В. Л. ВАСКЕВИЧ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА

Во многих вариационных задачах математической физики и вычислительной математики возникает потребность в вычислении той или иной квадратичной формы интегрального вида. Например, если в функциональном гильбертовом пространстве H скалярное произведение двух элементов $(f, g)_H$ задается интегралом по области в R^n, то квадрат нормы произвольного элемента h из H представляет собой квадратичную форму $(h, h)_H$ интегрального вида.

Алгоритмы минимизации такой формы подразумевают возможность вычислять ее значения на произвольном элементе из H. Найти точно соответствующий интеграл в общем случае не представляется возможным хотя бы в силу бесконечномерности H. Таким образом, приходится довольствоваться лишь приближенными формулами. Естественно, что конструкции таких форм должны по возможности более полно учитывать априорную информацию об элементах H (гладкость функций, наличие и характер особенностей, порядок роста производных и т. п.). В настоящей работе сделана попытка построить такие формулы для двух конкретных реализаций изложенной общей схемы.

Первые пять параграфов относятся к теории квадратурных формул с равномерным распределением узлов на отрезке числовой прямой. Как известно [1, 2], квадрат нормы функционала погрешности любой такой формулы на гильбертовом пространстве $L_2^m[0, 1]$ представим в виде интегральной квадратичной формы. Соответствующая подынтегральная функция, называемая экстремальной, является кусочно-полиномиальной с точками склейки в узлах квадратурной формулы. Множество всех экстремальных функций выпукло в $L_2^m[0, 1]$. Задача, таким образом, состоит в конструировании формулы для вычисления нормы произвольного элемента из этого множества. Результаты соответствующих исследований изложены в § 1—4. Итоговая формула отличается от уже известных [1, 2] более простой зависимостью от таких параметров вычислительного процесса, как h — шаг сетки интегрирования и m — порядок гладкости функций из пространства $L_2^m[0, 1]$. Знание такой зависимости важно для организации вычисления интегралов от функций из $L_2^m[0, 1]$ с гарантированной точностью.

В § 6—8 конструируются формулы для приближенного вычисления интеграла Дирихле на пространстве гармонических в ограниченной области Ω из R^n функций, исследованы их аппроксимационные свойства. Особенность предложенной конструкции состоит в том, что в качестве узловой выбирается ровно одна точка внутри Ω. Точность же интегрирования обеспечивается использованием в приближающей сумме достаточно большого числа производных подынтегральной функции, нормированных по определенному правилу. В этом смысле формулу можно рассматривать как аналог известной одномерной формулы Эйлера — Маклорена. Приближения такого способа вычисления интеграла Дирихле от гармонической функции к решению краевых задач для уравнения Лапласа имеются в [3, 4].

§ 1. МНОЖЕСТВА ФУНКЦИОНАЛОВ ПОГРЕШНОСТИ

Под квадратурной формулой будем понимать далее приближенное равенство следующего вида:

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx - T_N(\varphi) + \sum_{\alpha=1}^{N} a[\alpha]\, h\left[\Delta^\alpha \varphi_{N-\alpha} + (-1)^\alpha \Delta^\alpha \varphi_0\right] \cong 0. \qquad (1.1)$$

Здесь $\varphi(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[0, 1]$; N, h — натуральный и вещественный параметры, связанные с условием $Nh=1$; величины $T_N(\varphi)$ и $\Delta^\alpha\varphi_k$ определяются равенствами:

$$T_N(\varphi) = 0.5h[\varphi(0)+\varphi(1)] + \sum_{\alpha=1}^{N-1} h\varphi(\alpha h),$$
$$\Delta^\alpha\varphi_k = \sum_{j=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha-j}\binom{\alpha}{j}\varphi(kh+jh). \tag{1.2}$$

Выражение в левой части (1.1) удобно рассматривать как результат действия на выбранный пробный элемент $\varphi(x)$ пространства C $[0, 1]$ некоторого линейного функционала $l_N(x)$. Этот функционал, как нетрудно убедиться, представим в виде следующей линейной комбинации Θ-функции Хевисайда и δ-функций Дирака:

$$l_N(x) = \Theta(0.5 - |x-0.5|) - \sum_{\alpha=0}^{N} c_\alpha h\delta(x-\alpha h). \tag{1.3}$$

Коэффициенты c_α здесь однозначно определяются по коэффициентам $a[\alpha]$ в представлении (1.1). Для некоторых специальных комбинаций δ-функций Дирака используем следующие обозначения:

$$T_{N,*}(x) = 0.5h[\delta(x)+\delta(x-1)] + h\sum_{\alpha=1}^{N-1}\delta(x-\alpha h),$$
$$\Delta^\alpha(x) = \sum_{j=0}^{\alpha}(-1)^{\alpha-j}\binom{\alpha}{j}\delta(x-jh). \tag{1.4}$$

Тогда функционал погрешности $l_N(x)$ можно записать в виде

$$l_N(x) = \Theta(0.5-|x-0.5|) - T_{N,*}(x) +$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{N} a[\alpha]h\left[\Delta^\alpha(x-1+\alpha h) + (-1)^\alpha\Delta^\alpha(x-\alpha h)\right]. \tag{1.5}$$

Левую часть равенства (1.1) принято обозначать как $(l_N(x), \varphi(x))$.

Теоретически интересен вопрос о поведении погрешности приближенного интегрирования при $N\to\infty$. Тем самым приходится иметь дело с последовательностью квадратурных формул вида (1.1). Такую последовательность принято называть квадратурным процессом. Ясно, что квадратурный процесс полностью определен значениями коэффициентов $a[\alpha]$ при $1\leqslant\alpha<\infty$. Сопоставим каждой такой последовательности некоторую функцию $F_*(w)$, определяемую равенством

$$F_*(w) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k}(-1)^k(1-w^2)^k\{2a[2k+m]T_{2k+m}(w) -$$
$$- a[2k+m-1]U_{m+2(k-1)}(w)\}. \tag{1.6}$$

Здесь и далее $T_n(w)$ и $U_n(w)$ обозначают полиномы Чебышева первого и второго рода, а m — четное число, алгебраический порядок точности $l_N(x)$. Далее будем рассматривать только такие квадратурные процессы, для которых

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1-w^2)^{1/2}}|F_*(w)|^2dw < +\infty.$$

Пусть M — натуральный параметр, тогда через $a_M[\alpha]$ обозначим функцию дискретного переменного α, получающуюся из $a[\alpha]$ занулением всех элементов, начиная с $(M+1)$-го. В этом случае действие функционала погрешности $l_N(x)$ на непрерывную функцию $\varphi(x)$ можно представить следующей формулой:

$$(l_N(x), \varphi(x)) = \int_0^x \varphi(x)\,dx - (T_{N,*}(x), \varphi(x)) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_N[\alpha]\, h\left[\Delta^\alpha \varphi_{N-\alpha} + (-1)^\alpha \Delta^\alpha \varphi_0\right]. \tag{1.7}$$

Ясно, что при любых коэффициентах $a[\alpha]$ и любом N $l_N(x)$ представляет собой линейный непрерывный функционал на пространстве S быстро убывающих функций. Таким образом, теорию квадратурных формул вида (1.1) можно рассматривать как теорию специального подмножества в пространстве S' обобщенных функций медленного роста. В частности, на функционалах типа $l_N(x)$ определены такие операции, как сложение, умножение на число, замена переменных, преобразование Фурье, обобщенное дифференцирование и т. п. Отметим, что любой функционал погрешности $l_N(x)$ вида (1.7) удовлетворяет равенству

$$l_N(x) = l_N(1-x). \tag{1.8}$$

Это означает, что коэффициенты c_α в разложении (1.3) симметричны относительно середины единичного отрезка.

Существенной характеристикой функционала погрешности $l_N(x)$ является его алгебраический порядок точности m. По определению m функционал $l_N(x)$ принимает нулевое значение на всех полиномах степени не выше $(m-1)$, причем натуральное число m — наименьшее с этим свойством. Обозначать функционал погрешности алгебраического порядка точности m будем символом $l_N^m(x)$. Таким образом,

$$\left(l_N^m(x), x^\alpha\right) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1.9}$$

и $\left(l_N^m(x), x^m\right) \neq 0$. Пользуясь равенством (1.8), несложно убедиться, что функционал $l_N^m(x)$ вида (1.7) может иметь только четный, не меньший двух алгебраический порядок точности.

Ясно, что равенства (1.9) выполнены не при любых коэффициентах $a[\alpha]$ в разложении (1.7). Известно [S], что эти равенства справедливы тогда и только тогда, когда при любом α от 1 до $(m-2)$ коэффициент $a[\alpha]$ представим следующим интегралом:

$$a[\alpha] = \frac{(-1)^\alpha}{(\alpha+1)!} \int_0^1 t^{(\alpha+1)}\,dt, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, \quad m-2. \tag{1.10}$$

Здесь $t^{(\alpha)} = t(t-1)\ldots(t-\alpha+1)$ — ньютоновская степень аргумента t. В частности, из равенств (1.10) следует, что среди функционалов погрешности вида (1.7) существуют формулы алгебраического порядка точности m тогда и только тогда, когда m не превосходит N. Таким образом, будем предполагать в дальнейшем, что $2 \leqslant m \leqslant N$.

Функционал погрешности (1.7), у которого все коэффициенты до $(m-2)$-го включительно определены равенствами (1.10), а все остальные — нули, обозначим как $l_N^{m,G}(x)$. Ему соответствует классическая квадратурная формула Грегори. В случаях, когда N нечетно, $m = N - 1$, а также когда N четно, $m = N$ функционалу погрешности $l_N^{m,G}(x)$ соответствует известная квадратурная формула Ньютона — Котеса.

Обозначим совокупность всех функционалов погрешности вида (1.7) и алгебраического порядка точности не ниже m как $EF_N^{(m)}$, а объединение таких множеств по всем $N \geqslant m$ — как $EF^{(m)}$. Ясно, что $EF_N^{(m)}$ и $EF^{(m)}$ выпуклы в пространстве S' обобщенных функций медленного роста. Вместо множества $EF_N^{(m)}$ иногда удобно будет рассматривать соответствующее ему множество $\widetilde{EF}_N^{(m)}$, состоящее из линейных комбинаций следующего вида:

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_N[\alpha]\left[\Delta^{\alpha}(x+\alpha h-1)+(-1)^{\alpha}\Delta^{\alpha}(x-\alpha h)\right]. \tag{1.11}$$

Коэффициенты $a_N[\alpha]$ определяются при $1 \leqslant \alpha \leqslant m-2$ интегралами (1.10).

Предметом дальнейшего исследования будут как характеристики множеств $EF_N^{(m)}$ и $EF^{(m)}$ в целом, так и свойства их конкретных элементов. Наиболее интересен, по-видимому, круг вопросов, связанных со сравнительным анализом аппроксимирующих свойств различных функционалов погрешности из $EF_N^{(m)}$. Критерий такого сравнения можно получить, применив следующую стандартную схему рассуждений.

Пусть имеется банахово пространство B, вложенное вполне непрерывно в $C[0, 1]$. На множестве $EF_N^{(m)}$ определим норму, полагая

$$\| l_N^m | B^* \| = \sup_{\|\varphi|B\|=1} \left|\left(l_N^m(x), \varphi(x)\right)\right|. \tag{1.12}$$

Здесь $\|\varphi|B\|$ обозначает норму функции φ в пространстве B. Тогда из двух функционалов погрешности, принадлежащих $EF_N^{(m)}$, лучшим можно считать тот, норма (1.12) которого меньше.

Компактность вложения B в $C[0, 1]$ обеспечивает существование таких последовательностей $\{l_N^m\}$ функционалов погрешности из $EF^{(m)}$, нормы которых в B^* стремятся к нулю при $N \to \infty$. В этом случае качеством приближения рассматриваемого вычислительного процесса можно управлять просто увеличивая значение N. На это нельзя рассчитывать в случае, если вместо нормы (1.12) рассматривается норма функционала погрешности $l_N^m(x)$ в пространстве $C^*[0, 1]$. Несложно убедиться, что имеет место равенство

$$\| l_N^m | C^*[0, 1] \| = \int_0^1 dx + h \sum_{\alpha=0}^{N} |c_\alpha|, \tag{1.13}$$

где C_α — коэффициент в представлении (1.3) функционала $l_N^m(x)$ В частности, из (1.13) следует, что при сколь угодно больших N норма l_N^m в $C^*[0, 1]$ остается больше единицы. Таким образом, самое большее, на что можно в этом случае надеяться, это стабилизация нормы при $N \to \infty$ к стационарному ненулевому уровню.

Структура пространства B и норма (1.12) в B^*, конечно, зависят от конкретной задачи, в процессе решения которой требуется приближенно вычислять интеграл. Естественно поэтому, что в теории квадратурных формул свобода в выборе пространства B не может быть учтена в полной мере. Наиболее разумным при этом представляется строить теорию для какой-либо серии или шкалы функциональных пространств. В качестве таковой будем использовать далее последовательность пространств $L_2^m[0, 1]$ при m натуральном.

Напомним, как устроено пространство $L_2^m[0, 1]$. Пусть $W_2^m[0, 1]$ представляет собой пространство функций φ, суммируемых с квадратом на единичном отрезке, обобщенная производная $D^m\varphi(x)$ которых принадлежит $L_2[0, 1]$. Введем в $W_2^m[0, 1]$ полунорму $p(\varphi)$, положив

$$p(\varphi) = \left(\int_0^1 |D^m\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{1.14}$$

Функции, на которых $p(\varphi)$ обращается в нуль, образуют в $W_2^m[0, 1]$ подпространство P_{m-1} полиномов степени не выше $(m-1)$. Фактор-пространство $W_2^m[0, 1[$ по $\mathbf{P}_{m-1}$ обозначается через $L_2^m[0, 1]$, а функционал (1.14) определяет в нем норму. Как известно, таким образом нормированное пространство гильбертово. Скалярное произведение любых двух его элементов φ, ψ определяется равенством

$$(\varphi, \psi)_m = \int_0^1 D^m \varphi(x) \overline{D^m \psi(x)}\, dx. \tag{1.15}$$

Линейный функционал, определенный на $W_2^m[0, 1]$, допускает сужение на $L_2^m[0, 1]$ в том и только том случае, когда его значение на любом полиноме степени $\leqslant (m-1)$ равно нулю. Таким образом, любой функционал погрешности $l_N^m(x)$ из $EF_N^{(m)}$ на $L_2^m[0, 1]$ определен. Вполне непрерывность оператора вложения $L_2^m[0, 1]$ в $C[0, 1]$ при $m \geqslant 1$ также имеет место [1].

Отметим, что совершенно аналогично определяется пространство $L_p^m[0, 1]$, где $1 \leqslant p < \infty$.

