

$$F(0,\ r) = F_0(r),\ r > 0.$$

Здесь
$$B = B_0 + M_0\cdot I_3,\quad C = C_0 + M_1\cdot I_3,$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix},$$

I_3 — единичная матрица порядка 3,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & M_0 & 0\\ -M_0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad \Pi = \{(r,\ \theta)\,|\, r > 0,\ \theta_b < \theta < \theta_{s0}\};$$

M_0, M_1 — известные функции от θ, причем:

$$M_1 = -\frac{dM_0}{d\theta},\quad M_0 = \frac{dM_1}{d\theta},\quad M_0(\theta_b) = 0,\quad M_0(\theta_{s0}) < 0,$$

$|M_0(\theta)| < 1$; $\widehat{d}$, $\widehat{\rho}$, $\widehat{\mu}$ — некоторые постоянные (см. [1, 2]).

Полагая $r = e^{-\xi}$, $\xi \in R$, перепишем исходную систему так:

$$\widehat{l}\mathbf{U} + B_0 \cdot \mathbf{U}_\theta - C_0 \cdot \mathbf{U}_\xi + Q \cdot \mathbf{U} = 0,$$

где

$$\widehat{l} = \widehat{l}_0 + M_0 \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \widehat{l}_0 = e^{-\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} - M_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi},$$

$\frac{\partial}{\partial\xi} = -r\frac{\partial}{\partial r}$. В области $t > 0$, $\xi \in R$, $\theta_b < \theta < \theta_{s0}$ проведем дискретизацию по переменным t, ξ с шагами $\Delta t = \Delta$, $\Delta\xi = h$. Введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$\mathbf{U}(k\Delta, jh, \theta) = \mathbf{U}_j^k(\theta) = \mathbf{U},$$
$$F(k\Delta, jh) = F_j^k = F, \quad \varphi\mathbf{U}_j^k = \mathbf{U}_j^{k+1},$$
$$\psi\mathbf{U}_j^k = \mathbf{U}_{j+1}^k,$$
$$L_t = \alpha \cdot \varphi + \delta, \; L_t\mathbf{U} = \widetilde{\mathbf{U}},$$
$$\tau = \frac{\varphi - 1}{\Delta}, \quad \eta = L_t\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \zeta = L_t\frac{\psi - 1}{h},$$
$$l_0 = e^{-\xi} \cdot \tau - M_1 \cdot \zeta, \; l = l_0 + M_0 \cdot \eta, \; \xi = j \cdot h.$$

Здесь α, $\delta \geqslant 0$ $(\alpha + \delta = 1)$ — некоторые постоянные.

Вместо исходной смешанной задачи сформулируем следующую дифференциально-разностную модель:

$$l\mathbf{U} + B_0 \cdot \eta\mathbf{U} - C_0 \cdot \zeta\mathbf{U} + Q\widetilde{\mathbf{U}} = 0, \qquad (1.1)$$
$$k, \; |j| = 0, 1, \ldots, \theta_b < \theta < \theta_{s0};$$

$$u_1 + \widehat{d} \cdot u_3 + M_1 \cdot F = 0,$$
$$\widetilde{u}_2 = -M_0(\widehat{\rho} - 1) \cdot \zeta F + M_0 \cdot \widehat{\rho} \cdot \widetilde{F}, \qquad (1.2)$$
$$l_0F + M_1\widetilde{F} = \widehat{\mu} \cdot \widetilde{u}_3, \; k, \; |j| = 0, 1, \ldots, \theta = \theta_{s0};$$

$$u_1 = 0, \; k, \; |j| = 0, 1, \ldots, \theta = \theta_b; \qquad (1.3)$$

$$\mathbf{U}_j^0(\theta) = \mathbf{U}_0(jh, \theta), \quad F_j^0 = F_0(jh), \qquad (1.4)$$
$$|j| = 0, 1, \ldots, \theta_b < \theta < \theta_{s0}.$$

Умножим систему (1.1) скалярно на вектор

$$\begin{pmatrix} -\eta \\ \zeta \\ l \end{pmatrix}.$$

После несложных выкладок получим дифференциально-разностный аналог волнового уравнения:

$$\{l^2 - \eta^2 - \zeta^2\}u_3 - M_1 \cdot l\widetilde{u}_3 - \widehat{q}_1 \cdot e^{-\xi} \cdot \tau\widetilde{u}_2 = 0, \qquad (1.5)$$

где $\widehat{q}_1 = O(h) > 0$. При выводе соотношения (1.5) мы воспользовались следующими коммутационными соотношениями:

$$[l, \eta] = l\eta - \eta l = (M_0 \cdot \zeta + M_1 \cdot \eta)L_t,$$
$$[l, \zeta] = q_1 \cdot e^{-\xi} \cdot \tau L_t, \; q_1 = 1 + \widehat{q}_1.$$

Введем в рассмотрение следующие дифференциально-разностные операторы:

$$l_1 = \frac{1}{\beta} \cdot l_0, \quad l_2 = \beta \cdot \eta - \frac{M_0}{\beta} \cdot l_0, \; \beta^2 = 1 - M_0^2.$$

В терминах этих операторов уравнение (1.5) перепишется так:

$$\widehat{\Delta} u_3 - \frac{M_0 M_1}{\beta} \cdot \tilde{l}_2 u_3 - \tilde{q}_1 \cdot e^{-\xi} \tau \tilde{u}_2 = 0, \tag{1.5'}$$

$$\widehat{\Delta} = l_1^2 - l_2^2 - \zeta^2.$$

Следуя [1, 2], получим для агрегата u_3 граничное условие при $\theta = \theta_{s0}$. В самом деле, из первого и третьего уравнений системы (1.1) следует

$$M_0 \cdot l_0 u_3 - \beta^2 \cdot \eta u_3 - M_0 \cdot \zeta u_2 - l_0 u_1 = 0.$$

Подействуем на это соотношение оператором l_0 и положим $\theta = \theta_{s0}$. В результате, используя граничные условия (1.2), получим искомое граничное условие

$$\begin{gathered}
(M_0 + \widehat{d}) \cdot l_0^2 \tilde{u}_3 - \beta^2 \cdot l_0 \eta \tilde{u}_3 + \widehat{\mu} \cdot M_0^2 (\widehat{\rho} - 1) \cdot \zeta^2 \tilde{u}_3 + M_1 \cdot (\widehat{\mu} - (M_0 + \widehat{d})(q_1 + \\
+ \widehat{q}_1)) \, l_0 \tilde{\tilde{u}}_3 + M_0^2 \cdot \widehat{\mu} \cdot (\rho \cdot (q_1 + \widehat{q}_1) - 2 q_1) \cdot \zeta \tilde{\tilde{u}}_3 + \beta^2 \cdot M_1 \cdot (q_1 + \widehat{q}_1) \, \eta \tilde{\tilde{u}}_3 - \\
- \widehat{\mu} \cdot q_1 \cdot (2 M_1^2 + M_0^2 \cdot (\widehat{\rho} \cdot \widehat{q}_1 + q_1)) \cdot \tilde{\tilde{u}}_3 + M_0^2 \cdot M_1 \cdot q_1 \cdot (\widehat{q}_1 \cdot (\widehat{\rho} - 1) + 1) \, \zeta \tilde{\tilde{\tilde{F}}} + \\
+ M_1 \cdot q_1 \cdot (2 M_1^2 + (q_1 - \widehat{\rho} \, \widehat{q}_1) \cdot M_0^2) \cdot \tilde{\tilde{\tilde{F}}} = 0, \\
\theta = \theta_{s0}.
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Переходя в (1.6) от операторов l_0, η к операторам $l_{1,2}$, перепишем его так:

$$\begin{gathered}
M_0 \cdot d \cdot l_2^2 \tilde{u}_3 - l_1 l_2 \tilde{u}_3 + \frac{m \cdot M_0}{\beta^2} \zeta^2 \tilde{u}_3 + \frac{M_0 M_1}{\beta} \cdot \left(\frac{\widehat{\mu}}{M_0} - d (q_1 + \widehat{q}_1) \right) l_1 \tilde{\tilde{u}}_3 + \\
+ \frac{M_1}{\beta} (q_1 + \widehat{q}_1 + d \cdot M_0^2) \cdot l_2 \tilde{\tilde{u}}_3 + \frac{M_0^2}{\beta^2} \cdot \widehat{\mu} \cdot ((q_1 + \widehat{q}_1) \widehat{\rho} - 2 q_1) \, \zeta \tilde{\tilde{u}}_3 - \\
- \widehat{\mu} \cdot q_1 \cdot \frac{2 M_1^2 + M_0^2 (\widehat{\rho} \cdot \widehat{q}_1 + q_1)}{\beta^2} \cdot \tilde{\tilde{u}}_3 + \frac{M_0^2 M_1^2}{\beta^2} \cdot q_1 (\widehat{q}_1 (\widehat{\rho} - 1) + 1) \, \zeta \tilde{\tilde{\tilde{F}}} + \\
+ M_1 q_1 \frac{2 M_1^2 + M_0^2 (q_1 - \widehat{\rho} \, \widehat{q}_1)}{\beta^2} \tilde{\tilde{\tilde{F}}} + \widehat{q}_1 e^{-\xi} \tau \tilde{\tilde{u}}_2 = 0, \quad \theta = \theta_{s0},
\end{gathered} \tag{1.6'}$$

