то существует однопараметрическое семейство четырехугольников с углами φ, ψ, τ, θ. *В качестве параметра семейства можно взять длину стороны* a. *При этом* a *изменяется в пределах от* a_0 *до* a_1.

Установим монотонную зависимость других сторон b, c и d от a. Покажем, что $d=d(a)$ — монотонно убывающая функция от a. В самом деле, если a увеличить, то d необходимо уменьшить, иначе новый четырехугольник будет содержать старый и, следовательно, будет иметь большую площадь (рис. 18). Аналогично показывается, что $b=b(a)$ — убывающая функция. Используя переобозначения сторон, можно утверждать, что c — монотонно убывающая функция от b, а значит, $c=c(a)$ — монотонно возрастающая.

Итак, при увеличении a сторона c тоже увеличивается, а стороны b и d уменьшаются. Отсюда, в частности, следует, что параметр $k=\frac{ac}{bd}$ есть монотонно возрастающая функция от a. Причем когда величина a пробегает весь отрезок возможных для нее значений, параметр k пробегает значения от 0 до ∞.

Переходим к доказательству теоремы 3. Как и в § 2, обозначим через $m(a)$ модуль четырехугольника с углами φ, ψ, τ, θ и стороной a. При этом будем считать, что сторона a принадлежит ко второй паре противоположных сторон. Из свойств конформного отображения следует, что $m(a)$ — непрерывная функция, $m(a)\to 0$ при $a\to a_0$, $m(a)\to\infty$ при $a\to a_1$. Значит, когда a пробегает отрезок от a_0 до a_1, величина модуля $m(a)$ принимает все значения от 0 до ∞. В отличие от § 2 здесь мы можем еще доказать и монотонность функции $m(a)$. В самом деле, используя обозначения на рис. 18, монотонность $d(a)$ и утверждения 1 и 2 из § 1, мы имеем при $a<\tilde{a}$

$$m(a)=\operatorname{mod} OABD<\operatorname{mod} O\tilde{A}\widehat{B}D<\operatorname{mod} O\tilde{A}\tilde{B}\tilde{D}=m(\tilde{a}).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чумаков Г. А.** Риманова метрика гармонической параметризации геодезических четырехугольников на поверхностях постоянной кривизны.
2. **Волковыский Л. И.** Квазиконформные отображения.— Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1954.— 156 с.
3. **Погорелов А. В.** Геометрия.— М.: Наука, 1983.— 288 с.
4. **Ефимов Н. В.** Высшая геометрия.— М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961.— 580 с.

Г. А. ЧУМАКОВ

РИМАНОВА МЕТРИКА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена параметризации геодезических четырехугольников на поверхностях постоянной кривизны и использованию ее для конформной параметризации криволинейных четырехугольников. Она является обобщением хорошо известного способа построения разностных сеток путем отыскания квазиконформного отображения данной области на квадрат [1], а также методики [2] построения разностных сеток в сложных областях, основанной на отыскании квазиконформного отображения физической области на каноническую область на плоскости — многоугольник, составленный из нескольких квадратов. В основе этих методов лежит конформное отображение физической области на некоторый канонический, состоящий из одного или нескольких сложных параллелограммов многоугольника на плоскости, в котором каноническая сетка строится естественным способом: в каждом параллелограмме узлы сетки образуются пересечением прямых, параллельных его сторонам. Затем с помощью обратного отображения, получают сетку в исходной области. Однако при таком подходе может оказаться, что в углах физической области сетка не будет «параллелограммной», так как соответствующие углы в каноническом и криволинейном многоугольниках могут не совпадать [2]. Для того чтобы иметь возможность обеспечить совпадение соответствующих углов исходного криволинейного многоугольника и его конформного образа, С. К. Годунов предложил рассматривать в качестве канонических многоугольников геодезические многоугольники на поверхности постоянной кривизны (сфера и плоскость Лобачевского).

Поверхность постоянной кривизны предполагается параметризованной римановыми координатами x, y, а метрика на ней — заданной в виде квадрата линейного элемента

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + \delta(x^2 + y^2))^2}, \tag{1}$$

где δ — действительное число $-1 \leqslant \delta < 1$. При $\delta > 0$ метрика (1) определена при любых значениях x, y параметрической плоскости, в том числе и бесконечных. В этом случае мы получаем геометрию Римана на поверхности положительной постоянной кривизны (сферическую геометрию). Для $\delta < 0$ при таком мероопределении в круге $x^2 + y^2 < 1/|\delta|^{1/2}$ получаем плоскость Лобачевского. При $\delta = 0$ метрика (1) определяет евклидову плоскость. Геодезическими линиями в метрике (1) являются окружности вида

$$ax + by + c[1 - \delta(x^2 + y^2)] = 0. \tag{2}$$

В случае $c\delta = 0$ ($a \neq 0$ или $b \neq 0$) геодезические (2) на параметрической плоскости x, y являются прямыми, если же $c\delta = 0$, $a = b = 0$, $c \neq 0$, то (2) задает на параметрической плоскости бесконечно удаленную прямую, не содержащую конечных точек. При $c\delta \neq 0$ получается окружность, точка или пустое множество.

Множество точек, соответствующих уравнению (2), при условии $a^2 + b^2 + 4c^2\delta < 0$ можно интерпретировать как окружность чисто мнимого радиуса, отличного от нуля; если же $a^2 + b^2 + 4c^2\delta > 0$, то (2) — окружность или прямая (окружность с центром в ∞).

Полагая $q = ax + by + c[1 - \delta(x^2 + y^2)]$, рассмотрим при фиксированном δ фундаментальную квадратичную форму от коэффициентов a, b, c:

$$\rho(q) = R(q, q) = \frac{a^2 + b^2 + 4c^2\delta}{4} \tag{3}$$

и ее поляризацию

$$R(q_1, q_2) = \frac{1}{4}[a_1a_2 + b_1b_2 + 4c_1c_2\delta]. \tag{4}$$

Необходимым и достаточным условием пересечения геодезических s_1, s_2, заданных уравнениями $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$, является условие

$$|R(q_1, q_2)|/\sqrt{\rho(q_1)\rho(q_2)} \leqslant 1. \tag{5}$$

Угол между двумя геодезическими в точке их пересечения — это вещественное число $[s_1, s_2]$ в интервале $[0, \pi/2]$, которое определяется равенством

$$\cos([s_1, s_2]) = \frac{|R(q_1, q_2)|}{\sqrt{\rho(q_1)\rho(q_2)}} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + 4\delta c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + 4\delta c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + 4\delta c_2^2}}. \tag{6}$$

Углы между геодезическими совпадают с углами между изображающими их прямыми или окружностями (2) на параметрической плоскости. Заметим, что при $\delta \neq 0$ окружности вида (2) ортогональны абсолютам $x^2 + y^2 = \operatorname{sign}\delta/|\delta|^{1/2}$.

Пусть C и C' — две несовпадающие окружности. Семейство окружностей $\mathcal{F} = \{\Gamma\colon\ \Gamma \perp c \,\&\, \Gamma \perp c'\}$ называется пучком окружностей. Если $\Gamma,\ \Gamma' \in \mathcal{F}$, то пучок окружностей $\{C\colon\ C \perp \Gamma \,\&\, C \perp \Gamma'\}$ называется ортогональным к $\mathcal{F}$ и обозначается $\mathcal{F}^{\perp}$. Отметим, что если C и C' — не концентрические окружности и $C \cap C' = \varnothing$, то найдутся две точки z_1, z_2, для которых $\mathcal{F}^{\perp} = \{C\colon\ z_1,\ z_2 \in C\}$ и, кроме того, в (2) всегда можно выбрать δ так, чтобы $\mathcal{F}^{\perp}$ являлся пучком геодезических. С другой стороны, если $C \cap C'$ состоит из двух разных точек z_1, z_2, и пучок окружностей $\mathcal{F} = \{C\colon\ z_1,\ z_2 \in C\}$, то никакие две окружности, принадлежащие $\mathcal{F}$, не имеют общих точек, и, кроме того, всегда найдется $\delta < 0$ такое, что $\mathcal{F}^{\perp}$ будет пучком геодезических.

Образуем с помощью геодезических линий в метрике (1) при фиксированном δ канонические области в плоскости x, y (четырехугольники), в которых противоположные стороны не пересекаются и каждый из углов меньше π. В геометрии Римана сумма углов канонического геодезического четырехугольника больше четырех прямых, а в геометрии Лобачевского она меньше четырех прямых, и дефект углов пропорционален площади четырехугольника. Как в геометрии Римана, так и в геометрии Лобачевского неизменяемый четырехугольник может бесконечным числом способов перемещаться на плоскости.

Иначе говоря, каждая из плоскостей (Лобачевского или Римана) может быть наложена сама на себя бесконечным числом способов с помощью непрерывной группы изометрических преобразований. Эта непрерывная группа преобразований называется группой движений соответствующей геометрии. Движения в геометриях Римана и Лобачевского могут быть представлены с помощью дробно-линейных преобразований на плоскости комплексного переменного z. Если $z = x + iy$, то всякое движение определяется уравнением вида

$$z^* = e^{i\omega}\,\frac{z - \zeta}{1 + \delta\bar{\zeta}z}, \tag{7}$$

где ω — действительное число; $|\zeta| < 1/|\delta|^{1/2}$ для $\delta < 0$; ζ — произвольное комплексное число для $\delta > 0$. Это следует из того, что

$$\frac{|dz^*|}{1 + \delta|z^*|^2} = \frac{|dz|}{1 + \delta|z|^2},$$

т. е. длина линейного элемента остается неизменной при преобразованиях (7), и абсолют переходит в абсолют. Следовательно, группа движений зависит от трех действительных параметров: ω, $\operatorname{Re}\zeta$, $\operatorname{Im}\zeta$.

