АЛГОРИТМ ГАРАНТИРОВАННОЙ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛУРЬЕ — РИККАТИ

А. Я. Булгаков

В данной работе предлагается алгоритм гарантированной точности решения простейшего матричного уравнения Лурье — Риккати

$$A^*\Lambda + \Lambda A + 2\|A\|[C^*(CFC^*)^{-1}C - \Lambda B(B^*GB)^{-1}B^*\Lambda] = 0. \tag{0.1}$$

Как известно (см. [1]), при естественных предположениях о стабилизируемости пары (A, B) и детектируемости пары (C, A) существует единственное неотрицательно определенное решение Λ ($\Lambda = \Lambda^* \geqslant 0$) уравнения (0.1). Исследуя проблему разрешимости уравнения (0.1), С. К. Годунов [2] предложил дополнить это уравнение его дуальным уравнением

$$MA^* + AM + 2\|A\|[B(B^*GB)^{-1}B^* - MG^*(CFC^*)^{-1}CM] = 0 \tag{0.2}$$

и двумя матричными уравнениями Ляпунова

$$\begin{aligned} &HK^* + KH + 2\|A\|G^{-1} = 0,\\ &EL + L^*E + 2\|A\|\,\|C^*(CFC^*)^{-1}C\|I = 0, \end{aligned} \tag{0.3}$$

где

$$\begin{aligned} &K = A - 2\|A\|B(B^*GB)^{-1}B^*\Lambda,\\ &L = A - 2\|A\|MC^*(CFC^*)^{-1}C. \end{aligned} \tag{0.4}$$

Оказалось естественным с многих точек зрения использовать в качестве меры обусловленности уравнения (0.1) величины $\|\Lambda\|$, $\|M\|$, $\|\mathrm{P}\|$, $\|E\|$.

Для решения уравнения (0.1) С. К. Годунов [3] предложил вычислять проекторы на максимальные инвариантные подпространства матрицы

$$W = \begin{bmatrix} A & 2\|A\|B(B^*GB)^{-1}B^* \\ 2\|A\|C^*(CFC^*)^{-1}C & -A^* \end{bmatrix}, \tag{0.5}$$

составленной из коэффициентов уравнения (0.1), отвечающие собственным значениям, расположенным строго в левой и правой полуплоскостях числовой комплексной плоскости. В работе [3] отмечено также, что искомое решение хорошо аппроксимируется решением краевой двухточечной задачи ($0 \leqslant t \leqslant T$)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} X(t)\\ Y(t)\end{bmatrix} = W\begin{bmatrix} X(t)\\ Y(t)\end{bmatrix}, \quad L\begin{bmatrix} X(0)\\ Y(0)\end{bmatrix} = I, \quad R\begin{bmatrix} X(T)\\ Y(T)\end{bmatrix} = 0, \tag{0.6}$$

$$L = [\,I_{2N} \quad 0\,], \quad R = [\,0 \quad I_{2N}\,],$$

а именно матрицей $Y(0)$. Использовать задачу (0.6) для решения уравнения Лурье — Риккати (0.1) С. К. Годунов предлагал еще при выполнении работы [2], предшествовавшей [3], когда автор настоящей работы

© 1994 А. Я. Булгаков

экспериментировал по просьбе С. К. Годунова с некоторым вариантом расчетного метода. Однако при написании статьи [2] С. К. Годунов отказался от использования (0.6), так как для поставленной в [2] задачи — выработка метрического определения степени стабилизируемости — такой подход оказался не очень удобным. В настоящей работе показано, что для решения общей задачи (0.1), хорошая обусловленность которой гарантируется одновременной ограниченностью величин $\|\Lambda\|$, $\|M\|$, $\|H\|$, $\|E\|$, целесообразно использовать именно процедуру, основанную на расчете краевой задачи (0.6) при достаточно большом T. Отыскание таким способом приближенного решения позволяет либо констатировать плохую обусловленность поставленной задачи, либо утверждать, что оно может быть использовано в качестве начального приближения для известной сходящейся процедуры уточнения типа метода Ньютона. В данной работе такой алгоритм сформулирован и исследован. При этом обоснована гарантированная точность получаемого с его помощью решения Лурье — Риккати (0.6), хорошо обусловленного по определению из [3].

Опыт создания алгоритмов гарантированной точности для решения матричного уравнения Ляпунова [4–6], дихотомии матричного спектра [7–10] показал, что, приступая к разработке таких алгоритмов, необходимо прояснить четыре основных вопроса:

— обусловленность задачи,
— зависимость от точности задания входных данных,
— проблема невязки,
— алгоритм, точность которого зависит от разрядной сетки используемой ЭВМ и от обусловленности задачи.

Основным результатом данной работы является новый алгоритм решения матричного уравнения Лурье — Риккати. Для этого алгоритма проведен полный анализ влияния ошибок округления.

В § 1 сформулирован алгоритм и получены оценки влияния ошибок округления. В § 2 установлены оценки зависимости решений от входных данных и рассмотрена проблема невязки. В § 3 выведены оценки матриц Грина и решений некоторой краевой задачи.

Данная работа является еще одним из вариантов развития идеи, предложенной в [11–13].

§ 1. Алгоритм

В этом параграфе детально изложен алгоритм гарантированной точности решения матричного уравнения Лурье —Риккати. В п. 1.1 описана общая схема, первый этап алгоритма рассмотрен в п. 1.2. В п. 1.3 получена оценка краевой задачи после дискретизации, а в п. 1.4 проведен учет влияния ошибок округления на первом этапе алгоритма.

1.1. Общая схема алгоритма. Рассмотрим матричное уравнение Лурье —Риккати (0.1). Следуя работе [3], мы дополним его дуальным уравнением (0.2), а также двумя матричными уравнениями Ляпунова (0.3) при условии (0.4). Требуется найти матрицы Λ, M, H, E такие, что

$$\Lambda = \Lambda^* \geqslant 0, \quad M = M^* \geqslant 0, \quad H = H^* > 0, \quad E = E^* > 0. \tag{1.1}$$

Хорошо известно, что если пара матриц (A, B) стабилизируема, а пара (C, A) детектируема, то поставленная задача однозначно разрешима.

Пусть заданы числа λ^*, m^*, h^*, e^*, определяющие допустимые пороговые значения искомых матриц Λ, M, H, E. Если в процессе расчета окажется, что поставленная задача не разрешима или выполняется одно из неравенств

$$\|M\| \geqslant m^*, \quad \|H\| \geqslant h^*, \quad \|E\| \geqslant e^*, \quad \|\Lambda\| \geqslant \lambda^*,$$

то алгоритм завершает свою работу, а его результатом является утверждение о плохой обусловленности исходной задачи. Так как матрицы K, L гурвицевы, имеем $\varkappa(K) < \infty$, $\varkappa(L) < \infty$,

$$H = 2\|A\| \int_0^\infty e^{tK} G^{-1} e^{tK^*}\, dt,$$

$$E = 2\|A\| \int_0^\infty e^{tL^*} \|C^*(CFC^*)^{-1}C\| e^{tL}\, dt,$$

$$\frac{\|A\|\varkappa(K^*}{\|K\|\,\|G\|)} \leqslant \|H\| \leqslant \|G^{-1}\|\,\|A\| \frac{\varkappa K^*}{\|K\|},$$

$$\frac{\|A\|\varkappa(L)}{\|L\|\,\|F\|} \leqslant \|E\| = 2\|A\|\,\|C^*(CFC^*)^{-1}C\| \leqslant \|A\|\|F^{-1}\| \frac{\varkappa(L)}{\|L\|}.$$

Поэтому для оценки обусловленности матричного уравнения Лурье — Риккати наряду с параметрами $\|\Lambda\|$, $\|M\|$, $\|H\|$, $\|E\|$ можно использовать также $\|A\|\varkappa(K^*)/\|K\|$ и $\|A\|\varkappa(L)/\|L\|$ вместо $\|H\|$ и $\|E\|$.

Перейдем к последовательному описанию общей схемы алгоритма.

ЭТАП 1. На этом этапе мы предполагаем, что наша задача хорошо обусловлена, т. е. существуют единственные матрицы Λ, M, H, E, удовлетворяющие (0.1)–(0.3) при условиях (0.4), (1.1), а также верны оценки

$$\|M\| < m^*, \quad \|H\| < h^*, \quad \|E\| < e^*, \quad \|\Lambda\| < \lambda^*. \tag{1.2}$$

Основной целью этапа 1 является решение краевой двухточечной задачи (0.6) с матрицей W вида (0.5).

Как известно, хорошая обусловленность двухточечной краевой задачи зависит от ее трех матриц Грина $G(t)$, $G_L(t)$, $G_R(t)$ (см. [14]). По определению эти матричные функции являются ограниченными решениями трех краевых задач

$$\frac{dG(t)}{dt} = WG(t) + \delta(t)I, \qquad -\infty \leqslant t \leqslant \infty,$$

$$\frac{dG_L(t)}{dt} = WG_L(t), \quad LG_L(0) = I, \quad RG_L(t) = 0;$$

$$\frac{dG_R(t)}{dt} = WG_R(t), \quad LG_R(0) = 0, \quad RG_R(t) = I.$$

Можно показать, что верны неравенства

$$\|G(t)\| \leqslant \alpha e^{-\beta|t|}, \quad -\infty \leqslant t \leqslant \infty;$$

$$\|G_L(t)\| \leqslant \gamma_1 e^{-\beta t} + \gamma_2 e^{-\beta(T-t)},$$

$$\|G_R(t)\| \leqslant \alpha_2 e^{-\beta(T-t)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где

$$\beta = \|K\|/\varkappa(K^*), \quad \alpha = \{\varkappa(K^*)(1+\|\Lambda\|^2)\}^{1/2} + [\varkappa(K^*)]^{1/2}\|H\|(1+\|\Lambda\|^2),$$
$$\alpha_1 = \gamma_1 + \varkappa(K^*)\|(I-\Lambda S)^{-1}\Lambda\|\gamma_2,$$
$$\alpha_2 = [\varkappa(K^*)]^{1/2} 2(1+\|\Lambda\|\,\|M\|)\max\{\|S\|, 1+\|\Lambda\|\,\|S\|\},$$
$$\gamma_1^2 = \varkappa(K^*)(1+\|\Lambda\|^2), \quad \gamma_2 = \max\{\|S\|, 1+\|\Lambda\|\,\|S\|\}.$$

Матрица $Y(0,T)$ с ростом T стремится к Λ. Скорость сходимости зависит от обусловленности исходной задачи. Для решения этой задачи в § 2 предлагается итерационная процедура, на каждом следующем шаге которой интервал краевой задачи удваивается, а сама процедура начинается с не слишком маленького интервала $\tau = 0.5/\|W\|$.

Ясно, что если $T = 2^l\tau$, то решения задачи (0.6) в соседних точках связаны соотношениями

$$\begin{bmatrix} X((n-1)\tau) \\ Y((n-1)\tau) \end{bmatrix} = e^{-\tau W} \begin{bmatrix} X(n\tau) \\ Y(n\tau) \end{bmatrix} \qquad (n = 1, 2, \ldots, 2^l),$$

т. е., обозначив $A_0 = e^{-\tau W}$, $B_0 = -I$, мы приходим к дискретному аналогу задачи (0.6):

$$B_0 \begin{bmatrix} X((n-1)\tau) \\ Y((n-1)\tau) \end{bmatrix} + A_0 \begin{bmatrix} X(n\tau) \\ Y(n\tau) \end{bmatrix} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, 2^l),$$
$$X(0) = I, \quad Y(T) = 0.$$

Этот этап подробно рассмотрен в § 2, 3. Здесь ограничимся следующим замечанием: можно так организовать процесс решения задачи (0.6), (0.5), что либо будет зафиксировано нарушение одного из неравенств (1.2), либо мы получим матрицу $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\Lambda}^* \geqslant 0$ такую, что при условиях (1.2) верно неравенство $\|\Lambda - \widetilde{\Lambda}\| \leqslant \delta$ для достаточно малого δ (например, $\delta \leqslant 1/(30\mu(G)h^*)$). Величина δ выбирается так, чтобы обеспечить сходимость итерационного процесса уточнения найденного приближения Λ.

ЭТАП 2. После завершения этапа 1 мы имеем расположенную в машинной памяти матрицу $\widetilde{\Lambda}$ ($\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\Lambda}^* \geqslant 0$) такую, что в случае хорошей обусловленности исходной краевой задачи верно неравенство $\|\widetilde{\Lambda} - \Lambda\| \leqslant \delta$. На этапе 2 вычисляются

— матрица $\widetilde{K} = A - 2\|A\|B(B^*GB)^{-1}B^*\widetilde{\Lambda}$;

— параметр $\varkappa(\widetilde{K}^*)$ (качество устойчивости матрицы $\widetilde{K}^*$).

Затем проверяется неравенство

$$\frac{\varkappa(\widetilde{K}^*)}{\|\widetilde{K}\|} \leqslant \frac{1.1\varkappa(K^*)}{\|K\|}.$$

Если оно не выполнено, то, так как по условию

$$2\|A\|\,\|G^{-1}\|\delta \leqslant \frac{1}{[15\varkappa(K^*)/\|K\|]},$$

согласно теореме 2.1 заключаем, что исходная задача плохо обусловлена. Этап 2 завершается проверкой выполнимости условий теоремы о невязке (см. § 3). После завершения этапа 2 мы получаем оценки величин $\|\Lambda\|$, $\|H\|$. Заметим, что если мы минуем этап 3 (итерационное уточнение найденных приближений), то, выполнив этапы 4 и 5, также получим грубые приближенные значения матриц M, E.

ЭТАП 3. На этом этапе мы располагаем матрицами $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\Lambda}^* \geqslant 0$ и $\widetilde{K}$, полученными на предыдущих этапах. Известно, что

$$\frac{\varkappa(\widetilde{K}^*)}{\|\widetilde{K}\|} \leqslant \frac{1.1\varkappa(K^*)}{\|K\|}, \quad \|\widetilde{\Lambda} - \Lambda\| \leqslant \delta,$$

причем последнее неравенство верно при условии хорошей обусловленности исходной задачи. Здесь используется процесс итерационного уточнения найденного приближения $\widetilde{\Lambda}$. Начиная с матриц $\Lambda_0 = \widetilde{\Lambda}$, $K_0 = \widetilde{K}$, мы строим последовательность матричных пар Λ_m, K_m $(m \geqslant 0)$ по следующим формулам:

$$\Delta_m = K_m^*\Lambda_m + \Lambda_m K_m + 2\|A\|[C^*(CFC^*)^{-1}C + \Lambda_m B(B^*GB)^{-1}B^*\Lambda_m];$$
$$K_m^* X_{m+1} + X_{m+1}K_m + \Delta_m = 0;$$
$$\Lambda_{m+1} = \Lambda_m + X_{m+1}; \quad K_{m+1} = A - 2\|A\|B(B^*GB)^{-1}B^*\Lambda_{m+1}.$$

Этот процесс хорошо известен (см., например, [1, 15]) и подробно рассмотрен в п. 2.2. Здесь же только отметим равенство

$$\Delta_{m+1} = -2\|A\|X_{m+1}B(B^*GB)^{-1}B^*X_{m+1}, \ m \geqslant 0,$$

которое ввиду равномерной ограниченности параметра качества устойчивости матриц K_m $(m \geqslant 0)$, а именно оценок $\varkappa(K_m^*)/\|K_m\| \leqslant 2\varkappa(K^*)/\|K\|$, позволяет говорить о квадратичной сходимости последовательностей матриц Λ_m, K_m $(m \geqslant 0)$ к искомой матрице Λ и гурвицевой матрице K.

ЭТАП 4. Для вычисления матрицы M (решения дуального уравнения Лурье —Риккати) достаточно воспользоваться представлением

$$M = S(I - \Lambda S)^{-1},$$

где S — решение матричного уравнения Ляпунова

$$KS + SK^* + 2\|A\|B(B^*GB)^{-1}B^* = 0$$

с гурвицевой матрицей K. Алгоритм решения таких уравнений подробно описан в [5].

ЭТАП 5. Вычисляем матрицу

$$L = A - 2\|A\|MC^*(CFC^*)^{-1}C,$$

параметр ее качества устойчивости, а затем матрицу E.

1.2. Описание этапа 1 алгоритма. Отметим, что предлагаемый алгоритм является развитием алгоритма Годунова [2, 3]. Опишем последовательность действий на этапе 1.

— С помощью приближений Тейлора находим матрицу $A_0 = e^{-\tau W}$ при $\tau = 0.5/\|W\|$. Полагаем $B_0 = -I$.

— Начиная с матричной пары A_0, B_0, строим последовательность матричных пар A_1, B_1; A_2, B_2; …; A_m, B_m; … при помощи ортогональных преобразований P таких, что

$$P \begin{bmatrix} B_{j-1} & A_{j-1} & 0 \\ A_{j-1} & 0 & B_{j-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \times & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \mathbf{0} & & \times & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \\ \mathbf{0} \quad A_j \quad B_j \\ \\ \end{bmatrix}$$

— После l шагов приходим к системе

$$A_{11}^{(l)} X(T) + B_{12}^{(l)} Y(0) + B_{11}^{(l)} = 0,$$
$$A_{21}^{(l)} X(T) + B_{22}^{(l)} Y(0) + B_{21}^{(l)} = 0,$$

где $A_{ij}^{(l)}$, $B_{ij}^{(l)}$ — $(N \times N)$-матричные элементы матриц A_l, B_l.

