6. **Van Thiel M.** Compendium of Shock Wave Date // Lawrence Livermore Laboratory.— 1977.— UCRL-50108.— Vol. 3.
7. **Follasbee P. S., Frantz C. E.** Wave Propagation in the Split Hopkinson Pressure Bar // J. Eng. Mater. and Technol.— 1983.— Vol. 105.— P. 61—65.
8. **Davies E. D. H., Hunter S. C.** The Dynamic Compression Testing of Solids by the Method of the Split Hopkinson Pressure Bar // J. Mech. Phys. of Solids.— 1963.— Vol. 11.— P. 155—178.

А. В. ТЫЩЕНКО

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование предложенного В. Л. Васкевичем в работе [1] численного алгоритма решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в осесимметричных областях. Такого рода задачи часто возникают при расчете электронно-оптических систем, причем в этом случае основной акцент делается на вычислении потенциала и его нескольких производных на оси. В качестве тестовой рассматривается задача расчета потенциала в цилиндрической области со специальным выбором граничных условий.

Основная идея используемого метода восходит к идее знаменитого метода Шварца и заключается в том, что область, в которой решается задача, разбивается на подобласти, в каждой из которых ищется некоторое локальное представление искомого решения. Аналогичный подход использовался ранее в работе А. Г. Власова и Ю. А. Шапиро [2], В. Е. Шаманского [3], В. В. Курзина [4], В. В. Смелова [5], Л. Э. Цирлина [6] и т. д., в которых авторы предлагали различные способы согласования локальных представлений решения.

Метод согласования локальных разложений, используемый в данной работе, предложен и обоснован в [1]. Численная реализация этого метода для задач в областях типа микроканала изложена в [7]. К преимуществам метода следует отнести:

а) точное выполнение граничных условий, причем в каждой из подобластей разность между полученным и точным решениями гармонична;

б) возможность аналитического дифференцирования полученного решения;

в) учет априорной аналитической информации о задаче, в частности, особенности искомого решения в окрестности некоторых угловых точек границы;

г) высокая гладкость полученного осевого распределения потенциала и его производных.

Наметим, следуя [1], схему метода. Итак, требуется найти функцию $U(\rho, z) = U(\sqrt{x^2+y^2}, z)$ и осевое распределение ее нескольких производных, если

$$\begin{aligned} \Delta U(\rho, z) &= 0, \quad (\rho, z) \in \Omega, \\ U(\rho, z) &= f(\rho, z), \quad (\rho, z) \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

где Ω — осесимметричная область в $\mathbb{R}^3$. Предполагается, что эта область допускает разбиение на L осесимметричных подобластей $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_L$ и:

а) для любого $j = 1, 2, \ldots, L-1$ существуют числа z_j, α_j такие, что шар

$$B(z_j, \alpha_j) = \{(\rho, z)/\rho^2 + (z - z_j)^2 \leqslant \alpha_j^2\}$$

лежит внутри области $\Omega_j \cap \Omega_{j+1}$;

б) граница $\partial\Omega$ распадается на L частей

$$\Gamma_m = \partial\Omega_m \setminus (\partial\Omega_m \cap \Omega), \quad m = \overline{1,\ L},$$

каждая из которых — либо осесимметричная поверхность, либо окружность;

в) в каждой из областей Ω_m искомая функция представима в виде

$$U^m(\rho, z) = f^m(\rho, z) + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^m U_k^m(\rho, z), \tag{2}$$

где известные гармонические функции f^m, U_k^m удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} f_m(\rho, z) = f(\rho, z), \quad (\rho, z) \in \Gamma_m, \\ U_k^m(\rho, z) = 0, \quad (\rho, z) \in \Gamma_m. \end{gathered} \tag{3}$$

В силу последнего условия естественно брать в качестве приближения к решению в каждой из подобластей частичную сумму ряда (2):

$$U_{N_m}^m = f^m(\rho, z) + \sum_{k=1}^{Nm} X_k^m U_k^m(\rho, z).$$

Для каждого $j = 1, 2, \ldots, L-1$ выберем внутри $\Omega_j \cap \Omega_{j+1}$ точку z_j, которую будем называть точкой склейки. Возьмем параметр $\alpha_j > 0$ такой, что шар $B(z_j, \alpha_j)$ лежит в $\Omega_j \cap \Omega_{j+1}$. Пусть

$$\| U \mid W_2^1(B(z_0, \gamma)) \|^2 = \frac{1}{4\pi\gamma^2} \int\limits_{\partial B(z_0, \gamma)} |U|^2 dS + \frac{1}{4\pi\gamma} \int\limits_{B(z_0, \gamma)} |\nabla U|^2 dV,$$