Возникает естественное желание иметь возможность вычислять в рассматриваемых геометриях расстояния между точками через их координаты на параметрической плоскости. Пусть имеются две точки (x, y) и $(\xi,\ \eta)$, принадлежащие плоскости Лобачевского $(\delta < 0)$. Положим $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ и точку ζ круга радиуса $1/|\delta|^{1/2}$ переведем в его центр с помощью дробно-линейного отображения

$$z^* = e^{i\omega}\,\frac{z - \zeta}{1 + \delta\bar{\zeta}z}.$$

Из инвариантности метрики (1) при таких дробно-линейных отображениях следует, что расстояние $l(z,\ \zeta)$ между двумя точками z, ζ будет равно расстоянию от начала координат до точки z^*. Обозначим через

$$r_0 = \left|\frac{z - \zeta}{1 + \delta\bar{\zeta}z}\right|,$$

тогда

$$l(z, \zeta) = \int_0^{r_0} \frac{dr}{1 + \delta r^2} = \frac{1}{2|\delta|^{1/2}} \ln \frac{1 + |\delta|^{1/2} r_0}{1 - |\delta|^{1/2} r_0} =$$

$$= \frac{1}{2|\delta|^{1/2}} \ln \frac{1 + \dfrac{|\delta|^{1/2} \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{\sqrt{1 + 2\delta(\xi x + \eta y) + \delta^2(\xi^2 + \eta^2)(x^2 + y^2)}}}{1 - \dfrac{|\delta|^{1/2} \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{\sqrt{1 + 2\delta(\xi x + \eta y) + \delta^2(\xi^2 + \eta^2)(x^2 + y^2)}}}.$$

Из этой формулы видно, что при приближении точки z^* к абсолюту расстояние между z^* и 0 неограниченно возрастает.

В случае сферической геометрии ($\delta > 0$) расстояние между точками (x, y) и (ξ, η) также можно вычислить через их координаты на параметрической плоскости. Переводя точку $\zeta = \xi + i\eta$ комплексной плоскости в начало координат с помощью дробно-линейного отображения

$$z^* = e^{i\omega} \frac{z - \zeta}{1 + \delta\zeta z}$$

и вычислив $r_0 = \left| \dfrac{z - \zeta}{1 + \delta\bar{\zeta} z} \right|$, находим

$$l(z, \zeta) = \int_0^{r_0} \frac{dr}{1 + \delta r^2} = \frac{1}{\delta^{1/2}} \operatorname{arctg}\left(\delta^{1/2} r_0\right) =$$

$$= \frac{1}{\delta^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{\delta^{1/2} \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{\sqrt{1 + 2\delta(\xi x + \eta y) + \delta^2(\xi^2 + \eta^2)(x^2 + y^2)}}.$$

Поскольку $r_0 \leqslant 1/\delta^{1/2}$, то $l \leqslant \pi/(2\delta^{1/2})$. Это означает, что на поверхности постоянной положительной кривизны длина геодезической от одной точки до другой не превышает $\pi/(2\delta^{1/2})$.

Пусть P — канонический геодезический четырехугольник. Вершины его перенумеруем так, чтобы две последовательные вершины всегда лежали на одной и той же стороне и четырехугольник P всегда находился слева от стороны. Пусть $(x_i)_{i=1,\ldots,4}$ — именно такая нумерация вершин. В этом случае четырехугольник P однозначно определяется своими вершинами. Его стороны обозначим через $A_i = x_i x_{i+1}$ (используя соглашение, что $x_4 x_5 = x_4 x_1$), а их неевклидовы длины обозначим через a_i, $i = 1, \ldots, 4$. Углы четырехугольника $P = (x_i)_{i=1,\ldots,4}$ обозначим через

$$\alpha_i = \overline{x_{i,i-1}, x_{i,i+1}} \quad (i = 1, \ldots, 4,\ x_5 = x_1,\ x_0 = x_4).$$

Удобно нормировать канонический геодезический четырехугольник P движением так, чтобы две его соседние стороны на параметрической плоскости были прямыми. Для этого достаточно вершину x_1 передвинуть в начало координат. Кроме того, поворотом совместим сторону A_1 с осью x так, чтобы вершина x_2 лежала справа от начала координат. В дальнейшем будем придерживаться такой нормировки.

Обозначим евклидовы длины сторон A_1 и A_2 четырехугольника P на параметрической плоскости соответственно через r и s. Кроме того, определим величины θ, ψ, τ, φ равенствами

$$\alpha_1 = \pi/2 + \theta,\quad \alpha_2 = \pi/2 + \psi,\quad \alpha_3 = \pi/2 + \tau,\quad \alpha_4 = \pi/2 + \varphi.$$

Будем полагать, что $-\pi/2 < \theta, \psi, \tau, \varphi < \pi/2$. Как будет показано ниже, шесть элементов θ, ψ, τ, φ, r, s четырехугольника P связаны уравнением

$$\cos\frac{\theta+\varphi+\psi-\tau}{2}=r^2\cos\frac{\theta+\varphi-\psi+\tau}{2}\sin\frac{\theta+\varphi-\psi-\tau}{2}+$$
$$+s^2\cos\frac{\theta-\varphi+\psi+\tau}{2}\sin\frac{\theta-\varphi+\psi-\tau}{2}+2rs\cos\varphi\cos\psi-$$
$$-r^2s^2\sin\frac{\theta-\varphi-\psi+\tau}{2}\cos\frac{\theta-\varphi-\psi-\tau}{2}\sin\frac{\theta+\varphi+\psi+\tau}{2}. \qquad (8)$$

Можно задаться вопросом, нельзя ли найти для канонического геодезического четырехугольника P инвариант, необходимый, а может быть, и достаточный для того, чтобы различать два геодезических четырехугольника. В качестве такого инварианта для четырехугольника P с вершинами x_1, x_2, x_3, x_4 можно взять

$$\mu(x_1, x_2, x_3, x_4)=\sqrt{\frac{a_1a_3}{a_2a_4}}, \qquad (9)$$

где a_i — неевклидовы расстояния. Тогда μ — инвариант относительно группы движений. Покажем, что на множестве канонических геодезических четырехугольников с заданными четырьмя углами этот инвариант является характеристическим.

Рассмотрим сначала случай $\delta>0$. Поставим каноническому геодезическому четырехугольнику в соответствие выпуклый четырехугольник на сфере с теми же самыми углами и с теми же самыми неевклидовыми длинами сторон. Под выпуклым сферическим четырехугольником P будем понимать следующее. Рассмотрим сферу $S^2\subset R^3$. Пересечение сферы S^2 с полупространством, которое ограничено плоскостью, проходящей через начало координат, называется полусферой. Подмножество P сферы S^2, являющееся пересечением четырех полусфер, называется сферическим четырехугольником при дополнительных условиях, что P содержит хотя бы одну внутреннюю точку и P не содержит диаметрально противоположных точек. Определим также для выпуклого сферического четырехугольника $P=(x_i)_{i=1,\ldots,4}$ полярный четырехугольник P'. Рассмотрим точку $x_1'\in S^2$, которая является полюсом для большой окружности, проходящей через вершины x_1 и x_4, и находится в той же полусфере, что и вершины x_2, x_3. Другими словами, точку x_1' ищем из следующих четырех условий:

$$(x_1', x_1)=(x_1', x_4)=0,\quad (x_1', x_2)>0,\quad (x_1', x_3)>0.$$

Аналогично определим x_2', x_3', x_4' условиями

$$(x_2', x_2)=(x_2', x_1)=0,\quad (x_2', x_3)>0,\quad (x_2', x_4)>0,$$
$$(x_3', x_3)=(x_3', x_2)=0,\quad (x_3', x_1)>0,\quad (x_3', x_4)>0.$$
$$(x_4', x_4)=(x_4', x_3)=0,\quad (x_4', x_1)>0,\quad (x_4', x_2)>0.$$

Тогда $P'=(x_i')_{i=1,\ldots,4}$ является сферическим четырехугольником, который будем называть полярным. Для всякого сферического четырехугольника P имеем $(P')'=P$, т. е. полярный четырехугольник к полярному четырехугольнику для P есть сам исходный четырехугольник P. Обозначим восемь элементов четырехугольника $P'=(x_i')_{i=1,\ldots,4}$ через a_i', α_i'. Тогда $a_i+\alpha_i'=\alpha_i+a_i'=\pi$ для $i=1, \ldots, 4$.

Пусть P, $\overline{P}$ — два четырехугольника с вершинами соответственно $(x_i)_{i=1,\ldots,4}$ и $(\overline{x}_i)_{i=1,\ldots,4}$. Неевклидовы длины сторон и углы четырехугольников P и $\overline{P}$ обозначим соответственно через a_i, $\overline{a}_i$ и α_i, $\overline{\alpha}_i$. Для $i=1, \ldots, 4$ положим

$$\operatorname{sign}(i)=\begin{cases}+, & \text{если } \alpha_i>\overline{\alpha}_i,\\ 0, & \text{если } \alpha_i=\overline{\alpha}_i,\\ -, & \text{если } \alpha_i<\overline{\alpha}_i.\end{cases}$$

Число строгих перемен знака для пары $(P, \bar{P})$ называется количеством таких $i \in \{1, \ldots, 4\}$, что $\operatorname{sign}(i) \cdot \operatorname{sign}(i+1) = -1$ (при этом используется соглашение, что $\operatorname{sign}(5) = \operatorname{sign}(1)$).

В дальнейшем для доказательства нам понадобится лемма Коши. *Пусть P, $\bar{P}$ — такие выпуклые сферические четырехугольники, что $a_i = \bar{a}_i$ для всех $i = 1, \ldots, 4$. Тогда либо $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$ для всех $i = 1, \ldots, 4$, либо число строгих перемен знака для пары $(P, \bar{P})$ равно 4* [3].

Из этого утверждения непосредственно вытекает следующее

Утверждение. *Пусть P, $\bar{P}$ — два выпуклых сферических четырехугольника таких, что $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$, $i = 1, \ldots, 4$. Тогда, если $a_1 = \bar{a}_1'$, то $P = \bar{P}$, а если $a_1 > \bar{a}_1$,* то $\mu(x_1, x_2, x_3, x_4) > \mu(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим полярные четырехугольники P' и $\bar{P}'$, соответствующие P и $\bar{P}$, со сторонами a_i' и $\bar{a}_i'$ и углами α_i' и $\bar{\alpha}_i'$. Поскольку $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$, $i = 1, \ldots, 4$, то $a_i' = \bar{a}_i'$, $i = 1, \ldots, 4$. Следовательно, если $\alpha_i' = \bar{\alpha}_i'$, что соответствует случаю $a_1 = \bar{a}_1$, то по лемме Коши $\alpha_i' = \bar{\alpha}_i'$, $i = 2, 3, 4$. Откуда следует, что $P' = \bar{P}'$ и, следовательно, $P = P'$. В случае же, когда $\alpha_1' < \bar{\alpha}_1'$, то по лемме Коши будут выполнены неравенства $\alpha_3' < \bar{\alpha}_3'$, $\alpha_2' > \bar{\alpha}_2'$, $\alpha_4' > \bar{\alpha}_4'$. А поскольку, кроме того, $a_i + \alpha_i' = \pi$, $i = 1, \ldots, 4$, то отсюда получаем неравенства $a_1 a_3 > \bar{a}_1 \bar{a}_3$ и $a_2 a_4 < \bar{a}_2 \bar{a}_4$ и, следовательно, $\mu(x_1, x_2, x_3, x_4) > \mu(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$.