— Выбираем ортогональное преобразование Q такое, что

$$Q \begin{bmatrix} A_{11}^{(l)} & B_{12}^{(l)} & B_{11}^{(l)} \\ A_{21}^{(l)} & B_{22}^{(l)} & B_{21}^{(l)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \times & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \mathbf{0} & & \times & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \\ \mathbf{0} \quad R_l \quad F_l \\ \\ \end{bmatrix},$$

где R_l — верхнетреугольная $(N \times N)$-матрица. С ростом l матрица $R_l^{-1} F_l$ стремится к искомой матрице Λ. Обратимость R_l для достаточно больших l, удовлетворяющих неравенству

$$2 \max\{1, \|H\|, \|\Lambda\|, \|G^{-1}\|, 2\|A\| \, \|\Lambda\| \, \|G^{-1}\|\} \times (1 + \|M\| \, \|\Lambda\|) \varkappa(K^*) e^{-2^{l+1}\tau\beta} \leqslant 1,$$

следует из оценки ее обусловленности

$$\mu(R_l) \leqslant \frac{\{\alpha^2(\gamma+2)^2 + \gamma^2\}^{1/2}}{(1 - e^{-2\tau\beta})},$$

где $\gamma^2 = 2\gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 + \alpha_2^2$ и α, γ_1, γ_2, α_2 — коэффициенты в оценках матриц Грина (см. п. 1.1).

Более того, оценка скорости сходимости аппроксимаций к искомой матрице Λ для достаточно больших l имеет вид

$$\|R_l^{-1}F_l - \Lambda\| \leqslant 2\|\Lambda\|[1+\|M\|\,\|\Lambda\|]\varkappa(K^*)\exp\{-2^{l+1}\tau\|K\|/\varkappa(K^*)\},$$

$$\begin{aligned}&\|A^*R_l^{-1}F_l + R_l^{-1}F_lA\\ &\qquad + 2\|A\|[C^*(CFC^*)^{-1}C - R_l^{-1}F_lB(B^*GB)^{-1}B^*R_l^{-1}F_l]\|\\ &\leqslant 4\|A\|(1+\|G^{-1}\|\,\|\Lambda\|)\|\Lambda\|[1+\|M\|\,\|\Lambda\|]\varkappa(K^*)\exp\{-2^{l+1}\tau\|K\|/\varkappa(K^*)\}.\end{aligned}$$

Поэтому, если $\|\Lambda\|$, $\|M\|$, $\|H\|$, $\|E\|$ не превосходят некоторых заданных граничных величин λ^*, m^*, h^*, e^*, можно определить число шагов так, что погрешность приближения матрицей $R_l^{-1}F_l$ искомой матрицы не будет превосходить заданной величины $\delta/3$.

В п. 1.4 показано, что если ε_e — точность вычисления экспоненты малой нормы, ε_s — точность решения достаточно хорошо обусловленной линейной алгебраической системы уравнений, ε_h — точность выполнения цепочки ортогональных преобразований отражения, то, определив l из неравенства

$$\frac{[(\gamma+2)^2\alpha^2+\gamma^2]^{1/2}[\varepsilon_e+3\varepsilon(l)]}{[1-e^{-2\beta\tau}]} < 0.5,$$

мы убедимся в справедливости оценки $\|\widetilde{\Lambda} - \widetilde{Y}_0(l^*)\| \leqslant \delta/3$. Тогда по матрице $\widetilde{Y}_0(l^*)$ мы можем построить матрицу $\widetilde{\Lambda}$ такую, что $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\Lambda}^* \geqslant 0$ и $\|\widetilde{\Lambda} - \widetilde{Y}_0(l^*)\| \leqslant \delta/3$.

Итак, сделав l^* шагов в случае хорошей обусловленности исходной задачи мы должны получить матрицу $\widetilde{\Lambda}$ такую, что $\|\widetilde{\Lambda}-\Lambda\| \leqslant \delta$. Заметим, что свобода выбора λ^*, m^*, h^*, e^* и δ^* ограничена, в частности, точностью выполнения элементарных матричных операций.

Величину δ удобно выбирать так, чтобы можно было гарантировать хорошую сходимость известного процесса итерационного уточнения найденного приближения (см., например, [1, 15]). Эта процедура позволяет вычислить Λ со всеми верными знаками.

Если после l^* шагов мы не попали в область сходимости итерационного процесса уточнения, то должно выполняться одно из следующих неравенств: $\|M\| \geqslant m^*$, $\|H\| \geqslant h^*$, $\|E\| \geqslant e^*$, $\|\Lambda\| \geqslant \lambda^*$. Результатом работы алгоритма в этом случае является утверждение о плохой обусловленности поставленной задачи.

1.3. Обусловленность краевой задачи после дискретизации. Полагая $\tau = 0.5/\|W\|$ и

$$A_0 = e^{-\tau W}, \quad B_0 = -I,$$

мы получим разностную краевую задачу ($n = 1, 2, \ldots, 2^l$, $T = 2^l\tau$)

$$L = [I_{2N} \quad 0],\ R = [0 \quad I_{2N}],$$

$$B_0\begin{bmatrix}X((n-1)\tau)\\ Y((n-1)\tau)\end{bmatrix} + A_0\begin{bmatrix}X(n\tau)\\ Y(n\tau)\end{bmatrix} = 0,\ L\begin{bmatrix}X(0)\\ Y(0)\end{bmatrix} = I,\ R\begin{bmatrix}X(T)\\ Y(T)\end{bmatrix} = 0.$$

Определим линейный оператор $\mathcal{F}$, действующий в $2N \times (2^l + 1)$-мерном евклидовом пространстве:

$$\begin{aligned} &B_0 z_{n-1} + A_0 z_n = \xi_n, \\ &L z_0 = \xi_L, \ R z_{2^l} = \xi_R, \end{aligned} \tag{1.3}$$

т. е.

$$\mathcal{F} z = \xi;$$

здесь $z^T = (z_0, z_1, \ldots, z_{2^l})$, $\xi^T = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{2^l-1}, \xi_L, \xi_R)$; z_{2^l}, z_i, ξ_i — векторы размерности $2N$; ξ_L, ξ_R — векторы размерности N.

Далее удобно пользоваться обозначениями

$$\begin{aligned} &\beta = \|K\| / \varkappa(K^*), \\ &\gamma_1^2 = \varkappa(K^*)(1 + \|\Lambda\|^2), \\ &\gamma_2 = \max\{\|S\|, 1 + \|\Lambda\|\,\|S\|\}, \\ &\alpha_1 = \gamma_1 + \varkappa(K^*)\|(I - \Lambda S)^{-1}\|\gamma_2, \\ &\gamma = [2\gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 + \alpha_2^2]^{1/2}, \\ &\alpha_2 = [\varkappa(K^*)]^{1/2} 2\|(I - \Lambda S)^{-1}\|\gamma_2, \\ &\alpha = [\varkappa(K^*)(1 + \|\Lambda\|^2)]^{1/2}[1 + \|S\|[(1 + \|\Lambda\|^2)]^{1/2}], \end{aligned}$$

в которых матрица K гурвицева и S является решением матричного уравнения Ляпунова $SK^* + KS + 2\|A\|B(B^*GB)^{-1}B^* = 0$.

Оказывается, что если $T = 2^l\tau$ достаточно велико, а точнее, удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} &\varkappa(K^*)\|(I - \Lambda S)^{-1}\|\,\|\Lambda\|\,\|S\| e^{-2T\beta} \leqslant 0.5, \\ &\varkappa(K^*)\|(I - \Lambda S)^{-1}\|\,\|\Lambda\| e^{-T\beta} \leqslant 0.5, \end{aligned}$$

то верна оценка обусловленности оператора $\mathcal{F}$:

$$\mu(\mathcal{F}) \leqslant \frac{[(\gamma + 2)^2\alpha^2 + \gamma^2]^{1/2}}{(1 - e^{-2\beta\tau})}.$$

Важно отметить, что с ростом T оценка обусловленности $\mathcal{F}$ не растет.

Перейдем к доказательству выписанной оценки. Заметим, что из (1.3) непосредственно следует

$$\|\mathcal{F}\| \leqslant 3. \tag{1.4}$$

Для оценки $\mathcal{F}^{-1}$ нам потребуется детально рассмотреть задачу (1.3) и получить оценки $\|z\|$ через $\|\xi\|$. Воспользуемся обычным приемом (см. [16]) представления решения системы (1.3) в виде

$$z = y + \widehat{w} + \overline{w}, \tag{1.5}$$

где векторы y, $\widehat{w}$, $\overline{w}$ являются решениями следующих краевых задач:

— одной бесконечномерной задачи:

$$B_0 \overline{w}_{n-1} + A_0 \overline{w}_n = \overline{\xi}_n, \tag{1.6}$$

где $\overline{\xi}_n = \xi_n$ при $n = 0, 1, 2, \ldots, 2^l - 1$ и $\overline{\xi}_n = 0$ при $n < 0$ и $n \geqslant 2^l$;

— двух задач на интервале от 0 до 2^l:

$$B_0 y_{n-1} + A_0 y_n = 0, \quad L y_0 = \xi_L, \quad R y_{2^l} = \xi_R, \tag{1.7}$$

$$B_0 \widehat{w}_{n-1} + A_0 \widehat{w}_n = 0, \quad L\widehat{w}_0 = -L\overline{w}_0, \quad R\widehat{w}_{2^l} = -R\overline{w}_{2^l}. \tag{1.8}$$

Дальнейшее доказательство существенно опирается на оценки решений этих трех задач через их правые части. Интересующие нас оценки получены и описаны в п. 3.3 (см. леммы 3.4 и 3.5).

Ввиду леммы 3.5 относительно задачи (1.6) можно утверждать, что

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{2^l} \|\overline{w}_n\|^2 \leqslant \frac{4\alpha^2}{1-e^{-2\beta\tau}} \sum_{n=0}^{2^l-1} \|\xi_n\|^2,\\ \|\overline{w}_0\|^2 \leqslant \frac{4\alpha^2}{1-e^{-2\beta\tau}} \sum_{n=0}^{2^l-1} \|\xi_n\|^2, \ \|\overline{w}_{2^l}\|^2 \leqslant \frac{4\alpha^2}{1-e^{-2\beta\tau}} \sum_{n=0}^{2^l-1} \|\xi_n\|^2.\end{gathered} \tag{1.9}$$

Далее, в силу леммы 3.4 для решения задачи (1.7) получаем

$$\sum_{n=0}^{2^l} \|y_n\|^2 \leqslant \frac{[\|\xi_L\|^2 2(\gamma_1^2+\gamma_2^2) + \alpha_2^2\|\xi_R\|]^2}{1-e^{-2\beta\tau}}. \tag{1.10}$$

Оценки (1.9) и лемма 3.4 позволяют установить для решения задачи (1.8) оценку

$$\sum_{n=0}^{2^l} \|\widehat{w}_n\|^2 \leqslant \frac{[\|\overline{w}_0\|^2 2(\gamma_1^2+\gamma_2^2) + \alpha_2^2\|\,\overline{w}_{2^l}\|]^2}{1-e^{-2\beta\tau}},$$

из которой следует

$$\sum_{n=0}^{2^l} \|\widehat{w}_n\|^2 \leqslant \frac{[2\gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 + \alpha_2^2]\alpha^2}{(1-e^{-2\beta\tau})^2} \sum_{n=0}^{2^l-1} \|\xi_n\|^2. \tag{1.11}$$

Теперь из (1.5) вытекает неравенство

$$\|z\| \leqslant \|y\| + \|\widehat{w}\| + \|\overline{w}\|,$$

которое вместе с (1.9)–(1.11) при обозначении $\gamma = [2\gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 + \alpha_2^2]^{1/2}$, позволяет записать неравенство

$$\|z\| \leqslant \frac{[(\gamma+2)^2\alpha^2 + \gamma^2]^{1/2}}{1-e^{-2\beta\tau}} \left[\sum_{n=0}^{2^l-1} \|\xi_n\|^2 + \|\xi_L\|^2 + \|\xi_R\|^2\right]^{1/2},$$

т. е.

$$\|\mathcal{F}^{-1}\| \leqslant \frac{[(\gamma+2)^2\alpha^2 + \gamma^2]^{1/2}}{1-e^{-2\beta\tau}},$$

что, в свою очередь, вместе с (1.4) позволяет оценить обусловленность оператора $\mathcal{F}$:

$$\mu(\mathcal{F}) = \|\mathcal{F}\|\|\mathcal{F}^{-1}\| \leqslant \frac{[(\gamma+2)^2\alpha^2 + \gamma^2]^{1/2}}{1-e^{-2\beta\tau}}.$$

1.4. Оценка влияния погрешностей вычисления на этапе 1. В этом пункте мы учтем влияние ошибок округления при решении линейного операторного уравнения

$$\begin{bmatrix} B_0 & A_0 & & \mathbf{0} & \\ & B_0 & A_0 & & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \\ & & & B_0 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{2l} \end{bmatrix} = 0,$$

$$L = [I_{2N} \quad 0],\ R = [0 \quad I_{2N}],\ LX_0 = 0,\ RX_{2l} = 0, \tag{1.12}$$

где $B_0 = -I$, $A_0 = e^{-\tau W}$ определены в п. 1.2.

Будем считать, что после l шагов процесса, описанного в п. 1.2, мы получаем расположенные в машинной памяти матричные пары $\{\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i\}_{i=0}^{l}$. Причем $\widetilde{A}_0$ приближает матричную экспоненту $e^{-\tau W}$, что означает

$$\widetilde{A}_0 = e^{-\tau W} + \varphi_0, \quad \|\varphi_0\| \leqslant \varepsilon_e,$$

где величина ε_e характеризует точность вычисления матричной экспоненты малой нормы.

Так как основная операция нашего процесса — ортогональное преобразование, состоящее из цепочек отражений Хаусхолдера, примем следующее соглашение: если $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ — две матрицы, расположенные в машинной памяти, причем матрица $\widetilde{Y}$ получена из $\widetilde{X}$ цепочкой преобразований отражения, то существуют ортогональное преобразование P и матрица ξ такие, что

$$P\widetilde{X} = \widetilde{Y} + \xi, \quad \|\xi\| \leqslant \varepsilon_h \|\widetilde{X}\|, \tag{1.13}$$

где ε_h характеризует точность выполнения цепочки преобразований отражения (оценки величин ε_e и ε_h можно найти, например, в [17]).