тогда (см. [1])

$$\| U | W_2^1(B(z_0, \gamma)) \|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\gamma^j}{j!} \frac{\partial^j U}{\partial z^j}(0, z_0) \right]^2.$$

Минимум функционала

$$\sum_{j=1}^{-1} \| U^j - U^{j+1} \mid W_2^1(B(z_j, \alpha_j)) \|^2 = \sum_{j=1}^{L-1} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(\alpha_j)^l}{l!} \frac{\partial^l}{\partial z^l} \left(U^j(0, z_j) - U^{j+1}(0, z_j) \right) \right]^2 \tag{4}$$

равен нулю и достигается на той же последовательности X_k^j, которая дает представление (2) решения задачи (1).

Заметим, что задача минимизации функционала (4) сводится к нахождению коэффициентов X_k^j как решения следующей бесконечной системы линейных уравнений:

$$0 = \frac{(\alpha_j)^l}{l!} \frac{\partial^l}{\partial z^l} \left(U^j(0, z_j) - U^{j+1}(0, z_j) \right) = \frac{(\alpha_j)^l}{l!} \frac{\partial^l}{\partial z^l} \left(f_j(0, z_j) - f_{j+1}(0, z_j) \right) + \\ + \frac{(\alpha_j)^l}{l!} \sum_{k=1}^{\infty} \left[X_k^j \frac{\partial^l U_k^j}{\partial z^l}(0, z_j) - X_k^{j+1} \frac{\partial^l U_k^{j+1}}{\partial z^l}(0, z_j) \right], \tag{5}$$

где $j = 1, 2, \ldots, L-1$; $l = 0, 1, \ldots$.

При численном решении задачи ограничимся конечным числом N_j уравнений в каждой точке склейки z_j и аппроксимируем решение в каждой из подобластей конечным рядом, состоящим из M_m гармоник. В этих предположениях вместо бесконечной системы линейных уравнений (5) нужно решать переопределенную систему линейных уравнений

$$A_{N,M}\vec{X}_M = \vec{F}_N,$$

где

$$N = (N_1, \ldots, N_{L-1}),\ M = (M_1, \ldots, M_L),$$

$$\vec{X}_M = \left(\vec{X}^1_{M_1}, \ldots, \vec{X}^L_{M_L}\right),\quad \vec{X}^m_{M_m} = \left(X^m_1, \ldots, X^m_{M_m}\right),$$

$$\vec{F}_N = \left(\vec{F}^1_{N_1}, \ldots, \vec{F}^{L-1}_{N_{L-1}}\right),\quad \vec{F}^j_{N_j} = \left(F^j_1, \ldots, F^j_{N_j}\right),$$

$$F^j_k = \frac{\alpha_j^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\left(f^{j+1}(0, z_j) - f^j(0, z_j)\right),$$

$$A_{N,M} = \begin{bmatrix} A^1_{N_1,M_1}(z_1, \alpha_1) & -A^2_{N_1,M_2}(z_1, \alpha_1) & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A^2_{N_2,M_2}(z_2, \alpha_2) & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -A^{L-2}_{N_{L-2},M_{L-1}}(z_{L-2}, \alpha_{L-2}) & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & A^{L-1}_{N_{L-1},M_{L-1}}(z_{L-1}, \alpha_{L-1}) & -A^L_{N_{L-1},M_L}(z_{L-1}, \alpha_{L-1}) \end{bmatrix},$$

$$A^m_{P,Q}(z, \alpha) = \left\| a^m_{p,q}(z, \alpha) \right\|^{q=1,Q}_{p=1,P},$$

$$a^m_{p,q}(z, \alpha) = \frac{\alpha^{p-1}}{(p-1)!}\frac{\partial^{p-1}}{\partial z^{p-1}} U^m_q(0, z).$$

Матрицу $A_{N,M}$ будем называть базисной матрицей следов.