Свойства множества $EF_N^{(m)}$ в целом будем исследовать следующим образом. Установим взаимно однозначное соответствие между функционалами погрешности из $EF_N^{(m)}$ и элементами некоторого другого множества $CF_N^{(m)}$, состоящего из функций дискретного переменного, которые мы будем называть «последовательностями коэффициентов Фурье». Выбранной норме в $EF_N^{(m)}$ будет соответствовать определенная норма в $CF_N^{(m)}$. Таким образом, вместо сравнения двух функционалов погрешности из $EF_N^{(m)}$ можно будет сравнивать их образы в $CF_N^{(m)}$.

§ 2. МНОЖЕСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ПОГРЕШНОСТИ

Пусть функционал погрешности $l_N^m(x)$ принадлежит множеству $EF_N^{(m)}$. Определим для целого β величину $L_N^m[\beta]$, положив

$$L_N^m[\beta] = \left(l_N^m(x), e^{-i2\pi\beta x}\right). \tag{2.1}$$

Все функции от β, имеющие вид (2.1), образуют выпуклое множество, которое будем обозначать как $CF_N^{(m)}$.

Функционал погрешности $l_N^m(x)$, как уже отмечалось, принадлежит пространству обобщенных функций S' и тем самым определено его преобразование Фурье. Сужение этого преобразования на множество целых точек числовой оси совпадает с функцией $L_N^m[\beta]$. Будем в связи с этим называть $L_N^m[\beta]$ последовательностью коэффициентов Фурье функционала погрешности $l_N^m(x)$. Отметим простейшие структурные свойства множества $CF_N^{(m)}$.

При любом $l_N^m(x)$ из $EF_N^{(m)}$ функция $L_N^m[\beta]$ вещественна и четна, т. е.

$$L_N^m[\beta] = \left(l_N^m(x), \cos 2\pi\beta x\right), \quad L_N^m[-\beta] = L_N^m[\beta]. \tag{2.2}$$

Это замечание легко следует из равенства (1.8).

Далее, согласно определению (2.1) и представлению (1.3) получаем

$$L_N^m[\beta] = \delta[\beta] - \sum_{\alpha=0}^{N} c[\alpha]\, h e^{-i2\pi\beta\alpha h} = \delta[\beta] - \sum_{\alpha=0}^{N} c[\alpha]\, h \cos 2\pi\beta\alpha h. \tag{2.3}$$

Функция $\delta[\beta]$ здесь принимает единичное значение при $\beta = 0$, а во всех остальных точках она нулевая. Нетрудно проверить также, что $\delta[\beta]$

представляет собой последовательность коэффициентов Фурье индикатора единичного отрезка числовой оси.

Разность $L_N^m[\beta]-\delta[\beta]$, как следует из (2.3), представляет собой периодическую функцию с периодом N, принимающую значение -1 во всех кратных N целых точках, т. е.

$$L_N^m[\beta+N]=L_N^m[\beta],\quad L_N^m[\beta N]=-1 \quad \text{при} \quad \beta\neq 0. \tag{2.4}$$

Из (2.3) следует также, что для всех β таких, что $0<\beta<N$, имеет место равенство

$$L_N^m[N-\beta]=L_N^m[\beta]. \tag{2.5}$$

Пусть $\widetilde{X}_N^{(0)}$ обозначает пространство вещественных четных функций $\widetilde{L}_N^m[\beta]$, имеющих период N, принимающих нулевое значение в точках, кратных N и симметричных на периоде относительно середины. В силу определения любая функция $\widetilde{L}^m[\beta]$ из $\widetilde{X}_N^{(0)}$ однозначно определена своими значениями при положительных β, не превосходящих целой части $N/2$.

Несложно вычислить последовательность $T_N[\beta]$ коэффициентов Фурье функционала $T_{N,*}(x)$, определенного равенством (1.5). Функция $T_N[\beta]$ равна нулю во всех целых точках, за исключением кратных N, в которых $T_N[\beta]$ равна единице.

Как следует из (1.7), (2.2)—(2.5), для любой функции $L_N^m[\beta]$ из $CF_N^{(m)}$ существует элемент $\widetilde{L}_N^m[\beta]$ из $\widetilde{X}_N^{(0)}$ такой, что

$$L_N^m[\beta]=\delta[\beta]-T_N[\beta]+\widetilde{L}_N^m[\beta]. \tag{2.6}$$

Множество функций $\widetilde{L}_N^m[\beta]$, соответствующих в силу (2.6) всевозможным функционалам погрешности $l_N^m(x)$, из $EF_N^{(m)}$ образуют в $\widetilde{X}_N^{(0)}$ собственное подмножество $\widetilde{CF}_N^{(m)}$.

Лемма 2.1. *Произвольный элемент пространства $\widetilde{CF}_N^{(m)}$ представляет собой четный полином от переменной $w=\cos\pi\beta h$ степени не выше $2N$, обращающийся в нуль при $w=1$.*

Доказательство состоит в проверке следующей серии формул. Согласно определению (1.2) оператора Δ^α имеем

$$\Delta^\alpha\left(e^{\mp i2\pi\beta x}\right)_k=(-1)^\alpha e^{\mp i2\pi\beta kh}\left(1-e^{\mp i2\pi\beta h}\right)^\alpha. \tag{2.7}$$

Далее, из (1.7) и (2.6) получаем

$$\widetilde{L}_N^m[\beta]=\sum_{\alpha=1}^{\infty}a_N[\alpha]\,h\left[\Delta^\alpha\left(e^{-i2\pi\beta x}\right)_{N-\alpha}+(-1)^\alpha\Delta^\alpha\left(e^{-i2\pi\beta x}\right)_0\right].$$

Подставив сюда равенство (2.7), получим после несложных упрощений

$$\widetilde{L}_N^m[\beta]=\sum_{\alpha=1}^{m-2}a[\alpha]\,h2^{\alpha+1}(\sin\pi\beta h)^\alpha\cos\pi(\beta h-0{,}5)\,\alpha+2^{m-2}(-1)^{\frac{m-2}{2}}\times$$
$$\times(\sin\pi\beta h)^{m-2}\sum_{\alpha=0}^{\infty}a_N[\alpha+m-1]\,\mathrm{Re}\left[e^{-i(m-2)\pi\beta h}\left(1-e^{-i2\pi\beta h}\right)^{\alpha+1}\right]. \tag{2.8}$$

Пусть $w=\cos\pi\beta h$, тогда $\sin\pi\beta h=(1-w^2)^{1/2}$, а $\cos\pi(\beta h-0{,}5)\alpha$ при четном α равен $(-1)^{\frac{\alpha}{2}}T_\alpha(w)$, а при нечетном $\alpha-(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-w^2)^{\frac{1}{2}}U_{\alpha-1}(w)$. Здесь через $T_n(w)$ и $U_n(w)$ обозначаются, как обычно, полиномы Чебышева первого и второго рода. Разбивая каждую из сумм в правой части (2.8) на две: по четным и по нечетным α, получим после подстановки в нее выражений тригонометрических функций через полиномы Чебышева:

$$\widetilde{L}_N^m[\beta] = h\left[Q^s_{2(m-2)}(w) + 2^m(-1)^{\frac{m}{2}}(1-w^2)^{\frac{m}{2}}Q^f_{2N-m}(w)\right]. \tag{2.9}$$

Полиномы $Q_{2(m-2)}(w)$ и $Q^f_{2N-m}(w)$ степеней $2(m-2)$ и $2N-m$ соответственно определяются следующими равенствами:

$$\begin{gathered} Q^s_{2(m-2)}(w) = \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} 2^{2k}(w^2-1)^k\{2a[2k]T_{2k}(w) - a[2k-1]U_{2(k-1)}(w)\}, \\ Q^f_{2N-m}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k}(w^2-1)^k\{2a_N[2k+m]T_{2k+m}(w) - \\ - a_N[2k+m-1]U_{2(k-1)+m}(w)\}. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Так как по условию m четно, то и полиномы $Q^s_{2(m-2)}(w)$ и $Q^f_{2N-m}(w)$ также четные. При этом, очевидно, $Q^s_{2(m-2)}(1)=0$. Таким образом, в правой части равенства (2.9) стоит полином нужного вида. Лемма доказана.

Отметим, что равенство (2.9) можно рассматривать как критерий принадлежности произвольной функции $\widetilde{L}_N^m[\beta]$ из $\widetilde{X}_N^{(0)}$ подмножеству $\widetilde{CF}_N^{(m)}$.

Рассмотрим теперь некоторый специальный функционал погрешности $l_m^{(0)}(x)$, который будем называть локальным. Положим для любой непрерывной функции $\varphi(x)$:

$$\left(l_m^{(0)}(x), \varphi(x)\right) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx - \varphi(0) - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_N[k]\,\Delta^{k+1}\varphi_0. \tag{2.11}$$

Коэффициенты $a_N[k]$ здесь те же, что и в представлении (1.7) функционала погрешности $l_N^m(x)$. Локальный функционал погрешности $l_m^{(0)}(x)$ имеет алгебраический порядок точности m. Это легко доказать, проинтегрировав интерполяционный полином Ньютона для функции $\varphi(x)$, построенный на множестве узлов $\alpha = 0, 1, \ldots, m-1$.

Заменой $x = hy$, $h > 0$, получим из $l_m^{(0)}(y)$ функционал $l_m^{(0)}(x/h)$. Для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ имеет место равенство

$$\left(l_m^{(0)}(x/h), \varphi(x)\right) = \int_0^h \varphi(x)\,dx - h\varphi(0) - \sum_{k=0}^{\infty} h(-1)^k a_N[k]\,\Delta^{k+1}\varphi_0. \tag{2.12}$$

Последовательность коэффициентов Фурье функционала погрешности $l_m^{(0)}(x/h)$ обозначим как $\lambda_0^{m,h}[\beta]$, т. е. положим

$$\lambda_0^{m,h}[\beta] = \left(\bar{l}_m^{(0)}(x/h),\ e^{-i2\pi\beta x}\right). \tag{2.13}$$

Справедлива следующая

Лемма 2.2. *Имеет место алгебраическое тождество*

$$i2\sin\pi\beta h\widetilde{L}_N^m[\beta] = e^{i\pi\beta h}\lambda_0^{m,h}[\beta] - e^{-i\pi\beta h}\overline{\lambda_0^{m,h}}[\beta]. \tag{2.14}$$

Доказательство состоит в технической проверке двух равенств.

Первое из равенств получается из (2.12) и (2.7) и имеет следующий вид:

$$\lambda_0^{m,h}[\beta] = \int_0^h e^{-i2\pi\beta x}dx - h + \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_N[\alpha]\,h\left(1 - e^{-i2\pi\beta h}\right)^{\alpha+1}.$$

Отсюда после несложных выкладок получается еще одно соотношение:

$$e^{i\pi\beta h}\lambda_0^{m,h}[\beta]-e^{-i\pi\beta h}\overline{\lambda_0^{m,h}}[\beta]=i2\sin\pi\beta h\sum_{\alpha=1}^{\infty}a_N[\alpha]\,h2^{\alpha+1}(\sin\pi\beta h)^{\alpha}\times$$
$$\times\cos\pi(\beta h-0.5)\,\alpha.$$

Сравнивая правую часть последнего равенства с (2.8), получаем (2.14). Лемма доказана.

Таким образом, функция $\widetilde{L}_N^m[\beta]$ принадлежит множеству $\widetilde{CF}_N^{(m)}$ тогда и только тогда, когда существует локальный функционал погрешности $l_m^{(0)}(x/h)$ вида (2.12), коэффициенты Фурье $\lambda_0^{m,h}[\beta]$ которого связаны с $\widetilde{L}_N^m[\beta]$ равенством $(\beta\neq kN)$:

$$\widetilde{L}_N^m[\beta]=\frac{1}{\sin\pi\beta h}\operatorname{Im}\left[e^{i\pi\beta h}\lambda_0^{m,h}[\beta]\right].\tag{2.15}$$

В частности, из (2.15) можно получить полезное представление полинома $Q^s_{2(m-2)}(w)$ из разложения (2.9). Ясно, что этот полином полностью определяется заданием параметра m. Приведем его значения при $m=4$ и $m=6$:

$$Q_4^s(w)=\frac{2}{3}(1-w^2)^2;\quad Q_8^s(w)=(w^2-1)^3 2^2\left(\frac{6}{5}w^2-\frac{19}{45}\right).$$

Если в (2.11) $N=m$, т. е. все $a[\alpha]$ с номерами $\alpha\geqslant m-1$ равны нулю, то равенство (2.15) принимает следующий вид $(\beta\neq kN)$:

$$Q^s_{2(m-2)}(\cos\pi\beta h)=\frac{N}{\sin\pi\beta h}\operatorname{Im}\left[e^{i\pi\beta h}\lambda_G^{m,h}[\beta]\right].\tag{2.16}$$

В этом случае функция $\lambda_G^{mh}[\beta]$ представляет собой последовательность коэффициентов Фурье локального функционала погрешности, определяемого равенством

$$\left(l_m^G(x/h),\,\varphi(x)\right)=\int_0^h\varphi(x)\,dx-\sum_{\alpha=0}^{m-1}hc_m[\alpha]\,\varphi(\alpha h).\tag{2.17}$$

Функционал $l_m^G(x/h)$ имеет алгебраический порядок точности m, а его коэффициенты $c_m[\alpha]$ допускают следующее интегральное представление:

$$c_m[\alpha]=(-1)^{\alpha}\int_{-1}^{0}\frac{t(t+1)\dots(t+m-1)}{(t+\alpha)\,\alpha!\,(m-\alpha-1)!}\,dt.\tag{2.18}$$

Эти равенства несложно получить, проинтегрировав по отрезку $[-1,\,0]$ интерполяционную формулу Лагранжа степени $(m-1)$, построенную для функции $\varphi(x)$ на множестве узлов $\alpha=0,\,-1,\,\dots,\,-m+1$.

Используя равенство (2.16), докажем в следующем параграфе, что полином $Q^s_{2(m-2)}(w)$ делится на $(1-w^2)^{m/2}$ без остатка.

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ЛОКАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ

Как известно, преобразование Фурье функционала погрешности $l_m^G(x/h)$, определенного ранее формулой (2.17),— это функция вещественной переменной ξ, задаваемая равенством

$$\lambda_0^{m,h}(\xi)=\left(l_m^G(x/h),\,e^{-i2\pi\xi x}\right).\tag{3.1}$$

Ее сужение на множество целых точек β представляет собой последовательность $\lambda_0^{m,h}[\beta]$ коэффициентов Фурье функционала $l_m^G(x/h)$.

Будем рассматривать далее функцию $\lambda_0^m(\xi)$, связанную с $\lambda_0^{m,h}(\xi)$ соотношением

$$\lambda_0^m(\xi) = \lambda_0^{m,1}(\xi) = 1/h\lambda_0^{m,h}(\xi/h) = \left(l_m^G(y),\ e^{-i2\pi\xi hy}\right). \tag{3.2}$$

Получим аналитическое представление $\lambda_0^m(\xi)$, позволяющее, в частности, разлагать ее в ряды специального вида. Вывод соответствующей формулы начнем с доказательства следующей леммы.