Итак, перед началом итерационного процесса мы имеем матрицы $\widetilde{A}_0$, $\widetilde{B}_0$ такие, что

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_0 &= e^{-\tau W} + \varphi_0,\ \|\varphi_0\| \leqslant \varepsilon_e, \\ \widetilde{B}_0 &= -I + \psi_0,\ \|\psi_0\| = 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Ясно, что в этом случае уравнение (1.12) можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} \widetilde{B}_0 + \psi_0 & \widetilde{A}_0 + \varphi_0 & & & \mathbf{0} \\ & \widetilde{B}_0 + \psi_0 & \widetilde{A}_0 + \varphi_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \widetilde{B}_0 + \psi_0 & \widetilde{A}_0 + \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{2l} \end{bmatrix} = 0,$$

$$L = [I_{2N} \quad 0], \quad R = [0 \quad I_{2N}], \quad LX_0 = 0, \quad RX_{2l} = 0, \tag{1.15}$$

На первом шаге процесса из матрицы $\begin{bmatrix} \widetilde{A}_0 & \widetilde{B}_0 & 0 \\ \widetilde{B}_0 & 0 & \widetilde{A}_0 \end{bmatrix}$ мы получаем с помощью ортогональных преобразований отражения матрицу $\begin{bmatrix} \widetilde{R}_1 & \widetilde{F}_1 & \widetilde{G}_1 \\ 0 & \widetilde{B}_1 & \widetilde{A}_1 \end{bmatrix}$, причем существует ортогональное преобразование P_1 такое, что

$$P_1 \begin{bmatrix} \widetilde{A}_0 & \widetilde{B}_0 & 0 \\ \widetilde{B}_0 & 0 & \widetilde{A}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{R}_1 & \widetilde{F}_1 & \widetilde{G}_1 \\ 0 & \widetilde{B}_1 & \widetilde{A}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{r}_1 & \widetilde{f}_1 & \widetilde{g}_1 \\ \xi_1 & \widetilde{\psi}_1 & \widetilde{\varphi}_1 \end{bmatrix}, \tag{1.16}$$

и в силу (1.13) верны оценки

$$\left\| \begin{bmatrix} \widetilde{r}_1 \\ \xi_1 \end{bmatrix} \right\| \leqslant \varepsilon_h \left\| \begin{bmatrix} \widetilde{A}_0 \\ \widetilde{B}_0 \end{bmatrix} \right\|, \quad \left\| \begin{bmatrix} \widetilde{f}_1 \\ \widetilde{\psi}_1 \end{bmatrix} \right\| \geqslant \varepsilon_h \left\| \begin{bmatrix} \widetilde{B}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|,$$
$$\left\| \begin{bmatrix} \widetilde{g}_1 \\ \widetilde{\varphi}_1 \end{bmatrix} \right\| \geqslant \varepsilon_h \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{A}_0 \end{bmatrix} \right\|. \tag{1.17}$$

Введем обозначения

$$\begin{bmatrix} \eta_1^{(1)} \\ \eta_2^{(1)} \end{bmatrix} = P_1 \begin{bmatrix} \psi_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \zeta_1^{(1)} \\ \zeta_2^{(1)} \end{bmatrix} = P_1 \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \delta_1^{(1)} \\ \delta_2^{(1)} \end{bmatrix} = P_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}. \tag{1.18}$$

Очевидны следующие оценки:

$$\begin{gathered} \max\{\|\eta_1^{(1)}\|, \|\eta_2^{(1)}\|\} \leqslant \|\psi_0\|, \quad \max\{\|\delta_1^{(1)}\|, \|\delta_2^{(1)}\|\} \leqslant \|\varphi_0\|, \\ \max\{\|\zeta_1^{(1)}\|, \|\zeta_2^{(1)}\|\} \leqslant \|\psi_0\| + \|\varphi_0\|. \end{gathered} \tag{1.19}$$

В принятых обозначениях можно записать равенство

$$P_1 \begin{bmatrix} \varphi_0 & \psi_0 & 0 \\ \psi_0 & 0 & \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1^{(1)} & \eta_1^{(1)} & \delta_1^{(1)} \\ \zeta_2^{(1)} & \eta_2^{(1)} & \delta_2^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Ввиду (1.16), (1.18) мы можем также записать, что

$$\begin{aligned} P_1 \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & 0 \\ B_0 & 0 & A_0 \end{bmatrix} &= P_1 \begin{bmatrix} \widetilde{A}_0 + \varphi_0 & \widetilde{B}_0 + \psi_0 & 0 \\ \widetilde{B}_0 + \psi_0 & 0 & \widetilde{A}_0 + \varphi_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \widetilde{R}_1 & \widetilde{F}_1 & \widetilde{G}_1 \\ 0 & \widetilde{B}_1 & \widetilde{A}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{r}_1 + \zeta_1^{(1)} & \widetilde{f}_1 + \eta_1^{(1)} & \widetilde{g}_1 + \delta_1^{(1)} \\ \xi_1 + \zeta_2^{(1)} & \widetilde{\psi}_1 + \eta_2^{(1)} & \widetilde{\varphi}_1 + \delta_2^{(1)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$R_1 = \begin{bmatrix} \widetilde{R}_1 + \widetilde{r}_1 + \zeta_1^{(1)} & & & \mathbf{0} \\ & \widetilde{R}_1 + \widetilde{r}_1 + \zeta_1^{(1)} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \widetilde{R}_1 + \widetilde{r}_1 + \zeta_1^{(1)} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \xi_1+\zeta_2^{(1)} & & & \mathbf{0} \\ & \xi_1+\zeta_2^{(1)} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \xi_1+\zeta_2^{(1)} \end{bmatrix}, \tag{1.20}$$

$$Y^{(1)} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{2^l-1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} \psi_1 &= \widetilde{\psi}_1 + \eta_2^{(1)}, \\ \varphi_1 &= \widetilde{\varphi}_1 + \delta_2^{(1)}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения (1.15) можно переписать в виде

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} R_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline & \widetilde{B}_0+\psi_0 & \widetilde{A}_0+\varphi_0 & & & & \mathbf{0} \\ & & \widetilde{B}_0+\psi_0 & \widetilde{A}_0+\varphi_0 & & & \\ \Delta_1 & & & \ddots & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & & & \widetilde{B}_0+\psi_0 & \widetilde{A}_0+\varphi_0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} Y^{(1)} \\ X_0 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{2^l} \end{bmatrix} = 0,$$

$$L = [I_{2N} \quad 0], \quad R = [0 \quad I_{2N}], \quad LX_0 = 0, \quad RX_{2^l} = 0. \tag{1.21}$$

В силу (1.20) имеем

$$\|\psi_1\| \leqslant \|\eta_2^{(1)}\| + \|\widetilde{\psi}_1\|, \quad \|\varphi_1\| \leqslant \|\delta_2^{(1)}\| + \|\widetilde{\varphi}_1\|.$$

Далее, так как из (1.17) следуют оценки

$$\|\widetilde{\psi}_1\| \leqslant \varepsilon_h\|\widetilde{B}_0\|, \quad \|\widetilde{\varphi}_1\| \leqslant \varepsilon_h\|\widetilde{A}_0\|, \quad \|\xi_1\| \leqslant \varepsilon_h(\|\widetilde{B}_0\| + \|\widetilde{A}_0\|), \tag{1.22}$$

то с учетом (1.19) из (1.20) получаем

$$\|\psi_1\| \leqslant \varepsilon_h\|\widetilde{B}_0\| + \|\psi_0\|, \quad \|\varphi_1\| \leqslant \varepsilon_h\|\widetilde{A}_0\| + \|\varphi_0\|. \tag{1.23}$$

Аналогично выводится оценка

$$\|\Delta_1\| \leqslant \|\varphi_0\| + \|\psi_0\| + \varepsilon_h(\|\widetilde{A}_0\| + \|\widetilde{B}_0\|).$$

Заметим, что первые 2^{l-1} матричных столбцов системы (1.21) фактически не участвуют в дальнейшем процессе; хотя столбцы Δ_1 и подвергаются ортогональным преобразованиям, мы не будем специально отмечать, так как нас интересует только величина нормы Δ_1.

Повторяя проведенные рассуждения, мы можем, с каждым разом понижая размерность системы в два раза, в итоге придти к системе

$$\begin{bmatrix} R_1 & \cdots\cdots\cdots \\ \Delta_1 & \boxed{\begin{matrix} R_2 & \cdots\cdots\cdots \\ \Delta_2 & \boxed{\begin{matrix}\ddots & \\ & \boxed{\begin{matrix} R_{l-2} & \cdots\cdots\cdots \\ \Delta_{l-1} & \boxed{\widetilde{B}_l+\psi_l \quad \widetilde{A}_l+\varphi_l}\end{matrix}}\end{matrix}}\end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \\ \vdots \\ Y^{(l-1)} \\ X_0 \\ X_{2^l}\end{bmatrix} = 0,$$

$$L = [I_{2N} \quad 0], \quad R = [0 \quad I_{2N}], \quad LX_0 = 0, \quad RX_{2^l} = 0,$$

которая будет эквивалентна системе (1.14). Вспомогательные матрицы $\{\psi_i, \varphi_i\}_{i=0}^{l}$ связаны с матричными парами $\{\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i\}_{i=0}^{l}$ следующими аналогичными (1.23) неравенствами:

$$\|\psi_j\| \leqslant \varepsilon_h \|\widetilde{B}_{j-1}\| + \|\psi_{j-1}\|, \quad \|\varphi_j\| \leqslant \varepsilon_h \|\widetilde{A}_{j-1}\| + \|\varphi_{j-1}\|, \tag{1.24}$$

при этом

$$\|\widetilde{B}_j + \widetilde{\psi}_j\| \leqslant \|\widetilde{B}_{j-1}\|, \quad \|\widetilde{A}_j + \widetilde{\varphi}_j\| \leqslant \|\widetilde{A}_{j-1}\|. \tag{1.25}$$

Из (1.25) получаем

$$\|\widetilde{B}_j\| \leqslant \|\widetilde{B}_{j-1}\| + \|\widetilde{\psi}_j\|, \quad \|\widetilde{A}_j\| \leqslant \|\widetilde{A}_{j-1}\| + \|\widetilde{\varphi}_j\|. \tag{1.26}$$

Аналогично (1.22) имеем

$$\|\widetilde{\psi}_j\| \leqslant \varepsilon_h \|\widetilde{B}_{j-1}\|, \ \|\widetilde{\varphi}_j\| \leqslant \varepsilon_h \|\widetilde{A}_{j-1}\|,$$
$$\|\xi_j\| \leqslant \varepsilon_h (\|\widetilde{B}_{j-1}\| + \|\widetilde{A}_{j-1}\|).$$

Последние оценки позволяют, огрубив (1.26) следующим образом:

$$\|\widetilde{B}_j\| \leqslant (1+\varepsilon_h)\|\widetilde{B}_{j-1}\|, \quad \|\widetilde{A}_j\| \leqslant (1+\varepsilon_h)\|\widetilde{A}_{j-1}\|,$$

утверждать, что

$$\|\widetilde{B}_j\| \leqslant (1+\varepsilon_h)^j \|\widetilde{B}_0\|, \quad \|\widetilde{A}_j\| \leqslant (1+\varepsilon_h)^j \|\widetilde{A}_0\|.$$

Отсюда ввиду (1.24) получаем

$$\|\psi_j\| \leqslant \|\psi_{j-1}\| + \varepsilon_h (1+\varepsilon_h)^{j-1} \|\widetilde{B}_0\|,$$
$$\|\varphi_j\| \leqslant \|\varphi_{j-1}\| + \varepsilon_h (1+\varepsilon_h)^{j-1} \|\widetilde{A}_0\|,$$

следовательно,

$$\|\psi_j\| \leqslant \|\psi_0\| + \varepsilon_h \|\widetilde{B}_0\| (1+\varepsilon_h)[(1+\varepsilon_h)^j - 1]/\varepsilon_h,$$
$$\|\varphi_j\| \leqslant \|\varphi_0\| + \varepsilon_h \|\widetilde{A}_0\| (1+\varepsilon_h)[(1+\varepsilon_h)^j - 1]/\varepsilon_h.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \|\Delta_j\| &\leqslant \|\varphi_{j-1}\| + \|\psi_{j-1}\| + \varepsilon_h (\|\widetilde{A}_{j-1}\| + \|\widetilde{B}_{j-1}\|) \\ &\leqslant \|\varphi_0\| + \varepsilon_h \|\widetilde{A}_0\| (1+\varepsilon_h)[(1+\varepsilon_h)^{j-1} - 1]/\varepsilon_h + \varepsilon_h \|\widetilde{A}_0\| (1+\varepsilon_h)^{j-1} \\ &+ \|\psi_0\| + \varepsilon_h \|\widetilde{B}_0\| (1+\varepsilon_h)[(1+\varepsilon_h)^{j-1} - 1]/\varepsilon_h + \varepsilon_h \|\widetilde{B}_0\| (1+\varepsilon_h)^{j-1}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|\Delta_j\| \leqslant \|\varphi_0\| + \|\psi_0\| + \varepsilon_h(\|\widetilde{B}_0\| + \|\widetilde{A}_0\|)\{(1+\varepsilon_h)[(1+\varepsilon_h)^{j-1} - 1]/\varepsilon_h + (1+\varepsilon_h)^{j-1}\}.$$

Итак, после l шагов процесса мы получаем матрицы $\{\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i\}_{i=0}^{l}$ связанные с исходной системой (1.12) равенствами

$$\begin{bmatrix} \widehat{R} & & \widehat{F} \\ \widehat{\Delta} & \widetilde{B}_l + \psi_l & \widetilde{A}_l + \varphi_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_0 \\ X_{2^l} \end{bmatrix} = 0, \tag{1.27}$$

$$L = [I_{2N} \quad 0], \quad R = [0 \quad I_{2N}], \quad LZ_0 = 0, \quad RZ_{2^l} = 0,$$

где $\widehat{R}$ — верхнетреугольная матрица размеров $(2N \cdot 2^l) \times (2N \cdot 2^l)$, $\widehat{\Delta}$ — матрица размеров $(2N) \times (2N \cdot 2^l)$; причем

$$\|\widehat{\Delta}\| \leqslant \|\varphi_0\| + \|\psi_0\| + \varepsilon_h(\|\widetilde{B}_0\| + \|\widetilde{A}_0\|)\left[(1+\varepsilon_h)\frac{(1+\varepsilon_h)^{l-1}}{\varepsilon_h} + (1+\varepsilon_h)^{l-1}\right],$$

$$\|\psi_l\| \leqslant \|\psi_0\| + \varepsilon_h\|\widetilde{B}_0\|(1+\varepsilon_h)\frac{(1+\varepsilon_h)^l - 1}{\varepsilon_h},$$

$$\|\varphi_l\| \leqslant \|\varphi_0\| + \varepsilon_h\|\widetilde{A}_0\|(1+\varepsilon_h)\frac{(1+\varepsilon_h)^l - 1}{\varepsilon_h},$$

но в нашем случае $\widetilde{B}_0 = -I_{2N}$, $\psi_0 = 0$. Итак, при обозначении

$$\varepsilon(l) = \varepsilon_h\left[(1+\varepsilon_h)\frac{(1+\varepsilon_h)^{l-1}}{\varepsilon_h} + (1+\varepsilon_h)^{l-1}\right]$$

имеем

$$\begin{gathered} \|\widehat{\Delta}\| \leqslant \|\varphi_0\| + \varepsilon(l)(1 + \|\widetilde{A}_0\|), \\ \|\psi_l\| \leqslant \varepsilon(l), \ \|\varphi_l\| \leqslant \|\varphi_0\| + \varepsilon(l)\|\widetilde{A}_0\|. \end{gathered} \tag{1.28}$$

В п. 1.2 мы оценили обусловленность $\mu(\mathcal{F})$ оператора $\mathcal{F}$ с помощью уравнений (1.12). Ввиду (1.27) и известной оценки

$$\mu(A+B) \leqslant \frac{\mu(A)\|B\|}{\|A\|[1 - \mu(A)\|A\|\,\|B\|]}$$

получаем

$$\mu(\widetilde{\mathcal{F}}) \leqslant \mu(\mathcal{F})\frac{\max\{\|\widehat{\Delta}\|, \|\varphi_l\|, \|\psi_l\|\}}{\|\mathcal{F}\|\{1 - \mu(\mathcal{F})\max\{\|\widehat{\Delta}\|, \|\varphi_l\|, \|\psi_l\|\}\|\mathcal{F}\|\}},$$

где $\widehat{\mathcal{F}}$ — линейный оператор задачи

$$\begin{bmatrix} \widehat{R} & & \widehat{F} \\ \widehat{\Delta} & \widetilde{B}_l & \widetilde{A}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_0 \\ Z_{2^l} \end{bmatrix} = 0, \tag{1.29}$$

$$L = [I_{2N} \quad 0], \quad R = [0 \quad I_{2N}], \quad LZ_0 = 0, \quad RZ_{2^l} = 0.$$

Следовательно, в силу известных неравенств, связывающих решения близких систем (см., например, [17]), можно утверждать, что

$$\{\|Z_0 - X_0\|_E^2 + \|Z_{2^l} - X_{2^l}\|_E^2\}^{1/2}$$
$$\leqslant \mu(\mathcal{F})\frac{\max\{\|\widehat{\Delta}\|, \|\varphi_l\|, \|\psi_l\|\}}{\|\mathcal{F}\|\{1 - \mu(\mathcal{F})\max\{\|\widehat{\Delta}\|, \|\varphi_l\|, \|\psi_l\|\}\|\mathcal{F}\|\}}\left[\sum_{i=0}^{2^l}\|X_i\|_E^2\right]^{1/2}. \qquad (1.30)$$

Ввиду леммы 3.4 приходим к оценке

$$\left[\sum_{i=0}^{2^l}\|X_i\|_E^2\right]^{1/2} \leqslant \frac{2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)N^2}{1-e^{-2\beta\tau}},$$

из которой в силу (1.28) и (1.30) вытекает неравенство

$$\{\|Z_0 - X_0\|_E^2 + \|Z_{2^l} - X_{2^l}\|_E^2\}^{1/2} \leqslant \frac{2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)N^2}{1-e^{-2\beta\tau}}\widehat{\varepsilon}, \qquad (1.31)$$

где

$$\widehat{\varepsilon} = \mu(\mathcal{F})\frac{\max\{\|\widehat{\Delta}\|, \|\varphi_l\|, \|\psi_l\|\}}{\|\mathcal{F}\|\{1 - \mu(\mathcal{F})\max\{\|\widehat{\Delta}\|, \|\varphi_l\|, \|\psi_l\|\}\|\mathcal{F}\|\}}.$$

Из уравнения (1.29) следует

$$\begin{bmatrix}\widetilde{B}_l & \widetilde{A}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_0\\ Z_{2^l}\end{bmatrix} = 0,$$
$$L = [I_{2N}\ 0], \quad R = [0\ I_{2N}], \quad LX_0 = 0, \quad RX_{2^l} = 0.$$

Обозначив

$$Z_0 = \begin{bmatrix}\widehat{X}_0\\ \widehat{Y}_0\end{bmatrix}, \ Z_{2^l} = \begin{bmatrix}\widehat{X}_{2^l}\\ \widehat{Y}_{2^l}\end{bmatrix}, \ \widetilde{A}_l = \begin{bmatrix}\widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12}\\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22}\end{bmatrix}, \ \widetilde{B}_l = \begin{bmatrix}\widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12}\\ \widetilde{B}_{21} & \widetilde{B}_{22}\end{bmatrix},$$