Автор глубоко признателен С. К. Годунову, А. М. Блохину, В. Л. Васкевичу за неоднократные содержательные и полезные обсуждения, а также А. Н. Малышеву за любезно предоставленный пакет LINA решения систем линейных уравнений.

§ 1. ПОСТАНОВКА И ОБСУЖДЕНИЕ ТЕСТОВОЙ ЗАДАЧИ

В качестве тестовой рассмотрим задачу о нахождении потенциала в бесконечном цилиндре радиуса $R = 1$. Краевые условия зададим следующим образом:

$$U(1, z) = \begin{cases} z, & z \leqslant 0, \\ 0, & z > 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\lim_{z\to\infty} |U(\rho, z)| = 0, \quad \lim_{z\to-\infty} |U(\rho, z) - z| = 0.$$

Точное решение этой задачи имеет вид

$$U(\rho, z) = \begin{cases} z - \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k J_0(j_k\rho)\, e^{j_k z}, & z \leqslant 0, \\ -\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k J_0(j_k\rho)\, e^{-j_k z}, & z > 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $A_k = 1/\left(j_k^2 J_1(j_k)\right)$, $J_0(x)$, $J_1(x)$ — функции Бесселя первого рода; j_k — положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$, упорядоченные в порядке возрастания.

Как было уже условлено, основное внимание в данной работе уделяется вычислению осевого распределения потенциала и его нескольких производных по z на оси. Заметим, что представление (7) не позволяет провести такое вычисление из-за плохой сходимости рядов в окрестности плоскости $z = 0$, поэтому для этих целей можно воспользоваться другим представлением функции $U(\rho, z)$. Для того чтобы получить такое представление, заметим, что функция $U(\rho, z)$ является решением следующей задачи Дирихле в конечном цилиндре:

$$\Delta U(\rho, z) = 0,\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ -\pi/2 \leqslant z \leqslant \pi/2,$$

$$U(1, z) = \begin{cases} z, & -\pi/2 \leqslant z \leqslant 0, \\ 0, & 0 \leqslant z \leqslant \pi/2, \end{cases}$$

$$U(\rho, -\pi/2) = -\pi/2 - \sum_{k=1}^{\infty} B_k J_0(j_k\rho),$$

$$U(\rho, \pi/2) = -\sum_{k=1}^{\infty} B_k J_0(j_k\rho),$$

где

$$B_k = \frac{e^{-j_k\pi/2}}{j_k^2 J_1(j_k)}.$$

Функцию $U(\rho, z)$ в конечном цилиндре $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $-\pi/2 \leqslant z \leqslant \pi/2$ можно представить в виде суммы двух гармонических функций

$$U(\rho, z) = \Phi_1(\rho, z) + \Phi_2(\rho, z),$$

где

$$\Phi_1(\rho, z) = \frac{1}{2}(\pi - z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2\pi} \frac{I_0((2k-1)\rho)}{I_0(2k-1)} \sin((2k-1)(z+\pi/2)),$$

$$\Phi_2(\rho, z) = -\sum_{k=1}^{\infty} B_k \left[\frac{\operatorname{sh}(j_k(\pi/2 - z))}{\operatorname{sh}(j_k\pi)} + \frac{\operatorname{sh}(j_k(\pi/2 + z))}{\operatorname{sh}(j_k\pi)}\right] J_0(j_k\rho).$$

В этом представлении функция Φ_1 принимает заданное значение на боковой поверхности цилиндра и равна нулю на торцевых поверхностях; функция Φ_2 равна нулю на боковой поверхности и принимает заданные значения на торцевых поверхностях цилиндра.

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_k^n = \frac{\partial^n \Phi_k}{\partial z^n}(0, z), \quad k = 1, 2, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$(\Phi_1^n)_N = \frac{1}{2}\frac{d^n}{dz^n}(\pi - z) + \sum_{k=1}^{N} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^2} \frac{1}{I_0(2k-1)} \frac{d^n}{dz^n}(\sin((2k-1)(z+\pi/2))),$$

$$(\Phi_2^n)_N = -\sum_{k=1}^{N} \frac{2B_k \operatorname{sh}(j_k\pi/2)}{\operatorname{sh}(j_k\pi)} \cdot \frac{d^n}{dz^n}(\operatorname{ch} j_k z).$$