Здесь $d = \widehat{d}/M_0$, $m = \beta^2 d + \lambda M_0^2$, $\lambda = (\widehat{\rho} - 1) \widehat{\mu}/M_0$. Наконец, из первого уравнения системы (1.1) следует, что при $\theta = \theta_b$ (с учетом (1.3)) справедливо условие

$$\eta u_3 = 0, \ \theta = \theta_b. \tag{1.7}$$

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛОГА ДИССИПАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА ЭНЕРГИИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ МОДЕЛИ

Поскольку агрегат $u_3 = (u_3)_j^k (\theta)$ удовлетворяет уравнению (1.5′), то вектор

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} l_1 \mathbf{y} \\ l_2 \mathbf{y} \\ \zeta \mathbf{y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} l_2 \\ \zeta \end{pmatrix} u_3$$

удовлетворяет следующей системе:

$$\{\tilde{A}_0 l_1 - \tilde{B}_0 l_2 - C_0 \zeta\} \mathbf{v} + \widehat{Q}_0 = 0, \tag{2.1}$$

где

$$\widehat{A}_0=\begin{pmatrix} K & L & M\\ L & K & iN\\ M & -iN & K\end{pmatrix},\quad \widehat{B}_0=\begin{pmatrix} L & K & iN\\ K & L & M\\ -iN & M & -L\end{pmatrix},\quad \widehat{C}_0=\begin{pmatrix} M & -iN & K\\ iN & -M & L\\ K & L & M\end{pmatrix},$$

$$\widehat{Q}_0=\begin{pmatrix} L[l_2, l_1]+M[\zeta, l_1]-K\widehat{\Delta}+iN[l_2,\zeta]\\ K[l_2, l_1]+M[l_2,\zeta]-L\widehat{\Delta}+iN[\zeta, l_1]\\ K[\zeta, l_1]+L[\zeta, l_2]-M\widehat{\Delta}+iN[l_1, l_2]\end{pmatrix}y;$$

K, L, M, N — некоторые, пока произвольные, эрмитовы матрицы порядка 2, зависящие от θ. Вектор v представим следующим образом:

$$\mathbf{v}=\mathbf{D}+\widehat{\mathbf{N}}\widetilde{\mathbf{Y}}, \tag{2.2}$$

где

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} D_1\\ D_2\\ D_3\end{pmatrix},\quad \widehat{\mathbf{N}}=\begin{pmatrix} N_1\\ N_2\\ N_3\end{pmatrix},\quad \mathbf{Y}=\begin{pmatrix} l_1u_3\\ \mathrm{y}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_1=\begin{pmatrix}\widehat{l_1l_2}\\ l_1\zeta\end{pmatrix}u_3,\quad \mathbf{D}_2=\begin{pmatrix}\widehat{l}_2^2\\ l_2\zeta\end{pmatrix}u_3,\quad \mathbf{D}_3=\begin{pmatrix} l_2\zeta\\ \zeta^2\end{pmatrix}u_3,$$

$$\widehat{l_1l_2}=l_0\eta-\frac{n}{\beta}\cdot\widehat{l}_0^2,\quad \widehat{l}_2^2=\beta^2\eta^2-2M_0l_0\eta+n^2\widehat{l}_0^2,$$

$$\widehat{l}_0^2=e^{-2\xi}\tau^2-2e^{-\xi}\cdot M_1\cdot\tau\zeta+M_1^2\cdot\zeta^2,\quad N_1=-n_0\cdot N_3,$$

$$N_2=q_1\cdot M_0\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & n_0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$N_3=\begin{pmatrix} n_0\left(n_1+\widehat{q}_1M_0^2\right) & M_1n & n^2\left(n_2+\widehat{q}_1M_1^2\right)\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$n=\frac{M_0}{\beta},\quad n_0=\frac{M_1}{\beta},\quad n_1=1+2M_0^2,\quad n_2=M_1^2+\beta^2,$$

Пользуясь представлением (2.2), перепишем систему (2.1) так:

$$\{\widehat{A}_0l_1-\widehat{B}_0l_2-\widehat{C}_0\zeta\}\,\mathbf{D}+\{\widehat{A}_0\cdot\widehat{N}\cdot l_1-\widehat{B}_0\cdot\widehat{N}\cdot l_2-\widehat{C}_0\cdot\widehat{N}\cdot\zeta\}\,\widetilde{\mathbf{Y}}-$$
$$-\beta\cdot\widehat{B}_0\cdot\widehat{N}'\,\widetilde{\widetilde{\mathbf{Y}}}+\widehat{Q}_0=0,\quad \widehat{N}'=\frac{d}{d\theta}\widehat{N}. \tag{2.1'}$$

Последовательно находим

$$\begin{aligned} l_1\widetilde{\mathbf{Y}}&=\widehat{N}_1\cdot\widetilde{\mathbf{D}}+\mathscr{P}_1\widetilde{\widetilde{\mathbf{Y}}}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\widehat{q}_1e^{-\xi}\tau\widetilde{\widetilde{u}}_2,\\ l_2\widetilde{\mathbf{Y}}&=\widehat{N}_2\cdot\widetilde{\mathbf{D}}+\mathscr{P}_2\widetilde{\widetilde{\mathbf{Y}}},\\ \zeta\widetilde{\mathbf{Y}}&=\widehat{N}_3\cdot\widetilde{\mathbf{D}}+\mathscr{P}_3\widetilde{\widetilde{\mathbf{Y}}}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь

$$N_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathscr{P}_1=\left(\frac{n_0\left(n_1+\widehat{q}_1M_0^2\right)\;\;2n_3n^2\;\;\left(n_2+\widehat{q}_1M_1^2\right)}{N_1}\right),$$

$$\widehat{N}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix},\quad \mathscr{P}_2=\left(\frac{-n_3(q_1+\widehat{q}_1)\;\;0\;\;\frac{n}{\beta}\left(n_2+\widehat{q}_1M_1^2\right)}{N_2}\right),$$

$$\widehat{N}_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathscr{P}_3=\left(\frac{-q_1\quad 0\quad -q_1n_0}{N_3}\right),\quad n_3=\frac{M_0M_1}{\beta}.$$

Учитывая представления (2.3), после несложных выкладок мы окончательно получаем из (2.1′) следующую систему:

$$\{\widehat{A}_0l_1-\widehat{B}_0l_2-\widehat{C}_0\zeta\}\,\mathbf{D}+\{\widehat{G}_0+\widehat{G}_1\}\cdot\widetilde{\mathbf{D}}+G_2\cdot\widetilde{\widetilde{\mathbf{Y}}}+\mathbf{S}_0=0, \tag{2.4}$$

где

$$\widehat{G}_0=\widehat{A}_0\widehat{N}\widehat{N}_1-\widehat{B}_0\widehat{N}\widehat{N}_2-\widehat{C}_0\widehat{N}\widehat{N}_3,$$

$$\widehat{G}_2=\widehat{A}_0\widehat{N}\mathscr{P}_1-\widehat{B}_0\widehat{N}\mathscr{P}_2-\widehat{C}_0\widehat{N}\mathscr{P}_3+\widehat{G}_3,$$

$$\widehat{G}_3=-\begin{pmatrix}n_4\cdot q_1LN_3+KR_4\\ n_4q_1KN_3+LR_4\\ -in_4q_1NN_3+MR_4\end{pmatrix},\quad n_4=M_0(1-n_0^2),$$

$$\widehat{G}_1=\widehat{G}_{10}+\widehat{G}_{11}+\widehat{G}_{12},$$

$$\widehat{G}_{10}=-\begin{pmatrix}Mq_1+iM_0q_1N & 0 & q_1n_0M+LM_0\\ M_0Mq_1+iq_1N & 0 & iq_1n_0N+KM_0\\ -M_0Lq_1+q_1K & 0 & q_1n_0K-iNM_0\end{pmatrix}-n_3\cdot\widehat{B}_0,$$