Лемма 3.1. *При любом вещественном ξ имеет место равенство*

$$\lambda_0^m(\xi) = \int_{-1}^{0} \frac{t(t+1)\ldots(t+m-1)}{(m-1)!}\,\psi_t^m(2\pi\xi)\,dt, \tag{3.3}$$

где функция $\psi_t^m(x)$ представляет собой следующий интеграл:

$$\psi_t^m(x) = -i\int_0^x e^{it(x-y)}\left(1-e^{-iy}\right)^{m-1}dy. \tag{3.4}$$

Доказательство. Согласно определению функционала $l_m^G(x)$ имеем

$$\lambda_0^m(\xi) = \frac{1}{2\pi\xi}\left(1-e^{-i2\pi\xi}\right) - \sum_{\alpha=0}^{m-1} c_m[\alpha]\,e^{-i2\pi\xi\alpha}.$$

Получим отсюда, воспользовавшись представлением (2.18) коэффициентов $c_m[\alpha]$:

$$\lambda_0^m(\xi) = \frac{1}{2\pi\xi}\left(1-e^{-i2\pi\xi}\right) - \int_{-1}^{0}\frac{t(t+1)\ldots(t+m-1)}{(m-1)!}\,\varphi_t^m(2\pi\xi)\,dt. \tag{3.5}$$

Подынтегральная функция $\varphi_t^m(x)$ в (3.5) определяется равенством

$$\varphi_t^m(x) = \sum_{\alpha=0}^{m-1}(-1)^\alpha\binom{m-1}{\alpha}\frac{1}{t+\alpha}e^{-ix\alpha}. \tag{3.6}$$

Продифференцировав обе части (3.6) по x, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dx}\varphi_t^m(x) = (-i)\left(1-e^{-ix}\right)^{m-1} + it\varphi_t^m(x).$$

Решив его при фиксированном значении t, найдем, что

$$\varphi_t^m(x) = e^{itx}\varphi_t^m(0) - i\int_0^x e^{it(x-y)}\left(1-e^{-iy}\right)^{m-1}dy. \tag{3.7}$$

Второе слагаемое по условию обозначается как $\psi_t^m(x)$. Учитывая это и подставляя (3.7) в (3.5), получим

$$\lambda_0^m(\xi) - \int_{-1}^{0}\frac{t(t+1)\ldots(t+m-1)}{(m-1)!}\,\psi_t^m(2\pi\xi)\,dt = \frac{1}{2\pi\xi}\left(1-e^{-i2\pi\xi}\right) -$$
$$- \int_{-1}^{0}\frac{t(t+1)\ldots(t+m-1)}{(m-1)!}\,\varphi_t^m(0)\,e^{it2\pi\xi}dt. \tag{3.8}$$

Согласно определению функции $\varphi_t^m(\cdot)$, имеем теперь

$$\int_{-1}^{0} \frac{t(t+1)\ldots(t+m-1)}{(m-1)!} e^{it2\pi\xi} \varphi_t^m(0)\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{0} e^{it2\pi\xi} \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{t(t+1)\ldots(t+m-1)}{(t+\alpha)\,\alpha!\,(m-1-\alpha)!} (-1)^\alpha \right] dt.$$

Сумма в квадратных скобках под интегралом представляет собой тождественную единицу. Чтобы доказать это, достаточно проинтегрировать по отрезку $[-1, 0]$ интерполяционную формулу Лагранжа степени $(m-1)$, построенную для тождественной постоянной на множестве узлов $\alpha = 0, -1, \ldots, -m+1$. Учитывая последнее замечание, несложно убедиться, что правая часть равенства (3.8) равна нулю. Лемма доказана.

Сделаем в интеграле (3.4) замену $\tau = (e^{-iy} - 1)/(e^{-ix} - 1)$ и введем обозначение $u(x) = 1 - e^{-ix}$, тогда получим

$$\psi_t^m(x) = -e^{itx}\left(1 - e^{-ix}\right)^m \int_0^1 \frac{\tau^{m-1}}{(1-\tau u)^{1-t}}\,d\tau. \tag{3.9}$$

Пользуясь этой формулой, найдем представление функции $\psi_t^m(x)$, асимптотически точное при $m \to \infty$. Имеет место

Лемма 3.2. *Для любых вещественных значений t, x выполняется равенство*

$$\frac{1}{(m-1)!}\psi_t^m(x) = \left(1 - e^{-ix}\right)^{m-1} \left[\sum_{j=0}^{n} a_j^m(x) \frac{(t-1)\ldots(t-j)}{j!} + \frac{1}{(m+n)!} A_n^m(x, t) \right], \tag{3.10}$$

где

$$z(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{1 - e^{-ix}}, \quad a_j^m(x) = \frac{j!}{(m+j)!}\left(1 - e^{ix}\right)^{j+1}. \tag{3.11}$$

Функция $A_n^m(x, t)$ при этом равномерно ограничена, когда x изменяется на отрезке $[-\pi, \pi]$, а t — на отрезке $[-1, 0]$ и удовлетворяет следующему неравенству:

$$\sup_{\substack{-\pi \leqslant x \leqslant \pi \\ -1 \leqslant t \leqslant 0}} \left| A_n^m(x, t) \right| \leqslant c_n/(m+n+1). \tag{3.12}$$

Постоянная c_n в (3.12) не зависит от m.

Доказательство. Равенство (3.9) запишем в следующем виде:

$$\psi_t^m(x) = -e^{itx}\left(1 - e^{-ix}\right)^{m+t-1} \int_0^1 \frac{\tau^m}{(z(x) - \tau)^{1-t}}\,d\tau. \tag{3.13}$$

Интегрируя по частям выражение справа $(n+1)$ раз, получаем

$$\int_0^1 \frac{\tau^{m-1}}{(z-\tau)^{1-t}}\,d\tau = \frac{1}{m} \frac{1}{(z-1)^{1-t}} \cdot \left[1 + \frac{t-1}{m+1} \frac{1}{1-z} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \frac{m!}{(m+n)!} \frac{(t-1)\ldots(t-n+1)}{(1-z)^n} + \frac{m!}{(m+n)!} (1 - z(x)) A_n^m(x, t) \right], \tag{3.14}$$

где

$$A_n^m(x, t) = -(z-1)^{-t}(t-1)\ldots(t-n-1) \int_0^1 \frac{\tau^{m+n}}{(z(x)-\tau)^{n+2-t}}\,d\tau. \tag{3.15}$$

Подставляя равенство (3.14) в (3.13), получаем (3.10).

Проверим теперь, что при x из $[-\pi, \pi]$ и t из $[-1, 0]$ имеет место оценка (3.12). Если $|x| \leqslant (2/3)\pi$, то при всех τ из $[0, 1]$ справедливо неравенство

$$|z(x)-\tau|^2 = \left(\frac{1}{2}-\tau\right)^2 + \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} \geqslant \frac{1}{16}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Поэтому

$$|A_n^m(x, t)| \leqslant (n+2)!\,2^{2n+5}\left|\sin\frac{x}{2}\right|^{n+2}\Big/(m+n+1).$$

Таким образом, функция $A_n^m(x, t)$ ограничена при $|x| \leqslant (2/3)\pi$ и $-1 \leqslant t \leqslant 0$ величиной вида $c_n/(m+n+1)$.

Пусть теперь x принадлежит отрезку $[(2/3)\pi, \pi]$ или $[-\pi, -(2/3)\pi]$. Тогда подынтегральное выражение в равенстве (3.15) имеет при $x = \pm\pi$ особенности, что несколько усложняет вывод необходимой оценки. Соответствующие рассуждения начнем с того, что перепишем равенство (3.15) в более удобном виде. Именно, положим

$$J_n^m(x, t) = \int_0^1 \frac{\tau^{m+n}}{(z(x)-\tau)^{n-t}}\,d\tau.$$

Тогда равенство (3.15) эквивалентно следующему:

$$A_n^m(x, t) = -(z-1)^{-t}(t-1)\ldots(t-n-1)\,J_{n+2}^{m-2}(x, t).$$

Таким образом, мажоранту функции $A_n^m(x, t)$ несложно получить, если известна оценка сверху интеграла $J_{n+2}^{m-2}(x, t)$. Предположим сначала, что $m=2$ и докажем индукцией по n, что при всех вещественных x и t имеет место неравенство

$$|J_n^0(x, t)| \leqslant |z(x)|^{t+1}2^r\,|x|. \tag{3.16}$$

В самом деле, при $n=0$ функцию $J_0^0(x, t)$ несложно представить в явном виде:

$$J_0^0(x, t) = z^{t+1}\left(1-e^{-ix(t+1)}\right)/(t+1),$$

и тем самым (3.16) выполнено. Шаг индукции несложно произвести, воспользовавшись следующим рекуррентным соотношением:

$$J_{n+1}^0(x, t) = z(x)\,J_n^0(x, t-1) - J_n^0(x, t).$$

Пусть теперь $m>0$, тогда индукцией по индексу n докажем справедливость следующего неравенства:

$$|J_n^m(x, t)| \leqslant |z(x)|^{t+1}c_n/(m+1). \tag{3.17}$$

Пусть $n=0$, тогда

$$J_0^m(x, t) = z^m J_0^0(x, t) - \sum_{\alpha=0}^{m-1} z^{m-1-\alpha}\int_0^1 \tau^\alpha (z-\tau)^{1+t}\,d\tau. \tag{3.18}$$

Согласно условию $1+t \geqslant 0$, поэтому

$$\left|\int_0^1 (z-\tau)^{1+t}\tau^\alpha\,d\tau\right| \leqslant |z|^{1+t}/(\alpha+1). \tag{3.19}$$

Подставляя неравенства (3.16) и (3.19) в (3.18), получаем

$$|J_0^m(x, t)| \leqslant q^{m+t+1}|x| + \sum_{\alpha=0}^{m-1} q^{m-\alpha+t}/(\alpha+1). \tag{3.20}$$

Здесь $q=|z(x)|$ не превосходит $\sqrt{2}/2$, т. е. меньше единицы. Поэтому существует постоянная c_0, не зависящая от m, x, и такая, что отношение $q^{t+1}c_0/(m+1)$ мажорирует правую часть в неравенстве (3.20). Тем самым оценка (3.17) доказана для $n=0$.

Индуктивный шаг легко провести, если использовать следующие рекуррентные соотношения:

$$J_{n+1}^m(x, t)=z^m J_n^0(x,\ t-1)-\sum_{\alpha=0}^{m-1} z^{m-1-\alpha} J_n^\alpha(x, t).$$

При этом постоянная c_{n+1} выбирается так, чтобы выполнялось условие

$$c_{n+1} \geqslant \sup_m \left\{(m+1) q^m \pi+c_n(m+1) \sum_{\alpha=1}^m q^{m-\alpha}/\alpha\right\}.$$

Так как $q<1$, то c_{n+1} конечно. Таким образом, неравенство (3.17) доказано полностью. Пользуясь им, несложно убедиться в справедливости оценки (3.12). Лемма доказана.

Остановимся более подробно на вопросе о сходимости при $n \rightarrow \infty$ последовательности частичных сумм в правой части равенства (3.10). Предел, если он существует, называется рядом Ньютона.

Будем считать сначала, что $|x| \leqslant \pi/3$. Как известно [6], ряд Ньютона сходится равномерно на любом ограниченном множестве в полуплоскости $\operatorname{Re} t \geqslant \lambda+\varepsilon$. Здесь ε положительно, а λ — числовой параметр, называемый абсциссой сходимости рассматриваемого ряда. В случае, когда $|x| \leqslant \pi/3$, модуль комплексного числа $(1-e^{ix})$ не превосходит единицы, и поэтому имеют место следующие неравенства:

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k^m(x)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} 1/k^m \leqslant \int_{n-1}^{\infty}(1/x)^m dx=1/(m-1) \cdot 1/(n-1)^{m-1}. \tag{3.21}$$

При этом абсциссу сходимости λ ряда Ньютона можно определить из соотношения [6]:

$$\lambda=\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left|\sum\limits_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k^m(x)\right|}{\ln n}.$$

Подставив сюда неравенство (3.21), получим, что $\lambda \leqslant -m+1<-1$. Поэтому при всех $t>-m+1$ и x, по модулю не превосходящих $\pi/3$, в равенстве (3.10) можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$.

Подставляя соответствующий разложению (3.10) ряд Ньютона в равенство (3.3) и проводя некоторые несложные выкладки, приходим к следующему представлению функции $\lambda_0^m(\xi)$:

$$\lambda_0^m(\xi)=\left(1-e^{-i 2 \pi \xi}\right)^{m-1} \sum_{\alpha=0}^{\infty} b_m[\alpha]\left(1-e^{i 2 \pi \xi}\right)^{\alpha+1}, \tag{3.22}$$

где $|\xi| \leqslant 1/6$;

$$b_m[\alpha]=\frac{1}{(m+\alpha)!} \int_{m-2}^{m-1} t^{(m+\alpha)} dt. \tag{3.23}$$

Остаток ряда в правой части (3.22) можно оценить, используя лемму 3.2.

В случае, если $\pi/3<|x| \leqslant \pi$, ряд, соответствующий (3.10), расходится при $-1 \leqslant t \leqslant 0$. Поэтому получить для этих x разложение, аналогичное (3.22), нельзя. Имеется, однако, другой вариант разложения.

Чтобы вывести соответствующую формулу, используем равенство (3.9). Интеграл в его правой части есть не что иное, как известная гипергеометрическая функция $F(1-t,\ m,\ m+1,\ u)$, и поэтому равенство (3.9) эквивалентно следующему:

$$\psi_t^m(x) = -e^{itx}\left(1-e^{-ix}\right)^m F(1-t,\ m,\ m+1,\ u(x)), \tag{3.24}$$

Как известно, гипергеометрическая функция разлагается в степенной ряд по последнему аргументу, если только тот по модулю меньше единицы. Имея это в виду, воспользуемся следующим известным соотношением:

$$\begin{aligned} F(1-t,\ m,\ m+1,\ u) = u^{t-1}m!/(t(t+1)\ldots(t+m-1))\times \\ \times F(1-t,\ 1-t-m,\ 1-t,\ (u-1)/u) - u^{-m-t}\times \\ \times(1-1/u)^t m/tF(m+t,\ t,\ 1+t,\ (u-1)/u). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Так как $|(u-1)/u| = 1/(2|\sin x/2|) < 1$ при рассматриваемых значениях x, то оба слагаемых в правой части (3.25) разлагаются в сходящиеся степенные ряды по последнему аргументу. Соответствующую формулу здесь приводить не будем, а в дальнейшем используем разложение (3.10), пригодное для всех значений x из отрезка $[0, \pi]$.