Очевидно, что

$$\Phi_k^n = \lim_{N\to\infty} (\Phi_k^n)_N, \quad k = 1, 2, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Оценим остаточный член для функции Φ_1 и ее производных

$$|\Phi_1^n - (\Phi_1^n)_N| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2(2k-1)^{n-2}}{\pi I_0(2k-1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(2k-1)^{n-2}\sqrt{2k-1}\, e^{-(2k-1)}}{\sqrt{2k-1}\, e^{-(2k-1)} I_0(2k-1)} \leqslant \frac{2}{\pi M} \sum_{k=N+1}^{\infty} (2k-1)^{n-3/2} e^{-(2k-1)}, \tag{8}$$

где

$$M = \min_{z>3} \sqrt{z}\, e^{-z} I_0(z) \geqslant 0.35.$$

При $n = 0{,}1$ имеет место следующая цепочка неравенств, продолжающая неравенства (8):

$$|\Phi_n^1 - (\Phi_n^1)_N| \leqslant \frac{2}{\pi M}(2N+1)^{n-3/2} e^{-(2N+1)} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{2k-1}{2N+1}\right)^{n-3/2} e^{-(2k-2N-2)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi M}(2N+1)^{n-3/2} e^{-(2N+1)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k} \leqslant \frac{2}{\pi M}(2N+1)^{n-3/2} e^{-(2N+1)} \frac{e^2}{e^2-1} \leqslant$$

$$\leqslant 3(2N+1)^{n-3/2} e^{-(2N+1)}.$$

При $n = 2$ имеем следующую оценку:

$$|\Phi_1^2 - (\Phi_1^2)_N| \leqslant \frac{2}{\pi M} \sum_{k=N+1}^{\infty} (2k-1)^{1/2} e^{-(2k-1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2(2N+1)^{1/2} e^{-(2N+1)}}{\pi M} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{2k}{2N+1}\right)^{1/2} e^{-2k} \leqslant$$

$$\leqslant 3(2N+1)^{1/2} e^{-(2N+1)} \leqslant \frac{2e^4}{\pi M (e^2-1)^2} (2N+1)^{1/2} e^{-(2N+1)}.$$

Последнее из неравенств вытекает из того, что

$$\left(1 + \frac{2k}{2N+1}\right)^{1/2} \leqslant 1 + k; \quad \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-2k} \leqslant \frac{e^2}{(e^2-1)^2}.$$

Окончательную оценку остаточного члена запишем, вычислив численные значения констант в следующем виде:

$$|\Phi_1^2 - (\Phi_1^2)_N| \leqslant 3(2N+1)^{1/2} e^{-(2N+1)}.$$

При численных расчетах величины $(\Phi_k^n)_N$ — появляется еще одна погрешность, связанная с тем, что возникает необходимость вычисления специальной функции $I_0(z)$. На самом деле, при проведении численных расчетов удобно вычислять не функцию I_0, а функцию $r(z) = \sqrt{z} e^{-z} I_0(z)$.

Если символом $\widehat{r}$ обозначить значение функции $r(z)$, полученное с помощью той или иной аппроксимационной формулы, то предположим, что имеет место следующая оценка абсолютной точности вычисления: $|r(z) - \widehat{r}| \leqslant \mu$.

Например, аппроксимационная формула, приведенная в [8], позволяет вычислять $r(z)$ с $\mu = 1.7 \cdot 10^{-7}$. Можно получить более точные формулы.

Пусть $(\widehat{\Phi}_k^n)_N$ — значение функции $(\Phi_k^n)_N$, полученное в результате численных расчетов. Если пренебречь ошибками, связанными с погрешностью машинного выполнения арифметических операций, то имеем следующую оценку:

$$|\Phi_1^n - (\widehat{\Phi}_1^n)_N| \leqslant |\Phi_1^n - (\Phi_1^n)_N| + |(\Phi_1^n)_N - (\widehat{\Phi}_1^n)_N|.$$