В дальнейшем без ограничения общности будем предполагать, что в рассматриваемом четырехугольнике P выполнены соотношения $\alpha_1 + \alpha_2 \geqslant \alpha_3 + \alpha_4$, $\alpha_1 + \alpha_4 \geqslant \alpha_2 + \alpha_3$. Возьмем в четырехугольнике P сторону A_1 и будем ее уменьшать, не меняя величин всех углов до тех пор, пока параметр μ не обратится в нуль. Тогда длина стороны A_4 будет монотонно возрастать до некоторого предельного значения a_4^*. Аналогично, уменьшая сторону A_4 в четырехугольнике P, не меняя величин всех углов, до тех пор, пока параметр μ не станет равным ∞, мы получим, что длина стороны A_1 будет монотонно возрастать до некоторого предельного значения a_1^*.

Заметим, что для того чтобы уравнение (8) имело вещественное положительное решение при $r \to 0$ или при $s \to 0$ при положительном дефекте углов $\varepsilon = \theta + \varphi + \psi + \tau$, необходимо потребовать, чтобы в уравнении (8) были положительны левая часть и коэффициенты при r^2 и s^2. Откуда получаем, что для того чтобы по заданным параметрам θ, φ, ψ, τ при положительном дефекте углов ε можно было построить выпуклый геодезический четырехугольник, должно быть выполнено неравенство $\tau + \pi/2 \geqslant \varepsilon/2$, т. е. минимальный угол в каноническом геодезическом четырехугольнике при положительном ε должен быть больше половины дефекта углов. На это неравенство впервые обратил внимание В. М. Гордиенко. Следовательно, в случае $\delta > 0$ мы будем рассматривать область изменения параметров r и s в пределах $0 \leqslant r \leqslant r^*$, $0 \leqslant s \leqslant s^*$, где

$$\begin{aligned} r^* &= \sqrt{\cos\frac{\theta+\varphi+\psi-\tau}{2} \Big/ \left[\cos\frac{\theta+\varphi-\psi+\tau}{2}\sin\frac{\theta+\varphi-\psi-\tau}{2}\right]}, \\ s^* &= \sqrt{\cos\theta\frac{+\varphi+\psi-\tau}{2} \Big/ \left[\cos\frac{\theta-\varphi+\psi+\tau}{2}\sin\frac{\theta-\varphi+\psi-\tau}{2}\right]}. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, все выпуклые четырехугольники с заданными четырьмя углами при $\delta > 0$ можно параметризовать длиной одной стороны. Инвариант μ при этом пробегает все значения от 0 до ∞ и является для этого множества четырехугольников характеристическим.

Рассмотрим теперь случай $\delta < 0$. Пусть P, $\bar{P}$ — два канонических геодезических четырехугольника таких, что $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$, $i = 1, \ldots, 4$. Тогда, если $a_1 = \bar{a}_1$, то $P = \bar{P}$, а если $a_1 > \bar{a}_1$, то $\mu(x_1, x_2, x_3, x_4) > \mu(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$.

Для доказательства этого утверждения заметим, что в случае, когда $a_1 > \bar{a}_1$, стороны A_2, $\bar{A}_2$ и A_3, $\bar{A}_3$ попарно не пересекаются. Поскольку площади четырехугольников P и $\bar{P}$ равны, то $a_4 > \bar{a}_4$. Аналогично доказывается, что $a_3 > \bar{a}_3$ и $a_2 < \bar{a}_2$, и, следовательно, $\mu(x_1, x_2, x_3, x_4) > \mu(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$. Пусть теперь $a_1 = \bar{a}_1$, и существует сторона A_i такая, что $a_i \neq \bar{a}_i$. Тогда из только что доказанного утверждения следует, что $a_1 \neq \bar{a}_1$. Следовательно, все канонические геодезические четырехугольники с заданными углами при $\delta < 0$ также можно параметризовать длиной одной стороны. Инвариант μ при этом пробегает все значения от 0 до ∞ и является на этом множестве канонических геодезических четырехугольников характеристическим.

Наконец, для случая $\delta = 0$ нормируем канонические четырехугольники так, чтобы площадь каждого была равна 1. Тогда, проводя аналогичные рассуждения, легко показать, что и в этом случае на множестве канонических четырехугольников с заданными четырьмя углами инвариант μ является характеристическим и с увеличением стороны A_1 инвариант μ возрастает, пробегая все значения от 0 до ∞.

Определим каноническую координатную сетку в геодезическом четырехугольнике. Для этого рассмотрим пучок геодезических вида (2), в который вкладываются нижняя и верхняя стороны канонического четырехугольника, и другой пучок геодезических (2), в который вкладываются левая и правая стороны канонического четырехугольника. Первый пучок образует «горизонтальные» координатные геодезические, а второй — «вертикальные» координатные геодезические линии канонической сетки. Заметим, что горизонтальные координатные геодезические линии, являющиеся на параметрической плоскости линиями уровня гармонической функции, не пересекаются внутри геодезического четырехугольника. Кроме того, углы между вертикальными и горизонтальными координатными геодезическими не стремятся к нулю. Это позволяет строить взаимно однозначные отображения квадрата в плоскости ξ, η на канонические области, у которых Якобиан не только не равен нулю, но фактически существуют положительные нижние границы для Якобиана, и каждое такое отображение порождает метрику

$$dx^2 + dy^2 = g_{11} d\xi^2 + 2g_{12} d\xi d\eta + g_{22} d\eta^2, \tag{11}$$

где $$g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2, \quad g_{12} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2.$$

Поскольку при заданных четырех углах имеется однопараметрическое семейство канонических геодезических четырехугольников, можно построить однопараметрическое семейство взаимно однозначных отображений, порождающих метрику (11), с метрическими параметрами, зависящими от μ, ξ и η:

$$\frac{g_{11}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = C(\mu, \xi, \eta), \quad \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = A(\mu, \xi, \eta),$$
$$\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = B(\mu, \xi, \eta). \tag{12}$$

Рассмотрим конформное отображение, описываемое функциями $\bar{u}(x, y)$, $\bar{v}(x, y)$, некоторого канонического геодезического четырехугольника из однопараметрического семейства на криволинейный четырехугольник в плоскости u, v. Будем предполагать, что углы у однопараметрического семейства канонических геодезических четырехугольников и у криволинейного четырехугольника совпадают. Далее, рассмотрим взаимно однозначное отображение квадрата D в плоскости ξ, η на упомянутый канонический геодезический четырехугольник и пусть такое отображение порождает метрику (11). Следовательно, имеется топологическое отображение квадрата D в плоскости ξ, η на криволинейный четырехугольник в плоскости u, v, являющееся суперпозицией двух отображений $u(\xi, \eta)=\bar u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, $v(\xi, \eta)=\bar v(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ и удовлетворяющее уравнению Бельтрами

$$g u_\xi = -g_{12} v_\xi + g_{11} v_\eta, \quad g u_\eta = -g_{22} v_\xi + g_{12} v_\eta, \quad g^2 = g_{11} g_{22} - g_{12}^2. \quad (13)$$

Задачу об отыскании функций $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ можно сформулировать как вариационную задачу о минимизации функционала:

$$\Phi = \iint_D \frac{g_{22}(u_\xi^2 + v_\xi^2) - 2g_{12}(u_\xi u_\eta + v_\xi v_\eta) + g_{11}(u_\eta^2 + v_\eta^2)}{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}}\, d\xi\, d\eta, \quad (14)$$

где g_{11}, g_{12}, g_{22} — функции ξ, η и параметра μ на классе функций, обладающих следующими свойствами:

1) $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ определены на квадрате D;

2) на границе ∂D области D они определены так, что устанавливают взаимно однозначное соответствие между ∂D и точками границы физической области;

3) $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ продолжаются внутрь области D произвольным образом, но так, чтобы функционал (14) был ограничен.

Определим величину $\bar\omega$ $(0 < \bar\omega < \pi)$ формулой

$$\cos\bar\omega = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$$

и заметим, что имеет место тождество [1]

$$g_{22}(u_\xi^2 + v_\xi^2) - 2g_{12}(u_\xi u_\eta + v_\xi v_\eta) + g_{11}(u_\eta^2 + v_\eta^2) \equiv$$
$$\equiv 2\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\,(u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi) + U^2 + V^2,$$

где

$$U = \sqrt{g_{22}}\left(u_\xi \sin\frac{\bar\omega}{2} + v_\xi \cos\frac{\bar\omega}{2}\right) + \sqrt{g_{11}}\left(u_\eta \sin\frac{\bar\omega}{2} - v_\eta \cos\frac{\bar\omega}{2}\right),$$
$$V = \sqrt{g_{22}}\left(-u_\xi \cos\frac{\bar\omega}{2} + v_\xi \sin\frac{\bar\omega}{2}\right) + \sqrt{g_{11}}\left(u_\eta \cos\frac{\bar\omega}{2} + v_\eta \sin\frac{\bar\omega}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\Phi \geqslant \iint_D (u_\xi v_\eta - v_\xi u_\eta)\, d\xi\, d\eta = \Phi_0.$$

Минимальное значение $\Phi = \Phi_0$ будет достигаться, если существуют функции $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$, удовлетворяющие уравнениям $U=0$, $V=0$, которые эквивалентны уравнениям Бельтрами (13). Таким образом, функции $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ из описанного класса и число μ, обеспечивающее минимум функционала Φ, определяют искомое отображение. Наша гипотеза состоит в том, что минимум функционала достигается на единственной паре функций $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ и при одном значении μ.

Заметим, что если мы будем придерживаться описанной выше нормировки для однопараметрического семейства четырехугольников с заданными четырьмя углами, то в качестве параметра, характеризующего каждый четырехугольник из этого семейства, можно взять отношение r/s, так как μ является монотонной функцией r/s.