$$\widehat{G}_{11}=-\begin{pmatrix}K&K&K\\L&L&L\\M&M&M\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R_1&0&0\\0&R_2&0\\0&0&R_3\end{pmatrix},$$

$$\widehat{G}_{12}=-\widehat{q}_1\cdot n_3\cdot\begin{pmatrix}0&0&iN\\0&0&M\\0&0&-L\end{pmatrix},\quad R_1=2\begin{pmatrix}0&-M_0\widehat{q}_1\\ q_1M_0&q_1n_0\end{pmatrix},$$

$$R_2=2\begin{pmatrix}n_3&0\\q_1&n_3\end{pmatrix},\quad R_3=2\begin{pmatrix}0&-n_3\widehat{q}_1\\ n_3\widehat{q}_1&q_1\end{pmatrix},$$

$$R_4=\begin{Vmatrix}3n_0(n_1n_3+\widehat{q}_1M_0^2)+ & 5n_3^2+M_0^2-n_0^2 & n_3(3n^2(n_2+\widehat{q}_1M_1^2)-\\ \quad+M_0q_1\widehat{q}_1 & & \quad-q_1\widehat{q}_1)\\ q_1n_0(2(n_1+\widehat{q}_1\dot{M}_0^2)- & 4q_1n_3 & q_1(2n^2(n_2+\widehat{q}_1M_1^2)-\\ \quad-q_1(1+M_0^2)-\beta^2) & & \quad-n_3^2\widehat{q}_1-n_0^2(q_1+\widehat{q}_1))\end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{S}_0=-\begin{pmatrix}K\\L\\M\end{pmatrix}\cdot\widehat{q}_1\cdot\left\{2\begin{pmatrix}n_3\\q_1\end{pmatrix}e^{-\xi}\tau\widetilde{\widetilde{u}}_2+\begin{pmatrix}l_2\\ \zeta\end{pmatrix}e^{-\xi}\tau\widetilde{u}_2\right\}.$$

Систему (2.4) можно переписать и по-другому, если вернуться от операторов $l_{1,2}$ к операторам l_0, η:

$$\left\{e^{-\xi}\frac{1}{\beta^2}(\widehat{A}_0+\widehat{B}_0\cdot M_0)\,\tau-\widehat{B}_0\eta-\frac{1}{\beta^2}(M_1\cdot(\widehat{A}_0+\widehat{B}_0\cdot M_0)+\beta\widehat{C}_0)\,\zeta\right\}\mathbf{D}+$$
$$+\frac{1}{\beta}\{\widehat{G}_0+\widehat{G}_1\}\,\widetilde{\mathbf{D}}+\frac{1}{\beta}\cdot\widehat{G}_2\cdot\widetilde{\widetilde{\mathbf{Y}}}+\frac{1}{\beta}e^{-\xi}\mathbf{S}=0, \tag{2.4′}$$

где

$$\mathbf{S}=-\begin{pmatrix}K\\L\\M\end{pmatrix}\cdot\widehat{q}_1\cdot\left\{\begin{pmatrix}(1-\widetilde{q}_1)\,n_3\\ q_1\end{pmatrix}\tau\widetilde{\widetilde{u}}_2+\begin{pmatrix}\beta\cdot\eta-n\cdot e^{-\xi}\tau-n_3e^{-h}\zeta\\ e^{-h}\zeta\end{pmatrix}\tau\widetilde{u}_2\right\}.$$

К системе (2.4′) добавим еще две системы (см. также [1]), которым удовлетворяют векторы

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_p = \begin{pmatrix} \zeta F \\ F \end{pmatrix}:$$

$$I_4(e^{-\xi} \cdot \tau - M_1\zeta - M_0\eta)\mathbf{V} + \widehat{Q}_0\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} + \widehat{Q}_{01}\tilde{\mathbf{Y}} +$$
$$+ \widehat{Q}_1 \cdot \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{S}_1 + \alpha \cdot \Delta \cdot (e^{-\xi} \cdot \tau^2 - M_1\zeta\tau - M_0\eta\tau)\mathbf{V} = 0; \qquad (2.5)$$

$$I_2(e^{-\xi} \cdot \tau - M_1\zeta)\mathbf{F}_p + \widetilde{R}_{01} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_p + \widetilde{R}_{02} \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_p + \widehat{R}_{01}\tilde{\mathbf{V}} + \widehat{R}_{02}\tilde{\tilde{\mathbf{V}}} = 0, \ \theta = \theta_{s0}. \qquad (2.6)$$

Здесь

$$Q_1 = \beta(n^2 - 1) \cdot I_4 \cdot \left(\begin{array}{cccccc} & & \widehat{N}_1 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \cdot I_4 \cdot \left(\begin{array}{cccccc} & & \widehat{N}_2 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\widehat{Q}_0 = \beta(n^2 - 1) \cdot I_4 \cdot \left(\begin{array}{ccc} & \mathcal{P}_1 & \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + n \cdot I_4 \cdot \left(\begin{array}{ccc} & \mathcal{P}_2 & \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\widehat{Q}_{01} = \beta(n^2 - 1) \cdot I_4 \cdot \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} + n \cdot I_4 \cdot \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix},$$

$$\widetilde{R}_{01} = M_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & \widehat{q}_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{R}_{01} = \widehat{\mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{R}_{02} = M_1 \cdot \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{R}_{02} = \widehat{\mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_1 = I_4 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot q_1 \cdot e^{-\xi} \cdot \tau \tilde{\tilde{u}}_2;$$

I_4, I_2 — единичные матрицы порядка 4 и 2 соответственно. Заметим, что при выводе системы (2.5) мы пользовались равенством

$$\tilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{Z} = \alpha \cdot \Delta \cdot \tau\mathbf{Z}. \qquad (2.7)$$

Из систем вида (1.1) составим расширенную систему

$$\{e^{-\xi} \cdot A_p\tau + B_p \cdot \eta - C_p \cdot \zeta\}\mathbf{U}_p + Q_p \cdot \tilde{\mathbf{U}}_p + \widehat{Q}_p \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{U}}}_p + \widehat{\widehat{Q}}_p \cdot \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{U}}}}_p = 0, \qquad (2.8)$$

где
$$A_p = \mathrm{E} \otimes I_3, \ B_p = \mathrm{E}_1 \otimes B, \ C_p = \mathrm{E}_1 \otimes C,$$

$$\mathrm{E} = \mathrm{diag}\,\{1, \ \varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ e^{-h}\varepsilon_3, \ \varepsilon_4, \ e^{-h}\varepsilon_5, \ \varepsilon_6, \ e^{-h}\varepsilon_7, \ e^{-2h}\varepsilon_8, \ \varepsilon_9\};$$

$\mathrm{E}_1 = \mathrm{diag}\,\{1, \ \varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \varepsilon_3, \ \varepsilon_4, \ \varepsilon_5, \ \varepsilon_6, \ \varepsilon_7, \ \varepsilon_8, \ \varepsilon_9\}$ — диагональные матрицы; $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1, 9}$ — некоторые постоянные; $\widehat{A} \otimes \widehat{B}$ — кронекерово произведение матриц $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$;

$$\mathbf{U}_p = \{\mathbf{U}, \ \tau\mathbf{U}, \ \eta\mathbf{U}, \ \zeta\mathbf{U}, \ \tau^2\mathbf{U}, \ \tau\zeta\mathbf{U}, \ \tau\eta\mathbf{U}, \ \eta\zeta\mathbf{U}, \ \zeta^2\mathbf{U}, \ \eta^2\mathbf{U}\}^*;$$

$$
Q_p = \begin{bmatrix}
Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \varepsilon_1 Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \varepsilon_2(Q+B') & -\varepsilon_2 C' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -I_3\varepsilon_1 q_1 e^{-\xi} & 0 & \varepsilon_3 Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -I_3\varepsilon_5 q_1 e^{-\xi} & \varepsilon_5 e^{-\xi} Q & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_6 C' & \varepsilon_6(Q+B') & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_3\varepsilon_7 q_1 e^{-\xi} & -\varepsilon_7 C' & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2I_3\varepsilon_8 q_1 e^{-\xi} & 0 & \varepsilon_8 Q & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_9(Q+2B')
\end{bmatrix},
$$

$$
\hat{Q}_p = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\varepsilon_2 Q' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \varepsilon_6 Q' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \varepsilon_7 Q' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \varepsilon_8 I_3 q_1^2 e^{-\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \varepsilon_9(B''+2Q') & -\varepsilon_9 C'' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}, \quad
\hat{\hat{Q}}_p = \left[\begin{array}{c|c}
0 & \\
0 & \\
0 & \\
0 & \\
0 & \\
0 & O \\
0 & \\
0 & \\
0 & \\
\hline
\varepsilon_5 Q'' & 000000000
\end{array}\right]
$$

— блочные матрицы.