Первое из слагаемых при $n = 0,\ 1,\ 2$ оценено. Оценим второе слагаемое:

$$|(\Phi_1^n)_N - (\widehat{\Phi}_1^n)_N| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{2(2k-1)^{n-3/2}}{\pi} e^{-(2k-1)} \left|\frac{1}{r(z)} - \frac{1}{\widehat{r}(z)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\mu}{\pi M^2} \sum_{k=1}^{N} (2k-1)^{n-3/2} e^{-(2k-1)} \leqslant \frac{2l^3}{\pi M^2 (e^2-1)^2} \mu \leqslant 3\mu.$$

Таблица 1

n \ N	3	6	8	10
0	$0.5\cdot10^{-4}$	$0.5\cdot10^{-7}$	$0.6\cdot10^{-9}$	$0.8\cdot10^{-11}$
1	$0.3\cdot10^{-3}$	$0.6\cdot10^{-6}$	$0.1\cdot10^{-7}$	$0.2\cdot10^{-9}$
2	$0.2\cdot10^{-2}$	$0.8\cdot10^{-5}$	$0.2\cdot10^{-6}$	$0.3\cdot10^{-8}$

Окончательно имеем, что

$$|\Phi_1^n-(\widehat{\Phi}_1^n)_N|\leqslant 3\gamma(n, N)+3\mu,$$

где $\gamma(n, N)=(2N+1)^{n-3/2}e^{-(2N+1)}$.

Таким образом, чтобы вычислить Φ_1^n с абсолютной точностью порядка 6μ, необходимо взять число слагаемых N, исходя из условия

$$\gamma(n, N)=(2N+1)^{n-3/2}e^{-(2N+1)}<\mu,\quad n=0,\ 1,\ 2.$$

В табл. 1 приведены значения $\gamma(n, N)$ при различных числах n, N. Вычислить функции Φ_2^n при $n=0$, 1, 2 с заданной абсолютной точностью несложно, так как соответствующие ряды сходятся очень быстро.

Итак, получено представление функции $U=\Phi_1+\Phi_2$, позволяющее организовать вычисление самой функции и ее производных на оси в окрестности плоскости $z=0$. Для $n=0$, 1, 2 получены оценки точности проводимых вычислений. Приведенные в табл. 5 значения

$$\frac{\partial^n U(0, z)}{\partial z^n}$$

вычислены с абсолютной точностью порядка 10^{-6}.

§ 2. РАЗЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ШАРЕ

Одной из подобластей, часто используемой при численной реализации предлагаемой методики, является шар с некоторой «особой» окружностью C на его границе. Предполагается, что окружность C лежит в плоскости $z=\text{const}$. В окрестности этой особой окружности решение исходной задачи может иметь ту или иную особенность.

В [9] была предложена последовательность гармонических осесимметрических функций U_k, $k\geqslant 0$, являющихся базисом в шаре с «особой» окружностью. В [7] приведены рекуррентные формулы, позволяющие организовать вычисления как этих функций, так и всех их производных по z на оси симметрии (эта операция необходима для построения базисной матрицы следов, см. введение). Функция $U_1\equiv 1$, а начиная со второго все члены этой последовательности являются гармоническими полиномами, обращающимися в нуль на окружности C. Функция U_0 разрывна в окрестности окружности C.

В практических расчетах возникают ситуации, когда в окрестности окружности C искомая функция непрерывна, однако ее первые производные имеют особенность. Подобная ситуация имеет место, например, для функции, задающей поле диафрагмы. Поэтому такую функцию предлагается брать в качестве одной из базисных функций в шаре.

Известно, что решением следующей краевой задачи (поле одиночной диафрагмы, см., например [10, упр. 472]):

$$\Delta T(\rho, z)=0,\quad T(\rho, 0)=0,\quad \rho\geqslant 1,$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\partial T}{\partial z}=-1,\quad \lim_{z\to-\infty}\frac{\partial T}{\partial z}=0$$

является функция

$$T(\rho, z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\pi}\left(1 - \operatorname{sh}\alpha \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\right)\cos\beta - z, & z \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{\pi}\left(1 - \operatorname{sh}\alpha \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\right)\cos\beta, & z < 0, \end{cases}$$

где (α, β) — вырожденные эллипсоидальные координаты, связанные с координатами (ρ, z) формулами

$$\rho = \operatorname{ch}\alpha \sin\beta, \quad z = \operatorname{sh}\alpha\cos\beta.$$