где $\widetilde{X}_0$, $\widetilde{Y}_0$, $\widetilde{X}_{2^l}$, $\widetilde{Y}_{2^l}$, $\widetilde{A}_{ij}$, $\widetilde{B}_{ij}$ — матрицы размеров $N \times N$, и учитывая $L = [I_{2N}0]$, $R = [0I_{2N}]$, получаем систему

$$\widetilde{A}_{11}\widehat{X}_{2^l} + \widetilde{B}_{12}\widehat{Y}_0 + \widetilde{B}_{11} = 0, \quad \widehat{X}_0 = I,$$
$$\widetilde{A}_{21}\widehat{X}_{2^l} + \widetilde{B}_{22}\widehat{Y}_0 + \widetilde{B}_{21} = 0, \quad \widehat{Y}_{2^l} = 0,$$

обусловленность которой не превосходит $\mu(\widetilde{\mathcal{F}})$. Следуя работе [17], при $20\mu(\widetilde{\mathcal{F}})\varepsilon_s \leqslant 1$, где ε_s — точность решения систем уравнений, можно найти матрицы $\widetilde{X}_{2^l}$ и $\widetilde{Y}_{2^l}$ такие, что

$$\|\widetilde{X}_{2^l} - \widehat{X}_{2^l}\| \leqslant \varepsilon_s, \quad \|\widetilde{Y}_{2^l} - \widehat{Y}_{2^l}\| \leqslant \varepsilon_s.$$

Полученные оценки вместе с (1.31) позволяют утверждать, что если уравнения Лурье —Риккати хорошо обусловлено, то мы получим матрицу $\widehat{Y}_0$ такую, что

$$\|\widetilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \varepsilon_s + \frac{2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)N^2}{1-e^{-2\beta\tau}}\widehat{\varepsilon}, \qquad (1.32)$$

где

$$\widehat{\varepsilon} = \mu(\mathcal{F})\frac{\max\{\|\widehat{\Delta}\|, \|\varphi_l\|, \|\psi_l\|\}}{\|\mathcal{F}\|\{1-\mu(\mathcal{F})\max\{\|\widehat{\Delta}\|, \|\varphi_l\|, \|\psi_l\|\}\|\mathcal{F}\|\}}.$$

Обозначим

$$\widetilde{\rho}(l) = \varepsilon_s + \frac{4(\gamma_1^2+\gamma_2^2)}{[1-e^{-2\beta\tau}]^2}[(\gamma+2)^2\alpha^2+\gamma^2]^{1/2}[\varepsilon_s + 3\varepsilon(l)]. \tag{1.33}$$

Считая, что

$$\frac{[(\gamma+2)^2\alpha^2+\gamma^2]^{1/2}[\varepsilon_s+3\varepsilon(l)]}{1-e^{-2\beta\tau}} \leqslant 0.5,$$

$$\begin{gathered} \varkappa(K^*)\|(I-\Lambda S)^{-1}\|\,\|\Lambda\|\,\|S\|\exp(2^{l+1}\tau\beta) \leqslant 0.5, \\ \varkappa(K^*)\|(I-\Lambda S)^{-1}\|\,\|\Lambda\|\exp(2^{l}\tau\beta) \leqslant 0.5, \end{gathered} \tag{1.34}$$

оценки (1.32) можно переписать в виде

$$\|\widetilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \widetilde{\rho}(l). \tag{1.35}$$

Действительно, в силу (1.28)

$$\max\{\|\widehat{\Delta}\|, \|\psi_l\|, \|\varphi_l\|\} \leqslant \|\varphi_0\| + \varepsilon(l)(1+\|\widetilde{A}_0\|).$$

Следовательно, учитывая (1.14) и считая, что $\tau \leqslant 0.5/\|W\|$, получаем

$$\max\{\|\widehat{\Delta}\|, \|\psi_l\|, \|\varphi_l\|\} \leqslant \varepsilon_e + 3\varepsilon(l). \tag{1.36}$$

В то же время согласно п. 1.2 при условии (1.34) имеем

$$\frac{\mu(\mathcal{F})}{\|\mathcal{F}\|} \leqslant \frac{[(\gamma+2)^2\alpha^2+\gamma^2]^{1/2}}{1-e^{-2\beta\tau}}. \tag{1.37}$$

Следовательно, ввиду (1.33), (1.36), (1.37) мы заключаем, что неравенство (1.35) справедливо.

§ 2. Непрерывность решений матричных уравнений и проблема невязки

С. К. Годунов [2] предложил числовые характеристики основных понятий теории автоматического управления такие, как стабилизируемость, управляемость, детектируемость. В [2] дано следующее определение стабилизируемости пары (A, B).

- Пара (A, B) называется *стабилизируемой*, если существует единственная симметричная положительно определенная матрица Λ (т. е. $\Lambda = \Lambda^* > 0$), удовлетворяющая матричному уравнению Лурье — Риккати

$$A^*\Lambda + \Lambda A + 2\|A\|\,[I - \Lambda B(B^*B)^{-1}B^*\Lambda] = 0.$$

Будем говорить, что величина $\mathrm{st}\,(A, B) = \|\Lambda\|$ характеризует качество стабилизируемости пары (A, B). Этот критерий подобен предложенному в [18] критерию, базирующемуся на понятии расстояния от пары (A, B) до множества нестабилизируемых пар:

$$d((A,B),P_{\text{st}}^{\text{c}}) = \min_{\text{Re}\lambda\geqslant 0} \sigma_{\min}(A-\lambda I, B).$$

Критерий стабилизируемости пары (A, B) можно рассматривать как развитие понятия «качество устойчивости» матрицы A (см. [4]): $\varkappa(A) = 2\|A\|\,\|H\|$, если $H = H^* > 0$ и $A^*H + HA + I = 0$, если $\varkappa(A)$ эквивалентно величине

$$\theta(A) = \frac{\|A\|}{\min\limits_{\text{Re}\lambda\geqslant 0} \sigma_{\min(A-\lambda I)}},$$

равной расстоянию до неустойчивых матриц (см. [19]), т. е.

$$0.5\varkappa(A) \leqslant \theta(A) \leqslant 2\varkappa^2(A).$$

Отметим, что в хорошо известной процедуре итерационного уточнения типа метода Ньютона решения матричного уравнения Лурье — Риккати

$$A^*X + XA + I - XBB^*X = 0$$

используется величина $\|\Omega^{-1}\|$ (см. [17]), где Ω — оператор Ляпунова

$$\Omega(Z) = [A - BB^*X]^*Z + Z[A - BB^*X].$$

В [4, 5] был предложен и обоснован алгоритм гарантированной точности для расчета положительно определенных решений матричного уравнения Ляпунова

$$A^*H + HA + C = 0, \qquad C = C^* > 0.$$

Как было отмечено во введении, при разработке алгоритмов гарантированной точности необходимо прояснить четыре основных вопроса. Первый из них — обусловленность задачи — выяснил С. К. Годунов [2, 3] для уравнения Лурье — Риккати. В данном параграфе мы обсуждаем два вопроса: зависимость от точности задания входных данных и проблему невязки.

2.1. Число обусловленности и проблема невязки при расчете положительно определенных решений матричного уравнения Лурье — Риккати.

Теорема 2.1. *Если $(N \times N)$-матрица A гурвицева (т. е. $\varkappa(A) < \infty$) и имеет место неравенство*

$$\frac{\|B\|}{\|A\|} \leqslant \frac{1}{15\varkappa(A)},$$

то матрица $A + B$ также гурвицева, причем имеют место оценки

$$|\varkappa(A+B) - \varkappa(A)| \leqslant 1.6\frac{\varkappa^2(A)}{\|A\|}\|B\|,$$

$$\left|\frac{\varkappa(A+B)}{\|A+B\|} - \frac{\varkappa(A)}{\|A\|}\right| \leqslant 1.1\frac{\varkappa^2(A)}{\|A\|^2}\|B\|.$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 1 [9, гл. 1, § 3]. Если A — экспоненциально дихотомичная матрица, то

$$\sigma(A+izI) \geqslant \frac{1}{14.2}\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}$$

для любого вещественного числа z. Так как матрица A в теореме 2.1 экспоненциально дихотомичная, последнее неравенство справедливо.

Неравенства $(-\infty \leqslant z \leqslant \infty)$

$$\sigma_1(A+B+izI) \geqslant \frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\left(\frac{1}{14.2}-\frac{1}{15}\right) > 0$$

следуют из условий теоремы и легко проверяемых неравенств

$$\sigma_1(A+B+izI) \geqslant \sigma_1(A+izI) - \|B\| \geqslant \frac{1}{14.2}\frac{\|A\|}{\varkappa(A)} - \|B\|.$$

Таким образом, мы показали, что матрица $A+B$ гурвицева.

Согласно определению величина $\varkappa(A) = 2\|A\|\,\|H\|$ характеризует качество устойчивости матрицы A (см. [4]), если матрица $H = H^* > 0$ является симметричным положительно определенным решением матричного уравнения Ляпунова $A^*H + HA + I = 0$. Из уравнения Ляпунова и уравнения $(A+B)^*X + X(A+B) + I = 0$ получаем следующее уравнение относительно $X - H$:

$$A^*(X-H) + (X-H)A + B^*X + XB + I = 0.$$

Так как матрица A гурвицева, для $X-H$ справедливо интегральное представление

$$X - H = \int_0^\infty e^{tA^*}(B^*X + XB)e^{tA}\,dt,$$

которое вместе с равенством

$$H = \int_0^\infty e^{tA^*}\,e^{tA}\,dt$$

позволяет записать неравенство

$$\|X-H\| \leqslant 2\|H\|\,\|X\|\,\|B\|. \tag{2.1}$$

Поскольку $\varkappa(A+B) = 2\|A+B\|\,\|X\|$, $\varkappa(A) = 2\|A\|\,\|H\|$, из полученного неравенства следует оценка

$$\left|\frac{\varkappa(A+B)}{\|A+B\|} - \frac{\varkappa(A)}{\|A\|}\right| \leqslant 1.1\frac{\varkappa(A)}{\|A\|}\frac{\varkappa(A+B)}{\|A+B\|}\|B\|, \tag{2.2}$$

из которой, в частности, имеем

$$\frac{\varkappa(A+B)}{\|A+B\|} \leqslant \frac{\varkappa(A)}{\|A\|}\left[1 - \frac{\varkappa(A)}{\|A\|}\right]^{-1}\|B\|.$$

Далее, в силу условий теоремы можно записать

$$\frac{\varkappa(A+B)}{\|A+B\|} \leqslant \frac{15}{14}\frac{\varkappa(A)}{\|A\|}. \tag{2.3}$$

Это неравенство вместе с (2.2) приводит к требуемому в теореме 2.1 неравенству.

Используя (2.1), получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \varkappa(A+B) - \varkappa(A)| &= |\,2\|A+B\|\,\|X\| - 2\|A\|\,\|H\|\,| \\ &\leqslant 2\|A+B\|\,\|X-H\| + 2\|B\|\,\|H\| \\ &\leqslant 2\|A+B\|\,\|B\|\,\|X\|\,\|H\| + 2\|B\|\,\|H\| \\ &\leqslant [\varkappa(A) + 0.5\varkappa(A)\varkappa(A+B)]\,[\|B\|/\|A\|]. \end{aligned}$$

В силу (2.3)

$$\varkappa(A+B) \leqslant \frac{15}{14}\varkappa(A) + \frac{15}{14}\frac{\varkappa(A)}{\|A\|}\|B\|,$$

откуда по условию теоремы следует $\varkappa(A+B) \leqslant (16/14)\varkappa(A)$, что позволяет, продолжая последнюю цепочку неравенств, получить оценку величины $|\varkappa(A+B) - \varkappa(A)|$. Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. *Если A — гурвицева матрица и*

$$\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \leqslant \frac{1}{15\varkappa(A)},$$

то для матриц H и X таких, что

$$A^*H + HA + C = 0, \quad C = C^*,$$
$$(A+\delta A)^*X + X(A+\delta A) + C + \delta C = 0, \quad C + \delta C = (C+\delta C)^*,$$

справедлива оценка

$$\|X - H\| \leqslant 2\varkappa(A)\|H\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \varkappa(A)\frac{\|\delta C\|}{\|A\|}.$$

Доказательство. Ввиду ограничения $\|\delta A\|/\|A\| < 15\varkappa(A)$ и теоремы 2.1 матрица $A+\delta A$ гурвицева. Кроме того, существуют единственные матрицы H и X, удовлетворяющие матричным уравнениям Ляпунова, и верно равенство

$$A^*(X-H) + (X-H)A + (\delta A)^*X + X\delta A + \delta C = 0.$$

Так как матрица A гурвицева, справедлива оценка

$$\|X - H\| \leqslant \frac{\varkappa(A)\|H\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + 0.5\varkappa(A)\frac{\|\delta C\|}{\|A\|}}{1 - \varkappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}.$$

Теорема 2.2 доказана.

2.2. Вспомогательные леммы. В этом пункте мы докажем три вспомогательные леммы.

Лемма 2.1. *Пусть матрицы B и $\widetilde{B}$ связаны неравенством*

$$\frac{\mu(B)\|B - \widetilde{B}\|}{\|B\|} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Тогда для произвольной симметричной положительно определенной матрицы G верна оценка

$$\|B(B^*GB)^{-1}B^* - \widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*\| \leqslant \|G^{-1}\|\mu(G)\mu(B)\frac{\|B-\widetilde{B}\|}{\|B\|}.$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что существует матрица T, которая, с одной стороны, близка единичной матрице, а с другой стороны, верно неравенство $\widetilde{B} = TB$. Пусть U, V — ортогональные матрицы, Σ — диагональная матрица, элементами которой являются сингулярные числа матрицы B, т. е. имеет место сингулярное разложение

$$B = U\begin{bmatrix}\Sigma\\ 0\end{bmatrix}V.$$

Определим матрицы R_1, R_2 (размеры матрицы R_1 такие же, как размеры матрицы Σ) из равенства

$$U^*\widetilde{B}V^* = \begin{bmatrix}\Sigma\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}R_1\\ R_2\end{bmatrix}.$$

Ясно, что $\max\{\|R_1\|, \|R_2\|\} \leqslant \|\widetilde{B} - B\|$. Легко также проверить, что матрица $T = I + \Delta$, где

$$\Delta = \begin{bmatrix}R_1\Sigma^{-1} & 0\\ R_2\Sigma^{-1} & 0\end{bmatrix},$$

связана с матрицами $\widetilde{B}$ и B равенством $\widetilde{B} = TB$.