§ 1. ПОСТРОЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Построим с помощью геодезических линий (2) при фиксированном δ четырехугольник, у которого вершина x_1 находится в начале координат $(0, 0)$. Пусть нижняя сторона A_1 геодезического четырехугольника изображается на параметрической плоскости отрезком евклидовой длины r, лежащим на оси x, левая вершина x_1 которого находится в начале координат, а правая вершина x_2 имеет координаты $(r, 0)$. Пусть левая сторона A_4 изображается на параметрической плоскости другим отрезком прямой евклидовой длины s, лежащим на луче, выходящем из начала координат под углом $(\pi/2+\theta)$ к оси x. Тогда вторая вершина x_4 на стороне A_4 геодезического четырехугольника на параметрической плоскости будет иметь координаты $(x_0, y_0)=(-s\sin\theta, s\cos\theta)$. Верхняя сторона A_3 канонического геодезического четырехугольника изображается на параметрической плоскости окружностью, проходящей через точку (x_0, y_0). Пусть эта окружность имеет касательную к окружности в точке (x_0, y_0), направленную под углом $\theta+\varphi$ к оси x. Коэффициенты a, b, c в (2) в этом случае должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{gathered} ax_0+by_0+c\left[1-\delta\left(x_0^2+y_0^2\right)\right]=0, \\ (a-2c\delta x_0)\cos(\theta+\varphi)+(b-2c\delta y_0)\sin(\theta+\varphi)=0. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Отметим, что геодезическая линия, коэффициенты a, b, c которой удовлетворяют системе (1.1) с точностью до нормированного множителя на коэффициенты, находится при заданном δ единственным образом. Нетрудно показать, что верхняя сторона A_3 канонического геодезического четырехугольника для любого фиксированного δ задается уравнением

$$\begin{gathered} [\sin(\theta+\varphi)-\delta s^2\sin(\theta-\varphi)]\,x-[\cos(\theta+\varphi)-\delta s^2\cos(\theta-\varphi)]\,y+ \\ +s\cos\varphi\,[1-\delta(x^2+y^2)]=0. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Правая сторона A_2 канонического четырехугольника изображается на параметрической плоскости окружностью, проходящей через точку $x_2=(r, 0)$. Пусть эта окружность имеет касательную в точке x_2, направленную под углом $(\pi/2-\psi)$ к оси x, т. е. задается уравнением

$$\cos\psi(1-\delta r^2)x-\sin\psi(1+\delta r^2)y-r\cos\psi[1-\delta(x^2+y^2)]=0. \tag{1.3}$$

Для того чтобы вычислить угол $(\pi/2+\tau)$ между верхней и правой сторонами канонического геодезического четырехугольника, где $-\pi/2\leqslant\tau\leqslant\pi/2$, используем формулу (6) следующим образом:

$$\begin{gathered} \cos(\pi/2+\tau)=\{[\sin(\theta+\varphi)-\delta s^2\sin(\theta-\varphi)]\cos\psi(1-\delta r^2)+[\cos(\theta+\varphi)- \\ -\delta s^2\cos(\theta-\varphi)]\sin\psi(1+\delta r^2)-4\delta rs\cos\varphi\cos\psi\}/[(1+\delta s^2)(1+\delta r^2)]. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Если бы верхняя и правая стороны при заданных θ, φ, ψ, r, s не пересекались, то правая часть в (1.4) была бы по модулю больше единицы. Этим можно контролировать, является ли фигура при заданных параметрах θ, φ, ψ, r, s четырехугольником. Мы до сих пор не фиксировали величину δ. Перепишем эквивалентно уравнение (1.4) следующим образом:

$$\begin{gathered} 2\sin\frac{\theta+\varphi+\psi+\tau}{2}\cos\frac{\theta+\varphi+\psi-\tau}{2}=\delta s^2[\sin(\theta-\varphi+\psi)-\sin\tau]+ \\ +\delta r^2[\sin(\theta+\varphi-\psi)-\sin\tau]-\delta^2 s^2 r^2[\sin(\theta-\varphi-\psi)+\sin\tau]+ \\ +4\delta rs\cos\varphi\cos\psi. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Сейчас нам удобно осуществить конкретизацию δ равенством

$$\delta=\sin\frac{\theta+\varphi+\psi+\tau}{2}. \tag{1.6}$$

Таким образом, из (1.5) и (1.6) мы получаем уравнение, связывающее параметры канонического геодезического четырехугольника:

$$\begin{gathered} \cos\frac{\theta+\varphi+\psi-\tau}{2}=r^2\cos\frac{\theta+\varphi-\psi+\tau}{2}\sin\frac{\theta+\varphi-\psi-\tau}{2}+ \\ +s^2\cos\frac{\theta-\varphi+\psi+\tau}{2}\sin\frac{\theta-\varphi+\psi-\tau}{2}+2rs\cos\varphi\cos\psi- \\ -r^2s^2\sin\frac{\theta-\varphi-\psi+\tau}{2}\cos\frac{\theta-\varphi-\psi-\tau}{2}\sin\frac{\theta+\varphi+\psi+\tau}{2}. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Без ограничения общности будем предполагать, что $\theta+\varphi \geqslant \psi+\tau$ и $\theta+\psi \geqslant \varphi+\tau$. Для того чтобы построить канонический четырехугольник по заданным параметрам θ, φ, ψ, τ, мы должны найти r и s, удовлетворяющие уравнению (1.7). Для того чтобы разрешить уравнение (1.7) при заданных параметрах θ, φ, ψ, τ относительно r и s, разделим обе части уравнения (1.7) на произведение rs и, полагая $r/s=\rho$, получим квадратное уравнение относительно произведения rs

$$\frac{1}{(rs)^2}-2B\frac{1}{rs}+C=0, \tag{1.8}$$

где

$$B=\left[\frac{1}{\rho}\cos\frac{\theta-\varphi+\psi+\tau}{2}\sin\frac{\theta-\varphi+\psi-\tau}{2}+\left(\frac{1}{\rho}\right)^{-1}\cos\frac{\theta+\varphi-\psi+\tau}{2}\times\right.$$
$$\left.\times\sin\frac{\theta+\varphi-\psi-\tau}{2}+2\cos\varphi\cos\psi\right]\Big/\left[2\cos\frac{\tau-\theta-\varphi-\psi}{2}\right],$$

$$C=\sin\frac{\theta-\varphi-\psi+\tau}{2}\cos\frac{\theta-\varphi-\psi-\tau}{2}\sin\frac{\theta+\varphi+\psi+\tau}{2}\Big/\cos\frac{\tau-\theta-\varphi-\psi}{2}.$$

Из (1.8) следует, что $\left(\frac{1}{rs}-B\right)^2=B^2-C$, откуда

$$1/(rs)=B\pm\sqrt{B^2-C}. \tag{1.9}$$

Поскольку в (1.9) нам нужно выбрать положительный корень, то

$$rs=1/(B+\sqrt{B^2-C}), \tag{1.10}$$

а так как $r=s\rho$, то

$$s=1/\sqrt{\rho(B+\sqrt{B^2-C})}. \tag{1.11}$$

Может оказаться, что оба корня уравнения (1.8) положительны. Тогда, например, при $\delta>0$ надо выбирать тот корень (rs), при котором r и s попадают в интервалы $0<r<r^*$ и $0<s<s^*$. Аналогичный анализ проводится, если $\delta<0$ и оба корня (1.8) положительны.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ КООРДИНАТНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ СЕТКИ В КАНОНИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ. СЛУЧАЙ $\delta\neq 0$

Построив по заданным параметрам θ, φ, ψ, τ и r/s канонический геодезический четырехугольник, мы определим каноническую сетку в нем. Для определения «горизонтальных» координатных геодезических линий c сетки рассмотрим верхнюю сторону четырехугольника, задаваемую уравнением

$$a_2x-d_2y+c_2[1-\delta(x^2+y^2)]=0, \tag{2.1}$$

где

$$a_2=\sin(\theta+\varphi)-\delta s^2\sin(\theta-\varphi),\quad c_2=s\cos\varphi, \tag{2.2}$$

$$d_2=\cos(\theta+\varphi)-\delta s^2\cos(\theta-\varphi), \tag{2.3}$$

и найдем на параметрической плоскости точки пересечения l_1, l_2 окружности, изображающей верхнюю сторону четырехугольника, с осью x, где числа l_1, l_2 могут быть как вещественными, так и комплексными. Нетрудно показать, что

$$l_{1,2}=\begin{cases}\dfrac{a_2\mp\mathscr{L}}{2\delta c_2}, & \text{если } a_2^2+4\delta c_2^2\geqslant 0,\\[2mm] \dfrac{a_2\mp i\mathscr{L}}{2\delta c_2}, & \text{если } a_2^2+4\delta c_2^2<0,\end{cases} \tag{2.4}$$

где

$$\mathscr{L}=\operatorname{sign}\delta\sqrt{|a_2^2+4\delta c_2^2|}. \tag{2.5}$$

Рассмотрим случай, когда l_1, l_2 — вещественные числа. Заметим, что величина δ в этом случае может быть как больше нуля, так и меньше нуля. Обозначим через $\mathscr{F}_\alpha$ пучок окружностей на параметрической плоскости, проходящих через точки $(l_1, 0)$ и $(l_2, 0)$, который параметризован углом наклона α касательной к окружности в точке $(l_1, 0)$, где $l_1 < l_2$. Тогда пучок $\mathscr{F}_\alpha$ можно записать в виде

$$-(l_1+l_2)x-(l_1-l_2)\operatorname{ctg}\alpha\cdot y+l_1l_2+x^2+y^2=0. \tag{2.6}$$

Потребуем, чтобы пучок $\mathscr{F}_\alpha$ был пучком геодезических, т. е. имел вид

$$ax+by+c[1-\delta(x^2+y^2)]=0, \tag{2.7}$$

т. е. в случае, когда $\delta>0$, $\mathscr{F}_\alpha$ был ортогонален мнимой окружности радиуса $1/\delta^{1/2}$, а в случае, когда $\delta<0$, $\mathscr{F}_\alpha$ был ортогонален окружности радиуса $1/|\delta|^{1/2}$ с центром в начале координат. Для этого необходимо, чтобы выполнялось равенство $\delta l_1 l_2=-1$. Определяя таким образом δ и пользуясь тем, что l_1, l_2 удовлетворяют соотношениям

$$\delta s\cos\varphi(l_1+l_2)=a_2,\quad \delta s\cos\varphi(l_1-l_2)=-\mathscr{L},$$