Выпишем граничные условия для системы (2.8) при $\theta = \theta_{s0}$:

$$
u_1 = -\widehat{d}\cdot u_3 - M_1\cdot F,\ \widetilde{u}_2 = -M_0(\widehat{\rho}-1)\zeta F + M_0\widehat{\rho}\widetilde{F},\ M_1\cdot\widetilde{F} + e^{-\xi}\tau F - \zeta M_1 F =
$$

$$
= \widehat{\mu}\cdot\widetilde{u}_3,\ \tau u_1 = -\widehat{d}\cdot\tau u_3 - M_1\tau F,\ \tau\widetilde{u}_2 = -M_0(\widehat{\rho}-1)\tau\zeta F + M_0\cdot\widehat{\rho}\cdot\tau F,
$$

$$
M_1\tau\widetilde{F} + e^{-\xi}\tau^2 F - M_1\tau\zeta F = \widehat{\mu}\cdot\tau u_3,\ \zeta u_1 = -\widehat{d}\zeta u_3 - M_1\zeta F,\ \zeta\widetilde{U}_2 =
$$

$$
= -M_0(\widehat{\rho}-1)\zeta^2 F + M_0\widehat{\rho}\zeta\widetilde{F},\ M_1\cdot(\zeta\widetilde{F} - \zeta^2 F) - q_1\cdot e^{-\xi}\cdot\tau\widetilde{F} + e^{-\xi-h}\tau\zeta F =
$$

$$
= \widehat{\mu}\cdot\zeta\widetilde{u}_3,\ \tau^2 u_1 = -\widehat{d}\tau^2 u_3 - M_1\tau^2 F,\ \tau^2\widetilde{u}_2 = -M_0(\widehat{\rho}-1)\zeta\tau^2 F + M_0\widehat{\rho}\tau^2\widetilde{F},
$$

$$
M_1\tau^2(\widetilde{F} - \zeta F) + e^{-\xi}\tau^3 F = \widehat{\mu}\cdot\tau^2\widetilde{u}_3,\ \tau\zeta u_1 = -\widehat{d}\cdot\zeta\tau u_3 - M_1\zeta\tau F,
$$

$$
M_1\zeta\tau(\widetilde{F} - \zeta F) + e^{-\xi-h}\zeta\tau^2 F - q_1\cdot e^{-\xi}\cdot\tau^2\widetilde{F} = \widehat{\mu}\tau\zeta\widetilde{u}_3,\ \tau^2 u_1 = -\widehat{d}\zeta^2 u_3 -
$$

$$
- M_1\zeta^2 F,\ \zeta^2\widetilde{u}_2 = -M_0(\widehat{\rho}-1)\zeta^3 F + M_0\widehat{\rho}\zeta^2 F,
$$

$$
M_1(\zeta^2\widetilde{F} - \zeta^3 F) - q_1 e^{-\xi-h}\cdot\tau(e^{-h}\zeta^2 F - 2q_1\zeta\widetilde{F}) - q_1^2 e^{-\xi}\tau\widetilde{\widetilde{F}} = \widehat{\mu}\cdot\zeta^2\widetilde{u}_3,
$$

$$
\eta\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \widehat{I}\cdot B^{-1}\cdot\{-e^{-\xi}\cdot I_3\tau\mathbf{U} + C\zeta\mathbf{U} - Q\widetilde{\mathbf{U}}\}, \tag{29}
$$

$$
\eta\tau\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \widehat{I}\cdot B^{-1}\cdot\{-e^{-\xi}\cdot I_3\tau^2\mathbf{U} + C\zeta\tau\mathbf{U} - Q\tau\widetilde{\mathbf{U}}\},
$$

$$
\eta\zeta\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \widehat{I}\cdot B^{-1}\cdot\{-e^{-\xi-h}\cdot I_3\tau\zeta\mathbf{U} + q_1 e^{-\xi}\tau\widetilde{\mathbf{U}} + C\zeta^2\mathbf{U} - Q\zeta\widetilde{\mathbf{U}}\},
$$

$$
\eta^2\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \widehat{I}\cdot\{(B^{-1}e^{-\xi})^2\tau^2\mathbf{U} + (B^{-1}C)^2\zeta^2\mathbf{U} - B^{-1}(B^{-1}\cdot C + C\cdot B^{-1}\cdot e^{-h})\cdot e^{-\xi}\cdot\tau\zeta\mathbf{U} +
$$

$$
+ (B^{-1}\cdot(B^{-1}\cdot Q + Q\cdot B^{-1} + C\cdot B^{-1}\cdot q_1) - (B^{-1})')\cdot e^{-\xi}\cdot\tau\widetilde{\mathbf{U}} + ((B^{-1}\cdot C)' -
$$

$$
- B^{-1}(C\cdot B^{-1}\cdot Q + Q\cdot B^{-1}\cdot C))\zeta\widetilde{\mathbf{U}} + ((B^{-1}\cdot Q)^2 - (B^{-1}\cdot Q)')\cdot\widetilde{\widetilde{\mathbf{U}}}\},
$$

где

$$\widehat{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

В системах (2.4′), (2.5), (2.6), (2.8) сделаем следующие замены:

$$\mathbf{D}=e^{-\varkappa\xi}\cdot\mathbf{\Lambda},\ \mathbf{Y}=e^{-\varkappa\xi}\cdot\mathbf{X},\ \mathbf{V}=e^{-\varkappa\xi}\cdot\mathbf{W},$$
$$\mathbf{U}_p=e^{-\varkappa\xi}\cdot\mathbf{V}_p,\ \mathbf{F}_p=e^{-\varkappa\xi}\cdot\mathbf{E}_p,\ u_2=e^{-\varkappa\xi}v_2,$$

где $\varkappa$ — пока произвольное вещественное число. После такой замены эти системы перепишутся в следующем виде:

$$\left\{e^{-\xi}\cdot\frac{1}{\beta^2}\cdot(\widehat{A}_0+\widehat{B}_0\cdot M_0)\cdot\tau-\widehat{B}_0\cdot\eta-\frac{e^{-\varkappa h}}{\beta^2}\cdot[M_1\cdot(\widehat{A}_0+\widehat{B}_0\cdot M_0)+\widehat{C}_0\cdot\beta]\cdot\zeta\right\}\mathbf{\Lambda}+$$
$$+\left\{\frac{1}{\beta}\left(\widehat{G}_0+\widehat{G}_1\right)+q_1\cdot\frac{\varkappa}{\beta^2}\cdot[M_1\cdot(\widehat{A}_0+\widehat{B}_0M_0)+\widehat{C}_0\cdot\beta]\right\}\cdot\widetilde{\mathbf{\Lambda}}+\frac{1}{\beta}\widehat{G}_2\cdot\widetilde{\widetilde{\mathbf{X}}}+$$
$$+\frac{1}{\beta}\cdot e^{-\xi}\cdot\widehat{\mathbf{S}}=0,$$

$$I_4\{e^{-\xi}\cdot\tau-M_1\cdot e^{-\varkappa h}\cdot\zeta-M_0\cdot\eta\}\mathbf{W}+I_4\cdot M_1\cdot\varkappa\cdot q_1\cdot\widetilde{\mathbf{W}}+\widehat{Q}_0\cdot\widetilde{\widetilde{\mathbf{X}}}+$$
$$+\widehat{Q_{01}}\cdot\widetilde{\mathbf{X}}-\widehat{Q}_1\cdot\widetilde{\mathbf{\Lambda}}+\widehat{\mathbf{S}}_1\cdot e^{-\xi}+I_4\cdot\alpha\cdot\Delta\times$$
$$\times(e^{-\xi}\tau^2-M_1\cdot e^{-\varkappa h}\cdot\tau\zeta-M_0\eta\tau)\mathbf{W}+\alpha\cdot\Delta\cdot M_1\cdot\varkappa\cdot q_1\cdot{}'\tau\widetilde{\mathbf{W}}=0,$$
$$\{e^{-\xi}\cdot A_p\tau+B_p\eta+C_pe^{-\varkappa h}\zeta\}\cdot\mathbf{V}_p+\{C_p\cdot q_1\cdot\varkappa+Q_p\}\cdot\widetilde{\mathbf{V}}_p+\widehat{Q}_p\cdot\widetilde{\widetilde{\mathbf{V}}}_p+$$
$$+\widehat{\widehat{Q}}_p\cdot\widetilde{\widetilde{\widetilde{\mathbf{V}}}}_p=0,$$
$$I_2(e^{-\xi}\tau-M_1\cdot e^{-\varkappa h}\zeta)\mathbf{E}_p+\{\widetilde{R}_{01}+q_1\cdot\varkappa\cdot M_1\cdot I_2\}\cdot\widetilde{\mathbf{E}}_p+$$
$$+\widetilde{R}_{02}\cdot\widetilde{\widetilde{\mathbf{E}}}_p+\widehat{R}_{01}\cdot\widetilde{\mathbf{W}}+\widehat{R}_{02}\cdot\widetilde{\widetilde{\mathbf{W}}}=0.$$