Из определений Δ и T следует

$$\|\Delta\| \leqslant \max\{\|R_1\|, \|R_2\|\}\,\|\Sigma^{-1}\| \leqslant \mu(B)\frac{\|B-\widetilde{B}\|}{\|B\|},$$

$$\mu(T) \leqslant \frac{1+\|\Delta\|}{1-\|\Delta\|} \leqslant 1 + 3\mu(B)\frac{\|B-\widetilde{B}\|}{\|B\|}.$$

Далее, используя соотношения

$$\widetilde{B} = TB, \quad (A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(A+B)^{-1}$$

и определив

$$\Delta_1 = \Delta^*G + G\Delta + \Delta^*G\Delta,$$

нетрудно проверить равенство

$$(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1} = (B^*GB)^{-1} - (B^*GB)^{-1}B^*\Delta_1T^{-1}B^*\Delta^*\widetilde{B}(\widetilde{B}^*F\widetilde{B})^{-1},$$

из которого следует

$$\begin{aligned}\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^* &= B(B^*GB)^{-1}B^*\\ &\quad + \Delta B(B^*GB)^{-1}B^* + B(B^*GB)^{-1}B^*\Delta^*\\ &\quad + \Delta B(B^*GB)^{-1}B^*\Delta^* - TB(B^*GB)^{-1}B^*\Delta_1T^{-1}B^*\Delta^*\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*.\end{aligned}$$

Учитывая

$$\|\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*\| \leqslant \|G^{-1}\|, \quad \|B(B^*GB)^{-1}B^*\| \leqslant \|G^{-1}\|,$$

$$\|\Delta_1\| \leqslant \|G\|\,\|\Delta\|(2+\|\Delta\|) \leqslant 3\|G\|\mu(B)\frac{\|B-\widetilde{B}\|}{\|B\|},$$

выпишем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}&\|B(B^*GB)^{-1}B^* - \widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*\|\\ &\qquad\leqslant \|G^{-1}\|\,[\,\|\Delta\|(2+\|\Delta\|) + \|T\|\,\|T^{-1}\|\,\|\Delta_1\|\,\|G^{-1}\|\,]\\ &\leqslant \|G^{-1}\|\,\|\Delta\|\,[2+\|\Delta\|]\,[1+\mu(T)\mu(G)] \leqslant 9\|G^{-1}\|\mu(G)\mu(B)\frac{\|B-\widetilde{B}\|}{\|B\|}.\end{aligned}$$

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Пусть матрицы* A, B, C, F, G, K, Λ *связаны равенствами* (0.1), (0.4) *и матрицы* Λ, F, G *симметричные положительно определенные. Пусть, кроме того, матрицы* $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ *удовлетворяют условиям*

$$\mu(B)\frac{\|B-\widetilde{B}\|}{\|B\|} \leqslant \frac{1}{3}, \quad \mu(C)\frac{\|C-\widetilde{C}\|}{\|C\|} \leqslant \frac{1}{3}, \quad \alpha \leqslant \frac{\|K\|}{\varkappa(K)\,\|\Lambda\|\,\|A\|},$$

где

$$\alpha = \left[\frac{1}{\|\Lambda\|} + 2\|G^{-1}\|\right]\frac{\|A-\widetilde{A}\|}{\|A\|} + 18\|G^{-1}\|\mu(G)\mu(B)\frac{\|B-\widetilde{B}\|}{\|B\|}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(b1) *матрица* $\widetilde{K} = \widetilde{A} - 2\|\widetilde{A}\|\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*\Lambda$ *гурвицева, и справедлива оценка*

$$\left|\frac{\varkappa(\widetilde{K})}{\|\widetilde{K}\|} - \frac{\varkappa(K)}{\|K\|}\right| \leqslant 1.1\left[\frac{\varkappa(K)}{\|K\|}\right]^2\|A\|\,\|\Lambda\|\alpha;$$

(b2) *существует матрица* P_0 — *решение матричного уравнения Ляпунова*

$$\widetilde{K}_0^*P_0 + P_0\widetilde{K}_0 + 2\|\widetilde{A}\|[\widetilde{C}^*(\widetilde{C}F\widetilde{C}^*)^{-1}\widetilde{C} + \Lambda\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*\Lambda] = 0,$$

и матрица Λ *связана с матрицей* P_0 *неравенством*

$$\|P_0 - \Lambda\| \leqslant 2\varkappa(K)\|\Lambda\|\frac{\|A\|}{\|K\|}[\,\|\Lambda\|\alpha + \beta],$$

где

$$\begin{aligned}\beta = \frac{10}{\|\Lambda\|}\|F^{-1}\|\mu(F)\mu(C)&\frac{\|C-\widetilde{C}\|}{\|C\|}\\ &+ 10\|\Lambda\|\,\|G^{-1}\|\mu(G)\mu(B)\frac{\|B-\widetilde{B}\|}{\|B\|} + 2\|K\|\frac{\|A-\widetilde{A}\|}{\|A\|}.\end{aligned}$$

Доказательство. Из условия леммы вытекает равенство

$$\begin{aligned}K - \widetilde{K} = A - \widetilde{A} + (2\|A\| - 2\|\widetilde{A}\|)&\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*\Lambda\\ &+ 2\|A\|[\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^* - B(B^*GB)^{-1}B^*]\Lambda.\end{aligned}$$

Так как $\mu(B)\|B-\widetilde{B}\|/\|B\| \leqslant 1/3$, ввиду леммы 2.1 приходим к оценке

$$\|B(B^*GB)^{-1}B^* - \widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*\| \leqslant 9\|G^{-1}\|\mu(G)\mu(B)\frac{\|B-\widetilde{B}\|}{\|B\|}, \tag{2.4}$$

в силу которой можно записать

$$\|\widetilde{K}-K\| \leqslant \|A\|\,\|\Lambda\|\left[\left(\frac{1}{\|\Lambda\|}+2\|G^{-1}\|\right)\frac{\|A-\widetilde{A}\|}{\|A\|}\right]$$

$$+\,18\|A\|\,\|\Lambda\|\|G^{-1}\|\mu(G)\mu(B)\frac{\|B-\widetilde{B}\|}{\|B\|},$$

где

$$\|\widetilde{K}-K\| \leqslant \|A\|\,\|\Lambda\|\alpha. \tag{2.5}$$

Из (2.5) ввиду условий леммы следует оценка

$$\frac{\|\widetilde{K}-K\|}{\|K\|} \leqslant \frac{1}{15\varkappa(K)},$$

которая вместе с теоремой 2.1 позволяет утверждать, что матрица $\widetilde{K}$ гурвицева и верно неравенство

$$\left|\frac{\varkappa(\widetilde{K})}{\|\widetilde{K}\|} - \frac{\varkappa(K)}{\|K\|}\right| \leqslant 1.1\left[\frac{\varkappa(K)}{\|K\|}\right]^2\|\widetilde{K}-K\|.$$

Утверждение (b1) доказано.

Перейдем к доказательству утверждения (b2). Заметим, что поскольку матрица $\widetilde{K}$ гурвицева, существует единственная матрица P_0. Оценим расстояние между матрицами Λ и P_0. По условию леммы имеем

$$K^*\Lambda + \Lambda K + 2\|A\|\,[C^*(CFC^*)^{-1}C + \Lambda B(B^*GB)^{-1}B^*\Lambda] = 0.$$

Так как матрица K гурвицева и матрицы K, $\widetilde{K}$ достаточно близки ($\|\widetilde{K}-K\|/\|K\| \leqslant 1/(15\varkappa(K))$), из теоремы 2.2 получаем оценку

$$\|P_0-\Lambda\| \leqslant \frac{\varkappa(K)}{\|K\|}\|\delta C\| + 2\frac{\varkappa(K)}{\|K\|}\|\Lambda\|\,\|\widetilde{K}-K\|, \tag{2.6}$$

где

$$\delta C = 2\|A\|\,[C^*(CFC^*)^{-1}C + \Lambda B(B^*GB)^{-1}B^*\Lambda]$$
$$- 2\|\widetilde{A}\|\,[\widetilde{C}^*(\widetilde{C}F\widetilde{C}^*)^{-1}\widetilde{C} + \Lambda\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*\Lambda].$$

Ясно, что δC представимо в виде

$$\delta C = 2(\|\widetilde{A}\|-\|A\|)[\Lambda K + K^*\Lambda] - 2\|\widetilde{A}\|\,[\widetilde{C}^*(\widetilde{C}F\widetilde{C}^*)^{-1}\widetilde{C} - C^*(CFC^*)^{-1}C]$$
$$- 2\|\widetilde{A}\|\Lambda\,[\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^* - B(B^*GB)^{-1}B^*]\Lambda.$$

Поскольку $\mu(C)\|C-\widetilde{C}\|/\|C\| \leqslant 1/3$, ввиду леммы 2.1

$$\|\widetilde{C}^*(\widetilde{C}A\widetilde{C}^*)^{-1}\widetilde{C} - C^*(CAC^*)^{-1}C\| \leqslant 9\|F^{-1}\|\mu(F)\mu(C)\frac{\|C-\widetilde{C}\|}{\|C\|}.$$

В силу формулы (2.4), неравенства $\|A - \widetilde{A}\|/\|A\| \leqslant 0.1$ и определения β заключаем, что

$$\|\delta C\| \leqslant 4\|A-\widetilde{A}\|\,\|\Lambda\|\,\|K\|+18\|A\|\left[1+\frac{\|A-\widetilde{A}\|}{\|A\|}\right]\|F^{-1}\|\mu(F)\mu(C)\frac{\|C-\widetilde{C}\|}{\|C\|}$$
$$+\,18\|A\|\left[1+\frac{\|A-\widetilde{A}\|}{\|A\|}\right]\|\Lambda\|^2\|G^{-1}\|\mu(G)\mu(B)\frac{\|B-\widetilde{B}\|}{\|B\|},$$

т. е. $\|\delta C\| \leqslant 2\|A\|\,\|\Lambda\|\beta$. Из этого неравенства и (2.5), (2.6) следует утверждение (b2). Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Пусть матрицы K_0, A, N, M, B, Y, P_0 связаны равенствами*

$$F_0 = -N^{-1}B^*Y, \quad K_0 = A + BF_0, \quad K_0^*P_0 + P_0K_0 + M + F_0^*NF_0 = 0.$$

Допустим, что матрица K_0 гурвицева, матрица Y симметричная положительно определенная и

$$\|P_0 - Y\| \leqslant \gamma_0,$$

где γ_0 — положительное число такое, что

$$\gamma_0 \leqslant \frac{\|K_0\|}{30\varkappa(K_0)\|BN^{-1}B^*\|}.$$

Тогда существует матрица X ($X = X^* \geqslant 0$), являющаяся единственным симметричным положительно определенным решением матричного уравнения Лурье — Риккати

$$A^*X + XA + M - XBN^{-1}B^*X = 0.$$

При этом верны следующие утверждения:

(d1) *имеет место неравенство $\|X - Y\| \leqslant 2\gamma_0$,*

(d2) *матрица $\widetilde{K} = A - BN^{-1}B^*X$ гурвицева, и выполняются оценки*

$$\|\widetilde{K} - K_0\| \leqslant 2\|BN^{-1}B^*\|\gamma_0,$$

$$\left|\frac{\varkappa(\widetilde{K})}{\|\widetilde{K}\|} - \frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}\right| \leqslant 1.1\left[\frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}\right]^2\|\widetilde{K} - K_0\|. \tag{2.7}$$

Доказательство. Начиная с P_{-1}, мы можем построить последовательности P_k, F_k, K_k ($k \geqslant 0$) при помощи следующей рекурсии:

$$F_k = -N^{-1}B^*P_{k-1}, \quad K_k = A + BF_k,$$
$$K_k^*P_k + P_kK_k + M + F_k^*NF_k = 0. \tag{2.8}$$

Хорошо известно (см., например [20–23]), что последовательность $\{P_n\}$ сходится к искомой матрице X. Более того, последовательность $\{K_n\}$ состоит из гурвицевых матриц и

$$0 \leqslant X \leqslant P_{n+1} \leqslant P_n \leqslant \ldots \leqslant P_{-1} = Y.$$

Поскольку все матрицы K_n гурвицевы, равенства (2.8) однозначно разрешимы относительно P_n. Для полноты изложения приведем доказательство этого утверждения. Отметим, что в силу (2.8)

$$(A+BF_{k+1})^*P_k + P_k(A+BF_{k+1}) + M \\ + F_{k+1}^*NF_{k+1} + (F_k - F_{k+1})^*N(F_k - F_{k+1}) = 0. \quad (2.9)$$

Поскольку $K_{k+1} = A + BF_{k+1}$, из (2.8) и (2.9) следует

$$K_{k+1}^*(P_k - P_{k+1}) + (P_k - P_{k+1})K_{k+1} + (F_k - F_{k+1})^*N(F_k - F_{k+1}) = 0. \quad (2.10)$$

Этот факт нам потребуется в дальнейшем.

Теперь, применяя индукцию по k, покажем, что все матрицы K_k гурвицевы при всех $k \geqslant 0$. При $k = 1$ из (2.8) следует

$$K_1 = A + BF_1 = A + BF_0 + B(F_1 - F_0) = K_0 + B(F_1 - F_0),$$

т. е. $K_1 - K_0 = B(F_1 - F_0)$. Из (2.8) имеем

$$\|B(F_1 - F_0)\| = \|BN^{-1}B^*(P_0 - P_{-1})\| \leqslant \|BN^{-1}B^*\|\,\|P_0 - Y\|,$$

следовательно,

$$\|K_1 - K_0\| \leqslant \|BN^{-1}B^*\|\gamma_0.$$

Далее, по условию леммы

$$\|BN^{-1}B^*\|\gamma_0 \leqslant \frac{\|K_0\|}{30\varkappa(K_0)}$$

заключаем, что

$$\frac{\|K_1 - K_0\|}{\|K_0\|} \leqslant \frac{1}{15\varkappa(K_0)}.$$

Согласно теореме 2.1, если матрицы K_1 и K_0 достаточно близки, то матрица K_1 также гурвицева и имеет место оценка

$$\left|\frac{\varkappa(K_1)}{\|K_1\|} - \frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}\right| \leqslant 1.1\left[\frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}\right]^2 \|K_1 - K_0\| \leqslant \\ 1.1\left[\frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}\right]^2 \|BN^{-1}B^*\|\gamma_0.$$

В частности,

$$\frac{\varkappa(K_1)}{\|K_1\|} \leqslant 1.1\frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}. \quad (2.11)$$

Ввиду сделанного выше замечания запишем равенство

$$K_1^*(P_1 - P_0) + (P_1 - P_0)K_1 + (F_0 - F_1)^*N(F_0 - F_1) = 0.$$

Поскольку матрица K_1 гурвицева, имеем

$$\|P_1 - P_0\| \leqslant 0.5\frac{\varkappa(K_1)}{\|K_1\|}\|(F_0 - F_1)^*N(F_0 - F_1)\| \\ \leqslant 0.55\frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}\|BN^{-1}B^*\|\,\|P_{-1} - P_0\|^2.$$

Вводя обозначение

$$\gamma = 1.1\frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}\|BN^{-1}B^*\|\gamma_0, \tag{2.12}$$

запишем

$$\|P_1 - P_0\| \leqslant \gamma\|P_{-1} - P_0\|.$$

Предположим, что для всех $k \leqslant m$ матрицы K_k гурвицевы и верны неравенства

$$\|P_k - P_{k-1}\| \leqslant \gamma^k\|P_{k-1} - P_{k-2}\|. \tag{2.13}$$

Как мы видели ранее, при $k = 1$ эти предположения выполняются. Теперь покажем, что если они верны при $k = m$, то будут выполняться также и при $k = m + 1$. Из равенств (2.8) при $1 \leqslant i \leqslant m + 1$ имеем

$$K_i = K_0 + \sum_{j=0}^{i-1} B(F_{j+1} - F_j),$$

т. е.

$$\|K_i - K_0\| \leqslant \sum_{j=0}^{i-1} \|B(F_{j+1} - F_j)\|. \tag{2.14}$$

Далее, так как

$$\|B(F_{j+1} - F_j)\| \leqslant \|BN^{-1}B^*\|\,\|P_{j-1} - P_j\|,$$

согласно предположениям (2.13) и (2.14) справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned}\|K_i - K_0\| &\leqslant \|BN^{-1}B^*\| \sum_{j=0}^{i-1} \|P_{j-1} - P_j\| \\ &\leqslant \|BN^{-1}B^*\|\,[\|P_{-1} - P_0\| + \gamma\sum_{j=0}^{i-2} \|P_{j-1} - P_j\| \\ &\leqslant \frac{1}{1-\gamma}\|BN^{-1}B^*\|\|P_{-1} - P_0\|.\end{aligned}$$

Поэтому при $1 \leqslant i \leqslant m + 1$ верны неравенства

$$\|K_i - K_0\| \leqslant \frac{\gamma_0}{1-\gamma}\|BN^{-1}B^*\|.$$

Далее, поскольку $\gamma \leqslant 0.5$, имеем

$$\|K_i - K_0\| \leqslant 2\|BN^{-1}B^*\|\gamma_0, \tag{2.15}$$

а так как по условию леммы $2\|BN^{-1}B^*\|_{\gamma_0} \leqslant \|K_0/\,[15\varkappa(K_0)]$, мы можем, повторяя доказательство оценки (2.11), утверждать, что при $1 \leqslant i \leqslant m+1$

$$\left|\frac{\varkappa(K_i)}{\|K_i\|} - \frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}\right| \leqslant 1.1\left[\frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}\right]^2\|K_i - K_0\|. \tag{2.16}$$

В частности, ввиду (2.15) и условия $\varkappa(K_0)/\|K_0\|\,\|BN^{-1}B^*\|\gamma_0 \leqslant 1/30$ приходим к оценке

$$\frac{\varkappa(K_i)}{\|K_i\|} \leqslant 1.1\frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|},$$

т. е. матрица K_{m+1} гурвицева и

$$\frac{\varkappa(K_{m+1})}{\|K_{m+1}\|} \leqslant 1.1\frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}.$$

В этом случае согласно теореме Ляпунова существует симметричная неотрицательно определенная матрица P_{m+1}, удовлетворяющая (2.8). Теперь, используя (2.10), при $k = m$ можем заключить, что

$$K^*_{m+1}(P_m - P_{m+1}) + (P_m - P_{m+1})K_{m+1} + (F_m - F_{m+1})^* N(F_m - F_{m+1}) = 0.$$

Следовательно, верна оценка

$$\|P_m - P_{m+1}\| \leqslant 0.5\frac{\varkappa(K_{m+1})}{\|K_{m+1}\|}\|BN^{-1}B^*\|\,\|P_m - P_{m-1}\|^2;$$

более того,

$$\|P_m - P_{m+1}\| \leqslant 0.55\frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}\|BN^{-1}B^*\|\,\|P_m - P_{m-1}\|^2. \tag{2.17}$$

Далее, в силу (2.13)

$$\|P_m - P_{m-1}\| \leqslant \gamma^m\|P_{m-1} - P_{m-2}\|.$$

Используя (2.12) и (2.17), запишем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\|P_m - P_{m+1}\| &\leqslant 0.55\frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}\|BN^{-1}B^*\|\gamma^m\|P_{m-1} - P_{m-2}\|\,\|P_m - P_{m-1}\|\\ &\leqslant 0.55\frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}\|BN^{-1}B^*\|\gamma^m\|P_{-1} - P_0\|\,\|P_m - P_{m-1}\|\\ &\leqslant 0.55\frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}\|BN^{-1}B^*\|\gamma^m\gamma_0\|P_m - P_{m-1}\| \leqslant \gamma^{m+1}\|P_m - P_{m-1}\|.\end{aligned}$$

Итак, мы доказали, что матрица K_{m+1} гурвицева и оценка (2.13) верна при $k = m + 1$. Следовательно, матрицы K_k гурвицевы, и оценка (2.13) верна при всех $k \geqslant 1$. Далее, мы покажем, что последовательность $\{P_k\}$ сходящаяся и равномерно ограниченная. Более того, неравенства $0 \leqslant P_k \leqslant P_{-1}$ верны при всех k. Действительно, последнее утверждение вытекает из равенства (2.10) с гурвицевой матрицей K_{k+1} и легко проверяемого неравенства

$$(F_k - F_{k+1})^* N(F_k - F_{k+1}) \geqslant 0.$$

Если мы дополним это свойство последовательности $\{P_k\}$ доказанными неравенствами

$$\|P_k - P_{k-1} \leqslant \gamma^k\|P_{k-1} - P_{k-2}\|, \qquad k \geqslant 1,\ \gamma \leqslant 0.5,$$

то можем заключить, что последовательность $\{P_k\}$ сходится. Таким образом, обозначая $X = P_\infty = \lim P_k$, мы видим, что матрица $X = X^* \geqslant 0$ является решением матричного уравнения Лурье — Риккати

$$A^*X + XA + M - XBN^{-1}B^*X = 0.$$

Более того, верны неравенства

$$\|X - Y\| \leqslant \|P_\infty - P_{-1}\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|P_k - P_{k-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\gamma}\|P_0 - P_{-1}\|,$$

поэтому

$$\|X - Y\| \leqslant \frac{1}{1-\gamma}\|P_0 - P_{-1}\|, \qquad \|X - Y\| \leqslant 2\gamma_0.$$

Утверждение (d1) доказано.