мы можем домножить (2.6) на величину $-\delta s\cos\varphi$ и записать пучок геодезических $\mathscr{F}_\alpha$ в виде

$$a_2x-\mathscr{L}\operatorname{ctg}\alpha\cdot y+c_2[1-\delta(x^2+y^2)]=0. \tag{2.8}$$

В случае, когда l_1, l_2 — комплексные числа, т. е. $a_2^2+4\delta c_2^2<0$ и, следовательно, $\delta<0$, рассмотрим на параметрической плоскости пучок окружностей $\mathscr{F}_\beta$, определяемый уравнением

$$-(l_1+l_2)x-(l_1-l_2)\operatorname{ctg}(i\beta)y+l_1l_2+x^2+y^2=0. \tag{2.9}$$

Поскольку все окружности вида (2.9) ортогональны прямой $x=(l_1+l_2)/2$ и абсолюту — окружности радиуса $1/|\delta|^{1/2}$ с центром в начале координат, где $\delta=-1/(l_1l_2)$, то $\mathscr{F}_\beta$ является пучком непересекающихся окружностей (отсутствуют вещественные точки пересечения). Преобразуя $\mathscr{F}_\beta$ аналогичным образом, как мы поступали с (2.6), получим следующее уравнение для пучка:

$$a_2x-\mathscr{L}\operatorname{cth}\beta\cdot y+c_2[1-\delta(x^2+y^2)]=0. \tag{2.10}$$

Вернемся к пучку $\mathscr{F}_\alpha$. Найдем угол пересечения и окружности (2.1), на которой лежит верхняя сторона нашего четырехугольника, с осью x в точке l_1. В этом случае l_1, l_2 являются вещественными числами, и из (2.1) и (2.8) следует, что

$$\operatorname{tg}\omega=\mathscr{L}/d_2. \tag{2.11}$$

В случае же пучка $\mathscr{F}_\beta$, т. е. когда $\delta<0$ и l_1, l_2 являются комплексными числами, величину угла Ω будем определять следующим образом:

$$\operatorname{tgh}\Omega=\mathscr{L}/d_2. \tag{2.12}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только подмножества пучков $\mathscr{F}_\alpha$, $\mathscr{F}_\beta$, зависящие от параметра η, $0\leqslant\eta\leqslant1$, у которых углы α и β определяются следующим образом: $\alpha=\eta\omega$, $\beta=\eta\Omega$.

Таким образом, если выполнено условие

$$a_2^2+4\delta c_2^2\geqslant0, \tag{2.13}$$

то мы будем рассматривать семейство координатных геодезических линий в виде

$$a_2\sin(\eta\omega)x-b_2\cos(\eta\omega)y+c_2\sin(\eta\omega)[1-\delta(x^2+y^2)]=0, \tag{2.14}$$

а если

$$a_2^2+4\delta c_2^2<0, \tag{2.15}$$

то будем рассматривать семейство горизонтальных координатных геодезических линий в виде

$$a_2 \operatorname{sh}(\eta\Omega) x - b_2 \operatorname{ch}(\eta\Omega) y + c_2 \operatorname{sh}(\eta\Omega)\,[1 - \delta(x^2 + y^2)] = 0, \qquad (2.16)$$

где

$$a_2 = \sin(\theta + \varphi) - \delta s^2 \sin(\theta - \varphi), \quad c_2 = s \cos\varphi, \qquad (2.17)$$

$$b_2 = \operatorname{sign}\delta \sqrt{|a_2^2 + 4\delta c_2^2|}, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \qquad (2.18)$$

$$d_2 = \cos(\theta + \varphi) - \delta s^2 \cos(\theta - \varphi), \qquad (2.19)$$

$$\operatorname{tg}\omega = b_2/d_2, \quad \operatorname{tgh}\Omega = b_2/d_2. \qquad (2.20)$$

Проделав аналогичную процедуру с правой и левой сторонами канонического четырехугольника, можно определить «вертикальные» координатные геодезические линии сетки следующим образом. Если выполнено условие

$$a_1^2 + 4\delta c_1^2 \geqslant 0, \qquad (2.21)$$

то вертикальные координатные геодезические изображаются на параметрической плоскости окружностями вида

$$[-b_1 \cos\theta \cos(\xi\gamma) + a_1 \sin\theta \sin(\xi\gamma)]\,x -$$
$$- [b_1 \sin\theta \cos(\xi\gamma) + a_1 \cos\theta \sin(\xi\gamma)]\,y + c_1 \sin(\xi\gamma)\,[1 - \delta(x^2 + y^2)] = 0 \qquad (2.22)$$

при $0 < \xi < 1$, причем левая сторона соответствует $\xi = 0$, а правая $\xi = 1$, где

$$a_1 = -[\sin(\theta + \psi) - \delta r^2 \sin(\theta - \psi)], \quad c_1 = r \cos\psi, \qquad (2.23)$$

$$b_1 = \operatorname{sign}\delta \sqrt{|a_1^2 + 4\delta c_1^2|}, \qquad (2.24)$$

$$d_1 = \cos(\theta + \psi) - \delta r^2 \cos(\theta - \psi), \qquad (2.25)$$

$$\operatorname{tg}\gamma = b_1/d_1. \qquad (2.26)$$

Если же выполнено условие

$$a_1^2 + 4\delta c_1^2 < 0, \qquad (2.27)$$

то вертикальные координатные геодезические линии сетки изображаются на параметрической плоскости окружностями вида

$$[-b_1 \cos\theta \operatorname{ch}(\xi\Gamma) + a_1 \sin\theta \operatorname{sh}(\xi\Gamma)]\,x -$$
$$- [b_1 \sin\theta \operatorname{ch}(\xi\Gamma) + a_1 \cos\theta \operatorname{sh}(\xi\Gamma)]\,y + c_1 \operatorname{sh}(\xi\Gamma)\,[1 - \delta(x^2 + y^2)] = 0, \qquad (2.28)$$

где a_1, b_1, c_1 имеют прежний смысл, а Γ определяется из уравнения

$$\operatorname{tgh}\Gamma = b_1/d_1. \qquad (2.29)$$

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ МЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ. СЛУЧАЙ $\delta \neq 0$

Удобно ввести функции

$$\operatorname{sinh}(\xi\gamma) = \begin{cases} \sin(\xi\gamma), & \text{если } a_1^2 + 4\delta c_1^2 \geqslant 0, \\ \operatorname{sh}(\xi\gamma), & \text{если } a_1^2 + 4\delta c_1^2 < 0, \end{cases}$$

$$\operatorname{cosh}(\xi\gamma) = \begin{cases} \cos(\xi\gamma), & \text{если } a_1^2 + 4\delta c_1^2 \geqslant 0, \\ \operatorname{ch}(\xi\gamma), & \text{если } a_1^2 + 4\delta c_1^2 < 0, \end{cases}$$

$$\operatorname{sinh}(\eta\omega) = \begin{cases} \sin(\eta\omega), & \text{если } a_2^2 + 4\delta c_2^2 \geqslant 0, \\ \operatorname{sh}(\eta\omega), & \text{если } a_2^2 + 4\delta c_2^2 < 0, \end{cases}$$

$$\cosh(\eta\omega)=\begin{cases}\cos(\eta\omega), & \text{если } a_2^2+4\delta c_2^2\geqslant 0,\\ \mathrm{ch}(\eta\omega), & \text{если } a_2^2+4\delta c_2^2<0,\end{cases}$$

где $a_1=-[\sin(\theta+\psi)-\delta r^2\sin(\theta-\psi)]$, $c_1=r\cos\psi$,

$$b_1=\operatorname{sign}\delta\sqrt{a_1^2+4\delta c_1^2},$$

$$a_2=\sin(\theta+\psi)-\delta s^2\sin(\theta-\psi),\quad c_2=s\cos\varphi,$$

$$b_2=\operatorname{sign}\delta\sqrt{|a_2^2+4\delta c_2^2|},$$

а углы γ и ω определяются из уравнений

$$\frac{\sinh\gamma}{\cosh\gamma}=\frac{b_1}{\cos(\theta+\psi)-\delta r^2\cos(\theta-\psi)},$$

$$\frac{\sinh\omega}{\cosh\omega}=\frac{b_2}{\cos(\theta+\varphi)-\delta s^2\cos(\theta-\varphi)}.$$

Введем такие функции:

$$C(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)=-b_1\cos\theta\cosh(\xi\gamma)+a_1\sin\theta\sinh(\xi\gamma),$$

$$S(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)=b_1\sin\theta\cosh(\xi\gamma)+a_1\cos\theta\sinh(\xi\gamma).$$

Рассмотрим два пучка окружностей:

$$C(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)x-S(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)y+c_1\sinh(\xi\gamma)[1-\delta(x^2+y^2)]=0,\quad (3.1)$$

$$a_2\sinh(\eta\omega)x-b_2\cosh(\eta\omega)y+c_2\sinh(\eta\omega)[1-\delta(x^2+y^2)]=0.\quad (3.2)$$

Умножая (3.1) на $c_2\sin(\eta\omega)$ и вычитая из него (3.2), умноженное на $c_1\sinh(\xi\gamma)$, получим следующую зависимость x от y:

$$x=D(\xi,\ \eta)y,\quad (3.3)$$

где

$$\sin\mathrm{h}(\eta\omega)D(\xi,\eta)=\frac{c_2\sin\mathrm{h}(\eta\omega)S(b_1,a_1,\xi\gamma)-c_1b_2\sin\mathrm{h}(\xi\gamma)\cos\mathrm{h}(\eta\omega)}{c_2C(b_1,a_1,\xi\gamma)-c_1a_2\sin\mathrm{h}(\xi\gamma)}.\quad (3.4)$$