В частности, подставляя (3.10) в (3.3), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left[e^{i\pi\xi}\lambda_0^m(\xi)\right] = 2^{m-1}(-1)^{(m-2)/2}(\sin\pi\xi)^{m-1}\times \\ \times\left\{\sum_{\alpha=0}^{n} b_m[\alpha]\operatorname{Re}\left[e^{-i\pi\xi(m-2)}\left(1-e^{i2\pi\xi}\right)^{\alpha+1}\right] + \Lambda_n^m(\xi)/(m+n+1)!\right\}, \end{aligned} \tag{3.26}$$

где

$$\Lambda_n^m(\xi) = \int_{-1}^{0} t\cdot\ \ldots\ \cdot(t+m-1)\operatorname{Re}\left[e^{i\pi\xi}A_n^m(2\pi\xi,\ t)\right]dt.$$

Остаточный член в правой части (3.26) несложно оценить сверху, если использовать оценку (3.12).

Полученное представление (3.26) позволяет доказать, что справедлива следующая

Лемма 3.3. *Полином $Q^s_{2(m-2)}(w)$, определенный равенством* (2.9), *делится без остатка на $(1-w^2)^{m/2}$, т. е.*

$$Q^s_{2(m-2)}(w) = 2^m(-1)^{m/2}(1-w^2)^{m/2}P_{m-4}(w). \tag{3.27}$$

При этом полином $P_{m-4}(w)$ степени $(m-4)$ четный и допускает следующее представление:

$$P_{m-4}(w) = \sum_{k=0}^{m/2-2} 2^{2k}(w^2-1)^k\{b_m[2k]U_{m-2k-4}(w) + 2b_m[2k+1]T_{m-2k-4}(w)\}\cdot \tag{3.28}$$

Последовательность чисел $b_m[\alpha]$ определена ранее равенством (3.23).

Доказательство. Пусть $w = \cos\pi\beta h$, тогда из равенств (2.16), (3.2) и (3.26) получаем

$$Q^s_{2(m-2)}(w) = 2^m(-1)^{m/2}(1-w^2)^{m/2}P_{m-4}(w), \tag{3.29}$$

где функция $P_{m-4}(w)$ задается при $|\beta| < N/6$ как сумма следующего ряда:

$$\begin{aligned} P_{m-4}(w) = 0.5\sum_{\alpha=0}^{\infty} b_m[\alpha]/\sin^2\pi\beta h\operatorname{Re}\left[e^{-i(m-2)\pi\beta h}\left(1-e^{i2\pi\beta h}\right)^{\alpha+1}\right] = \\ = -\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k}(w^2-1)^k\{b_m[2k]\cdot[T_{m-2}(w)U_{2k}(w) - U_{m-3}(w)T_{2k+1}(w)] - \\ - 2b_m[2k+1]\cdot[T_{m-2}(w)T_{2k+2}(w) + (1-w^2)U_{m-3}(w)U_{2k+1}(w)]\}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Разделив обе части равенства (3.29) на $(1-w^2)^{m/2}$, видим, что существует конечный предел частного при $w \to +1$. Как отмечалось в предыдущем параграфе, полином $Q^s_{2(m-2)}(w)$ четный, поэтому и частное от деления его на $(1-w^2)^{m/2}$ — также четная функция. Значит, она имеет конечный предел не только при $w \to 1$, но и при $w \to -1$. Таким образом, функция $P_{m-4}(w)$, определенная равенством (3.29), заведомо не имеет полюсов в точках $w = \pm 1$. Такое возможно лишь в случае, если $Q^s_{2(m-2)}(w)$ делится на $(1-w^2)^{m/2}$ без остатка. Но тогда $P_{m-4}(w)$, — очевидно, четный полином степени $(m-4)$.

Далее, разбивая сумму в (3.30) на две: по k от нуля до $(m-4)/2$ и по k от $(m-2)/2$ до бесконечности и пользуясь известными тождествами для полиномов Чебышева [7], получим

$$P_{m-4}(w) = Q_{m-4}(w) + (-1)^{m/2} 2^{m-2} (1-w^2)^{(m-2)/2} \sum_{\alpha=0}^{\infty} (w^2-1)^{\alpha} 2^{2\alpha} \times$$
$$\times \{ b_m [2\alpha + m - 2] U_{2\alpha}(w) - 2b_m [2\alpha + m - 1] T_{2\alpha+2}(w) \},$$

где

$$Q_{m-4}(w) = \sum_{k=0}^{(m-4)/2} 2^{2k} (w^2-1)^k \{ b_m[2k] U_{m-2k-4}(w) + 2b_m[2k+1] T_{m-2k-4}(w) \}.$$

Таким образом, частное от деления полинома $P_{m-4}(w) - Q_{m-4}(w)$ на $(1-w^2)^{(m-2)/2}$ представляет собой функцию, ограниченную в окрестности точек $w = \pm 1$. Это возможно лишь при условии, что $P_{m-4}(w)$ совпадает с $Q_{m-4}(w)$. Тем самым лемма доказана полностью.

В заключение отметим, что из оценки (3.12) следует неравенство

$$\sup_{|w| \leq 1} | P_{m-4}(w) - b_m[0] U_{m-4}(w) | \leq c_0/(m+1), \tag{3.31}$$

где постоянная c_0 не зависит от m. Пользуясь оценкой (3.31) и известным соотношением $U_{m-4}(0) = (-1)^{m/2}$, несложно получить следующие асимптотически точные при $m \to \infty$ равенства:

$$\begin{aligned} P_{m-4}(0) &= (-1)^{m/2} b_m[0] (1 + O(1/m)), \\ Q^s_{2(m-2)}(0) &= 2^m b_m[0] (1 + O(1/m)). \end{aligned} \tag{3.32}$$

§ 4. НОРМА ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ

Определим на паре вещественных функций $f[\beta]$ и $g[\beta]$ дискретного переменного следующую билинейную форму:

$$\langle f, g \rangle_m = \sum_{\beta \neq 0} f[\beta] g[\beta]/(2\pi\beta)^{2m} + \Big(\sum_{\beta \neq 0} f[\beta]/(2\pi\beta)^m \Big) \Big(\sum_{\beta \neq 0} g[\beta]/(2\pi\beta)^m \Big). \tag{4.1}$$

Напомним, что m — четное натуральное число. Значение $\langle f, f \rangle_m^{1/2}$ обозначим как $\|f\|_m$ и будем рассматривать только такие функции $f[\beta]$, для которых величина $\|f\|_m$ конечна. Таким свойством обладает, в частности, определенная в § 2 функция $T_N[\beta]$. При этом, очевидно, имеет место равенство

$$\| T_N \|_m^2 = h^{2m} \sum_{\beta \neq 0} 1/(2\pi\beta)^{2m} + h^{2m+1} \Big| \sum_{\beta \neq 0} 1/(2\pi\beta)^m \Big|^2. \tag{4.2}$$

Несложно убедиться, что функционал $\|\cdot\|_m$ выпуклый, однородный и неотрицательный. Его сужение на пространство $\widetilde{X}_N^{(0)}$ определяет норму.

Рассмотрим произвольный функционал погрешности $l_N^m(x)$ из $EF_N^{(m)}$. Ему соответствует некоторый элемент $\widetilde{l}_N^m(x)$ множества $\widetilde{EF}_N^{(m)}$, имеющий последовательность коэффициентов Фурье $\widetilde{L}_N^m[\beta]$. Норма $l_N^m(x)$ над пространством $L_2^m[0, 1]$ и норма $\|\widetilde{L}_N^m\|_m$ связаны между собой соотношением

$$\| l_N^m | L_2^m [0, 1]^* \|^2 = \| T_N \|_m^2 + \| \widetilde{L}_N^m \|_m^2 + 2 \langle T_N, \widetilde{L}_N^m \rangle_m. \tag{4.3}$$

Докажем это равенство. Согласно условию

$$l_N^m(x) = i(x) - T_N(x) + \widetilde{l}_N^m(x),$$

где $i(x)$ — индикатор отрезка $[0, 1]$ числовой прямой. Поэтому для $\beta \neq 0$ справедливо представление

$$L_N^m[\beta] = \widetilde{L}_N^m[\beta] + T_N[\beta]. \tag{4.4}$$

Здесь $L_N^m[\beta]$ — последовательность коэффициентов Фурье функционала $l_N^m(x)$. После подстановки равенства (4.4) в определение нормы $\|\cdot\|_m$ получим

$$\| L_N^m \|_m^2 = \| \widetilde{L}_N^m \|_m^2 + \| T_N \|_m^2 + 2 \langle T_N, \widetilde{L}_N^m \rangle_m.$$

Таким образом, для доказательства (4.3) достаточно убедиться в том, что

$$\| l_N^m | L_2^m [0, 1]^* \|^2 = \| L_N^m \|_m^2. \tag{4.5}$$

Это удобно сделать, используя понятие экстремальной функции $u_N^m(x)$ функционала $l_N^m(x)$.

Согласно теореме Рисса о представлении функционала в гильбертовом пространстве, найдется элемент $u_N^m(x)$ из $L_2^m[0, 1]$ такой, что для всех φ из этого же пространства имеет место равенство

$$\left(l_N^m(x), \varphi(x) \right) = \int_0^1 D^m \varphi(x) D^m u_N^m(x)\, dx. \tag{4.6}$$

При этом норма функционала $l_N^m(x)$ в сопряженном пространстве $L_2^m[0,1]^*$ совпадает с нормой экстремальной функции $u_N^m(x)$ в пространстве $L_2^m[0,1]$, т. е.

$$\| l_N^m | L_2^m [0, 1]^* \|^2 = \left(l_N^m(x), u_N^m(x) \right) = \int_0^1 | D^m u_N^m(x) |^2 dx.$$

Выбирая в (4.6) в качестве $\varphi(x)$ функции x^m, $\cos 2\pi\beta x$ и $\sin 2\pi\beta x$, получим разложения производной $D^m u_N^m(x)$ в ряд Фурье:

$$D^m u_N^m(x) = \frac{1}{m!} \left(l_N^m(x), x^m \right) + 2 \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{L_N^m[\beta]}{(2\pi\beta)^m} \cos 2\pi\beta x.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\| l_N^m | L_2^m [0, 1]^* \|^2 = \frac{|\left(l_N^m(x), x^m \right)|^2}{(m!)^2} + \sum_{\beta \neq 0} \frac{| L_N^m[\beta] |^2}{(2\pi\beta)^{2m}}. \tag{4.7}$$

Как известно, степенная функция x^m разбивается в сумму полинома Бернулли $B_m(x)$ с полиномом, имеющим степень не выше $(m-1)$:

$$x^m = B_m(x) + P_{m-1}(x).$$

Учитывая, что функционал погрешности $l_N^m(x)$ точен на полиноме $P_{m-1}(x)$, и пользуясь известным разложением полинома Бернулли в ряд Фурье на отрезке $[0, 1]$, получим

$$\frac{1}{m!} \left(l_N^m(x), x^m \right) = \frac{1}{m!} \left(l_N^m(x), B_m(x) \right) = (-1)^{\frac{m-2}{2}} \sum_{\beta \neq 0} \frac{L_N^m[\beta]}{(2\pi\beta)^m}.$$

Таким образом, в правой части равенства (4.7) стоит величина $\|L_N^m\|_m^2$. Тем самым равенство (4.5), а с ним и (4.3) доказаны.

Экстремальная функция произвольного функционала погрешности $l_N^m(x)$ из $EF_N^{(m)}$ определяется с точностью до полиномиального слагаемого степени $(m-1)$. Выбирая в равенстве (4.6) в качестве $\varphi(x)$ функции, финитные на интервале $[0, 1]$, и несколько раз интегрируя по частям правую часть (4.6), видим, что внутри отрезка $[0, 1]$ экстремальная функция является обобщенным решением следующего дифференциального уравнения:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{2m} u_N^m(x) = (-1)^m l_N^m(x). \tag{4.8}$$

Это — одномерное полигармоническое уравнение. Имея в виду, что функционал $l_N^m(x)$ равен 1 внутри любого интервала $(jh, (j+1)h)$, где $0 \leqslant j \leqslant N-1$, видим, что $u_N^m(x)$ — кусочно-полиномиальный элемент пространства $L_2^m[0, 1]$, т. е. $u_N^m(x)$ — сплайн. Таким образом, между множеством $EF_N^{(m)}$ и совокупностью сплайнов $u_N^m(x)$ существует взаимно однозначное соответствие, задаваемое уравнением (4.8).

Отметим важное следствие из представления (4.7). Оставив в правой части этого равенства лишь те слагаемые, которые соответствуют значениям β, кратным N, получим оценку снизу нормы произвольного функционала $l_N^m(x)$ из $EF_N^{(m)}$:

$$\| l_N^m \mid L_2^m[0, 1]^* \|^2 \geqslant h^{2m} \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{(2\pi\beta)^{2m}}. \tag{4.9}$$

Ряд в правой части этого неравенства представляет собой число Бернулли B_{2m}, деленное на $(2m)!$.

Займемся теперь исследованием второго и третьего слагаемых в правой части равенства (4.3). Пользуясь формулами (2.9) и (3.27), разложим функцию $\widetilde{L}_N[\beta]$ в произведение нескольких сомножителей:

$$\widetilde{L}_N^m[\beta] = h2^m(-1)^{\frac{m}{2}}(1-w^2)^{\frac{m}{2}} F_{2N-m}(w). \tag{4.10}$$

Здесь $w = \cos \pi\beta h$, а функция $F_{2N-m}(w)$ представляет собой четный полином от w степени $(2N-m)$:

$$F_{2N-m}(w) = P_{m-4}(w) + Q_{2N-m}^f(w). \tag{4.11}$$

Полиномы $P_{m-4}(w)$ и $Q_{2N-m}^f(w)$ определены соответственно равенствами (3.28) и (2.10). Имеет место следующая

Лемма 4.1. *Для любых $h > 0$ и натурального m, $m \leqslant N$, справедливо равенство*

$$\|\widetilde{L}_N^m\|_m^2 = h^{2m}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m F_{2N-m}(\cos t)\,dt\right]^2 + h^{2m+1}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2m} \times \right.$$
$$\left. \times\left(\frac{1}{2} + \cos 2Nt\right)|F_{2N-m}(\cos t)|^2\,dt - F_{2N-m}(1)\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m F_{2N-m}(\cos t)\,dt\right]. \tag{4.12}$$

Полином $F_{2N-m}(w)$ определен ранее соотношением (4.11).