Здесь

$$\widehat{\mathbf{S}}_1=I_4\cdot\begin{Bmatrix}1\\0\\0\\0\end{Bmatrix}\cdot q_1\cdot\tau\widetilde{\widetilde{v}}_2,$$

$$\mathbf{S}=-\begin{pmatrix}K\\L\\M\end{pmatrix}\cdot\widehat{q}_1\cdot\left\{\begin{pmatrix}\left(1-\widehat{q}_1+e^{-h}\cdot q_1\cdot\varkappa\right)n_3\\q_1\left(1+\varkappa\cdot e^{-h}\right)\end{pmatrix}\cdot\tau\widetilde{\widetilde{v}}_2+\right.$$
$$\left.+\begin{pmatrix}\beta\cdot\eta-n\cdot e^{-\xi}\cdot\tau-n_3\cdot e^{-h(1+\varkappa)}\cdot\zeta\\e^{-h(1+\varkappa)}\cdot\zeta\end{pmatrix}\tau\widetilde{v}_2\right\}.$$

Для этих систем стандартным образом могут быть выписаны дифференциально-разностные аналоги интеграла энергии (см. [2, 3]):

$$\frac{e^{-\xi}}{\beta^2}\cdot\tau((\widehat{A}_0+\widehat{B}_0\cdot M_0)\mathbf{\Lambda},\mathbf{\Lambda})-\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot(\widetilde{\mathbf{\Lambda}},\widehat{B}_0\widetilde{\mathbf{\Lambda}})-\frac{e^{-\varkappa h}}{\beta^2}(\zeta[M_1(\widehat{A}_0+\widehat{B}_0M_0)+$$
$$+\widehat{C}_0\cdot\beta]\mathbf{\Lambda},\mathbf{\Lambda})+\frac{e^{-\xi}}{\beta^2}\cdot\Delta(\alpha-\delta)\cdot(\tau\mathbf{\Lambda},(\widehat{A}_0+\widehat{B}_0\cdot M_0)\tau\mathbf{\Lambda})+\frac{e^{-\varkappa h}}{\beta^2}\cdot h\times$$
$$\times([M_1(\widehat{A}_0+\widehat{B}_0\cdot M_0)+\widehat{C}_0\cdot\beta]\zeta\mathbf{\Lambda},\zeta\mathbf{\Lambda})+\left(\left[\frac{1}{\beta}\left(\widehat{G}_0+\widehat{G}_1+\widehat{G}_0^*+\widehat{G}_1^*\right)+\right.\right.\tag{2.10}$$
$$\left.\left.+\frac{2\varkappa}{\beta^2}\cdot q_1\cdot(M_1(\widehat{A}_0+\widehat{B}_0\cdot M_0)+\widehat{C}_0\cdot\beta)+\widehat{B}_0'\right]\widetilde{\mathbf{\Lambda}},\widetilde{\mathbf{\Lambda}}\right)+\frac{1}{\beta}(\widehat{G}_2\cdot\widetilde{\widetilde{\mathbf{X}}},\widetilde{\mathbf{\Lambda}})+$$
$$+\frac{1}{\beta}(\widetilde{\widetilde{\mathbf{X}}},\widehat{G}_2^*\widetilde{\mathbf{\Lambda}})+\frac{2e^{-\xi}}{\beta}\cdot(\widehat{\mathbf{S}},\widetilde{\mathbf{\Lambda}})=0;$$

$$e^{-\xi}\tau(\mathbf{W},\mathbf{W})-\frac{\partial}{\partial\theta}(M_0\widetilde{\mathbf{W}},\widetilde{\mathbf{W}})-M_1\cdot e^{-\varkappa h}\cdot\zeta(\mathbf{W},\mathbf{W})+e^{-\xi}\cdot\Delta\cdot(\alpha-\delta)\cdot(\tau\mathbf{W},\tau\mathbf{W})+$$
$$+M_1\cdot e^{-\varkappa h}\cdot h(\zeta,\zeta\mathbf{W})+M_1(2\varkappa q_1-1)\cdot(\widetilde{\mathbf{W}},\widetilde{\mathbf{W}})+2(\widehat{Q}^0\cdot\widetilde{\widetilde{\mathbf{X}}},\widetilde{\mathbf{W}})+$$
$$+2(\widehat{Q}_{01}\cdot\widetilde{\mathbf{X}},\widetilde{\mathbf{W}})+2(\widehat{Q}_1\cdot\widetilde{\mathbf{\Lambda}},\widetilde{\mathbf{W}})+2e^{-\xi}(\mathrm{S}_1,\widetilde{\mathbf{W}})+2\alpha\cdot\Delta\cdot\big(I_4\cdot\big(e^{-\xi}\tau^2-$$
$$-M_1\cdot e^{-\varkappa h}\cdot\tau\zeta-M_0\eta\tau\big)\cdot\mathbf{W},\widetilde{\mathbf{W}}\big)+2\alpha\cdot\Delta M_1q_1\varkappa(\tau\widetilde{\mathbf{W}},\widetilde{\mathbf{W}})=0; \qquad (2.11)$$
$$e^{-\xi}\tau(A_p\cdot\mathbf{V}_p,\mathbf{V}_p)+\frac{\partial}{\partial\theta}(B_p\widetilde{\mathbf{V}}_p,\widetilde{\mathbf{V}}_p)-e^{-\varkappa h}\zeta(C_p\mathbf{V}_p,\mathbf{V}_p)+\Delta\cdot(\alpha-\delta)\cdot e^{-\xi}\times$$
$$\times(\tau\mathbf{V}_p,A_p\tau\mathbf{V}_p)-\big(B_p'\cdot\widetilde{\mathbf{V}}_p,\widetilde{\mathbf{V}}_p\big)+e^{-\varkappa h}\cdot h\cdot(C_p\zeta\mathbf{V}_p,\zeta\mathbf{V}_p+2(Q_p\widetilde{\mathbf{V}}_p,\widetilde{\mathbf{V}}_p)+$$
$$+2q_1\varkappa(C_p\widetilde{\mathbf{V}}_p,\widetilde{\mathbf{V}}_p)+2(\widehat{Q}_p\cdot\widetilde{\widetilde{\mathbf{V}}}_p,\widetilde{\mathbf{V}}_p)+2(\widehat{\widehat{Q}}_p\cdot\widetilde{\widetilde{\widetilde{\mathbf{V}}}}_p,\widetilde{\mathbf{V}}_p)=0; \qquad (2.12)$$
$$e^{-\xi}\tau(\mathbf{E}_p,\mathbf{E}_p)-M_1\cdot e^{-\varkappa h}\zeta(\mathbf{E}_p,\mathbf{E}_p)+\Delta\cdot(\alpha-\delta)\cdot e^{-\xi}\cdot(\tau\mathbf{E}_p,\tau\mathbf{E}_p)+$$
$$+e^{-\varkappa h}\cdot M_1\cdot h(\zeta\mathbf{E}_p,\zeta\mathbf{E}_p)+\big([\widetilde{R}_{01}+\widetilde{R}_{01}^*+2q_1\cdot\varkappa\cdot M_1\cdot I_2]\,\widetilde{\mathbf{E}}_p,\widetilde{\mathbf{E}}_p\big)+$$
$$+2(\widetilde{R}_{02}\widetilde{\widetilde{\mathbf{E}}}_p,\widetilde{\mathbf{E}}_p)+2(\widehat{R}_{01}\widetilde{\mathbf{W}},\widetilde{\mathbf{E}}_p)+2(\widehat{R}_{02}\cdot\widetilde{\widetilde{\mathbf{W}}},\widetilde{\mathbf{E}}_p)=0. \qquad (2.13)$$

Заметим, что при выводе тождеств (2.11) — (2.13) мы пользовались следующими очевидными соотношениями:

$$(2\widetilde{\mathbf{\Lambda}},P\cdot\tau\mathbf{\Lambda})=\tau(\mathbf{\Lambda},P\cdot\mathbf{\Lambda})+\Delta(\alpha-\delta)(\tau\mathbf{\Lambda},P\cdot\tau\mathbf{\Lambda}),$$
$$(2\widetilde{\mathbf{\Lambda}},P\cdot\eta\mathbf{\Lambda})=\eta(\mathbf{\Lambda},P\cdot\mathbf{\Lambda})-(P'\cdot\widetilde{\mathbf{\Lambda}},\widetilde{\mathbf{\Lambda}}),$$
$$(2\widetilde{\mathbf{\Lambda}},P\cdot\xi\mathbf{\Lambda})=\zeta(\mathbf{\Lambda},P\cdot\mathbf{\Lambda})-h(\zeta\mathbf{\Lambda},P\cdot\zeta\mathbf{\Lambda}),\quad P'=\frac{d}{d\theta}P$$

(матрица P эрмитова!).