Подставляя (3.3) в (3.2), получим квадратное уравнение относительно y следующего вида:

$$\frac{1}{y^2}-2f(\xi,\eta)\frac{1}{y}+\delta g(\xi,\eta)=0,\quad (3.5)$$

где

$$2\sin\mathrm{h}(\eta\omega)f(\xi,\eta)=\frac{b_2\cosh(\eta\omega)-a_2\sinh(\eta\omega)D(\xi,\eta)}{c_2},\quad (3.6)$$

$$g(\xi,\ \eta)=-[1+D^2(\xi,\ \eta)].\quad (3.7)$$

Из (3.5) получаем

$$y=\frac{1}{f(\xi,\eta)+\sqrt{f^2(\xi,\eta)-\delta g(\xi,\eta)}}.\quad (3.8)$$

Введем функции

$$\bar{C}(b_2,\ a_2,\ b_1,\ a_1,\ \xi\gamma,\ \eta\omega)=b_2\cosh(\eta\omega)C(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)-$$
$$-a_2\sinh(\eta\omega)S(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma),\quad (3.9)$$

$$\bar{S}(b_2,\ a_2,\ b_1,\ a_1,\ \xi\gamma,\ \eta\omega)=b_2\cosh(\eta\omega)S(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)+$$
$$+a_2\sinh(\eta\omega)C(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma).\quad (3.10)$$

С помощью (3.9) правая часть (3.6) преобразуется следующим образом:

$$2\sin\mathrm{h}(\eta\omega)f(\xi,\eta)=\frac{\bar{C}(b_2,a_2,b_1,a_1,\xi\gamma,\eta\omega)}{c_2C(b_1,a_1,\xi\gamma)-c_1a_2\sinh(\xi\gamma)}.\quad (3.11)$$

Домножая и числитель, и знаменатель (3.8) на величину $2\sinh(\eta\omega)\,[c_2 C(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)-c_1 a_2\sinh(\xi\gamma)]$ и учитывая (3.11), перепишем выражение для y в (3.8) в виде

$$y=\frac{2\sinh(\eta\omega)\,[c_2 C(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)-c_1 a_2\sinh(\xi\gamma)]}{\overline{C}(b_2,\ a_2,\ b_1,\ a_1,\ \xi\gamma,\ \eta\omega)+\mathrm{sg}\sqrt{\overline{C}^2(b_2,\ a_2,\ b_1,\ a_1,\ \xi\gamma,\ \eta\omega)+4\delta h(\xi,\ \eta)}},\tag{3.12}$$

где $$\mathrm{sg}=\mathrm{sign}\,\{\sinh(\eta\omega)\,[c_2 C(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)-c_1 a_2\sinh(\xi\gamma)]\},\tag{3.13}$$

$$h(\xi,\ \eta)=c_1^2\sinh^2(\xi\gamma)\left[a_2^2\sinh^2(\eta\omega)+b_2^2\cosh^2(\eta\omega)\right]+c_2^2\sin\mathrm{h}^2(\eta\omega)\left[a_1^2\sinh^2(\xi\gamma)+\right.$$
$$\left.+\,b_1^2\cosh^2(\xi\gamma)\right]-2c_1c_2\sinh(\xi\gamma)\sinh(\eta\omega)\,\overline{S}(b_2,\ a_2,\ b_1,\ a_1,\ \xi\gamma,\ \eta\omega).\tag{3.14}$$

Отсюда и из (3.3), (3.4) следует, что

$$x=\frac{2c_2\sinh(\eta\omega)\,S(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)-2c_1b_2\sinh(\xi\gamma)\cosh(\eta\omega)}{\overline{C}(b_2,\ a_2,\ b_1,\ a_1,\ \xi\gamma,\ \eta\omega)+\mathrm{sg}\sqrt{\overline{C}^2(b_2,\ a_2,\ b_1,\ a_1,\ \xi\gamma,\ \eta\omega)+4\delta h(\xi,\ \eta)}}.\tag{3.15}$$

Таким образом, мы разрешили систему (3.1), (3.2) относительно переменных x, y. Для того чтобы вычислить $g_{11}(\xi,\ \eta)$, $g_{22}(\xi,\ \eta)$, $g_{12}(\xi,\ \eta)$, нам понадобятся следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}C(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)=\gamma S(a_1,\ b_1,\ \Delta\xi\gamma),$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}S(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)=-\gamma C(a_1,\ b_1,\ \Delta\xi\gamma),$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\overline{C}(b_2,\ a_2,\ b_1,\ a_1,\ \xi\gamma,\ \eta\omega)=\gamma\overline{S}(b_2,\ a_2,\ a_1,\ b_1,\ \Delta\xi\gamma,\ \eta\omega),$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\overline{S}(b_2,\ a_2,\ b_1,\ a_1,\ \xi\gamma,\ \eta\omega)=-\gamma\overline{C}(b_2,\ a_2,\ a_1\ b_1,\ \Delta\xi\gamma,\ \eta\omega),$$

где $$\Delta=\begin{cases}+1, & \text{если}\quad a_1^2+4\delta c_1^2\geqslant 0,\\ -1, & \text{если}\quad a_1^2+4\delta c_1^2<0.\end{cases}$$

В дальнейшем для сокращения записи мы будем использовать такие обозначения:

$$\overline{C}=\overline{C}(b_2,\ a_2,\ b_1,\ a_1,\ \xi\gamma,\ \eta\omega),\quad \overline{S}=\overline{S}(b_2,\ a_2,\ b_1,\ a_1,\ \xi\gamma,\ \eta\omega),$$
$$h=h(\xi,\ \eta),\ z_0=\mathrm{sg}\sqrt{\overline{C}^2+4\delta h},\quad z_1=\overline{C}+z_0.$$

Вычислим y_ξ. Для этого сначала найдем

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{C(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)}{z_1}\right]=\gamma\frac{S(a_1,\ b_1,\ \Delta\xi\gamma)\,\overline{C}-\overline{S}(b_2,\ a_2,\ a_1,\ b_1,\ \Delta\xi\gamma,\ \eta\omega)\,C(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)}{z_1z_0}+$$
$$+\frac{4\gamma\delta hS(a_1,\ b_1,\ \Delta\xi\gamma)-\delta h'_\xi C(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)}{z_1^2z_0}\tag{3.16}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\sinh(\xi\gamma)}{z_1}\right]=\gamma\frac{\cosh(\xi\gamma)\,\overline{C}-\overline{S}(b_2,\ a_2,\ a_1,\ b_1,\ \Delta\xi\gamma,\ \eta\omega)\sinh(\xi\gamma)}{z_1z_0}+$$
$$+\frac{4\gamma\delta h\cosh(\xi\gamma)-2\delta h'_\xi\sinh(\xi\gamma)}{z_1^2z_0}.\tag{3.17}$$

Заметим, что имеют место равенства

$$S(a_1,\ b_1,\ \Delta\xi\gamma)\cdot\overline{C}-\overline{S}(b_2,\ a_2,\ a_1,\ b_1,\ \Delta\xi\gamma,\ \eta\omega)C(b_1,\ a_1,\ \xi\gamma)=$$
$$=-a_1b_1a_2\sinh(\eta\omega),\tag{3.18}$$

$$\cosh(\xi\gamma)\overline{C}-\overline{S}(b_2,\ a_2,\ a_1,\ b_1,\ \Delta\xi\gamma,\ \eta\omega)\sinh(\xi\gamma)=b_1C(b_2,\ a_2,\ -\eta\omega).\tag{3.19}$$

Таким образом, из (3.12), (3.16)—(3.19) следует, что

$$y_\xi = -2c_1a_2\sinh(\eta\omega)\left[\gamma b_1 C(b_2, a_2, -\eta\omega)/(z_1z_0) + \frac{4\gamma\delta h\cosh(\xi\gamma) - 2\delta h'_\xi\sinh(\xi\gamma)}{z_1^2z_0}\right] +$$
$$+ 2c_2\sinh(\eta\omega)\left[-a_1b_1a_2\gamma\sinh(\eta\omega)/(z_1z_0) + \frac{4\gamma\delta h S(a_1, b_1, \Delta\xi\gamma) - 2\delta h'_\xi C(b_1, a_1, \xi\gamma)}{z_1^2z_0}\right]. \tag{3.20}$$

Вычислим x_ξ. Для этого сначала найдем

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{S(b_1, a_1, \xi\gamma)}{z_1}\right] = -\gamma\frac{C(a_1, b_1, \Delta\xi\gamma)\cdot\overline{C} + S(b_1, a_1, \xi\gamma)\overline{S}(b_2, a_2, a_1, b_1, \Delta\xi\gamma, \eta\omega)}{z_1z_0} -$$
$$-\frac{4\gamma\delta h C(a_1, b_1, \Delta\xi\gamma) + 2\delta h'_\xi S(b_1, a_1, \xi\gamma)}{z_1^2z_0}. \tag{3.21}$$

Заметим, что имеет место равенство

$$C(a_1, b_1, \Delta\xi\gamma)\overline{C} + S(b_1, a_1, \xi\gamma)\overline{S}(b_2, a_2, a_1, b_1, \Delta\xi\gamma, \eta\omega) = a_1b_1b_2\cosh(\eta\omega). \tag{3.22}$$

Таким образом, из (3.15), (3.17), (3.21), (3.22) следует, что

$$x_\xi = -2c_1b_2\cosh(\eta\omega)\left[\gamma b_1 C(b_2, a_2, -\eta\omega)/(z_1z_0) + \frac{4\gamma\delta h\cosh(\xi\gamma) - 2\delta h'_\xi\sinh(\xi\gamma)}{z_1^2z_0}\right] -$$
$$-2c_2\sinh(\eta\omega)\left[a_1b_1b_2\gamma\cosh(\eta\omega)/(z_1z_0) + \frac{4\gamma\delta h C(a_1, b_1, \Delta\xi\gamma) + 2\delta h'_\xi S(b_1, a_1, \xi\gamma)}{z_1^2z_0}\right]. \tag{3.23}$$

Вычислим x_η и y_η. Для этого нам понадобится следующее соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\overline{C}(b_2, a_2, b_1, a_1, \xi\gamma, \eta\omega) = -\omega\overline{S}(a_2, b_2, b_1, a_1, \xi\gamma, \nabla\eta\omega), \tag{3.24}$$

где

$$\nabla = \begin{cases} +1, & \text{если } a_2^2 + 4\delta c_2^2 \geqslant 0, \\ -1, & \text{если } a_2^2 + 4\delta c_2^2 < 0. \end{cases}$$