Утверждение (d2) следует из формул (2.15) и (2.16), справедливых также для матрицы $X = P_\infty$. Лемма 2.3 доказана.

2.3. Теорема непрерывности. Рассмотрим матричное уравнение Лурье — Риккати (0.1) с матрицами A, B, C, G, F такими, что

(а) существует решение уравнения (0.1), которое является симметричной неотрицательно определенной матрицей Λ ($\Lambda = \Lambda^* \geqslant 0$);

(б) матрица $K = A - 2\|A\|B(B^*GB)^{-1}B^*\Lambda$ гурвицева.

Рассмотрим также другое матричное уравнение Лурье — Риккати

$$\widetilde{A}^*X + X\widetilde{A} + 2\|\widetilde{A}\|\,[\widetilde{C}^*(\widetilde{C}F\widetilde{C}^*)^{-1}\widetilde{C} - X\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*X] = 0. \qquad (2.18)$$

Если матрицы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ достаточно близки к матрицам A, B, C соответственно, то для (2.18) справедливы утверждения, аналогичные утверждениям (а), (б).

Теорема 2.3. *Пусть матрицы A, B, C, X связаны уравнением* (2.17) *и верны утверждения* (а), (б). *Предположим, что матрицы F, G симметричные положительно определенные и матрицы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ подчинены условиям*

$$\mu(B)\frac{\|B - \widetilde{B}\|}{\|B\|} \leqslant \frac{1}{3}, \quad \mu(C)\frac{\|C - \widetilde{C}\|}{\|C\|} \leqslant \frac{1}{3}, \quad \frac{\|A - \widetilde{A}\|}{\|A\|} \leqslant 0.1,$$

$$\left[70\varkappa(K)\|G^{-1}\|\frac{\|A\|}{\|K\|} + \frac{10}{\|\Lambda\|}\right]\gamma_0 \leqslant 1,$$

где

$$\gamma_0 = 2\varkappa(K)\|\Lambda\|\frac{\|A\|}{\|K\|}\left[\frac{\|K\|}{\|A\|} + (1 + 2\|\Lambda\|\,\|G^{-1}\|)\frac{\|A - \widetilde{A}\|}{\|A\|}\right.$$
$$\left. + \frac{10}{\|\Lambda\|}\left(\|F^{-1}\|\mu(F)\mu(C)\frac{\|C - \widetilde{C}\|}{\|C\|}\right) + 28\|\Lambda\|\,\|G^{-1}\|\mu(G)\mu(B)\frac{\|B - \widetilde{B}\|}{\|B\|}\right].$$

Тогда верны следующие утверждения:

1) *матрица X является единственным симметричным неотрицательно определенным решением уравнения* (2.18), *причем $\|\Lambda - X\| \leqslant 2\gamma_0$;*

2) *матрица $\widetilde{K} = \widetilde{A} - 2\|\widetilde{A}\|\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*X$ гурвицева;*

3) *имеет место оценка*

$$\left|\frac{\varkappa(\widetilde{K})}{\|\widetilde{K}\|} - \frac{\varkappa(K)}{\|K\|}\right| \leqslant \frac{\varkappa(K)}{\|K\|}\left[\frac{0.55}{\|\Lambda\|} + 6.5\|A\|\frac{\varkappa(K)}{\|K\|}\|G^{-1}\|\right]\gamma_0.$$

Доказательство. По определению γ_0 имеем

$$\frac{\gamma_0}{\|\Lambda\|} \geqslant 2\frac{\varkappa(K)}{\|K\|}\|\Lambda\|\,\|A\|\alpha_0,$$

где

$$\alpha_0 = \left[\frac{1}{\|\Lambda\|} + 2\|G^{-1}\|\right]\frac{\|A-\widetilde{A}\|}{\|A\|} + 18\,\|G^{-1}\|\mu(G)\mu(B)\frac{\|B-\widetilde{B}\|}{\|B\|}.$$

Поскольку $\gamma_0/\|\Lambda\| \leqslant 0.1$, верна оценка

$$\alpha_0 \leqslant \frac{\|K\|}{2\varkappa(K)\|\Lambda\|\,\|A\|},$$

которая при ограничениях

$$\mu(B)\frac{\|B-\widetilde{B}\|}{\|B\|} \leqslant \frac{1}{3}, \quad \mu(C)\frac{\|C-\widetilde{C}\|}{\|C\|} \leqslant \frac{1}{3}$$

ввиду леммы 2.2 позволяет утверждать, что матрица

$$\widetilde{K}_0 = \widetilde{A} - 2\|\widetilde{A}\|\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*\Lambda$$

гурвицева и верно неравенство (2.7). Кроме того, существует единственное неотрицательно определенное симметричное решение P_0 матричного уравнения Ляпунова

$$\widetilde{K}_0^*P_0 + P_0\widetilde{K}_0 + 2\|\widetilde{A}\|\,[\widetilde{C}^*(\widetilde{C}F\widetilde{C}^*)^{-1}\widetilde{C} + \Lambda\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*\Lambda] = 0,$$

которое связано с Λ оценкой

$$\|P_0 - \Lambda\| \leqslant 2\frac{\varkappa(K)}{\|K\|}\|\Lambda\|\,\|A\|\,[\|\Lambda\|\alpha_0 + \beta],$$

где

$$\beta = \frac{10}{\|\Lambda\|}\|F^{-1}\|\mu(F)\mu(C)\frac{\|C-\widetilde{C}\|}{\|C\|} + 10\|\Lambda\|\,\|G^{-1}\|\mu(G)\mu(B)\frac{\|B-\widetilde{B}\|}{\|B\|} + 2\|K\|\frac{\|A-\widetilde{A}\|}{\|A\|}.$$

Следовательно, поскольку $\gamma_0 \geqslant 2[\varkappa(K)/\|K\|\,]\,\|\Lambda\|\,\|A\|\,[\,\|\Lambda\|\alpha_0+\beta]$, мы приходим к неравенству $\|\Lambda - P_0\| \leqslant \gamma_0$.

Далее, так как $[2\varkappa(K)/\|K\|]\|\Lambda\|\,\|A\|\alpha_0 \leqslant \gamma_0/\|\Lambda\|$, в силу неравенства (2.7) запишем

$$\left|\frac{\varkappa(\widetilde{K}_0)}{\|\widetilde{K}_0\|} - \frac{\varkappa(K)}{\|K\|}\right| \leqslant 0.55\frac{\varkappa(K)}{\|K\|}\frac{\gamma_0}{\|\Lambda\|}. \tag{2.19}$$

Таким образом, учитывая неравенство $\gamma_0/\|\Lambda\| \leqslant 0.1$, получаем оценку

$$0.045\frac{\varkappa(K)}{\|K\|} \leqslant \frac{\varkappa(\widetilde{K}_0)}{\|\widetilde{K}_0\|} \leqslant 1.05\frac{\varkappa(K)}{\|K\|}. \tag{2.20}$$

Далее, поскольку $\gamma_0 \leqslant \|K\|/[70\varkappa(K)\|A\|\,\|G^{-1}\|\,]$, воспользовавшись равенством $\|G^{-1}\| = \|\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*\|$, оценкой (2.20) и неравенством $\|\widetilde{A}\| \leqslant 1.1\|A\|$, выводим ограничение

$$\gamma_0 \leqslant \|\widetilde{K}_0\|/30\varkappa(\widetilde{K}_0)\cdot 2\|A\|\,\|\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*\|,$$

которое вместе с доказанной выше оценкой $\|P_0 - \Lambda\| \leqslant \gamma_0$ и леммой 2.3 (матрицы K_0, A, N, M, B, Y, P_0 в условиях леммы 2.3 отвечают соответственно матрицам $\widetilde{K}_0$, $\widetilde{A}$, $\widetilde{N}$, $\widetilde{M}$, $\widetilde{B}$, Λ, P_0, где $\widetilde{N} = (2\|\widetilde{A}\|)^{-1}\widetilde{B}^*G\widetilde{B}$, $\widetilde{M} = 2\|\widetilde{A}\|\widetilde{C}^*(\widetilde{C}F\widetilde{C}^*)^{-1}\widetilde{C}$) показывают, что утверждения 1 и 2 теоремы справедливы.

Чтобы доказать утверждение 3, выпишем оценки

$$\|\widetilde{K} - \widetilde{K}_0\| \leqslant 4\|\widetilde{A}\|\,\|\widetilde{B}(\widetilde{B}^*G\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^*\|\gamma_0 = 4\|\widetilde{A}\|\,\|G^{-1}\|\gamma_0,$$

$$\left|\frac{\varkappa(\widetilde{K})}{\|\widetilde{K}\|} - \frac{\varkappa(\widetilde{K}_0)}{\|\widetilde{K}_0\|}\right| \leqslant \left[\frac{\varkappa(\widetilde{K}_0)}{\|\widetilde{K}_0\|}\right]^2\|\widetilde{K} - \widetilde{K}_0\| \leqslant 4.4\|\widetilde{A}\|\left[\frac{\varkappa(\widetilde{K}_0)}{\|\widetilde{K}_0\|}\right]^2\|G^{-1}\|\gamma_0.$$

Из последнего неравенства ввиду (2.20) получаем оценку

$$\left|\frac{\varkappa(\widetilde{K})}{\|\widetilde{K}\|} - \frac{\varkappa(\widetilde{K}_0)}{\|\widetilde{K}_0\|}\right| \leqslant 6.5\left[\frac{\varkappa(K)}{\|K\|}\right]^2\|G^{-1}\|\gamma_0,$$

которая вместе с (2.19) показывает, что утверждение 3 верно. Теорема 2.3 доказана.

2.4. Теорема о невязке матричного уравнения Лурье — Риккати.

Теорема 2.4. *Если матрицы $K_0 = A - 2\|A\|B(B^*B)^{-1}B^*Y$, $Y = Y^* \geqslant 0$ и достаточно малое положительное число δ таковы, что*

— *матрица K_0 гурвицева,*

— *верна оценка $\sqrt{\delta} \leqslant \|K_0\|/[30\|A\|\varkappa(K_0)]$,*

— *верна оценка $\|\Delta\| \leqslant \delta\|A\|$, где $\Delta = A^*Y + YA + 2\|A\|\,[C^*(CFC^*)^{-1}C - YB(B^*GB)^{-1}B^*Y]$,*

то матрица Y связана с матрицей Λ неравенством

$$\|Y - \Lambda\| \leqslant \frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}\|\Delta\|,$$

где Λ ($\Lambda = \Lambda^* \geqslant 0$) — единственное решение матричного уравнения Лурье — Риккати

$$A^*\Lambda + \Lambda A + 2\|A\|\,[C^*(CFC^*)^{-1}C + YB(B^*GB)^{-1}B^*Y] = 0.$$

Доказательство. Пусть P_0 — решение матричного уравнения Ляпунова

$$K_0^*P_0 + P_0K_0 + 2\|A\|\,[C^*(CFC^*)^{-1}C + YB(B^*GB)^{-1}B^*Y] = 0.$$

Такое решение существует и единственно, поскольку матрица K_0 гурвицева. Имеем

$$K_0^*(P_0 - Y) + (P_0 - Y)K_0 + \Delta = 0.$$

Далее, так как матрица K_0 гурвицева, верно неравенство

$$\|P_0 - Y\| \leqslant 0.5\frac{\varkappa(K_0)}{\|K_0\|}\|\Delta\|.$$

Введем обозначение

$$N = (2\|A\|)^{-1}B^*GB, \qquad M = 2\|A\|C^*(CFC^*)^{-1}C, \quad \gamma_0 = \frac{\varkappa(K_0)}{2\|K_0\|}\|\Delta\|.$$

Легко проверить неравенства

$$\|P_0 - Y\| \leqslant \gamma_0, \quad \gamma_0 \leqslant \frac{\|K_0\|}{30\varkappa(K_0)\|BN^{-1}B^*\|}$$
$$(\|BN^{-1}B^*\| = 2\|A\|\,\|G^{-1}\|).$$

По лемме 2.3 существует единственная матрица Λ, удовлетворяющая условию теоремы. Более того, верна оценка $\|\Lambda - Y\| \leqslant 2\gamma_0$. Теорема 2.4 доказана.

§ 3. Оценка решений и матриц Грина некоторых краевых задач

В этом параграфе мы рассмотрим матрицы Грина и решения некоторых краевых задач, связанных с решением матричного уравнения Лурье — Риккати. Следуя работе [3], мы приведем в п. 3.1 оценку матрицы Грина краевой задачи на бесконечной числовой прямой, а также выясним связь между решениями матричного уравнения Лурье — Риккати и уравнения, дуального ему. В п. 3.2 для хорошо обусловленного матричного уравнения Лурье — Риккати получены оценки, связывающие величину интервала краевой задачи с точностью, с которой решение этой задачи аппроксимирует искомое решение. В п. 3.3 получены оценки граничных функций Грина, а также решений некоторых краевых задач.

3.1. Оценка матрицы Грина, связь между решениями уравнения Лурье — Риккати и дуального уравнения. Как и ранее, предположим, что матрицы $M = M^* \geqslant 0$, $\Lambda = \Lambda^* \geqslant 0$ удовлетворяют уравнениям (0.1), (0.2), матрицы $K = A - 2\|A\|B(B^*GB)^{-1}B^*\Lambda$, $L = A - 2\|A\|MC^*(CFC^*)^{-1}C$ гурвицевы и матрицы $S = S^* \geqslant 0$, $M_{\rm st} = M_{\rm st}^* \geqslant 0$ удовлетворяют уравнениям Ляпунова

$$SK^* + KS + 2\|A\|\,B(B^*GB)^{-1}B^* = 0,$$
$$M_{\rm st}^*L + L^*M_{\rm st} + 2\|A\|C^*(CFC^*)^{-1}C = 0.$$

Легко проверить, что матрица W вида (0.5) и матрицы K, P^{-1}, P, где

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} I - S\Lambda & -S \\ \Lambda & I \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} I & \\ -\Lambda & I - \Lambda S \end{bmatrix}$$

связаны равенством

$$W = P\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -K^* \end{bmatrix}P^{-1},$$

что позволяет выписать в явном виде матричную функцию $G(t)$, являющуюся ограниченным решением на $-\infty < t < \infty$ краевой задачи

$$\frac{d}{dt}G(t) = WG(t) + \delta(t)I, \quad G(-\infty) = G(+\infty) = 0.$$

Ясно, что при $t > 0$ имеет место представление

$$G(t) = P \begin{bmatrix} e^{tK} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1},$$

так что после элементарного перемножения матриц получим

$$G(t) = \begin{bmatrix} e^{tK}(I - S\Lambda) & -e^{TK}S \\ -\Lambda e^{tK}(I - S\Lambda) & \Lambda e^{tK}S \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Отсюда нетрудно вывести оценку

$$\|G(t)\| \leqslant [(1 + \|\Lambda\|^2)]^{1/2}[1 + \|S\| \, [(1 + \|\Lambda\|^2)]^{1/2}]\|e^{tK}\|.$$

Полагая

$$\alpha = [(1 + \|\Lambda\|^2)\varkappa(K^*)]^{1/2}[1 + \|S\| \, [(1 + \|\Lambda\|^2)]^{1/2}],$$
$$\beta = \|K\|/\varkappa(K^*),$$

убедимся, что $\|G(t)\| \leqslant \alpha e^{-\beta t}$ при $t > 0$. Легко показать, что $\|G(t)\| = \|G(-t)\|$, поэтому $\|G(t)\| \leqslant \alpha e^{-\beta|t|}$ при $-\infty < t < \infty$. Заметим, что в обозначениях

$$\widetilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} I & M \\ -\Lambda & I \end{bmatrix}, \quad \widetilde{P} = \begin{bmatrix} (I + M\Lambda)^{-1} & -M(I + \Lambda M)^{-1} \\ \Lambda(I + M\Lambda)^{-1} & (I + \Lambda M)^{-1} \end{bmatrix}$$

справедливо представление

$$W = \widetilde{P}^{-1} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -L^* \end{bmatrix} \widetilde{P},$$

в силу которого при $t > 0$ имеем

$$G(t) = \begin{bmatrix} e^{tK}(I + M\Lambda)^{-1} & -e^{tK}M(I + \Lambda M)^{-1} \\ -\Lambda e^{tK}(I + M\Lambda)^{-1} & \Lambda e^{tK}M(I + \Lambda M)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Сравнивая (3.1) и (3.2) при $t = 0$, получим равенства

$$I - S\Lambda = (I + M\Lambda)^{-1}, \quad S = M(I + \Lambda M)^{-1}, \quad I - \Lambda S = (I + \Lambda M)^{-1}, \tag{3.3}$$

из которых вытекают три важных утверждения:

(i) матрицы $I - S\Lambda$ и $I - \Lambda S$ обратимы,

(ii) имеет место равенство $[(I - \Lambda S)^{-1}]^* = (I - S\Lambda)^{-1}$,

(iii) имеет место равенство $(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda = \Lambda(I - S\Lambda)^{-1}$.