В этой системе координат лучу $\rho = 0$, $z > 0$ соответствуют координаты $\alpha > 0$, $\beta = 0$, а лучу $\rho = 0$, $z < 0$ — координаты $\beta = \pi$, $\alpha > 0$. На оси симметрии имеет место следующее соотношение: $\operatorname{sh}\alpha = |z|$. Воспользовавшись тем, что

$$\operatorname{arctg} z^{-1} = \begin{cases} \operatorname{arcctg} z, & z \geqslant 0, \\ \operatorname{arcctg} z - \pi, & z < 0, \end{cases}$$

можно получить осевое распределение потенциала

$$T(0, z) = \frac{1}{\pi}(z \operatorname{arcctg} z - 1) - z, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Построим рекуррентные формулы, позволяющие организовать вычисление

$$t_k = \frac{\gamma^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} T(0, z).$$

Прежде всего, пусть

$$f_k = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}(z \operatorname{arcctg} z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z \operatorname{arcctg} z, \\ f_2(z) &= \operatorname{arcctg} z - z/(1+z^2), \\ f_3(z) &= -2/(1+z^2)^2, \\ f_4(z) &= \frac{8z}{(1+z^2)^3} = -\frac{4z}{(1+z^2)} f_3. \end{aligned}$$

Последнее равенство можно переписать следующим образом:

$$(1+z^2) f_4 + 4z f_3 = 0.$$

Продифференцировав его l раз ($l = 0, 1, \ldots$), получим

$$(1+z^2) f_{4+l} + 2z(l+2) f_{3+l} + l(l+3) f_{2+l} = 0.$$

Отсюда

$$f_{4+l} = -\frac{1}{1+z^2}\left(2z(l+2) f_{3+l} + l(l+3) f_{2+l}\right), \quad l = 0, 1, \ldots.$$

Так как $t_k = \dfrac{\gamma^{k-1}}{(k-1)!} f_k$, то окончательные формулы для вычисления t_k имеют вид:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\pi}(z \operatorname{arcctg} z - 1) - z, \\ t_2 &= \frac{\gamma}{\pi}\left(\operatorname{arcctg} z - \frac{z}{1+z^2}\right) - \gamma, \\ t_3 &= -\frac{\gamma^2}{2\pi}\left(\frac{2}{(1+z^2)^2}\right), \end{aligned}$$

$$t_4 = -\frac{4\gamma}{3}\cdot\frac{z}{1+z^2}t_3,$$

$$t_{4+l} = -\frac{1}{1+z^2}\left(\frac{2\gamma z(l+2)}{l+3}t_{3+l} + \frac{l\gamma^2}{l+2}t_{2+l}\right).$$

§ 3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА

Согласно предлагаемой методике (см. введение), для того чтобы найти гармоническую в бесконечном цилиндре функцию, удовлетворяющую краевым условиям (3), необходимо прежде всего разбить счетную область на подобласти. Для этой задачи в качестве подобластей предлагается взять следующие:

$$\Omega_1 = \{(\rho, z)/\rho \leqslant 1,\ z \leqslant 0\},$$
$$\Omega_2 = \{(\rho, z)/z^2 + \rho^2 \leqslant 1\},$$
$$\Omega_3 = \{(\rho, z)/\rho \leqslant 1,\ z \geqslant 0\}.$$

В областях Ω_1 и Ω_3 искомая функция представляется в виде

$$U^{(l)} = f_l(\rho, z) + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^l U_k^l(\rho, z), \quad l = 1, 3,$$

где

$$f_1(\rho, z) = z, \quad U_k^1(\rho, z) = J_0(j_k\rho)\, e^{j_k z},$$
$$f_3(\rho, z) = 0, \quad U_k^3(\rho, z) = J_0(j_k\rho)\, e^{-j_k z}.$$

В области Ω_2 искомую функцию будем аппроксимировать рядом

$$U^2(\rho, z) = X_1^2 T(\rho, z) + \sum_{k=2}^{\infty} X_k^2 U_k^2(\rho, z),$$

где $T(\rho, z)$, $U_k^2(\rho, z) = U_k(\rho, z)$ — введенные в § 2 функции.