Найдем теперь

$$\frac{\partial}{\partial\eta}[\sinh(\eta\omega)/z_1] = \omega\frac{\cosh(\eta\omega)\overline{C} + \text{sihh}(\eta\omega)\overline{S}(a_2, b_2, b_1, a_1, \xi\gamma, \nabla\eta\omega)}{z_1z_0} +$$
$$+\frac{4\omega\delta h\cosh(\eta\omega) - 2\delta h'_\eta\sinh(\eta\omega)}{z_1^2z_0} \tag{3.25}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\eta}[\cosh(\eta\omega)/z_1] = -\omega\frac{\nabla\sinh(\eta\omega)\overline{C} - \cosh(\eta\omega)\overline{S}(a_2, b_2, b_1, a_1, \xi\gamma, \nabla\eta\omega)}{z_1z_0} -$$
$$-\frac{4\nabla\omega\delta h\sinh(\eta\omega) + 2\delta h'_\eta\cosh(\eta\omega)}{z_1^2z_0}. \tag{3.26}$$

Заметим, что имеют место равенства

$$\cosh(\eta\omega)\overline{C} + \sinh(\eta\omega)\overline{S}(a_2, b_2, b_1, a_1, \xi\gamma, \nabla\eta\omega) = b_2C(b_1, a_1, \xi\gamma), \tag{3.27}$$
$$\nabla\sinh(\eta\omega)\overline{C} - \cosh(\eta\omega)\overline{S}(a_2, b_2, b_1, a_1, \xi\gamma, \nabla\eta\omega) = -a_2S(b_1, a_1, \xi\gamma). \tag{3.28}$$

Таким образом, из (3.12), (3.15), (3.25)—(3.28) следует, что

$$x_\eta=-2c_1b_2\sinh(\xi\gamma)\left[a_2\omega S(b_1,a_1,\xi\gamma)/(z_1z_0)-\frac{4\nabla\omega\delta h\sinh(\eta\omega)+2\delta h'_\eta\cosh(\eta\omega)}{z_1^2z_0}\right]+$$
$$+2c_2S(b_1,a_1,\xi\gamma)\left[b_2\omega C(b_1,a_1,\xi\gamma)/(z_1z_0)+\frac{4\omega\delta h\cosh(\eta\omega)-2\delta h'_\eta\sinh(\eta\omega)}{z_1^2z_0}\right], \tag{3.29}$$

$$y_\eta=-2c_1a_2\sinh(\xi\gamma)\left[b_2\omega C(b_1,a_1,\xi\gamma)/(z_1z_0)+\frac{4\omega\delta h\cosh(\eta\omega)-2\delta h'_\eta\sinh(\eta\omega)}{z_1^2z_0}\right]+$$
$$+2c_2CH(b_1,a_1,\xi\gamma)\left[b_2\omega C(b_1,a_1,\xi\gamma)/(z_1z_0)+\frac{4\omega\delta h\cosh(\eta\omega)-2\delta h'_\eta\sinh(\eta\omega)}{z_1^2z_0}\right]. \tag{3.30}$$

Преобразуем выражения x_ξ, x_η, y_ξ, y_η, положив

$$\delta=\delta_0/(rs). \tag{3.31}$$

Тогда

$$a_1=-[\sin(\theta+\psi)-\delta_0rs^{-1}\sin(\theta-\psi)],$$
$$b_1=\operatorname{sign}\delta\sqrt{|a_1^2+4\delta_0rs^{-1}\cos^2\psi|},$$
$$\frac{\sinh\gamma}{\cosh\gamma}=\frac{b_1}{\cos(\theta+\psi)-\delta_0rs^{-1}\cos(\theta-\psi)},$$
$$a_2=\sin(\theta+\varphi)-\delta_0sr^{-1}\sin(\theta-\varphi),$$
$$b_2=\operatorname{sign}\delta\sqrt{|a_2^2+4\delta_0sr^{-1}\cos^2\varphi|},$$
$$\frac{\sinh\omega}{\cosh\omega}=\frac{b_2}{\cos(\theta+\varphi)-\delta_0sr^{-1}\cos(\theta-\varphi)}.$$

Следовательно, величины a_1, b_1, γ, a_2, b_2, ω являются функциями параметра r/s. Кроме того, произведения

$$\delta h(\xi,\eta)=\delta_0rs^{-1}\cos^2\psi\sinh^2(\xi\gamma)\left[a_2^2\sinh^2(\eta\omega)+b_2^2\cos^2(\eta\omega)\right]+$$
$$+\delta_0r^{-1}s\cos^2\varphi\sinh^2(\eta\omega)\left[a_1^2\sinh^2(\xi\gamma)+b_1^2\cosh^2(\xi\gamma)\right]-$$
$$-2\delta_0\cos\psi\cos\varphi\sinh(\xi\gamma)\sinh(\eta\omega)\overline{S}(b_2,a_2,b_1,a_1,\xi\gamma,\eta\omega),$$
$$\delta h'_\xi=2\gamma\{\delta_0rs^{-1}\cos^2\psi\sinh(\xi\gamma)\cos h(\xi\gamma)\left[b_2^2\cosh^2(\eta\omega)+a_2^2\sinh^2(\eta\omega)\right]+$$
$$+\delta_0r^{-1}s\cos^2\varphi\sinh^2(\eta\omega)\sinh(\xi\gamma)\cosh(\xi\gamma)\left[a_1^2-\Delta b_1^2\right]-$$
$$-\delta_0\cos\psi\cos\varphi\sinh(\eta\omega)[\cos h(\xi\gamma)\overline{S}-\sinh(\xi\gamma)\overline{C}(b_2,a_2,a_1,b_1,\Delta\xi\gamma,\eta\omega)]\},$$
$$\delta h'_\eta=2\omega\{\delta_0rs^{-1}\cos^2\psi\sinh^2(\xi\gamma)\sinh(\eta\omega)\cosh(\eta\omega)\left[a_2^2-\nabla b_2^2\right]+$$
$$+\delta_0sr^{-1}\cos^2\varphi\sinh(\eta\omega)\cosh(\eta\omega)\left[b_1^2\cosh^2(\xi\gamma)+a_1^2\sin h^2(\xi\gamma)\right]-$$
$$-\delta_0\cos\psi\cos\varphi\sinh(\xi\gamma)[\cosh(\eta\omega)\overline{S}+\sinh(\eta\omega)\overline{C}(a_2,b_2,b_1,a_1,\xi\gamma,\nabla\eta\omega]\}$$

также являются функциями аргумента r/s.

Введем обозначения

$$a_{11}(\xi,\eta,rs^{-1})=-2\cos\psi b_2\cosh(\eta\omega)\left[\gamma b_1C(b_2,a_2,-\eta\omega)/(z_1z_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{4\gamma\delta h\cosh(\xi\gamma)-2\delta h'_\xi\sinh(\xi\gamma)}{z_1^2z_0}\right], \tag{3.32}$$

$$a_{12}(\xi, \eta, rs^{-1}) = -2\cos\varphi \sinh(\eta\omega)\left[a_1 b_1 b_2 \gamma \cosh(\eta\omega)/(z_1 z_0) + \right.$$
$$\left. + \left(4\gamma\delta h C(a_1, b_1, \Delta\xi\gamma) + 2\delta h'_\xi S(b_1, a_1, \xi\gamma)\right)/(z_1^2 z_0)\right],$$
$$b_{11}(\xi, \eta, rs^{-1}) = -2a_2 \cos\psi \sinh(\eta\omega)\left[\gamma b_1 C(b_2, a_2, -\eta\omega)/(z_1 z_0) + \right.$$
$$\left. + \left(4\gamma\delta h \cosh(\xi\gamma) - 2\delta h'_\xi \sinh(\xi\gamma)\right)/(z_1^2 z_0)\right], \qquad (3.33)$$
$$b_{12}(\xi, \eta, rs^{-1}) = 2\cos\varphi \sinh(\eta\omega)\left[-a_1 b_1 a_2 \gamma \sinh(\eta\omega)/(z_1 z_0) + \right.$$
$$\left. + \left(4\gamma\delta h S(a_1, b_1, \Delta\xi\gamma) - 2\delta h'_\xi C(b_1, a_1, \xi\gamma)\right)/(z_1^2 z_0)\right]. \qquad (3.34)$$

Отсюда и из (3.23), (3.20) следует, что

$$x_\xi = r a_{11}(\xi, \eta, rs^{-1}) + S a_{12}(\xi, \eta, rs^{-1}), \qquad (3.35)$$
$$y_\xi = r b_{11}(\xi, \eta, rs^{-1}) + S b_{12}(\xi, \eta, rs^{-1}). \qquad (3.36)$$

Введем функции

$$a_{21}(\xi, \eta, rs^{-1}) = -2b_2 \cos\psi \sinh(\xi\gamma)\left[a_2 \omega S(b_1, a_1, \xi\gamma)/(z_1 z_0) - \right.$$
$$\left. - \left(4\nabla\omega\delta h \sinh(\eta\omega) + 2\delta h'_\eta \cosh(\eta\omega)\right)/(z_1^2 z_0)\right], \qquad (3.37)$$
$$a_{22}(\xi, \eta, rs^{-1}) = 2\cos\varphi S(b_1, a_1, \xi\gamma)\left[b_2 \omega C(b_1, a_1, \xi\gamma)/(z_1 z_0) + \right.$$
$$\left. + \left(4\omega\delta h \cosh(\eta\omega) - 2\delta h'_\eta \sinh(\eta\omega)\right)/(z_1^2 z_0)\right], \qquad (3.38)$$
$$\varepsilon = b_2 \omega C(b_1, a_1, \xi\gamma)/(z_1 z_0) + \left(4\omega\delta h \cosh(\eta\omega) - 2\delta h'_\eta \sinh(\eta\omega)\right)/(z_1^2 z_0), \qquad (3.39)$$
$$b_{21}(\xi, \eta, rs^{-1}) = -2a_2 \cos\psi \sinh(\xi\gamma)\cdot\varepsilon, \qquad (3.40)$$
$$b_{22}(\xi, \eta, rs^{-1}) = 2\cos\varphi C(b_1, a_1, \xi\gamma)\cdot\varepsilon. \qquad (3.41)$$

Отсюда и из (3.29), (3.30) следует, что

$$x_\eta = r a_{21}(\xi, \eta, rs^{-1}) + s a_{22}(\xi, \eta, rs^{-1}), \qquad (3.42)$$
$$y_\eta = r b_{21}(\xi, \eta, rs^{-1}) + s b_{22}(\xi, \eta, rs^{-1}). \qquad (3.43)$$