Доказательство. Подставив равенство (4.10) в определение нормы $\|\cdot\|_m$, получим

$$\|\widetilde{L}_N^m\|_m^2 = h^{2m+2}\left|\sum_{\beta\neq 0}\left(\frac{\sin \pi\beta h}{\pi\beta h}\right)^m F_{2N-m}(\cos \pi\beta h)\right|^2 +$$
$$+ h^{2m+2}\sum_{\beta \neq 0}\left(\frac{\sin \pi\beta h}{\pi\beta h}\right)^{2m} |F_{2N-m}(\cos \pi\beta h)|^2. \tag{4.13}$$

Сумму в первом слагаемом преобразуем в интеграл. Используем для этого известную формулу Пуассона:

$$\sqrt{\alpha}\left\{\frac{1}{2}f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}f(n\alpha)\right\}=\sqrt{\gamma}\left\{\frac{1}{2}g(0)+\sum_{n=1}^{\infty}g(n\gamma)\right\}. \tag{4.14}$$

Здесь $\alpha>0$, $\alpha\gamma=2\pi$, а функции f, g связаны между собой соотношением

$$g(\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos\theta t\,dt. \tag{4.15}$$

Положим $f(t)=(\sin t/t)^m$, тогда соответствующая функция $g(\theta)$ равна нулю при $\theta\geqslant m$, [8]. Далее, интеграл

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m F_{2N-m}(\cos t)\cos\theta t\,dt \tag{4.16}$$

разбивается, очевидно, в линейную комбинацию интегралов вида

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m \cos\beta t\cos\theta t\,dt, \tag{4.17}$$

где $0\leqslant\beta\leqslant 2N-m$. Разложив произведение косинусов в сумму, видим, что при $\theta-\beta\geqslant m$ интеграл (4.17) обращается в нуль. Но тогда для всех $\theta\geqslant 2N$ равны нулю и интегралы (4.16). Имея это в виду, применим к функции $f(t)=(\sin t/t)^m F_{2N-m}(\cos t)$ формулу Пуассона (4.14) с $\alpha=\pi h$ и $\gamma=2N$. Тогда получим равенство

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m F_{2N-m}(\cos t)\,dt=\pi h\left\{\frac{1}{2}F_{2N-m}(1)+\sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\pi\beta h}{\pi\beta h}\right)^m F_{2N-m}(\cos\pi\beta h)\right\}. \tag{4.18}$$

Таким образом, первое слагаемое в правой части (4.13) преобразуется к следующему виду:

$$h^{2m}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m F_{2N-m}(\cos t)\,dt\right|^2-h^{2m+1}F_{2N-m}(1)\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m F_{2N-m}(\cos t)dt+$$
$$+h^{2m+2}\,|F_{2N-m}(1)|^2. \tag{4.19}$$

Аналогичным образом трансформируем второе слагаемое из равенства (4.13). Положив в равенстве (4.14) $\alpha=\pi h$, $\gamma=2N$, а $f(t)=(\sin t/t)^{2m}\times\times|F_{2N-m}(\cos t)|^2$, получим в правой части формулы Пуассона сумму из двух слагаемых, так как $g(n\gamma)$ в этом случае равно нулю при $n\geqslant 2$. Таким образом, придем к равенству

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2m}|F_{2N-m}(\cos t)|^2\left(\frac{1}{2}+\cos 2Nt\right)dt=$$
$$=\pi h\left\{\frac{1}{2}|F_{2N-m}(1)|^2+\sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\pi\beta h}{\pi\beta h}\right)^{2m}|F_{2N-m}(\cos\pi\beta h)|^2\right\}.$$

Теперь преобразуем второе слагаемое в (4.13) к следующей форме:

$$-h^{2m+2}\,|F_{2N-m}(1)|^2+h^{2m+1}\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2m}\left(\frac{1}{2}+\cos 2Nt\right)|F_{2N-m}(\cos t)|^2\,dt.$$

Складывая это выражение с (4.19) и пользуясь также равенством (4.13), получаем искомую формулу (4.12). Лемма доказана.

Вернемся теперь к формуле (4.3). Слагаемое $\|T_N\|_m$ в ней с помощью равенства (4.2) следующим образом выражается через числа Бернулли:

$$\|T_N\|_m^2 = h^{2m}\left[\frac{B_{2m}}{(2m)!} + \frac{B_m^2}{(m!)^2}\right]. \tag{4.20}$$

Далее, носители функций $T_N[\beta]$ и $\widetilde{L}_N^m[\beta]$ не пересекаются, поэтому

$$2\langle T_N, \widetilde{L}_N^m\rangle_m = 2\left(\sum_{\beta\neq 0}\frac{T_N[\beta]}{(2\pi\beta)^m}\right)\left(\sum_{\beta\neq 0}\frac{\widetilde{L}_N^m[\beta]}{(2\pi\beta)^m}\right). \tag{4.21}$$

Первый сомножитель здесь совпадает с величиной $(-1)^{m/2+1}h^m B_m/m!$, а второй равенством (4.18) преобразуется к следующей интегральной форме:

$$(-1)^{m/2} h^m\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m F_{2N-m}(\cos t)\,dt - hF_{2N-m}(1)\right].$$

Складывая теперь равенства (4.12), (4.20) и (4.21), получим в силу условия (4.3):

$$\|l_N^m \mid L_2^m[0, 1]^*\|^2 = h^{2m}B_1(m, N) + h^{2m+1}B_2(m, N), \tag{4.22}$$

где функции $B_j(m, N)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_1(m, N) &= \frac{B_{2m}}{(2m)!} + \left\{\frac{B_m}{m!} - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m F_{2N-m}(\cos t)\,dt\right\}^2, \\ B_2(m, N) &= F_{2N-m}(1)\left\{2\frac{B_m}{m!} - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m F_{2N-m}(\cos t)\,dt\right\} + \\ &\quad + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2m}\left(\frac{1}{2} + \cos 2Nt\right)|F_{2N-m}(\cos t)|^2\,dt. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Величина $F_{2N-m}(1)$, как следует из формул (4.11), (3.28) и (2.10), не зависит от N и равна числу $F_m(1)$.

Функция в правой части равенства (4.22) представляет собой неотрицательную квадратичную функцию от коэффициентов $a[\alpha]$ из разложения (1.5). Как известно, существует минимум такой функции, достигающийся на некотором векторе коэффициентов, вообще говоря зависящем от N. Такой вектор единствен. Норма соответствующего функционала погрешности $l_N^{m,(0)}(x)$ из $EF_N^{(m)}$ минимальна в пространстве $L_2^m[0, 1]^*$. Поэтому функционал $l_N^{m,(0)}(x)$ называют оптимальным. Для его нормы справедлива оценка (4.9):

$$\|l_N^{m,(0)}(x) \mid L_2^m[0, 1]^*\|^2 \geqslant h^{2m}\frac{B_{2m}}{(2m)!}. \tag{4.24}$$

Задача об отыскании коэффициентов оптимальной квадратурной формулы и о приемлемой оценке сверху нормы функционала погрешности $l_N^{m,(0)}(x)$ весьма непроста. По этой причине было предложено рассматривать последовательности квадратурных формул, в каком-либо смысле близких к оптимальным. В частности, последовательность функционалов погрешности $l_N^m(x)$ из $EF^{(m)}$ принято называть асимптотически оптимальной в $L_2^m[0, 1]$, если отношение нормы $\|l_N^m \mid L_2^m[0, 1]^*\|$ к норме соответствующего оптимального функционала погрешности стремится к единице при неограниченном возрастании N.

Пример асимптотически оптимальной последовательности функционалов погрешности одномерных формул несложно сконструировать, если воспользоваться следующей леммой.

Лемма 4.2. *Пусть при любом N функционал $l_N^m(x)$ принадлежит $EF_N^{(m+2)}$, а соответствующая последовательность коэффициентов $a[\alpha]$ финитна, т. е. все $a[\alpha]$ равны нулю при $\alpha \geqslant M+1$. Тогда последовательность $l_N^m(x)$ асимптотически оптимальна.*

Доказательство. В силу финитности $a[\alpha]$ последовательность полиномов $F_{2N-m}(w)$ при $N \geqslant m+M$ стабилизируется к полиному $F_\infty(w)$, который имеет степень не выше, чем $(2M+m)$. Функция $B_1(m, N)$, определенная равенством (4.23), становится при этих N стационарной:

$$B_1(m, N) = B_{2m}/(2m)! + \left\{\frac{B_m}{m!} - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m F_\infty(\cos t)\,dt\right\}^2, \qquad (4.25)$$

а функция $B_2(m, N)$ стремится при $N \to \infty$ к следующему конечному пределу:

$$F_m(1)\left\{2\frac{B_m}{m!} - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m F_\infty(\cos t)\right\} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2m} |F_\infty(\cos t)|^2\,dt. \qquad (4.26)$$

Учитывая это и пользуясь еще оценкой (4.29) и формулой (4.22), получим

$$1 \leqslant \varlimsup_{N\to\infty} \frac{\| l_N^m \mid L_2^m[0, 1]^* \|^2}{\| l_N^{m,(0)} \mid L_2^m[0, 1]^* \|^2} \leqslant 1 + \frac{(2m)!}{B_{2m}}\left\{\frac{B_m}{m!} - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m F_\infty(\cos t)\,dt\right\}^2. \qquad (4.27)$$

Величину, заключенную в фигурные скобки, можно вычислить, если воспользоваться следующим равенством:

$$\frac{N^m}{m!}\left(l_N^m(x), x^m\right) = \frac{B_m}{m!} - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m F_{2N-m}(\cos t)\,dt + hF_m(1). \qquad (4.28)$$

Согласно условию $l_N^m(x)$ принадлежит $EF_N^{(m+2)}$ и, в частности, l_N^m точен на полиноме x^m. Поэтому правая часть в (4.28) стремится при $N \to \infty$ к нулю. Поэтому и предел в (4.27) равен 1. Лемма доказана.

§ 5. БИБЛИОГРАФИЯ

Дадим небольшой обзор литературы по квадратурным формулам с равномерным распределением узлов на отрезке. Ссылки даются в основном на статьи, не упомянутые в обширных библиографических списках к монографиям [2, 5].

Постановки задач теории квадратурных формул и основополагающие результаты по этой теме имеются в [2, 9]. Подробнейший обзор состояния дел в приближенном вычислении одномерных интегралов, сложившееся в начале шестидесятых годов, был опубликован в [5]. Обобщение теоремы на многомерный случай, в том числе теория пространств L_2^m, дано в [1].

В ряде статей рассмотрены последовательности квадратурных формул вида (1.1), удовлетворяющие дополнительным условиям. В частности, формулы Грегори исследовались в работах [10—13]. В случае, когда носитель функции дискретного переменного $a[\alpha]$ из (1.1) и сама эта функция равномерно по N ограничены, последовательность соответствующих функционалов погрешности рассмотрена в [11]. В. И. Половинкин назвал их последовательностями типа Грегори [11]. Им получены представления норм соответствующих функционалов погрешности в пространствах $L_p^m[0, 1]$ при $1 < p \leqslant \infty$. Эти представления оказались асимптотически точными при $h \to 0$. В той же работе сформулирован критерий асимптотической оптимальности в терминах сопутствующего числа $\varkappa$. Если $l_N(x)$ — функционал погрешности формулы, то по определению

$$\varkappa = \lim_{N\to\infty} h^{-m}\left(l_N(x), x^m\right).$$

Использование коэффициентов Фурье для характеризации свойств функционала погрешности впервые осуществил, по-видимому, С. Л. Соболев [14] для случая пространств периодических функций. В [15, 16] приведены формулы, представляющие норму функционала погрешности в некоторых пространствах непериодических функций через соответствующие ему коэффициенты Фурье. Формулы для коэффициентов $L_N^m[\beta]$, асимптотически точные при $m \to \infty$, имеются в [17, 18].

Представление нормы функционала погрешности в пространстве $L_2^m(Q)$ на единичном n-мерном кубе дано в [15]. Это же представление годится в случае $n = 1$. Соответствующие идеи использованы нами в § 4.

Численные значения нормы функционала погрешности в случае конкретных значений h и m приведены в [2]. Там же есть ссылки на результаты по этой задаче ряда авторов.

Норма в $L_2^m[0, 1]^*$ функционала погрешности, соответствующего квадратурным формулам Грегори, при некоторых значениях m и h вычислена в [19].

Прием из § 4 с использованием формулы суммирования Пуассона для вывода интегрального представления нормы заимствован в [20].

Опубликован также ряд статей, в которых рассматривается задача об оптимальных и асимптотически оптимальных квадратурных формулах с равномерным распределением узлов и, в частности, задача о построении коэффициентов таких формул [21—24].

§ 6. ПРОСТРАНСТВО G_2^1 И ЕГО ВЛОЖЕНИЕ В l_2

Пусть Ω — произвольная ограниченная область в пространстве R^h, $h \geqslant 2$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Через $G_2^1(\Omega)$ обозначим пространство гармонических в Ω функций, имеющих конечный интеграл Дирихле по Ω. Норму элемента $u(x)$ из $G_2^1(\Omega)$ определим равенством

$$\| u \mid G_2^1(\Omega) \| = \left(\int\limits_\Omega (|u|^2 + |\nabla u|^2)\, dx \right)^{1/2}. \tag{6.1}$$

Пусть γ представляет собой какую-нибудь односвязную часть границы Ω, обладающую ненулевой площадью и замкнутую. Пространство $G_{2,0}^1(\Omega)$ представляет собой подмножество $G_2^1(\Omega)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на γ. Норму элемента u из $G_{2,0}^1(\Omega)$ зададим равенством

$$\| u \mid G_{2,0}^1(\Omega) \| = \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx \right)^{1/2}. \tag{6.2}$$

В $G_{2,0}^1(\Omega)$ нормировки (6.1), (6.2) эквивалентны. В самом деле, норма (6.2), очевидно, не превосходит (6.1). Оценку же в другую сторону несложно получить, если воспользоваться известным неравенством ([25, с. 116]):

$$c_1\left(\int_\Omega u^2\,dx\right)^{1/2}\leqslant\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Пространства $G_2^1(\Omega)$ и $G_{2,0}^1(\Omega)$ нам удобно будет обозначать единым символом X. Значение нормы $\|\cdot\|_X$ в каждом конкретном случае ясно из контекста.

Определим сейчас некоторый специальный массив числовых коэффициентов, который понадобится нам в дальнейшем. Пусть $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — мультииндекс с целочисленными координатами. Тогда любой однородный многочлен x^α степени $|\alpha|=l$ можно представить в следующем виде:

$$x^\alpha=\left(\frac{r}{2}\right)^l\sum_{s=0}^{[l/2]}\sum_{m=1}^{\sigma(l-2s)}c_{\alpha,s,m}Y_{l-2s,m}(\theta).\tag{6.3}$$

Здесь $r=|x|$, $\theta=x/r$, $\sigma(k)=(n+2k-2)(k+n-3)!/(k!(n-2)!)$, а $\{Y_{k,m}(\theta)\}_{m=1}^{\sigma(k)}$ — ортонормированный базис в пространстве сферических гармоник порядка k, элементы которого нормированы условием:

$$\int|Y_{lm}(\theta)|^2\,d\theta=1.\tag{6.4}$$

Равенство (6.3) несложно вывести из представления Гаусса для полинома x^α [1, гл. XI].