Базисная матрица следов для задачи (3) с базисными функциями U_k^l имеет блочный вид

$$A_{N,M} = \begin{bmatrix} A^1_{N_1,M_1}(z_1^*, \alpha_1) & -A^2_{N_1,M_2}(z_1^*, \alpha_1) & 0 \\ 0 & A^2_{N_2,M_2}(z_2^*, \alpha_2) & -A^3_{N_2,M_3}(z_2^*, \alpha_2) \end{bmatrix},$$

а вектор правых частей

$$\vec{F}_N = (z_1^*, \alpha_1, 0, \ldots, 0)^T.$$

Итак, задача о решении уравнения Лапласа в бесконечном цилиндре

Таблица 2

z_1^* z_2^*	α_1 α_2	$\mu(A_{N,M})$	$\Theta(A_{N,M}, F_N)$	X_1^1
—0.5 0.5	0.5 0.5	$4.04\cdot10^5$	$8.13\cdot10^{-7}$	—0.324
—0.5 0.5	0.25 0.25	$1.28\cdot10^8$	$2.24\cdot10^{-10}$	—0.323
—0.5 0.5	0.7 0.7	$1.14\cdot10^4$	$1.31\cdot10^{-4}$	—0.323
—0.7 0.7	0.3 0.3	$3.48\cdot10^7$	$6.62\cdot10^{-10}$	—0.316

Таблица 3

$N=(N_1, N_2)$ $M=(M_1, M_2, M_3)$	$\mu(A_{N,M})$	$\Theta(A_{N,M}, F_N)$	X_1^1
32, 32 11, 20, 11	$5.68\cdot10^7$	$6.3\cdot10^{-10}$	—0.32912
40, 40 14, 24, 14	$2.01\cdot10^9$	$2.3\cdot10^{-11}$	—0.33031
55, 55 17, 30, 17	$2.64\cdot10^{11}$	$3.3\cdot10^{-10}$	—0.33085

Таблица 4

X_1^1	—0.32912	—0.33010	—0.330844	—0.33075
X_2^1	0.0904	0.0919	0.0930	0.0964
X_3^1	—0.0416	—0.0435	—0.0448	—0.0492
X_4^1	0.0221	0.0243	0.0260	0.0309
X_5^1	—0.0121	—0.0143	—0.0161	—0.0217
X_6^1	0.0063	0.0084	0.0102	0.0163

с краевыми условиями (3) сведена к алгебраической системе линейных уравнений:

$$A_{N,M}X_M = F_N.$$

Базисная матрица следов $A_{N,M}$ (а следовательно, и такие характеристики, как число обусловленности $\mu(A_{N,M})$ и несовместимость линейной системы $\Theta(A_{N,M}, F)$ зависит от размерности системы $N=(N_1, N_2)$, $M = (M_1, M_2, M_3)$, точек склейки $\overset{*}{z}_1$, $\overset{*}{z}_2$ и радиусов α_1, α_2 шаров, вписанных в области $\Omega_1 \cap \Omega_2$ и $\Omega_2 \cap \Omega_3$.

В табл. 2 приведены значения числа обусловленности $\mu(A_{N,M})$ и несовместимости $\Theta(A_{N,M}, F_N)$ в зависимости от $\overset{*}{z}_1$, $\overset{*}{z}_2$, α_1 и α_2. В последнем столбце этой таблицы приведены значения полученного коэффициента X_1^1 (точное его значение $X_1^1 = 0.3307503\ldots$). Значения N и M выбраны следующим образом: $N=(30, 30)$, $M=(7, 10, 7)$. Формально говоря, параметры α_1 и α_2 в матрице $A_{N,M}$ выполняют роль нормирующих множителей, и поэтому могут выбраться достаточно произвольно. В первой строке таблицы эти параметры выбраны согласно теоретическим рекомендациям, т. е. центры шаров $\overset{*}{z}_1$, $\overset{*}{z}_2$ и радиусы α_1, α_2 определяют максимальные шары, вписанные в области $\Omega_1 \cap \Omega_2$ и $\Omega_2 \cap \Omega_3$. Во второй строке таблицы радиусы уменьшены. В этом случае резко выросло число обусловленности алгебраической системы, что приводит, например, к некоторому ухудшению вычисления коэффициента X_1^1. В третьей строке радиусы α_1 и α_2 увеличены. В этом случае число обусловленности уменьшилось, но при этом резко увеличилась несовместимость системы, что опять же приводит к потере точности.