Теперь с учетом (3.35), (3.36) и (3.42), (3.43) получаем

$$g_{11}(\xi, \eta) = x_\xi^2 + y_\xi^2 = r^2\left[a_{11}^2(\xi, \eta, rs^{-1}) + b_{11}^2(\xi, \eta, rs^{-1})\right] +$$
$$+ 2rs\left[a_{11}(\xi, \eta, rs^{-1}) a_{12}(\xi, \eta, rs^{-1}) + b_{11}(\xi, \eta, rs^{-1}) b_{12}(\xi, \eta, rs^{-1})\right] +$$
$$+ s^2\left[a_{12}^2(\xi, \eta, rs^{-1}) + b_{12}^2(\xi, \eta, rs^{-1})\right], \qquad (3.44)$$
$$g_{22}(\xi, \eta) = x_\eta^2 + y_\eta^2 = r^2\left[a_{21}^2(\xi, \eta, rs^{-1}) + b_{21}^2(\xi, \eta, rs^{-1})\right] +$$
$$+ 2rs\left[a_{21}(\xi, \eta, rs^{-1}) a_{22}(\xi, \eta, rs^{-1}) + b_{21}(\xi, \eta, rs^{-1}) b_{22}(\xi, \eta, rs^{-1})\right] +$$
$$+ s^2\left[a_{22}^2(\xi, \eta, rs^{-1}) + b_{22}^2(\xi, \eta, rs^{-1})\right], \qquad (3.45)$$
$$g_{12}(\xi, \eta) = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta =$$
$$= r^2[a_{11}(\xi, \eta, rs^{-1}) a_{21}(\xi, \eta, rs^{-1}) + b_{11}(\xi, \eta, rs^{-1}) b_{21}(\xi, \eta, rs^{-1})] +$$
$$+ rs[a_{11}(\xi, \eta, rs^{-1}) a_{22}(\xi, \eta, rs^{-1}) + a_{12}(\xi, \eta, rs^{-1}) a_{21}(\xi, \eta, rs^{-1}) +$$
$$+ b_{11}(\xi, \eta, rs^{-1}) b_{22}(\xi, \eta, rs^{-1}) + b_{12}(\xi, \eta, rs^{-1}) b_{21}(\xi, \eta, rs^{-1})] +$$
$$+ s^2[a_{12}(\xi, \eta, rs^{-1}) a_{22}(\xi, \eta, rs^{-1}) + b_{12}(\xi, \eta, rs^{-1}) b_{22}(\xi, \eta, rs^{-1})]. \qquad (3.46)$$

Из (3.44)—(3.46) следует, что

$$\frac{g_{11}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = C(rs^{-1}, \xi, \eta), \quad \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = A(rs^{-1}, \xi, \eta),$$
$$\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}}} = B(rs^{-1}, \xi, \eta),$$

т. е. метрические параметры зависят от ξ, η и отношения r/s.

§ 4. ПОСТРОЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ И КАНОНИЧЕСКОЙ СЕТКИ. СЛУЧАЙ $\delta = 0$

Рассмотрим пучок прямых вида

$$ax + by + c = 0. \tag{4.1}$$

Построим с помощью прямых вида (4.1) четырехугольник $P = (x_i)_{i=1,\dots,4}$, у которого вершина x_1 находится в точке $(0, 0)$ плоскости x, y. Пусть нижняя сторона A_1 лежит на оси x и вторая вершина x_2 имеет координаты $(r, 0)$, а левая сторона A_4 лежит на луче, выходящем из начала координат под углом $(\pi/2 + \theta)$ к оси x, и имеет длину s. Тогда вторая вершина x_4 на левой стороне канонического четырехугольника будет иметь координаты $x_4 = (-s\sin\theta,\ s\cos\theta)$. Пусть верхняя сторона A_3 четырехугольника P, проходящая через точку x_4, лежит на прямой, пересекающей ось x под углом $\omega = \theta + \varphi$. Кроме того, пусть эта прямая пересекает ось x в точке $(l, 0)$. Рассмотрим семейство прямых, зависящих от параметра η, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, и проходящих через точку $(l, 0)$. Пусть при $\eta = 0$ прямые этого семейства проходят через нижнюю сторону A_1 канонического четырехугольника P, а при $\eta = 1$ через верхнюю сторону A_3. Тогда уравнение семейства горизонтальных координатных линий можно записать в виде

$$\sin(\eta\omega)\, x - \cos(\eta\omega)\, y + s\cos\varphi\, \frac{\sin(\eta\omega)}{\sin(\omega)} = 0. \tag{4.2}$$

Отметим, что при $\eta = 1$ прямая семейства (4.2) будет иметь вид

$$x\sin\omega - y\cos\omega + s\cos\varphi = 0, \tag{4.3}$$

а при стремлении величины ω к нулю в (4.2) отношение $\sin(\eta\omega)/\sin\omega$ будет стремиться к η.

Предположим, что правая сторона A_2 канонического четырехугольника P пересекает ось x под углом $(\pi/2 - \psi)$ и пусть $\gamma = \theta + \psi$. Вычислим (x^*, y^*) — точку пересечения прямых, проходящих через левую и правую стороны четырехугольника:

$$x^* = r\,\frac{\cos\psi\sin\theta}{\sin\gamma}, \quad y^* = -r\,\frac{\cos\psi\cos\theta}{\sin\gamma}. \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует, что в случае, если $\gamma = 0$, точка (x^*, y^*) уходит на бесконечность, т. е. левая сторона канонического четырехугольника параллельна правой. Рассмотрим семейство прямых, зависящих от параметра ξ, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, и проходящих через точку (x^*, y^*). Пусть при $\xi = 0$ прямая этого семейства проходит через левую сторону канонического четырехугольника, а при $\xi = 1$ через правую его сторону. Тогда уравнение семейства вертикальных координатных линий можно записать в виде

$$x\cos(\theta - \xi\gamma) + y\sin(\theta - \xi\gamma) - r\cos\psi\,\frac{\sin(\xi\gamma)}{\sin\gamma} = 0. \tag{4.5}$$

Таким образом, мы получили два семейства прямых (4.2) и (4.5), с помощью которых мы определяем сетку в каноническом четырехугольнике.

Выражая из системы (4.2), (4.5) x, y через ξ, η, получаем

$$\begin{aligned} x &= r\cos\psi\,\frac{\cos(\eta\omega)\sin(\xi\gamma)}{\cos(\theta - \xi\gamma - \eta\omega)\sin\gamma} - s\cos\varphi\,\frac{\sin(\theta - \xi\gamma)\sin(\eta\omega)}{\cos(\theta - \xi\gamma - \eta\omega)\sin\omega}, \\ y &= r\cos\psi\,\frac{\sin(\eta\omega)\sin(\xi\gamma)}{\cos(\theta - \xi\gamma - \eta\omega)\sin\gamma} + s\cos\varphi\,\frac{\cos(\theta - \xi\gamma)\sin(\eta\omega)}{\cos(\theta - \xi\gamma - \eta\omega)\sin\omega}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Из (4.6) непосредственно получаем, что

$$\begin{aligned} x_\xi &= \cos(\eta\omega)\,\frac{a(\eta)}{c^2(\xi, \eta)}, \quad x_\eta = -\sin(\theta - \xi\gamma)\,\frac{b(\xi)}{c^2(\xi, \eta)}, \\ y_\xi &= \sin(\eta\omega)\,\frac{a(\eta)}{c^2(\xi, \eta)}, \quad y_\eta = \cos(\theta - \xi\gamma)\,\frac{b(\xi)}{c^2(\xi, \eta)}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где

$$a(\eta) = s\gamma\cos\varphi\frac{\sin(\eta\omega)}{\sin\omega} + r\cos\psi\cos(\theta-\eta\omega)\frac{\gamma}{\sin\gamma},$$
$$b(\xi) = s\cos\varphi\cos(\theta-\xi\gamma)\frac{\omega}{\sin\omega} + r\omega\cos\psi\frac{\sin(\xi\gamma)}{\sin\gamma}, \qquad (4.8)$$
$$c(\xi,\ \eta) = \cos(\theta-\xi\gamma-\eta\omega).$$

Нетрудно показать, что $a(\eta)>0$ и $b(\xi)>0$. Таким образом, отображение (4.6) является взаимно однозначным отображением квадрата D в плоскости $(\xi,\ \eta)$ на канонический четырехугольник P в плоскости $(x,\ y)$. Это отображение порождает метрику

$$dx^2 + dy^2 = g_{11}\,d\xi^2 + 2g_{12}\,d\xi\,d\eta + g_{22}\,d\eta^2,$$

где $g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2$, $g_{12} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$, $g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2$. Отсюда и из (4.7) получаем, что

$$\frac{g_{11}}{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}} = \frac{a(\eta)}{b(\xi)\,c(\xi,\ \eta)}, \quad \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}} = \frac{b(\xi)}{a(\eta)\,c(\xi,\ \eta)},$$
$$\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}} = -\operatorname{tg}(\theta-\xi\gamma-\eta\omega). \qquad (4.9)$$

Отметим, что эти метрические параметры зависят от ξ, η и отношения r/s.

Я сердечно благодарен Сергею Константиновичу Годунову, который поставил мне эту задачу и оказывал постоянную поддержку при выполнении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Численное** решение многомерных задач газовой динамики/С. К. Годунов, Л. В. Забродин, М. Я. Иванов и др.— М.: Наука, 1976.— 400 с.
2. **Годунов С. К., Роменский Е. И., Чумаков Г. А.** Построение разностных сеток в сложных областях с помощью квазиконформных отображений // Вычислительные проблемы в задачах математической физики.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 18).— С. 75—84.
3. **Берже М.** Геометрия.— М.: Мир, 1984.— Т. 2.— 366 с.

Л. А. МЕРЖИЕВСКИЙ, А. Д. РЕСНЯНСКИЙ, Е. И. РОМЕНСКИЙ

МОДЕЛЬ ВЯЗКОУПРУГОГО КОМПОЗИТА С МИКРОНАПРЯЖЕНИЯМИ

ВВЕДЕНИЕ

В работе предложена вязкоупругая модель для описания динамического поведения двухкомпонентных композитов — волокнистых и слоистых. В основе построения модели лежит метод феноменологического усреднения для определения эффективных характеристик композита. Хорошо разработанные математические методы осреднения для сред с периодической структурой [1, 2] в ряде случаев приводят к алгоритмически трудноразрешимым задачам, связанным с необходимостью решения вспомогательных задач на ячейке периодичности. Предлагаемый метод феноменологического усреднения не предполагает периодичности структуры. Он заключается в использовании гипотез однородности поля скоростей внутри элемента среды и в однородности компонент напря-