Базисные сферические гармоники бывает удобно задавать не в переменных θ, а в угловых переменных $(\nu_1,\ldots,\nu_{n-2},\varphi)$, связанных с θ следующими соотношениями ([1]):

$$\theta_1=\cos\nu_1,\ \theta_2=\sin\nu_1\cos\nu_2,\ \ldots,\ \theta_{n-2}=\sin\nu_1\ldots\sin\nu_{n-3}\cos\nu_{n-2},$$
$$\theta_{n-1}=\sin\nu_1\ldots\sin\nu_{n-2}\cos\varphi,\ \theta_n=\sin\nu_1\ldots\sin\nu_{n-2}\sin\varphi.$$

Координаты $(r,\nu_1,\ldots,\nu_{n-2},\varphi)$ — сферические в R^n. В частности, при $n=2$, $k\geqslant1$ $\sigma(k)=2$, $\sigma(0)=1$ сферические координаты обозначаются как (r,φ), а в качестве ортонормированных сферических гармоник порядка $l\geqslant1$ можно брать функции

$$Y_{lm}(\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos l\varphi & \text{при } m=1,\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin l\varphi & \text{при } m=2.\end{cases}$$

Если же $n=3$, то $\sigma(k)=2k+1$, а сферические координаты принято обозначать как (r,θ,φ). В качестве ортонормированных сферических гармоник порядка l можно брать функции

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\tilde{A}_l^{|m|}P_l^{|m|}(\cos\theta)\,{\cos\atop\sin}\,m\varphi,\quad -l\leqslant m\leqslant l.$$

Косинус в этой формуле выбирается при $0\leqslant m\leqslant l$, а синус — при $-l\leqslant m<0$. Нормировочный коэффициент определяется соотношением

$$\tilde{A}_l^{|m|}=\left[\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{1/2}\left(\frac{2l+1}{2\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

где $\varepsilon=1$ при $m\neq0$ и $\varepsilon=2$ при $m=0$.

Обозначим коэффициент $c_{\alpha,s,m}$ в разложении (6.3) при $s=0$ через $a_{\alpha,m}$, т. е.

$$a_{\alpha,m}=c_{\alpha,0,m}.\tag{6.5}$$

Пусть функция u принадлежит X. Возьмем внутри области Ω точку x_0 и обозначим через $R=R(x_0)$ расстояние от x_0 до границы Ω, а через

$A_{lm}(x_0|u)$ — величину

$$\left(\frac{R}{2}\right)^l \sum_{|\alpha|=l} a_{\alpha m} D^\alpha u(x_0)/\alpha!. \tag{6.6}$$

При фиксированном $l \geqslant 1$ сконструируем вектор $\bar{\mathbf{A}}_l(x_0|u)$, положив

$$\bar{\mathbf{A}}_l(x_0|u) = \left(l^{1/2} A_{l_1}(x_0|u), \ldots, l^{1/2} A_{l\sigma(l)}(x_0|u)\right).$$

Сопоставим функции u следующую последовательность, составленную из векторов $\bar{\mathbf{A}}_l(x_0|u)$:

$$\bar{u}(x_0) = (A_{00}(x_0),\ \bar{\mathbf{A}}_1(x_0|u),\ \ldots,\ \bar{\mathbf{A}}_k(x_0|u),\ \ldots). \tag{6.7}$$

Последовательность $\bar{u}(x_0)$ назовем следом функции u и в точке x_0.

Интеграл Дирихле от функции u по шару $B_R(x_0)$ радиуса R с центром в x_0 однозначно выражается через $u(x_0)$. Более точно, имеет место

Лемма 6.1. *Для произвольной функции u из X справедливо равенство*

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2 dx = R^{n-2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{l} |A_{lm}(x_0|u)|^2. \tag{6.8}$$

Доказательство. Функция u из X согласно выбору параметра R имеет конечный интеграл Дирихле по шару $B_R(x_0)$ и гармонична в нем. При этом функция $u(x)$ разлагается в сходящийся ряд Тейлора:

$$u(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha. \tag{6.9}$$

Введем в шаре $B_R(x_0)$ координаты (r, θ), центрированные в точке x_0, и подставим в равенство (6.9) разложение полинома $(x-x_0)^\alpha$ в сумму вида (6.3). Тогда получим

$$u(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=l} \left(\frac{r}{2}\right)^l \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} \sum_{m=1}^{\sigma(l)} a_{\alpha,m} Y_{lm}(\theta) + u_1(x), \tag{6.10}$$

где функция $u_1(x)$ определяется следующим соотношением:

$$\begin{gathered} u_1(x) = \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^l \sum_{s=1}^{[l/2]} \sum_{m=1}^{\sigma(l-2s)} F_{s,m,l} Y_{l-2s,m}(\theta), \\ F_{s,m,l} = \sum_{|\alpha|=l} c_{\alpha,s,m} D^\alpha u(x_0)/\alpha!. \end{gathered} \tag{6.11}$$

Из (6.10) следует, что функция $u_1(x)$ гармонична в шаре $B_R(x_0)$. Вычислим оператор Лапласа от правой части равенства (6.11), разбив его на сумму радиальной и угловой частей. Получим

$$\Delta u_1 = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{r}{2}\right)^{l-2} \sum_{s=1}^{[l/2]} \sum_{m=1}^{\sigma(l-2s)} F_{s,m,l}[l(n+l-2)-(l-2s)(n+l-2s-2)] \times \\ \times Y_{l-2s,m}(\theta) = 0.$$

Отсюда видно, что коэффициенты $F_{s,m,l}$ при $l \geqslant 2$, $s \geqslant 1$, $1 \leqslant m \leqslant \sigma(l-2s)$, равны нулю. Но тогда и функция u_1, определяемая равенством (6.11), тождественно нулевая. Тем самым в правой части (6.10) второго слагаемого нет, и для $u(x)$ справедливо следующее представление:

$$u(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^l \sum_{m=1}^{\sigma(l)} A_{lm}(x_0|u) Y_{lm}(\theta). \tag{6.12}$$

Для вычисления интеграла Дирихле от u по шару $B_R(x_0)$ воспользуемся формулой Грина:

$$\int\limits_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\,dx = \int\limits_{S_R} u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS_R.$$

Интеграл в правой части этого равенства берется по границе шара $B_R(x_0)$. Переходя в нем к координатам θ и пользуясь разложением (6.12) и ортогональностью функций $Y_{lm}(\theta)$, получим искомую формулу (6.8). Лемма доказана.

Следствие 6.1. *Пусть функция $u(x)$ симметрична относительно какой-нибудь координатной оси — например, относительно оси x_1. Тогда равенство* (6.8) *упрощается и принимает следующий вид*:

$$\int\limits_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\,dx = \pi^{n/2}R^{n-2}B_n\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l!}{(l+n-3)!}\,\frac{2l}{n+2l-2}\left|\frac{R^l}{l!}\,\frac{\partial^l u}{\partial x_1^l}(x_0)\right|^2. \quad (6.13)$$

Здесь $B_2=1$, $B_n=2(n-3)!/\Gamma(n/2-1)$ *при* $n\geqslant 3$.

Докажем (6.13). Известно [1], что среди нормированных сферических гармоник порядка l существует ровно одна линейно-независимая, обладающая осевой симметрией относительно x_1. Обозначим эту гармонику через $Y_{l1}(\theta)$, тогда

$$Y_{l1}(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}T_l(x_1/r) & \text{при } n=2,\\ A_l^1C_l^{(n/2-1)}(x_1/r) & \text{при } n\geqslant 3.\end{cases}$$

Здесь $T_l(t)$ — многочлен Чебышева первого рода; $C_l^{(p)}(t)$ — многочлены Гегенбауэра, получающиеся как коэффициенты разложения по степеням z производящей функции

$$1/(1-2zt+z^2)^p=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^{(p)}(t)\,z^k.$$

Нормировочный коэффициент A_l^1 определяется при $n\geqslant 3$ равенством

$$A_l^1=\left(\frac{1}{2}\,\frac{l!\,(n-3)!}{(l+n-3)!}(n+2l-2)\frac{\Gamma(n/2-1)}{\pi^{n/2}}\right)^{1/2}.$$

При $m=2, 3, \ldots, \sigma(l)$ сферические гармоники $Y_{lm}(\theta)$ осевой симметрией относительно x_1 не обладают, и поэтому интегралы

$$\int u(r,\theta)\,Y_{lm}(\theta)\,d\theta = A_{lm}(x_0\,|\,u)$$

равны нулю при $m\geqslant 2$. Таким образом, равенство (6.12) принимает следующий вид:

$$u(x)=\sum_{l=0}^{\infty}(r/R)^l A_{l1}(x_0\,|\,u)\,Y_{l1}(\theta). \quad (6.14)$$

Возьмем точку x, лежащую на оси x_1 правее точки x_0, тогда из (6.14) получим

$$u(x_1, 0, \ldots, 0)=\sum_{l=0}^{\infty}A_{l1}(x_0\,|\,u)\,Y_{l1}(\arccos 1, 0, \ldots, 0)\left(\frac{x_1-x_1^0}{R}\right)^l.$$

При $n=2$ $Y_{l1}(\arccos 1, 0, \ldots, 0)=1/\sqrt{\pi}$. Если же $n\geqslant 3$, то, как известно:

$$C_l^{(n/2-1)}(1)=(n+l-3)!/(l!\,(n-3)!).$$

Поэтому

$$Y_{l1}(\arccos 1, 0, \ldots, 0) = A_l^1 C_l^{(n/2-1)}(1) = \left[\frac{(l+n-3)!\,(n+2l-3)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{l!\,(n-3)!\,4\pi^{n/2}}\right]^{1/2}.$$

Таким образом, имеют место равенства

$$A_{l1}(x_0\,|\,u) = \begin{cases} \sqrt{\pi}\,\dfrac{R^l}{l!}\,\dfrac{\partial^l u}{\partial x_1^l}(x_0) \quad \text{при } n=2, \\ \dfrac{l!(n-3)!}{(l+n-3)!}\,\dfrac{4\pi^{n/2}}{(n+2l-2)\,\Gamma(n/2-1)}\,\dfrac{R^l}{l!}\,\dfrac{\partial^l u}{\partial x_1^l}(x_0), \quad n \geqslant 3. \end{cases}$$

Отсюда и из (6.8) следует (6.13).

Из определения (6.7) и леммы 6.1 следует также, что след $\mathbf{u}(x_0)$ любой функции u из X принадлежит пространству последовательностей, суммируемых с квадратом. Таким образом, равенство (6.7) определяет линейное вложение X в l_2, а равенство (1.8) эквивалентно следующему:

$$\|\mathbf{u}(x_0)\|_{2,+} = \frac{1}{R^{n/2-1}}\left(\int\limits_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{6.15}$$

Здесь $\|\mathbf{u}\|_{2,+}$ обозначает норму в l_2 вектора, полученного из $\mathbf{u}(x_0)$ занулением первой координаты. Из (6.15) следует справедливость оценки

$$\|\mathbf{u}(x_0)\|_2 \leqslant K\|u\|_X \tag{6.16}$$

для любой функции u из X. Тем самым оператор вложения (6.7) ограничен. Рассмотрим вопрос о его матричном представлении.

Пусть в X задан ортонормированный базис $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. В этом случае любая функция $u(x)$ из X разлагается в ряд по векторам $u_k(x)$, сходящийся к u по норме X:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x). \tag{6.17}$$

Верно и обратное, т. е. для любой последовательности коэффициентов $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ из l_2 ряд (6.17) сходится в X к некоторой функции u. Для нормы u при этом справедливо равенство Парсеваля:

$$\|u\|_X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \tag{6.18}$$

Сопоставим взятому базису матрицу бесконечного порядка, столбцы которой суть следы в точке x_0 функций u_k:

$$U(x_0) = [\mathbf{u}_1(x_0), \mathbf{u}_2(x_0), \ldots, \mathbf{u}_k(x_0), \ldots].$$

Будем называть $U(x_0)$ базисной, или фундаментальной, матрицей в точке x_0.

Произведение матрицы $U(x_0) = (u_{ij})$ на бесконечный вектор-столбец $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ можно определить лишь в случае, когда для любого i от 1 до ∞ сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} c_j. \tag{6.19}$$

В следующей лемме содержится достаточное условие на вектор $\mathbf{c}$, при выполнении которого произведение $U(x_0)\mathbf{c}$ заведомо определено.

Лемма 6.2. *Базисная матрица следов $U(x_0)$ определяет ограниченный линейный оператор из l_2 в l_2, имеющий к тому же левый обратный.*

Доказательство. Пусть $\{c_k\}_1^\infty$ принадлежит l_2, $u_N(x)=\sum_{k=1}^{N} c_k u_k(x)$, тогда определена сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x) = u(x)$. При этом $\|u-u_N\|_X \to 0$ при $N\to\infty$ и справедлива оценка (6.16):

$$\|\mathbf{u}(x_0)-\mathbf{u}_N(x_0)\| \leqslant K\|u-u_N\|_X,$$

т. е. $\mathbf{u}_N(x_0)$ сходится в l_2 к $\mathbf{u}(x_0)$ при $N\to\infty$. В частности, имеет место покоординатная сходимость

$$\sum_{j=1}^{N} u_{ij}c_j \to u_i \text{ при } N\to\infty.$$

Тем самым, ряды (6.19) сходятся, т. е. произведение $U(x_0)c$ определено и равно $\mathbf{u}(x_0)$. Более того,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}c_j\right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|u_i|^2 = \|\mathbf{u}(x_0)\|_2^2 \leqslant K\|u\|_X^2 \leqslant K\left(\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|^2\right). \quad (6.20)$$

Первое из неравенств в этой цепочке справедливо в силу (6.16), а второе — в силу (6.18). Тем самым, доказано, что $U(x_0)$ действует из l_2 в l_2 ограниченно.

Убедимся, что оператор $U(x_0)$ имеет левый обратный $T=T(x_0)$. Для этого достаточно доказать тривиальность ядра $U(x_0)$.

Пусть $\mathbf{c}_*$ принадлежит ядру $U(x_0)$ в l_2, т. е. $U(x_0)\mathbf{c}_*=0$. Последовательности $\mathbf{c}_*$ соответствует в силу (6.17) функция u_* из X. При этом, как мы уже убедились, $u_*(x_0)=U(x_0)\mathbf{c}_*=0$. Таким образом, все величины $A_{lm}(x_0|u)$ равны нулю. Но для функции $u(x)$ в шаре $B_R(x_0)$ имеет место разложение (6.12). Тем самым, $u(x)$ — тождественно нулевая в $B_R(x_0)$, а по теореме единственности — во всей области Ω. Но тогда $\|\mathbf{c}_*\|_2^2=\|u_*\|_X^2=0$, т. е. $\mathbf{c}_*=0$. Тем самым, ядро $U(x_0)$ действительно состоит из единственного нулевого элемента. Лемма доказана.