Всюду далее в этом параграфе предполагается, что $-\overset{*}{z}_1 = +\overset{*}{z}_2 = 0.5$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$. В табл. 3 приведены значения $\mu(A_{N,M})$ и $\Theta(A_{N,M}, F_N)$ при различных размерностях $N=(N_1, N_2)$ и $M=(M_1, M_2, M_3)$. Кроме того, в последнем столбце этой таблицы приведены значения полученного коэффициента X_1^1.

В табл. 4 представлены первые шесть коэффициентов X_k^1. В первой строке они получены при $N=(32, 32)$, $M=(11, 20, 11)$, во второй —

Таблица 5

z	$U^{I}(0,z)$ $D_zU^{I}(0,z)$ $D_z^2U^{I}(0,z)$	$U^{II}(0,z)$ $D_zU^{II}(0,z)$ $D_z^2U^{II}(0,z)$	$U^{III}(0,z)$ $D_zU^{III}(0,z)$ $D_z^2U^{III}(0,z)$	$U(0,z)$ $D_zU(0,z)$ $D_z^2U(0,z)$
—2.0	—2.00270 0.99352 —0.01555	—2.00270 0.99352 —0.01555	Нет	—2.002713 0.993480 —0.015653
—1.0	—1.02950 0.93016 —0.16194	—1.02950 0.93016 —0.16194	Нет	—1.029692 0.929667 —0.162743
—0.5	—0.59405 0.78903 —0.43170	—0.59405 0.78903 —0.43170	Нет	—0.594550 0.788248 —0.431852
0	—0.26663 0.50000 —0.66605	—0.26663 0.50000 —0.66605	—0.26663 0.50000 —0.66605	—0.267453 0.500000 —0.663144
0.5	Нет	—0.09405 0.21097 —0.43170	—0.09405 0.21097 —0.43170	—0.094550 0.211751 —0.431852
1.0	Нет	—0.02951 0.06984 —0.16194	—0.02951 0.06984 —0.16194	—0.029693 0.070253 —0.162743
2.0	Нет	—0.00270 0.00648 —0.01555	—0.00270 0.00648 —0.01555	—0.002713 0.006520 —0.015653

при $N=(40,\ 40)$, $M=(14,\ 24,\ 14)$, в третьей — при $N=(55,\ 55)$, $M=(17,\ 30,\ 17)$. Точные значения коэффициентов X_k^1 приведены в четвертой строке.

В табл. 5 приведены сравнительные результаты распределения потенциала и его производных на оси в интервале $(-2,\ 2)$. В этом случае расчеты, проведены для матрицы $A_{N,M}$ размером $N=(55,\ 55)$, $M=(17,\ 30,\ 17)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васкевич В. Л.** К приближенному решению задачи Дирихле в составных пространственных областях // Численный анализ.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 15).— С. 93—126.
2. **Власов А. Г., Шапиро Ю. А.** Методы расчета эмиссионных электронно-оптических систем.— Л.: Машиностроение, 1974.— 194 с.
3. **Шаманский В. Е.** Приближенный метод решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР.— 1955.— Т. 100, № 6.— С. 1049—1052.
4. **Курзин В. Б.** Об одном методе склеивания для решения линейных краевых задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1969.— Т. 9, № 5.— С. 1184—1188.
5. **Смелов В. В.** Обоснование итерационного процесса по подобластям для задач теории переноса в нечетном P_{2n+1} приближении.— Новосибирск, 1980.— 27 с.— (Препр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычисл. центр; № 71).
6. **Цирлин Л. Э.** Избранные задачи расчета электрических и магнитных полей.— М.: Сов. радио, 1977.— 320 с.
7. **Васкевич В. Л., Тыщенко А. В.** Приближенное решение задачи Дирихле в областях типа микроканала // Вычислительные проблемы в задачах математической физики.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 18).— С. 111—122.
8. **Справочник** по специальным функциям/Под ред. Абрамовица М., Стриган И.: Пер. с англ.— М.: Наука, 1979.
9. **Васкевич В. Л.** Об одной системе гармонических полиномов в пространстве // Краевые задачи для уравнений с частными производными.— Новосибирск, 1988.— С. 53—64.
10. **Лебедев Н. Н.** Сборник задач по математической физике.— М.: Гостехиздат, 1954.— 420 с.