В дальнейшем будем полагать, что $\mathbf{U}_j^k(\theta)=0$, $F_j^k=0$, если $j\geqslant j_1$ ($\xi_1=j_1\cdot h$), $k=0,1,\ldots$. Проинтегрируем тождества (2.10) — (2.12) по θ от $\theta=\theta_b$ до $\theta=\theta_{s0}$ и просуммируем тождества (2.10) — (2.13) по j от j_0 до j_1 ($\xi_0=j_0h$), $j_0<j_1$. В итоге получим (значения величин $\xi_{0,1}$ будем считать фиксированными: $-\infty<\xi_0<\xi_1<\infty$)

$$\tau\Bigg\{h\sum_{j=j_0}^{j_1}\Bigg(e^{-\xi}\cdot\Bigg\{\int_{\theta_b}^{\theta_{s0}}\Big\{\frac{\nu_1}{\beta^2}\cdot((\widehat{A}_0+\widehat{B}_0\cdot M_0)\,\mathbf{\Lambda},\mathbf{\Lambda})+\nu_2(\mathbf{W},\mathbf{W})+(A_p\mathbf{V}_p,\mathbf{V}_p)\Big\}d\theta+$$
$$+(\mathbf{E}_p,\mathbf{E}_p)\Bigg\}\Bigg)\Bigg\}+\Delta\cdot(\alpha-\delta)\cdot h\sum_{j=j_0}^{j_i}\Bigg\{e^{-\xi}\cdot\Bigg\{\int_{\theta_b}^{\theta_{s0}}\Big[\frac{\nu_1}{\beta^2}\cdot((\widehat{A}_0+\widehat{B}_0M_0)\,\tau\mathbf{\Lambda},\tau\mathbf{\Lambda})+$$
$$+\nu_2\cdot(\tau\mathbf{W},\tau\mathbf{W})+(A_p\tau\mathbf{V}_p,\tau\mathbf{V}_p)\Big]d\theta+(\tau\mathbf{E}_p,\tau\mathbf{E}_p)\Bigg\}\Bigg\}+h\cdot\sum_{j=j_0}^{j_1}\{\{-\nu_1(\widehat{B}_0\widetilde{\mathbf{\Lambda}},\widetilde{\mathbf{\Lambda}})-$$
$$-\nu_2\cdot M_0\cdot(\widetilde{\mathbf{W}},\widetilde{\mathbf{W}})+(B_p\widetilde{\mathbf{V}}_p,\widetilde{\mathbf{V}}_p)\}\Big|_{\theta=\theta_b}^{\theta=\theta_{s0}}+\{\big((\widetilde{R}_{01}+\widetilde{R}_{01}^*+2q_1\cdot\varkappa\cdot M_1\cdot I_2)\big)\widetilde{E}_p,\widetilde{E}_p\big)+$$
$$+2(\widetilde{R}_{02}\widetilde{\widetilde{E}}_p,\widetilde{E}_p)+2(\widehat{R}_{01}\cdot\widetilde{\mathbf{W}},\widetilde{\mathbf{E}}_p)+2(\widehat{R}_{02}\cdot\widetilde{\widetilde{\mathbf{W}}},\widetilde{\mathbf{E}}_p)\}\Big|_{\theta=\theta_{s0}}\}+e^{-\varkappa h}M_1\times$$
$$\times\big((\widetilde{\mathbf{E}}_p)_{j_0}^k,(\widetilde{\mathbf{E}}_p)_{j_0}^k\big)\Big|_{\theta=\theta_{s0}}+e^{-\varkappa h}\cdot h^2\cdot\sum_{j=j_0}^{j_1}\Bigg\{\int_{\theta_b}^{\theta_{s0}}\Big\{\frac{\nu_1}{\beta^2}([M_1\cdot(\widehat{A}_0+\widehat{B}_0M_0)+C_0\cdot\beta]\,\zeta\mathbf{\Lambda},\zeta\mathbf{\Lambda})+$$
$$+\nu_2\cdot M_1(\zeta\mathbf{W},\zeta\mathbf{W})+(C_p\zeta\mathbf{V}_p,\zeta\mathbf{V}_p)\Big\}d\theta+M_1\cdot(\zeta\mathbf{E}_p,\zeta\mathbf{E}_p)\Bigg\}+$$

$$
+h\cdot\sum_{j=j_0}^{j_1}\int\limits_{\theta_b}^{\theta_{s0}}\Big\{\nu_1\cdot\Big(\Big[\frac{1}{\beta}\big(\widehat{G}_0+\widehat{G}_1+\widehat{G}_0^*+\widehat{G}_1^*\big)+\frac{2\varkappa}{\beta^2}\cdot q_1\{M_1\cdot(\widehat{A}_0+\widehat{B}_0M_0)+\beta\cdot\widehat{C}_0\}+
$$

$$
+\widehat{B}_0'\Big]\cdot\widetilde{\mathbf{\Lambda}},\ \widetilde{\mathbf{\Lambda}}\Big)+2\cdot\frac{\nu_1}{\beta}(\widehat{G}_2\widetilde{\widetilde{\mathbf{X}}},\ \widetilde{\mathbf{\Lambda}})+2\nu_1\frac{e^{-\xi}}{\beta}\cdot(\widehat{\mathbf{S}},\ \widetilde{\mathbf{\Lambda}})+M_1\cdot\nu_2\cdot(2q_1\cdot\varkappa-1)(\widetilde{\mathbf{W}},\ \widetilde{\mathbf{W}})+
$$

$$
+2\nu_2\cdot(\widehat{Q}_0\widetilde{\widetilde{\mathbf{X}}},\ \widetilde{\mathbf{W}})+2\nu_2\cdot(\widehat{Q}_{01}\cdot\widetilde{\mathbf{X}},\ \widetilde{\mathbf{W}})+2\nu_2\cdot(\widehat{Q}_1\widetilde{\mathbf{\Lambda}},\ \widetilde{\mathbf{W}})+2\nu_2\cdot e^{-\xi}\cdot(\widehat{\mathbf{S}}_1,\ \widetilde{\mathbf{W}})+
$$

$$
+2\cdot\alpha\cdot\Delta\cdot\nu_2\big(I_4\cdot\big(e^{-\xi}\tau-M_1\cdot e^{-\varkappa h}\zeta-M_0\eta\big)\tau\mathbf{W},\ \widetilde{\mathbf{W}}\big)+2\alpha\cdot\Delta\cdot M_1q_1\cdot\varkappa\cdot\nu_2\times
$$

$$
\times(\tau\widetilde{\mathbf{W}},\ \widetilde{\mathbf{W}})+2(Q_p\widetilde{\mathbf{V}}_p,\ \widetilde{\mathbf{V}}_p)+2q_1\cdot\varkappa\,(C_p\widetilde{\mathbf{V}}_p,\ \widetilde{\mathbf{V}}_p)+2(\widehat{Q}_p\cdot\widetilde{\widetilde{\mathbf{V}}}_p,\ \widetilde{\mathbf{V}}_p)+
$$

$$
\widetilde{\mathbf{V}}_p)+2(\widehat{\widehat{Q}}_p\cdot\widetilde{\widetilde{\widetilde{\mathbf{V}}}}_p,\ \widetilde{\mathbf{V}}_p)-\big(B_p'\widetilde{\mathbf{V}}_p,\ \widetilde{\mathbf{V}}_p\big)\Big\}\,d\theta+
$$

$$
+e^{-\varkappa h}\int\limits_{\theta_b}^{\theta_{s0}}\Big\{\nu_1\frac{1}{\beta^2}\big([M_1(\widehat{A}_0+\widehat{B}_0\cdot M_0)+\widehat{C}_0\beta]\cdot\widetilde{\mathbf{\Lambda}}_{j_0}^k(\theta),\ \widetilde{\mathbf{\Lambda}}_{j_0}^k(\theta)\big)+
$$

$$
+\nu_2\cdot M_1\cdot(\widetilde{\mathbf{W}}_{j_0}^k(\theta),\ \widetilde{\mathbf{W}}_{j_0}^k(\theta))+\big(C_p\cdot(\widetilde{\mathbf{V}}_p)_{j_0}^k(\theta),\ (\widetilde{\mathbf{V}}_p)_{j_0}^k(\theta)\big)\Big\}\,d\theta=0, \qquad (2.14)
$$

где ν_1, ν_2 — пока произвольные положительные числа.