Как следует из только что проведенного доказательства, столбцы и строки матрицы $U(x_0)$ — это элементы пространства l_2. Любая функция $u(x)$, представленная в виде ряда (6.17), имеет в точке x_0 след, для которого справедливо равенство

$$\mathbf{u}(x_0)=U(x_0)\cdot\mathbf{c}. \quad (6.21)$$

Это и есть искомое матричное представление.

Множество всех следов в точке x_0 функций, входящих в X, обозначим как $l_2(\Omega, x_0)$. Ясно, что $l_2(\Omega, x_0)$ — подпространство l_2, совпадающее с $R_U(l_2)$ — областью значений оператора $U(x_0)$. Если $l_2(\Omega, x_0)$ замкнуто в l_2, то оно само является гильбертовым пространством. В этом случае левый обратный к $U(x_0)$ оператор $T=T(x_0)$ не только существует, но и ограничен. Это следует из теоремы Банаха о замкнутом графике.

§ 7. КАНОНИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ СЛЕДОВ

Пусть Ω — ограниченная область в R^n и x_0 — точка внутри Ω. Будем обозначать, как и раньше, расстояние от x_0 до границы Ω через $R=R(x_0)$.

Как известно, пространство функций $W_2^1(\Omega)$ в этом случае сепарабельно [26]. Значит, сепарабельно и его замкнутое подпространство $G_2^1(\Omega)$. Тем самым, в $G_2^1(\Omega)$ существует счетный ортонормированный базис $\{u_k\}_{k=1}^\infty$. Сопоставим этому базису фундаментальную матрицу следов $U(x_0)$, определенную в предыдущем параграфе, и разложим ее в произведение некоторых специальным образом сконструированных операторов. Описание таких разложений составляет цель этого параграфа.

Сначала докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 7.1. *Пусть функция и принадлежит пространству* $G_2^1(B_R(x_0))$, *где* $B_R(x_0)$ — *шар радиуса* $R=R(x_0)$ *с центром в* x_0. *Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_{B_R(x_0)} |u|^2\,dx = R^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+n} \sum_{m=1}^{\sigma(l)} |A_{lm}(x_0\,|\,u)|^2. \tag{7.1}$$

Это равенство несложно получить, если перейти в интеграле слева к сферическим координатам, а затем воспользоваться представлением (6.12).

Обозначим через M следующую диагональную матрицу бесконечного порядка:

$$M = \operatorname{diag}\Big\{\frac{1}{\sqrt{n}}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n+2}}}_{\sigma(1)\ \text{раз}}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(2l+n)\,l}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{(2l+n)\,l}}}_{\sigma(l)\ \text{раз}}, \ldots\Big\},$$

и произведение $MU(x_0)$ обозначим как $\tilde{U}(x_0)$. Если $\mathbf{c}=(c_1, \ldots, c_k, \ldots)$ принадлежит l_2 и $u=\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k u_k$, то равенство (7.1) эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} |u|^2\,dx = (\tilde{U}(x_0)\,\mathbf{c}, \tilde{U}(x_0)\,\mathbf{c}). \tag{7.2}$$

Матрица $\tilde{U}(x_0)$ определяет, очевидно, ограниченный оператор из l_2 в l_2. Более того, справедлива

Лемма 7.2. *Матрица* $\tilde{U}(x_0)$ *определяет вполне непрерывный оператор из* l_2 *в* l_2.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{a}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, слабо сходящаяся в l_2. Тогда нормы $\|\mathbf{a}^{(n)}\|_2$ равномерно по n ограничены. Построим последовательность функций $\tilde{u}_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} u_k$, тогда $\|\tilde{u}_n\|_X^2 = \|\bar{\mathbf{a}}^{(n)}\|_2^2$, т. е. $\tilde{u}_n$ принадлежат некоторому шару гильбертова пространства X, причем радиус шара не зависит от n. Тем самым, последовательность $\{\tilde{u}_n\}$ слабо сходится в X. Как хорошо известно, $W_2^1(\Omega)$ вполне непрерывно вложено в $L_2(\Omega)$ [26]. Значит, $\{\tilde{u}_n\}$ сходится по норме $L_2(\Omega)$. Пусть B_R — шар с центром в x_0 радиуса $R=R(x_0)$. Тогда B_R вложено в Ω и, тем самым, $\{\tilde{u}_n\}$ сходится в $L_2(B_R)$. Применив теперь к последовательности $\tilde{U}(x_0)\mathbf{a}^{(n)}$ равенство (7.2), видим, что она сходится в l_2.

Тем самым, оператор $\tilde{U}(x_0)$ перевел произвольную слабо сходящуюся последовательность $\{\mathbf{a}^{(n)}\}$ в сильно сходящуюся, т. е. $\tilde{U}(x_0)$ — вполне непрерывный. Лемма доказана.

Известно, что оператор $\tilde{U}(x_0)$ допускает полярное разложение [27]:

$$\tilde{U}(x_0) = P(x_0)\,S(x_0). \tag{7.3}$$

Здесь $P=P(x_0)$ — частично изометричный оператор. Иными словами, если $H(P)$ — подпространство l_2, являющееся ортогональным дополнением к ядру оператора P, то P изометрически отображает $H(P)$ на свою область значений $R_P(l_2)$.

Напомним, что для частично изометричных операторов пространство $R_P(l_2)$ замкнуто, а произведения P^*P и PP^* представляют собой ортопроекторы l_2 на $R_{P^*}(l_2)$ и $R_P(l_2)$ соответственно. При этом $P^*P=I$.

Сомножитель $S=S(x_0)$ в (7.3) представляет собой самосопряженный неотрицательный оператор, удовлетворяющий условию $S^2=\tilde{U}^*\tilde{U}$. Как следует из леммы 7.2, произведение $\tilde{U}^*\tilde{U}$ определяет в l_2 самосопряженный и вполне непрерывный оператор. Очевидно, что он к тому же неотрицательно определен и нуль не является его собственным числом, ибо в противном случае ядро оператора $\widetilde{U}$ нетривиально. Как известно, для такого оператора справедливо разложение

$$\widetilde{U}^*\widetilde{U} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 P_{\varepsilon_k}, \tag{7.4}$$

где $\{\varepsilon_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ — монотонно невозрастающая последовательность собственных чисел оператора, а P_{ε_k} — проектор на соответствующее ε_k^2 собственное подпространство. Для оператора S при этом справедливо разложение

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k P_{\varepsilon_k}. \tag{7.5}$$

Здесь $\varepsilon_k > 0$ для любого k.

Как следует из (7.4), в l_2 существует ортонормированный базис $\{\varphi_j(x_0)\}$ из собственных векторов оператора $\widetilde{U}^*\widetilde{U}$. Образовав из них матрицу $\Phi = (\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_k(x_0), \ldots)$ бесконечного порядка и обозначив через Λ диагональную матрицу с числами ε_j на диагонали, можем утверждать, что

$$\widetilde{U}^*\widetilde{U} = \Phi\Lambda^2\Phi^*, \quad S = \Phi\Lambda\Phi^*. \tag{7.6}$$

Матрица Φ здесь определяет, очевидно, унитарный оператор в l_2:

$$\Phi^*\Phi = \Phi\Phi^* = I.$$

Лемма 7.3. *Для любой фундаментальной матрицы следов $U(x_0)$ справедливо следующее разложение:*

$$\widetilde{U}(x_0) = Q_R\Lambda\Phi^*, \tag{7.7}$$

где Λ, Φ — матрицы из равенств (7.6), а Q_R определяет в l_2 частично изометричный оператор. Одни и те же матрицы Q_R, Λ годятся как первые два сомножителя в (7.7) для различных фундаментальных матриц следов.

Доказательство. Подставляя второе из равенств (7.6) в (7.3), получим разложение (7.7) с $Q_R = P\Phi$. Несложно убедиться, что Q_R определяет в l_2 частично изометричный оператор.

Докажем, что вид первых двух сомножителей в (7.7) не зависит от выбора фундаментальной матрицы следов.

Пусть $\{v_k\}$ — любой ортонормированный базис $G_2^1(\Omega)$. Образуем матрицу $T = (t_{ij})$, где $t_{ij} = (u_i, v_j)_X$. Тогда T определяет в l_2 унитарный оператор. Фундаментальная матрица следов $V(x_0)$, соответствующая базису $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, связана с $U(x_0)$ следующим соотношением:

$$\widetilde{V}(x_0) = \widetilde{U}(x_0) \cdot T. \tag{7.8}$$

В самом деле, если $u = \sum_{i=1}^{\infty} b_i v_i = \sum_{j=1}^{\infty} c_j u_j$, то

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} t_{ji} u_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} t_{ji} b_i \right) u_j.$$

Таким образом, $\mathbf{c} = T\mathbf{b}$, откуда и получаем (7.8).

Из (7.8) следует теперь, что оператор $S_* = T^*ST$ представляет собой самосопряженный неотрицательный квадратный корень из $\widetilde{V}^*\widetilde{V}$. Так как S_* и S унитарно эквивалентны, то они имеют одинаковые наборы собственных чисел. Таким образом, последовательность $\{\varepsilon_k\}$ в равенстве (7.5) одинакова для S и S_*. Но это и означает, что $\Lambda(x_0)$ в (7.7) не зависит от выбора ортонормированного базиса в $G_2^1(\Omega)$.

Далее, в качестве компонент полярного разложения матрицы $\widetilde{V}$ можно брать операторы $P_* = PT$ и $S_* = T^*ST$. Ясно, что P_*, как и P, частично изометричен. Если Φ_* — базис из собственных векторов $\tilde{V}^*\tilde{V}$, то $\Phi_* = T^*\Phi$. Таким образом, в качестве первого сомножителя Q_R разложения (7.7) оператора $\tilde{V}^*\tilde{V}$ можно брать матрицу $Q_{R,*} = P_*\Phi_* = PT \times T^*\Phi = Q_R$. Лемма доказана.

Вернемся к матрице Φ из равенств (7.6), столбцы которой образуют полную ортонормированную систему в l_2. Обозначим через $\varphi_j(x)$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^{(j)} u_k$ по исходной системе $\{u_k\}$. При этом последовательность c_j коэффициентов Фурье $\varphi_j(x)$ по системе $\{u_k\}$ возьмем равной столбцу $\varphi_j(x_0)$ матрицы Φ.

Несложно убедиться, что таким образом построенная последовательность функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ образует в $G_2^1(\Omega)$ ортонормированный базис. Матрица перехода $T = (t_{ij})$, где $t_{ij} = (u_i, \varphi_j)_X = c_i^{(j)}$ от базиса $\{\varphi_j(x)\}$ к исходному совпадает с Φ. Тем самым, фундаментальная матрица следов $\Phi(x_0)$, порождаемая последовательностью $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$, удовлетворяет условию

$$\tilde{\Phi}(x_0) = \tilde{U}(x_0) T = Q_R \cdot \Lambda. \tag{7.9}$$

Здесь Q_R — введенный ранее частично изометричный оператор в l_2. Базис $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$, фундаментальная матрица следов которого удовлетворяет равенству (7.9), будем называть каноническим в точке x_0.

Таким образом, задача отыскания первого сомножителя Q_R в разложении (7.7) эквивалентна задаче о нахождении базиса из собственных векторов любой матрицы вида $\tilde{U}^*\tilde{U}(x_0)$. Здесь $U(x_0)$ — фундаментальная матрица следов, порождаемая произвольным ортонормированным базисом в $G_2^1(\Omega)$.

§ 8. ФОРМУЛА ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Рассмотрим произвольную функцию u из пространства $X = G_{2,0}^1(\Omega)$ и обозначим ее интеграл Дирихле по области Ω через $D_\Omega(u)$, т. е. положим

$$D_\Omega(u) = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx.$$

Имеет место следующая

Теорема 8.1. *Пусть $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность диагональных элементов Λ из разложения (7.7) произвольной фундаментальной матрицы следов в точке x_0, q_{ij} — элементы матрицы Q в этом же разложении, а нормированный след $\tilde{u}(x_0) = Mu(x_0)$ функции u из X имеет координаты $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Тогда справедливо равенство*

$$D_\Omega(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_j^2} \left| \sum_{i=1} q_{ij} u_i \right|^2. \tag{8.1}$$

Доказательство. Пусть функции $\psi_j(x)$, $j = 1, 2$, образуют канонический в точке x_0 ортонормированный базис X. Соответствующая фундаментальная матрица следов $V(x_0)$ допускает разложение $\tilde{V}(x_0) = Q\Lambda$, и поэтому вектор $\mathbf{c}$ коэффициентов Фурье функции u по каноническому базису удовлетворяет условию:

$$\tilde{u}(x_0) = \tilde{V}(x_0)\mathbf{c} = Q\Lambda\mathbf{c}. \tag{8.2}$$

Имея в виду, что $Q^*Q = I$, получаем из (8.2) равенства

$$\varepsilon_j c_j = \sum_{i=1}^{\infty} q_{ji} u_i, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{8.3}$$

Согласно равенству Парсеваля, интеграл $D_\Omega(u)$ представляет собой сумму квадратов коэффициентов Фурье функции u, т. е.

$$D_\Omega(u)=\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2. \tag{8.4}$$

Подставляя сюда значения коэффициентов c_j, найденные из (8.3), получаем искомое равенство (8.1). Теорема доказана.

Из разложения $\tilde{V}(x_0)=Q\Lambda$ следует, что столбец матрицы Q с номером N, координаты которого поделены на ε_N, представляет собой нормированный след $\widetilde{\psi}_N(x_0)$. Поэтому равенство (8.1) эквивалентно следующему:

$$D_\Omega(u)=\sum_{j=1}^{\infty}(\widetilde{\psi}_j(x_0),\widetilde{u}(x_0))=\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2l)}\sum_{\sigma=1}^{\sigma(l)}A_{l\sigma}(x_0\,|\,\psi_j)\,A_{l\sigma}(x_0\,|\,u)\right|^2.$$

Заметим, что в частном случае, когда Ω представляет собой шар $B_R(x_0)$ радиуса R с центром в точке x_0, равенство (8.1) упрощается и совпадает с равенством (6.8).

Упрощение возможно и в случае произвольной области Ω, если только оператор $\tilde{V}(x_0)$, соответствующий фундаментальной матрице следов, порождаемой каноническим базисом X, нормален в l_2. В самом деле, воспользовавшись известным равенством [27, с. 22]: $\tilde{V}=S_1Q$, где Q — оператор из разложения (7.7), а

$$S_1=(\tilde{V}\tilde{V}^*)^{1/2}=(\tilde{V}^*\tilde{V})^{1/2}=\Lambda,$$

видим, что матрицы Q и Λ перестановочны. Равенство (8.2) при этом эквивалентно следующему: $\widetilde{u}(x_0)=\Lambda Q\mathbf{c}$, и поэтому

$$D_\Omega(u)=(\mathbf{c},\mathbf{c})=(Q\mathbf{c},Q\mathbf{c})=\sum_{j=1}^{\infty}u_j^2/\varepsilon_j^2.$$

Это и есть искомое упрощение.