Аналогично при обозначениях

$$\widehat{P}^{-1} = \begin{bmatrix} I - MM_{\mathrm{st}} & M \\ -M_{\mathrm{st}} & I \end{bmatrix}, \quad \widehat{P} = \begin{bmatrix} I & -M \\ M_{\mathrm{st}} & I - M_{\mathrm{st}}M \end{bmatrix}$$

справедливо представление

$$W = \widehat{P}^{-1}\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & -L^* \end{bmatrix}\widehat{P},$$

в силу которого при $t > 0$ имеем

$$G(t) = \begin{bmatrix} (I - MM_{\mathrm{st}})e^{tL} & -(I - MM_{\mathrm{st}})e^{tL}M \\ -M_{\mathrm{st}}e^{tL} & M_{\mathrm{st}}e^{tL}M \end{bmatrix}.$$

Сравнивая полученное равенство с (3.1) и (3.2) при $t = 0$, заключаем, что

$$\begin{gathered} M_{\mathrm{st}} = \Lambda(I + M\Lambda)^{-1}, \quad M_{\mathrm{st}} = \Lambda(I - S\Lambda), \\ I - MM_{\mathrm{st}} = I - S\Lambda, \quad I - MM_{\mathrm{st}} = (I + M\Lambda)^{-1}. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Итак, мы получили равенства (3.3), (3.4), которые указывают на взаимосвязь решений уравнения Лурье — Риккати и дуального ему с решениями двух матричных уравнений Ляпунова.

3.2. Погрешности невязки и аппроксимации. Обратимся вновь к краевой задаче (0.5), (0.6). Оказывается, что если интервал $(0, T)$ достаточно большой, так что выполнена оценка

$$\max\{\|S\|, \|G^{-1}\|\} \cdot 2\varkappa(K^*)\|(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda\|e^{-2T\beta} \leqslant 1 \quad (\beta = \|K\|/\varkappa(K^*)), \tag{3.5}$$

то матрицы $Y(0)$ и Λ связаны неравенством

$$\|Y(0) + \Lambda\| \leqslant 2\varkappa(K^*)\,\|(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda\|e^{-2T\beta}. \tag{3.6}$$

При этом невязка

$$\Delta = -A^*Y(0) - Y(0)A + 2\|A\|\,[C^*(CFC^*)^{-1}C - Y(0)B(B^*GB)^{-1}B^*Y(0)]$$

удовлетворяет оценке

$$\|\Delta\| \leqslant 8\|A\|\,[1 + \|G^{-1}\|\,\|\Lambda\|]\varkappa(K^*)\,\|(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda\|e^{-2T\beta}. \tag{3.7}$$

Начнем с доказательства равенства $Y(0) = [Y(0)]^*$, т. е. докажем, что $Y(0)$ — симметричная матрица. В [3] показано, что матрицы $Y(0)$ и Λ связаны равенством

$$Y(0) = -\Lambda + [\Lambda e^{TK}S + (I - \Lambda S)e^{-TK^*}]^{-1}\Lambda e^{TK}.$$

Из (3.5) вытекает, что

$$\|(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK}Se^{TK^*}\| \leqslant 0.5,$$

следовательно, имеет место представление

$$[(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK}Se^{TK^*} + I]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}[-(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK}Se^{TK^*}]^n.$$

Перепишем $Y(0)$ в виде

$$Y(0) = -\Lambda + e^{TK^*}\sum_{n=0}^{\infty}[-(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK}Se^{TK^*}]^n(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK}. \tag{3.8}$$

В этом случае при помощи цепочки легко проверяемых равенств

$$
\begin{aligned}
[Y(0)]^* &= -\Lambda + e^{TK} S\Lambda[(I-\Lambda S)^{-1}]^* \\
&\qquad\qquad \times \sum_{n=0}^{\infty}[I-(I-\Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK} S e^{TK^*}]^n]^* e^{TK} \\
&= -\Lambda + e^{TK^*}\Lambda(I-\Lambda S)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}[-e^{TK} S e^{TK^*}\Lambda[(I-\Lambda S)^{-1}]^*]^n e^{TK} \\
&= -\Lambda + e^{TK^*}(I-\Lambda S)^{-1}\Lambda\sum_{n=0}^{\infty}[-e^{TK} S e^{TK^*}(I-\Lambda S)^{-1}\Lambda]^n e^{TK} \\
&= -\Lambda + e^{TK^*}\sum_{n=0}^{\infty}[-(I-\Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK} S e^{TK^*}]^n (I-\Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK} \\
&= Y(0)
\end{aligned}
$$

заключаем, что $Y(0) = [Y(0)]^*$. При обосновании этой цепочки равенств следует пользоваться доказанными в п. 3.1 равенствами утверждениями (i)–(iii). Из (3.8) при условии (3.5) вытекает цепочка неравенств

$$
\begin{aligned}
\|Y(0)+\Lambda\| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\|e^{TK^*}(I-\Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK}\|^{n+1}\|S\|^n \\
&\leqslant \|e^{TK^*}(I-\Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK}\|/[1-\|e^{TK^*}(I-\Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK}\|\,\|S\|] \\
&\leqslant 2\|e^{TK^*}(I-\Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK}\| \leqslant 2\varkappa(K^*)\|(I-\Lambda S)^{-1}\Lambda\|e^{-2T\beta},
\end{aligned}
$$

из которой вытекает (3.6).

Перейдем к выводу неравенства (3.7). Так как Λ — точное решение уравнения

$$A^*\Lambda + \Lambda A + 2\|A\|\,[C^*(CFC^*)^{-1}C - \Lambda B(B^*GB)^{-1}B^*\Lambda] = 0,$$

получаем представление

$$\Delta = K^*[Y(0)+\Lambda] + [Y(0)+\Lambda]K - [Y(0)+\Lambda]\cdot 2\|A\|B(B^*GB)^{-1}B^*[Y(0)+\Lambda].$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\|\Delta\| &\leqslant 2\|K\|\,\|Y(0)+\Lambda\| + 2\|A\|\,\|G^{-1}\|\,\|Y(0)+\Lambda\|^2 \\
&\leqslant \{2[\,\|A\| + 2\|A\|\,\|G^{-1}\|\,\|\Lambda\|\,] + 2\|A\|\,\|G^{-1}\|\,\|Y(0)+\Lambda\|\}\,\|Y(0)+\Lambda\| \\
&\leqslant 2\|A\|\,[2+2\|G^{-1}\|\,\|\Lambda\|]\,\|Y(0)+\Lambda\|,
\end{aligned}
$$

откуда ввиду (3.6) приходим к неравенству (3.8).

3.3. Оценки граничных функций Грина и решений некоторых краевых задач. В этом пункте мы сформулируем и докажем пять лемм, из которых следуют оценки граничных функций Грина и решений некоторых краевых задач. Полученные результаты устанавливают хорошую обусловленность линейного оператора, возникающего после дискретизации исходной краевой задачи при условии хорошей обусловленности данного уравнения Лурье — Риккати.

Лемма 3.1. *Единственное решение краевой задачи*

$$\frac{d}{dt}G_R(t) = WG_R(t), \quad LG_R(0) = I, \; RG_R(t) = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

допускает представление в виде

$$G_R(t) = \begin{bmatrix} e^{-tK}Se^{T^*} + Se^{(T-t)K^*} \\ \Lambda e^{tKS}e^{TK^*} + (I - \Lambda S)e^{(T-t)K^*} \end{bmatrix} [\Lambda e^{TK}Se^{T^*} + (I - \Lambda S)]^{-1}.$$

Если T настолько велико, что

$$\varkappa(K^*)\|(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda\| \, \|S\|e^{-2T\beta} \leqslant 0.5,$$

то верна оценка

$$\|G_R(t)\| \leqslant \alpha_2 e^{-\beta(T-t)} \qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

где $\beta = \|K\|/\varkappa(K^*)$, $\alpha_2^2 = \varkappa(K^*)[2\|(I - \Lambda S)^{-1}\| \max\{\|S\|, 1 + \|\Lambda\| \, \|S\|\}]^2$.

Лемма 3.2. *Единственное решение краевой задачи*

$$\frac{d}{dt}G_L(t) = WG_L(t), \quad LG_L(0) = 0, \; RG_L(t) = I \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

допускает представление в виде

$$G_L(t) = \begin{bmatrix} e^{tK}(I - S\widehat{G}_2(0)) + Se^{-tK^*}\widehat{G}_2(0) \\ -\Lambda e^{tK}(I - S\widehat{G}_2(0)) + (I - \Lambda S)e^{-tK^*}\widehat{G}_2(0) \end{bmatrix},$$

где $\widehat{G}_2(0) = [I + e^{TK^*}(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK}S]^{-1}e^{TK^*}(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK}$.

Если в условиях леммы 3.1 потребовать выполнения условия

$$\varkappa(K^*)\|(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda\|e^{-T\beta} \leqslant 0.5,$$

то верны оценки

$$\|G_L(t)\| \leqslant \alpha_1 e^{-\beta t}, \quad \|G_L(t)\| \leqslant \gamma_1 e^{-\beta t} + \gamma_2 e^{-\beta(T-t)} \qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

где $\gamma_1^2 = \varkappa(K^*)(1 + \|\Lambda\|^2)$, $\gamma_2 = \max\{\|S\|, 1 + \|\Lambda\| \, \|S\|\}$, $\alpha_1 = \gamma_1 + \varkappa(K^*)\|(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda\|\gamma_2$.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия лемм 3.1 и 3.2. Тогда для единственного решения краевой задачи*

$$\frac{d}{dt}y(t) = Wy(t), \quad Ly(0) = \xi_L, \quad Ry(T) = \xi_R \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

верна оценка

$$\sum_{n=0}^{2^l} \|y(n\tau)\|^2 \leqslant [\|\xi_L\|^2 \cdot 2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \alpha_2^2\|\xi_R\|]^2/[1 - e^{-2\beta\tau}] \quad (T = 2^l\tau).$$

Лемма 3.4. *Пусть выполнены условия лемм 3.1–3.3. Тогда для единственного решения разностной краевой задачи*

$$B_0 y_{n-1} + A_0 y_n = 0, \quad L y_0 = \xi_L, \quad R y_{2^l} = \xi_R \qquad (n = 1, 2, \ldots, 2^l),$$

где $B_0 = -I$, $A_0 = e^{-\tau W}$, $T = 2^l \tau$, *верна оценка*

$$\sum_{n=0}^{2^l} \|y_n\|^2 \leqslant [\, \|\xi_L\|^2 \cdot 2(\gamma_a^2 + \gamma_2^2) + \alpha_2^2 \, \|\xi_R\| \,]^2 / [1 - e^{-2\beta\tau}].$$

Лемма 3.5. *Для единственного ограниченного решения разностной краевой задачи*

$$B_0 \overline{w}_{n-1} + A_0 \overline{w}_n = \overline{\xi}_n, \tag{3.9}$$

где $B_0 = -I$, $A_0 = e^{-\tau W}$, $\overline{\xi}_n = \xi_n$ *при* $n = 0, 1, \ldots, 2^l - 1$ *и* $\overline{\xi}_n = 0$ *при* $n < 0$ *и* $n \geqslant 2^l$, *верны оценки*

$$\sum_{n=0}^{2^l} \|\overline{w}_n\|^2 \leqslant \frac{4\alpha^2}{1 - e^{-2\beta\tau}} \sum_{n=0}^{2^l - 1} \|\xi_n\|^2,$$

$$\|\overline{w}_0\|^2 \leqslant \frac{\alpha^2}{1 - e^{-2\beta\tau}} \sum_{n=0}^{2^l - 1} \|\xi_n\|^2,$$

$$\|\overline{w}_{2^l}\|^2 \leqslant \frac{\alpha^2}{1 - e^{-2\beta\tau}} \sum_{n=0}^{2^l - 1} \|\xi_n\|^2.$$

Прежде чем приступить к доказательству лемм, введем обозначение

$$e^{tW} = \begin{bmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ U_{21}(t) & U_{22}(t) \end{bmatrix},$$

где U_{ij} — $(N \times N)$-матричные функции такие, что

$$\begin{aligned} U_{11}(t) &= e^{tK}(I - S\Lambda) + S e^{-tK^*} \Lambda, \\ U_{21}(t) &= -\Lambda e^{tK}(I - S\Lambda) + (I - S\Lambda) e^{-tK^*} \Lambda, \\ U_{12}(t) &= -e^{tK} S + S e^{-tK^*}, \\ U_{22}(t) &= \Lambda e^{tK} S + (I - \Lambda S) e^{-tK^*}; \end{aligned} \tag{3.10}$$

здесь матрица $K = A - 2\|A\| B (B^* G B)^{-1} B^* \Lambda$ гурвицева, а S является решением матричного уравнения Ляпунова

$$S K^* + K S + 2\|A\| B B^* G B)^{-1} B^* = 0.$$

Нетрудно проверить, что матрицы K, W, P^{-1}, P, где

$$W = \begin{bmatrix} A & 2\|A\| B (B^* G B)^{-1} B^* \\ 2\|A\| C^* (C F C^*)^{-1} C & -A^* \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} I - S\Lambda & -S \\ \Lambda & I \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} I & S \\ -\Lambda & I - \Lambda S \end{bmatrix},$$

связаны равенством

$$W = P \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -K^* \end{bmatrix} P^{-1},$$

следовательно,

$$e^{tW} = P \begin{bmatrix} e^{tK} & 0 \\ 0 & e^{-tK^*} \end{bmatrix} P^{-1},$$

откуда с помощью простого перемножения получаем соотношения (3.10).

Доказательство леммы 3.1. Введем обозначение

$$G_R(t) = \begin{bmatrix} G_R^{(1)}(t) \\ G_R^{(2)}(t) \end{bmatrix},$$

где $G_R^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2)$ — $(N \times N)$-матричные функции. Из граничных условий следует, что $G_R^{(1)}(0) = 0$, $G_R^{(2)}(T) = I$. Но так как $G_R(T) = e^{TW} G_R(0)$, используя обозначение (3.10), запишем равенство

$$G_R^{(2)}(T) = [\,U_{21}(T) \quad U_{22}(T)\,] \begin{bmatrix} G_R^{(1)}(t) \\ G_R^{(2)}(t) \end{bmatrix} = U_{22}(T) G_R^{(2)}(0),$$

т. е. $G_R^{(2)}(0) = U_{22}^{-1}(T)$. Ввиду полученных представлений матриц $G_R^{(1)}(0)$ и $G_R^{(2)}(0)$ имеем $G_R(t) = e^{tW} G_R(0) = \begin{bmatrix} U_{11}(t) \\ U_{21}(t) \end{bmatrix} G_R^{(2)}(0)$, т. е.

$$G_R(t) = \begin{bmatrix} U_{11}(t) \\ U_{21}(t) \end{bmatrix} U_{22}^{-1}(T). \tag{3.11}$$

Учитывая равенства (3.10) и сравнивая (3.11) с представлением $G_R(t)$ в формулировке леммы, заключаем, что они идентичны.