Далее нам понадобятся следующие представления (см. [1]):

$$
\widehat{A}_0=\widehat{T}_0^*\cdot\begin{pmatrix}\widehat{H} & 0\\ 0 & \widehat{H}\end{pmatrix}\cdot\widehat{T}_0,\quad \widehat{B}_0=\widehat{T}_0^*\cdot\begin{pmatrix}0 & -\widehat{H}\\ -\widehat{H} & 0\end{pmatrix}\cdot\widehat{T}_0,
$$

$$
\widehat{C}_0=\widehat{T}_0^*\cdot\begin{pmatrix}-\widehat{H} & 0\\ 0 & \widehat{H}\end{pmatrix}\cdot\widehat{T}_0, \qquad (2.15)
$$

где

$$
\widehat{H}=\begin{pmatrix}K-M & -L-iN\\ -L+iN & K+M\end{pmatrix}=\widehat{H}^*,
$$

$$
\widehat{T}_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}I_2 & 0 & -I_2\\ 0 & -I_2 & 0\\ 0 & -I_2 & 0\\ I_2 & 0 & I_2\end{pmatrix}.
$$

Используя представление (2.15), легко получаем

$$
\widehat{A}_0+\widehat{B}_0\cdot M_0=\widehat{T}_0^*\cdot\begin{pmatrix}\widehat{H} & -M_0\widehat{H}\\ -M_0\widehat{H} & \widehat{H}\end{pmatrix}\cdot\widehat{T}>0,
$$

если $\widehat{H}>0$,

$$
M_1\cdot(\widehat{A}_0+\widehat{B}_0\cdot M_0)+\widehat{C}_0\cdot\beta=\widehat{T}_0^*\cdot\begin{pmatrix}[M_1-\beta]\cdot\widehat{H} & -M_0\cdot M_1\cdot\widehat{H}\\ -M_0M_1\widehat{H} & [M_1+\beta]\cdot\widehat{H}\end{pmatrix}\cdot\widehat{T}_0>0,
$$

если $\widehat{H}>0$, $M_1(\theta)>1$, $\theta_b<\theta<\theta_{s0}$. Наконец, в качестве матрицы $\widehat{H}=\widehat{H}(\theta)$ будем рассматривать матрицу

$$
\widehat{H}=H_{s0}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\theta-\theta_b}{\theta_{s0}-\theta_b}\right)+H_b\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\theta-\theta_b}{\theta_{s0}-\theta_b}\right),
$$

где $\widehat{H}_{s0}=\widehat{H}_{s0}^*>0$, $\widehat{H}_b=\widehat{H}_b^*>0$ — некоторые постоянные матрицы, подлежащие дальнейшему определению.

§ 3. ПОЛУЧЕНИЕ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.1)—(1.4)

Прежде, чем перейти к получению априорной оценки, заметим, что граничное условие (1.6′) можно переписать (с учетом соотношения $l_2\zeta u_3 - l_2\zeta u_3 = 0$) так:

$$A_1 \cdot \widetilde{\mathbf{D}}_1 + B_1 \cdot \widetilde{\mathbf{D}}_2 + C_1 \cdot \widetilde{\mathbf{D}}_3 = d_1 \cdot \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{V}}}} + d_2 \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{V}}} + d_3 \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_p + + d_4 \cdot \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}}_p + e^{-\xi} \cdot \widetilde{\mathbf{S}}, \ \theta = \theta_{s0}. \tag{3.1}$$

Здесь

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -M_0 \cdot d & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{M_0 \cdot m}{\beta^2} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{S}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \widehat{q}_1 \cdot \tau \widetilde{u}_2,$$

d_i, $i = \overline{1,\ 4}$,— постоянные матрицы, элементы которых определяются через числа $\widehat{\mu}$, $\widehat{\rho}$, $\widehat{d}$, $M_0(\theta_{s0})$, $M_1(\theta_{s0})$ (см. формулу (1.6′)).

Рассмотрим теперь квадратичную форму $-(\widehat{B}_0 \widetilde{\mathbf{\Lambda}}, \widetilde{\mathbf{\Lambda}})$ при $\theta = \theta_{s0}$. Эту форму перепишем так:

$$-(\widehat{B}_0 \widetilde{\mathbf{\Lambda}}, \widetilde{\mathbf{\Lambda}})|_{\theta=\theta_{s0}} = -e^{2\varkappa\xi} \cdot (\widehat{B}_0 \widetilde{\mathbf{D}}, \widetilde{\mathbf{D}})|_{\theta=\theta_{s0}} =$$

$$= e^{2\varkappa\xi} \cdot \{([\widehat{H}_{s0} \cdot \sigma + \sigma^* \cdot \widehat{H}_{s0}] \cdot \widetilde{\mathbf{Z}}^{\mathrm{II}}, \widetilde{\mathbf{Z}}^{\mathrm{II}}) + 2 \cdot (\widehat{H}_{s0} \widetilde{\mathbf{Z}}^{\mathrm{II}},$$

$$F_1 \cdot \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{V}}}} + F_2 \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{V}}} + F_3 \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_p + F_4 \cdot \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}}_p + F_5 \cdot e^{-\xi} \cdot \widetilde{\mathbf{S}}_2)\}|_{=\theta_{s0}}.$$

Здесь
$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{\mathrm{I}} \\ \mathbf{Z}^{\mathrm{II}} \end{pmatrix} = \widehat{T}_0 \cdot \mathbf{D},$$

$$\widetilde{\mathbf{Z}}^{\mathrm{I}} = \sigma \cdot \widetilde{\mathbf{Z}}^{\mathrm{II}} + F_1 \cdot \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{V}}}} + F_2 \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{V}}} + F_3 \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_p + F_4 \cdot \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}}_p + F_5 \cdot e^{-\xi} \cdot \widetilde{\mathbf{S}}_2, \ \theta = \theta_{s0},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 \cdot (A_1 - C_1)^{-1} \cdot B_1 & -(A_1 - C_1)^{-1} \cdot (A_1 + C_1) \\ I_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_i = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cdot (A_1 - C_1)^{-1} \cdot d_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, 5}, \ d_5 = I_2.$$

В силу теоремы Ляпунова ([4]) матричное уравнение

$$\sigma^* \cdot \widehat{H}_{s0} + \widehat{H}_{s0} \cdot \sigma = \nu_3 \cdot I_4$$

имеет единственное решение $\widehat{H}_{s0} = \widehat{H}^*_{s0} > 0$, если собственные числа матрицы σ лежат строго в правой полуплоскости: $\operatorname{Re}\lambda_i(\sigma) > 0$, $i = \overline{1,\ 4}$. Условия

$$\operatorname{Re}\lambda_i(\sigma) > 0, \ i = \overline{1,\ 4},$$

выполнены, если

$$m > 0, \ \lambda < 0. \tag{3.2}$$

В [2] показано, что для политропного газа условия (3.2) выполнены. Отметим также, что, поскольку матрица σ вещественная, матрица $\widehat{H}_{s0}$ вещественная и симметричная. Как следует из граничных условий (2.9), выражение $(B_p \cdot \widetilde{\mathbf{U}}_p, \widetilde{\mathbf{U}}_p)|_{\theta=\theta_{s0}}$ является квадратичной формой от $\widetilde{u}_3$,

$\tau\tilde{u}_3$, $\tau^2\tilde{u}_3$, $\tau\zeta\tilde{u}_3$, $\zeta^2\tilde{u}_3$. Пусть выполнены условия (3.2). Тогда можно подобрать такие достаточно большие положительные числа $\varkappa$, ν_1, ν_2, ν_3, что выполнено неравенство

$$\sum_{j=j_0}^{j_1}\{-\nu_1\cdot(\widehat{B}_0\widetilde{\Lambda},\ \widetilde{\Lambda})-\nu_2\cdot M_0\cdot(\widetilde{\mathbf{W}},\ \widetilde{\mathbf{W}})+(B_p\cdot\widetilde{\mathbf{V}}_p,\ \widetilde{\mathbf{V}}_p)+\big((\widetilde{R}_{01}+\widetilde{R}_{01}^*+$$
$$+2q_1\cdot\varkappa\cdot M_1\cdot I_2)\widetilde{\mathbf{E}}_p,\ \widetilde{\mathbf{E}}_p\big)+2(\widetilde{R}_{02}\cdot\widetilde{\widetilde{\mathbf{E}}}_p,\ \widetilde{\mathbf{E}}_p)+2(\widehat{R}_{01}\widetilde{\mathbf{W}},\ \widetilde{\mathbf{E}}_p)+$$
$$+2(\widehat{R}_{02}\widetilde{\widetilde{\mathbf{W}}},\ \widetilde{\mathbf{E}}_p)\}\,|_{\theta=\theta_{s0}}\geqslant 0. \qquad (3.3)$$