Взяв во внешней сумме равенства (8.1) первые N слагаемых, получим формулу приближенного вычисления интеграла $D_\Omega(u)$:

$$D_\Omega(u)\cong\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\varepsilon_j^2}\left|\sum_{i=1}^{\infty}q_{ij}u_i\right|^2\equiv D_\Omega^N(u). \tag{8.5}$$

Исследуем аппроксимативные свойства этой формулы. Пусть $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$, как и раньше, обозначает канонический в x_0 ортонормированный базис X, $\mathbf{c}$ — вектор коэффициентов Фурье функции u и по этому базису. Обозначим через u_N частичную сумму $\sum_{j=1}^{N}c_j\psi_j$, тогда u_N принадлежит пространству $X_{x_0}^{(N)}$, представляющему собой линейную оболочку функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$. Из (8.4) следует, что

$$D_\Omega(u)=\sum_{j=1}^{N}c_j^2=D_\Omega(u_N). \tag{8.6}$$

Таким образом, формула (8.5) точна на пространстве $X_{x_0}^{(N)}$.

В случае произвольной функции u из X последовательность погрешностей $D_\Omega(u)-D_\Omega^N(u)$ формулы (8.5) неотрицательна и монотонно не возрастает, т. е. для любого $N\geqslant 1$

$$0\leqslant D_\Omega(u)-D_\Omega^{N+1}(u)\leqslant D_\Omega(u)-D_\Omega^N(u). \tag{8.7}$$

Предел этой последовательности при $N\to\infty$ в силу (8.1) равен нулю.

Оценим скорость сходимости этой последовательности к нулю при некоторых естественных предположениях об устройстве векторов $\widetilde{u}(x_0)$.

Будем считать, что среди координат вектора $\tilde{u}(x_0)=(u_1, \ldots, u_k, \ldots)$ существует максимальная по модулю с номером $k=M_0(u)$, т. е.

$$|u_{M_0}| = \sup_{\substack{0\leqslant l<\infty \\ 1\leqslant\sigma\leqslant\sigma(l)}} \frac{1}{(n+2l)^{1/2}} |A_{l\sigma}(x_0|u)|.$$

При этом для любого $q<1$ найдется номер $m_0=m_0(q, u)$ такой, что для всех j вне отрезка $[M_0-m_0, M_0+m_0]$ справедливо неравенство

$$|u_j| \leqslant C|u_{M_0}||j-M_0|^{\mu_1} q^{|j-M_0|} \tag{8.8}$$

с постоянной C, не зависящей ни от j, ни от u. Если в качестве u берется базисная функция ψ_N, то соответствующие параметры $M_0(\psi_N)$ и $m_0(q, \psi_N)$ обозначим как $M_0(N)$ и $m_0(q, N)$. Предположим, что

$$M_0(N) \sim \alpha N, \quad m_0(N) \sim \beta N \quad \text{при} \quad N\to\infty, \tag{8.9}$$

где α, β — постоянные, не зависящие от N.

Пусть теперь m — натуральное число. Все координаты u_j вектора $\mathbf{u}(x_0)$ с номерами j вне отрезка $[M_0-m, M_0+m]$ положим равными нулю и обозначим получившийся элемент l_2 как $\mathbf{u}^m(x_0)$. Ясно, что носитель последовательности $\mathbf{u}^m(x_0)$ целиком содержится в отрезке $[M_0-m, M_0+m]$ и при этом

$$\|\mathbf{u}(x_0)-\mathbf{u}^m(x_0)\|_2^2 = \sum_{j=1}^{M_0-m} |u_j|^2 + \sum_{j=M_0+m}^{\infty} |u_j|^2. \tag{8.10}$$

Полагая, что $m\geqslant m_0(q, N)$ и подставляя в (8.9) неравенства (8.8), получим после несложных выкладок:

$$\|\mathbf{u}(x_0)-\mathbf{u}^m(x_0)\|_2 \leqslant Cm^{\mu_1}q^m|u_{M_0}|, \tag{8.11}$$

где C — постоянная, не зависящая ни от m, ни от u.

Коэффициент Фурье c_N в разложении функции u из X по каноническому базису $\{\psi_j\}$ представим в следующем виде:

$$c_N = (\tilde{\psi}_N(x_0), \quad \tilde{u}(x_0))/\varepsilon_N^2. \tag{8.12}$$

Это равенство следует из разложения $\tilde{V}(x_0)=Q\Lambda$ и системы равенств $\Lambda c = Q^*\tilde{u}(x_0)$, эквивалентной условию (8.2).

Промажорируем последовательность $\varepsilon_N|c_N|$, используя (8.11). Предварительно разложим в сумму скалярное произведение:

$$\begin{aligned}(\tilde{\psi}_N(x_0), \quad \tilde{u}(x_0)) &= (\tilde{u}(x_0)-\tilde{u}^m(x_0), \quad \tilde{\psi}_N(x_0)) + \\ &+ \left(\tilde{u}^{m_1}(x_0), \tilde{\psi}_N(x_0) - \tilde{\psi}_N^{m_2}(x_0)\right) + \left(\tilde{u}^{m_1}(x_0), \tilde{\psi}_N^{m_2}(x_0)\right).\end{aligned} \tag{8.13}$$

Возьмем $m_1=M_0(N)-m_0(N)-M_0(u)-1$ и $m_2=m_0(N)$, тогда носители векторов $\tilde{u}^{m_1}(x_0)$ и $\tilde{\psi}^{m_2}(x_0)$ не пересекаются и поэтому последнее слагаемое в (8.13) равно нулю. Но тогда справедлива оценка:

$$\varepsilon_N^2|c_N| \leqslant \|u(x_0)-u^{m_1}(x_0)\|\cdot\|\psi_N(x_0)\| + \|\psi_N(x_0)-\psi_N^{m_2}(x_0)\|\cdot\|u(x_0)\|. \tag{8.14}$$

Как уже отмечалось, вектор $\psi_N(x_0)/\varepsilon_N$ представляет собой столбец матрицы Q, удовлетворяющей условию $Q^*Q=I$. Поэтому $\|\psi_N(x_0)\|_2=\varepsilon_N$. В частности:

$$\sup_{\substack{0\leqslant l<\infty \\ 1\leqslant\sigma\leqslant\sigma(l)}} \frac{1}{(n+2l)^{1/2}} |A_{l\sigma}(x_0|\psi_N)| \leqslant \|\psi_N(x_0)\| = \varepsilon_N. \tag{8.15}$$

Подставив в (8.11) вместо u функцию ψ_N, положив $m=m_2$ и пользуясь (8.15), получим

$$\|\psi_N(x_0)-\psi_N^{m_2}(x_0)\| \leqslant Cm_2^{\mu_1}q^{m_2}\varepsilon_N. \tag{8.16}$$

Имея в виду, что $m_1(N) \sim \gamma N$, $m_2(N) \sim \beta N$ при $N \to \infty$, а также пользуясь оценками (8.14), (8.16) и (8.11), несложно убедиться, что справедлива

Лемма 8.1. *При выполнении условий* (8.8), (8.9) *для любой функции и из X последовательность* $\{\varepsilon_N |c_N|\}_{N=1}^{\infty}$ *стремится к нулю экспоненциально с ростом N.*

Погрешность формулы (8.5) удовлетворяет равенству

$$|D_\Omega(u) - D_\Omega^N(u)| = \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 = \sum_{j=N+1}^{\infty} |\varepsilon_j c_j|^2/\varepsilon_j^2. \tag{8.17}$$

Если последовательность ε_N при $N \to \infty$ убывает не быстрее, чем некоторая степень, т. е. $\varepsilon_N \geqslant KN^{-\mu_2}$, где $\mu_2 \geqslant 0$, то из (8.17) и леммы 8.1 следует экспоненциальное убывание при $N \to \infty$ погрешности формулы (8.5). Пусть функция u принадлежит пространству $X_{x_0}^{(N)}$ тогда, как уже отмечалось, $D_\Omega(u) = D_\Omega^N(u)$. При этом квадратичную форму $D_\Omega^N(u)$ также приходится вычислять приближенно. Из определения (8.5) следует естественный способ получения соответствующей формулы. Именно, внутреннее суммирование просто обрываем на некотором конечном числе M:

$$D_\Omega^N(u) \cong \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\varepsilon_j^2} \left| \sum_{i=1}^{N} q_{ij} u_i \right|^2 \equiv D_\Omega^{N,M}(u). \tag{8.18}$$

Положим все координаты вектора $\tilde{\mathbf{u}}(x_0)$, начиная с $(M+1)$-й, равными нулю и обозначим соответствующий вектор как $\tilde{\mathbf{u}}_M(x_0)$. Тогда, как несложно убедиться, погрешность формулы (8.18) удовлетворяет неравенству

$$|D_\Omega^N(u) - D_\Omega^{N,M}(u)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_N^2} \|Q(\tilde{\mathbf{u}}(x_0) - \tilde{\mathbf{u}}_M(x_0))\| \cdot \|Q(\tilde{\mathbf{u}}(x_0) + \tilde{\mathbf{u}}_M(x_0))\| =$$

$$= \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}(x_0) - \tilde{\mathbf{u}}_M(x_0)\| \cdot \|\tilde{\mathbf{u}}(x_0) + \tilde{\mathbf{u}}_M(x_0)\|}{\varepsilon_N^2}. \tag{8.19}$$

Таким образом, предел погрешности при $M \to \infty$ равен нулю.

Из (8.19) следует, в частности, что для функций u, представляющих собой гармонические полиномы степени M из $X_{x_0}^{(N)}$, формула (8.18) превращается в точное равенство.

Если выполнены условия (8.8), (8.9), то оценку (8.18) можно упростить. Возьмем $m \geqslant m_0(q, u)$, где $q < 1$ и $M \geqslant M_0(u) + m$, тогда из (8.11) следует, что

$$\|\tilde{\mathbf{u}}(x_0) - \tilde{\mathbf{u}}_M(x_0)\| \leqslant Cm^{\mu_1} q^m \sup_{\substack{0 \leqslant l < \infty \\ 1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma(l)}} \frac{1}{(n+2l)^{1/2}} |A_{l\sigma}(x_0 | u)|.$$

Таким образом, в этом случае погрешность формулы (8.18) на каждой функции u из $X_{x_0}^{(N)}$ стремится к нулю экспоненциально с ростом M.

Отметим, что значения параметров N и M в приближенной формуле (8.18) совсем не обязательно совпадают. Более того, приемлемая по точности формула может получаться для значений M, существенно больших N.

Описание конструкции формул для приближенного вычисления интеграла Дирихле от осесимметричных гармонических функций приведено в [3, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Соболев С. Л.** Введение в теорию кубатурных формул.— М.: Наука, 1974.— 808 с.
2. **Никольский С. М.** Квадратурные формулы.— М.: Наука, 1979.— 256 с.
3. **Васкевич В. Л.** К приближенному решению задачи Дирихле в составных пространственных областях // Численный анализ.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние 1989.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 15).— С. 93—126.

4. **Васкевич В. Л., Тыщенко А. В.** Приближенное решение задачи Дирихле в областях типа микроканала // Вычислительные проблемы в задачах математической физики.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 18).— С. 111—122.
5. **Крылов В. И.** Приближенное вычисление интегралов.— М.: Наука, 1967.— 500 с.
6. **Гельфонд А. О.** Исчисление конечных разностей.— М.: Наука, 1967.— 376 с.
7. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.— М.: Наука, 1983.— 384 с.
8. **Диткин В. А., Прудников А. П.** Интегральные преобразования и операционное исчисление.— М.: Наука, 1974.— 544 с.
9. **Sard A.** Best approximate integration formulas, best approximate formulas // Amer. J. of Math.— 1949.— V. LXXI.— P. 80—91.
10. **Бахвалов Н. С.** Об оптимальных свойствах формул Адамса и Грегори // Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники.— М.: Машгиз, 1963.— С. 9—26.
11. **Половинкин В. И.** Последовательности квадратурных формул с пограничным слоем и последовательности типа Грегори // Квадратурные и кубатурные формулы. Решение функциональных уравнений.— Л.: Изд-во Ленингр .ун-та, 1981.— С. 7—25.
12. **Васкевич В. Л.** О сходимости квадратурных формул Грегори // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 261, № 5.— С. 1041—1043.
13. **Рамазанов М. Д., Умарханов И.** Квадратурная формула с простой весовой функцией // Докл. АН УзССР.— 1982.— № 5.— С. 4—7.
14. **Соболев С. Л.** Лекции по теории кубатурных формул. Ч. I.— Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1964.— 193 с.
15. **Половинкин В. И.** Последовательности функционалов с пограничным слоем // Сиб. мат. журн.— 1974.— Т. 15, № 2.— С. 413—429.
16. **Рамазанов М. Д.** Лекции по теории приближенного интегрирования.— Уфа: Изд-во Башкир. ун-та, 1973.— 177 с.
17. **Васкевич В. Л.** О норме в $L_2^m[0, 1]$ одного функционала погрешности с регулярным пограничным слоем // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Тр. сем. С. Л. Соболева).— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980.— № 1.— С. 41—59.
18. **Васкевич В. Л.** Классы бесконечно дифференцируемых функций и приближенное интегрирование // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики (Тр. сем. С. Л. Соболева).— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984.— № 2.— С. 52—64.
19. **Хороших А. Н.** Точные асимптотические выражения норм функционалов ошибок формул Грегори в $L_2^m[a, b]^*$ // Вопросы вычислительной и прикладной математики.— Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1976.— Вып. 40.— С. 3—8.
20. **Butler R.** On the evaluation of $\int\limits_0^\infty (\sin t/t)^m\,dt$ by the trapezoidal rule // Amer. Math. Monthly.— 1960.— Vol. 67, N 6.— P. 566—569.
21. **Соболев С. Л.** Коэффициенты оптимальных квадратурных формул // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 235, № 1.— С. 34—37.
22. **Загирова Ф. Я.** Об одном представлении коэффициентов оптимальных квадратурных формул // Труды семинара С. Л. Соболева.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983.— № 2.— С. 71—86.
23. **Шадиметов Х. М.** Оптимальные квадратурные формулы в $L_2^m(\Omega)$ и $L_2^m(R^1)$ // Докл. АН УзССР.— 1983.— № 3.— С. 5—8.
24. **Шойнжуров Ц. Б.** Об асимптотически оптимальных квадратурных и кубатурных формулах в конечной области // Математический анализ и смежные вопросы математики.— Новосибирск: Наука, 1978.— С. 319—329.
25. **Ладыженская О. А.** Краевые задачи математической физики.— М.: Наука, 1973.— 408 с.
26. **Соболев С. Л.** Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций.— М.: Наука, 1989.— 254 с.
27. **Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.— М.: Наука, 1965.— 448 с.