Перейдем теперь к выводу оценки $\|G_R(t)\|$. Введем обозначение $Y = (I - \Lambda S)^{-1} \Lambda e^{TK} S e^{TK^*}$. По условию $\varkappa(K^*)\, \|(I - \Lambda S)^{-1} \Lambda\|\, \|S\| e^{-2T\beta} \leqslant 0.5$, откуда $\|Y\| \leqslant 0.5$. Следовательно, верны представление

$$[\Lambda e^{TK} S e^{TK^*} + (I - \Lambda S)]^{-1} = (I - \Lambda S)^{-1} \sum_{p=0}^{\infty} (-Y)^p$$

и оценка

$$\|[\Lambda e^{TK} S e^{TK^*} + (I - \Lambda S)]^{-1}\| \leqslant \frac{\|(I - \Lambda S)^{-1}\|}{1 - \|Y\|}$$

т. е.

$$\|\Lambda e^{TK} S e^{TK^*} + (I - \Lambda S)^{-1}\| \leqslant 2 \|(I - \Lambda S)^{-1}\|. \tag{3.12}$$

Далее, нетрудно видеть, что $U_{22}(T) = [\Lambda e^{TK} S e^{TK^*} + (I - \Lambda S)] e^{-TK^*}$ и

$$U_{22}^{-1}(T) = e^{TK^*} [\Lambda e^{TK} S e^{TK^*} + (I - \Lambda S)]^{-1}. \tag{3.13}$$

Учитывая (3.12), можно утверждать, что верна оценка

$$\|U_{22}^{-1}(T)\| \leqslant 2\|(I-\Lambda S)^{-1}\|[\varkappa(K^*)]^{1/2}e^{-T\beta}. \tag{3.14}$$

В силу (3.10) имеем равенство

$$\begin{bmatrix} U_{11}(t) \\ U_{21}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{tK}Se^{tK^*}+S \\ \Lambda e^{tK}Se^{tK^*}+(I-\Lambda S) \end{bmatrix} e^{-tK^*},$$

которое вместе с формулами (3.10) и (3.14) приводит к равенству

$$G_R(t) = \begin{bmatrix} -e^{tK}Se^{tK^*}+S \\ \Lambda e^{tK}Se^{tK^*}+(I-\Lambda S) \end{bmatrix} e^{-(T-t)K^*}[\Lambda e^{TK}Se^{TK^*}+(I-\Lambda S)]^{-1}.$$

В силу соотношений

$$\begin{gathered} \|-e^{tK}Se^{tK^*}+S\| \leqslant \|S\|, \\ \|\Lambda e^{tK}Se^{tK^*}+(I-\Lambda S)\| = \|\Lambda(e^tSe^{tK^*}-S)+I\| \leqslant \|\Lambda\|\,\|S\|+1 \end{gathered} \tag{3.15}$$

и оценок (3.12)–(3.14) следует оценка $\|G_R(t)\|$. Лемма 3.1 доказана.

Доказательство леммы 3.2. Введем обозначение

$$\widehat{G}(t) = \begin{bmatrix} \widehat{G}_1(t) \\ \widehat{G}_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1}G_L(t),$$

где $\widehat{G}_i(t)$ — $(N\times N)$-матричные функции. При условиях леммы мы получаем краевую задачу

$$\frac{d}{dt}\widehat{G}(t) = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -K^* \end{bmatrix}\widehat{G}(t),$$

$$\widehat{G}_1(0)+S\widehat{G}_2(0)=I, \quad -\Lambda\widehat{G}_1(T)+(I-\Lambda S)\widehat{G}_2(T)=0.$$

Из граничных условий нетрудно вывести равенства

$$\widehat{G}_2(T)=(I-\Lambda S)^{-1}\Lambda\widehat{G}_1(T), \quad \widehat{G}_1(0)=I-S\widehat{G}_2(0).$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix} \widehat{G}_1(T) \\ \widehat{G}_2(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{TK}(I-S\widehat{G}_2(0)) \\ e^{-TK^*}\widehat{G}_2(0) \end{bmatrix}.$$

Сравнивая последние две системы уравнений, приходим к равенству

$$(I-\Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK}(I-S\widehat{G}_2(0)) = e^{-TK^*}\widehat{G}_2(0),$$

в силу которого

$$\widehat{G}_2(0) = [I+e^{TK^*}(I-\Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK}S]^{-1}e^{TK^*}(I-\Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK}.$$

Заметим далее, что

$$G_L(t) = P\widehat{G}(t) = P \begin{bmatrix} e^{tK}(I - S\widehat{G}_2(0)) \\ e^{-tK^*}\widehat{G}_2(0) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, представление матричной функции G_L справедливо.

Перейдем к выводу оценки $\|G_L(t)\|$. Перепишем последнее равенство в виде

$$G_L(t) = P \begin{bmatrix} e^{tK} \\ 0 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} -e^{tK}Se^{tK^*} \\ I \end{bmatrix} e^{-tK^*}\widehat{G}_2(0). \tag{3.16}$$

Ясно, что

$$\left\| P \begin{bmatrix} e^{tK} \\ 0 \end{bmatrix} \right\| \leqslant [(1 + \|\Lambda\|^2)\varkappa(K^*)]^{1/2}e^{-t\beta}. \tag{3.17}$$

Кроме того, поскольку

$$P \begin{bmatrix} -e^{TK}Se^{tK^*} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S - e^{tK}Se^{tK^*} \\ \Lambda(e^{tK}Se^{tK^*} - S) + I \end{bmatrix},$$

используя (3.15), получаем неравенство

$$\left\| P \begin{bmatrix} -e^{tK}Se^{tK^*} \\ I \end{bmatrix} \right\| \leqslant \max\{\|S\|, 1 + \|\Lambda\|\,\|S\|\}. \tag{3.18}$$

Для завершения доказательства леммы нам осталось оценить величину $\|e^{-tK^*}\widehat{G}_2(0)\|$. Удобно ввести обозначение $\widehat{Y} = e^{TK^*}(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda e^{TK}$. Из условий леммы следует $\|\widehat{Y}S\| \leqslant 0.5$, $\|S\widehat{Y}\| \leqslant 0.5$, поэтому можно представить $\widehat{G}_2(0)$ в виде

$$\widehat{G}_2(0) = (I + \widehat{Y}S)^{-1}\widehat{Y} = \sum_{p=-\infty}^{\infty}(-\widehat{Y}S)^p\widehat{Y},$$

следовательно, $e^{-tK^*}\widehat{G}_2(0) = e^{-tK^*}\widehat{Y}\sum_{p=-\infty}^{\infty}(-\widehat{Y}S)^p$, откуда

$$\|e^{-tK^*}\widehat{G}_2(0)\| \leqslant 2\varkappa(K^*)\|(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda\|e^{-t\beta},$$
$$\|e^{-tK^*}\widehat{G}_2(0)\| \leqslant 2\varkappa(K^*)\|(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda\|e^{-T\beta}e^{-(T-t)\beta}. \tag{3.19}$$

Таким образом,

$$\|e^{-tK^*}\widehat{G}_2(0)\| \leqslant \|e^{-tK^*}\widehat{Y}\|/(1 - \|S\widehat{Y}\|) \leqslant$$
$$2\|e^{-tK^*}\widehat{Y}\| \leqslant 2\varkappa(K^*)\|(I - \Lambda S)^{-1}\Lambda\|e^{-(2T-t)\beta}.$$

Учитывая, что T достаточно большое, мы можем огрубить последнюю оценку следующим образом:

$$\|e^{-tK^*}\widehat{G}_2(0)\| \leqslant e^{-(T-t)\beta}. \tag{3.20}$$

Ввиду (3.16)–(3.20) лемма 3.2 доказана.

Доказательство леммы 3.3. Воспользуемся известным фактом (см., например, [14]) о том, что функция $y(t)$ допускает представление

$$y(t) = G_L(t)\xi_L + G_R(t)\xi_R,$$

из которого получаем

$$\|y(n\tau)\|^2 = \|G_L(n\tau)\|^2\|\xi_L\|^2 + \|G_R(n\tau)\|^2\|\xi_R\|^2.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{2^l} \|y(n\tau)\|^2 = \sum_{n=0}^{2^l} \|G_L(n\tau)\|^2\|\xi_L\|^2 + \sum_{n=0}^{2^l} \|G_R(n\tau)\|^2\|\xi_R\|^2.$$

Используя леммы 3.1 и 3.2, несложно показать, что

$$\sum_{n=0}^{2^l} \|G_L(n\tau)\|^2 \leqslant 2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)/(1 - e^{-2\beta\tau}),$$

$$\sum_{n=0}^{2^l} \|G_R(n\tau)\|^2 \leqslant \alpha_2^2/(1 - e^{-2\beta\tau}). \tag{3.21}$$

Из неравенств (3.21) получаем утверждение леммы 3.3.

Доказательство леммы 3.4 основано на лемме 3.3, поскольку решения $\{y_n\}$ краевой задачи из леммы 3.4 и решения $y(t)$ краевой задачи из леммы 3.3 связаны равенствами $y(n\tau) = y_n$ $(n = 0, 1, \dots, 2^l)$.

Доказательство леммы 3.5. Пусть $G(t)$ — матрица Грина, удовлетворяющая задаче

$$\frac{d}{dt}G(t) = WG(t) + \delta(t)I, \quad G(-\infty) = G(+\infty) = 0 \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Легко проверить, что решение задачи (3.9) допускает представление

$$\overline{w}_k = G(-0)\overline{\xi}_k + \sum_{\substack{p\neq k\\ p=-\infty}}^{\infty} G[(k-p)\tau]\overline{\xi}_p. \tag{3.22}$$

Действительно, так как $B_0 = -I$, $A_0 = e^{-\tau W}$, то верна цепочка равенств

$$e^{-\tau W}\overline{w}_{k+1} = e^{-\tau W}G(-0)\overline{\xi}_{k+1} + \sum_{\substack{p\neq k+1\\ p=-\infty}}^{\infty} e^{-\tau W}G[(k+1-p)\tau]\overline{\xi}_p$$

$$= G(-\tau)\overline{\xi}_{k+1} + \sum_{\substack{p\neq k,k+1\\ p=-\infty}}^{\infty} e^{-\tau W}G[(k-p)\tau]\overline{\xi}_p + e^{-\tau W}G(\tau)\overline{\xi}_k,$$

в силу которой при учете равенства $e^{-\tau W}G(\tau) = G(+0) = I + G(-0)$ заключаем, что функция $\overline{w}_k$ из (3.22) удовлетворяет задаче (3.9).

Далее, так как $\overline{\xi}_n = 0$ при $n < 0$ и $n \geqslant 2^l$, из (3.9) получаем равенство

$$\overline{w}_k = G(-0)\overline{\xi}_k + \sum_{p=0}^{2^l-1} G[(k-p)\tau]\xi_p,$$

которое в силу формул

$$\|G(p\tau)\| \leqslant \alpha e^{-\beta|p|\tau}, \quad k = \sum_{-\infty}^{\infty} \|\overline{\xi}_k\|^2 < \sum_{k=0}^{2^l-1} \|\xi_k\|^2 < \infty$$

позволяет показать, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\overline{w}_k\|^2 < \infty.$$

Пусть определен оператор $\Theta w = \overline{\xi}$, где

$$w^* = (\dots, \overline{w}_{-1}, \overline{w}_0, \overline{w}_1, \dots, \overline{w}_{2^l-1}, \overline{w}_{2^l}, \dots),$$
$$\overline{\xi}^* = (\dots, \overline{\xi}_{-1}, \overline{\xi}_0, \overline{\xi}_1, \dots, \overline{\xi}_{2^l-1}, \overline{\xi}_{2^l}, \dots).$$

В обозначениях

$$\overline{w}^* = (\overline{w}_0, \overline{w}_1, \dots, \overline{w}_{2^l-1}, \overline{w}_{2^l}), \quad \xi^* = (\overline{\xi}_0, \xi_1, \dots, \xi_{2^l-1}, \xi_{2^l})$$

очевидны соотношения

$$\|\overline{\xi}\| = \|\xi\|, \quad \|w\| \geqslant \|\overline{w}\|. \tag{3.23}$$

Для w и $\overline{\xi}$ определены ряды Фурье

$$F[w](\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{w}_k e^{ik\varphi}, \quad F[\overline{\xi}](\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\xi}_k e^{ik\varphi}.$$

Напомним, что по равенству Парсеваля

$$\|w\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|F[w](\varphi)\|^2 \, d\varphi.$$

Так как (3.9) эквивалентно уравнению $(A_0 e^{-i\varphi} - I)F[w](\varphi) = F[\overline{\xi}](\varphi)$, имеем $F[w](\varphi) = (A_0 e^{-i\varphi} - I)^{-1} F[\overline{\xi}](\varphi)$, откуда, учитывая равенство Парсеваля, получаем

$$\begin{aligned}
\|w\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|(A_0 e^{-i\varphi} - I)^{-1} F[\overline{\xi}](\varphi)\|^2 \, d\varphi \\
&\leqslant \max_{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi} \|(A_0 - e^{i\varphi} I)^{-1}\|^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|F[\overline{\xi}](\varphi)\|^2 \, d\varphi \\
&= \max_{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi} \|(A_0 - e^{-i\varphi} I)^{-1}\|^2 \|\overline{\xi}\|^2. \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

Как показано в работе [7], если образовать ряд Фурье

$$Y(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\varphi} G(k\tau), \tag{3.25}$$

где при $k = 0$ берется значение $G(-0)$, матричные коэффициенты которого убывают при $k \to \pm\infty$ согласно оценке

$$\|G(t)\| \leqslant \alpha e^{-\beta|t|}, \tag{3.26}$$

то $(A_0 e^{i\varphi} - I)^{-1} = Y(\varphi)$. В силу (3.25) и (3.26)

$$\|(A_0 e^{i\varphi} - I)^{-1}\| \leqslant 2\alpha/(1 - e^{-2\beta\tau}). \tag{3.27}$$

Наконец, из (3.23), (3.24) и (3.27) получаем оценку из леммы 3.5.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Wonham W. H.** Linear multivariable control: A geometric Approach. Berlin etc.: Springer-Verl., 1979.
2. **Godunov S. K.** Norms of the solutions of Lourier — Riccati matrix equations as criteria of the quality of stabilizability and detectability // Siberian Adw. Math. 1992. V. 2, N 3. P. 135–157.
3. **Годунов С. К.** Оценка матрицы Грина гамильтоновой системы в задаче оптимального управления // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 3, № 4. С. 70–80.
4. **Булгаков А. Я.** Эффективно вычислимый параметр качества устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 3. Р. 32–41.
5. **Булгаков А. Я., Годунов С. К.** Вычисление положительно определенных решений уравнения Ляпунова // Вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск: Наука, 1985. С. 17–38.
6. **Булгаков А. Я.** Вычисление экспоненциональной функции асимптотически устойчивой матрицы // Вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск: Наука, 1985. С. 4–17.
7. **Булгаков А. Я., Годунов С. К.** Круговая дихотомия матричного спектра // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 59–70.
8. **Bulgakov A. Ya.** Matrix spectrum dichotomyy and generalized Lyapunov matrix equation // Analysis and optimization of systems: Proc. 9th Intern. Conf. Antibes, France, 1990/ Lecture Notes in Control znd Inform. Sci. 1990. N 144. P. 95–102.
9. **Булгаков А. Я.** Обоснование гарантированной точности выделения инвариантных подпространств несамосопряженных матриц // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1989. Т. 15. С. 12–93.
10. **Годунов С. К.** Задача о дихотомии спектра матрицы // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 5. С. 25–37.
11. **Малышев А. Н.** Вычисление инвариантных подпространств регулярного линейной пучка матриц // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 76–86.
12. **Малышев А. Н.** Гарантированная точность в спектральных задачах линейной алгебры // Труды ИМ СО РАН. 1992. Т. 17. С. 19–104.
13. **Malylshev A. N.** Parallel algorithm for solving some spectral problems of linear algebra. Lin Alg. Appl. 1993. V. 188/189. P. 489–520,
14. **Годунов С. К., Гордиенко В. М.** Матрица Грина граничной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39. Вып. 1. С. 40–76.
15. **Laub A. J.** Invariant subspace methods for the numerical solution of the Riccati equation // The Riccati equation. Berlin etc.: Springer-Verl., 1991.
16. **Годунов С. К., Рябенький В. С.** Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
17. **Антонов А. Г., Годунов С. К., Кирилюк О. Р., Костин В. И.** Гарантированная точность решения систем линейных алгебраических уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1992.

18. **Eising R.** The distance between a system and the set of multicontollable systems// Proc. Beer-sheva. Berlin etc.: Springer-Verl., 1984. P. 303–314.
19. **Van Loan C.** How near is a stable matrix to unstable matrix? Linear algebra and its role in system theory. Maine, Brunswick, 1984.
20. **Kenney C., Laub A., Wette M.** Error bounds for Newton refinement of solutions to algebraic Riccati equations // Math. Control Signals Systems. Berlin etc.: Springer-Verl., 1990. P. 211–224.
21. **Kleinman D.** On an iterative technique for Riccati equations // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. V. 13. P. 114–115.
22. **Sandell N.** On Newton's method for Riccati equation solution // IEEE Trans. Automat. Control. 1974. V. 19. P. 254–225.
23. **Kenney C., Hewer K.** The sensivity of the algebraic and differential Riccati equations // SIAM J. Control Optim. 1990.