Рассмотрим теперь квадратичную форму

$$\{\nu_1\cdot(\widetilde{B}_0\widetilde{\Lambda},\ \widetilde{\Lambda})+\nu_2\cdot M_0\cdot(\widetilde{\mathbf{W}},\ \widetilde{\mathbf{W}})-(B_p\cdot\widetilde{\mathbf{V}}_p,\ \widetilde{\mathbf{V}}_p)\}$$

при $\theta=\theta_b$. Заметим, что из условия (1.7) следуют также условия

$$\widehat{l_1 l_2}u_3=l_1\zeta u_3=0,\ \theta=\theta_b. \qquad (3.4)$$

Учитывая (3.4), непосредственными выкладками можно показать, что $(\widehat{B}_0\widetilde{\Lambda},\ \widetilde{\Lambda})=0$ при $\theta=\theta_b$, если матрица $\widehat{H}_b$ диагональная.

Наконец, рассматривая последние слагаемые в формуле (2.14), можно сделать вывод, что путем подбора достаточно больших положительных чисел ν_1, ν_2, $\varkappa$ квадратичная форма, стоящая под знаком интеграла, может быть сделана больше нуля.

Учитывая изложенное, мы можем сформулировать следующее утверждение: *пусть выполнены условия*

$$m>0,\ \lambda<0;\ M_1(\theta)>1,\ \theta_b\leqslant\theta\leqslant\theta_{s0};\ \alpha\geqslant\delta,$$

тогда существуют такие достаточно большие положительные числа ν_1, ν_2, ν_3, $\varkappa$, *что имеет место следующая априорная оценка*:

$$J^k=h\cdot\sum_{j=j_0}^{j_1}\Big\{\int_{\theta_b}^{\theta_{s0}}\{|\tau^2\mathbf{U}|^2+|\tau\eta\mathbf{U}|^2+|\tau\zeta\mathbf{U}|^2+|\eta^2\mathbf{U}|^2+|\eta\zeta\mathbf{U}|^2+|\zeta^2\mathbf{U}|^2+$$
$$+|\tau\mathbf{U}|^2+|\eta\mathbf{U}|^2+|\zeta\mathbf{U}|^2\}\,d\theta+(\zeta F)^2+(F)^2\Big\}\leqslant\mathrm{const}\cdot J^0, \qquad (3.5)$$

где $|\tau^2\mathbf{U}|^2=(\tau^2\mathbf{U},\ \tau^2\mathbf{U})$ и т. д. Наличие оценки (3.4) позволяет говорить о корректности дифференциально-разностной модели (1.1)—(1.4).

З а м е ч а н и е. Рассмотрим вопрос о реализации модели (1.1)—(1.4). Для этого перепишем систему (1.1) и краевые условия (1.2), (1.3) в следующем виде:

$$B\cdot\frac{d}{d\theta}\{\mathbf{U}_{j_1-i}^{k+1}(\theta)\}=\Big\{-\frac{1}{\alpha\cdot\Delta}\cdot I_3\cdot e^{-(j_1-i)\cdot h}-\frac{1}{h}\cdot C+Q\Big\}\mathbf{U}_{j_1-i}^{k+1}(\theta)+$$
$$+\frac{1}{h}\cdot C\cdot\mathbf{U}_{j_1-i+1}^{k+1}(\theta)+\frac{1}{\alpha}\cdot\mathscr{P}_{j_1-i}^{k}=0,\quad \theta_b<\theta<\theta_{s0};$$
$$(u_1)_{j_1-i}^{k+1}(\theta)=-\widehat{d}\cdot(u_3)_{j_1-i}^{k+1}(\theta)-M_1\cdot F_{j_1-i}^{k+1},$$
$$(u_2)_{j_1-i}^{k+1}(\theta)=\frac{\widehat{\rho}(1+h)-1}{h}\cdot M_0\cdot F_{j_1-i}^{k+1}-\frac{\delta}{\alpha}\cdot(u_2)_{j_1-i}^{k}(\theta)+$$
$$+M_0\cdot\frac{\delta}{\alpha\cdot h}\cdot(\widehat{\rho}(1+h)-1)\cdot F_{j_1-i}^{k}-\frac{\delta}{\alpha\cdot h}\cdot M_0\cdot(\widehat{\rho}-1)\cdot F_{j_1-i+1}^{k},$$
$$F_{j_1-i}^{k+1}=\frac{e^{-h\cdot(j_1-i)}-M_1\delta\cdot\Delta\cdot(h+1)/h}{e^{-h\cdot(j_1-i)}+M_1\cdot\alpha\cdot\Delta(h+1)/h}\cdot F_{j_1-i}^{k}+\frac{\Delta}{e^{-h\cdot(j_1-i)}+M_1\cdot\alpha\cdot\Delta(h+1)/h}\times$$
$$\times\Big\{\frac{M_1\cdot\alpha}{h}\cdot F_{j_1-i+1}^{k+1}+\frac{M_1\cdot\delta}{h}\cdot F_{j_1-i+1}^{k}+\widehat{\mu}\cdot\delta\cdot(u_3)_{j_1-i}^{k}(\theta)+\widehat{\mu}\cdot\alpha\cdot(u_3)_{j_1-i}^{k+1}(\theta)\Big\},$$

$\theta=\theta_{s0}$;

$$(u_1)_{j_1-i}^{k}(\theta)=0,\ \theta=\theta_b;$$
$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ j_1-j_0.$$

Здесь

$$\mathscr{P}^h_{j_1-i} = \left\{\frac{1}{\Delta}\cdot I_3\cdot e^{-(j_1-i)\cdot h} - B\cdot\delta\cdot\frac{d}{d\theta} + C\cdot\delta\cdot\frac{\Psi-1}{h} + Q\cdot\delta\right\} \mathbf{U}^h_{j_1-i}(\theta).$$

Таким образом, легко видеть, что рассматриваемая дифференциально-разностная модель при каждом $i = 1, 2, \ldots, j_1 - j_0$, $k = 0, 1, \ldots$, представляет собой краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Блохин А. М.** Корректность линейной смешанной задачи о сверхзвуковом обтекании клина // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. XXIX, № 4.— С. 48—58.
2. **Блохин А. М.** Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986.— 240 с.
3. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1979.— 392 с.
4. **Ланкастер П.** Теория матриц.— М.: Наука, 1978.— 280 с.

В. Л. ВАСКЕВИЧ

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЗОННОЙ СТРУКТУРЫ КРИСТАЛЛА С МНОГОАТОМНОЙ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ЯЧЕЙКОЙ

В последнее время резко возрос интерес к задаче расчета энергетической зонной структуры объемных кристаллов. Представляется, что в первую очередь это объясняется недавним открытием явления высокотемпературной сверхпроводимости. Во множестве статей, опубликованных в физических журналах, излагаются результаты численных экспериментов по зонной структуре конкретных кристаллов [1—3]. Систематическое изложение конкретных методов расчета зонной структуры имеется в ряде монографий [4—7], опубликованы работы и обзорного характера [8].

Следует отметить, что используемые математические модели так или иначе упрощают общую квантово-механическую постановку задачи. Часто в качестве такого упрощения выбирается так называемое одноэлектронное приближение. Этот подход использован и в настоящей статье, которая, по существу, представляет собой расширенный и модифицированный вариант работы [9].

Электронные состояния объемных высокотемпературных сверхпроводников в настоящее время рассчитываются линеаризованными методами [10, 11]. При этом используется ряд неконтролируемых приближений, что не позволяет правильно описать макроскопические характеристики и экспериментальные рентгеновские и фотоэлектронные спектры [12]. Нельзя рассчитывать при этом и на корректное описание геометрии поверхности Ферми, а тем более на точное вычисление поверхностных интегралов, характеризующих проводимость. Эти соображения стимулируют желание иметь эффективный неэмпирический метод расчета электронной зонной структуры объемных кристаллов с многоатомной элементарной ячейкой, включающей в себя атомы с d- и f-электронами. Именно такими объектами являются высокотемпературные сверхпроводники. Цель настоящей статьи состоит в изложении математических основ такого метода. Его эффективность обеспечивается, в частности, возможностью проконтролировать в рамках модели одноэлектронного приближения точность производимых аппроксимаций.