МИНИМАЛЬНЫЕ НУМЕРАЦИИ

С. А. Бадаев

Введение

В теории вычислимых нумераций ключевую роль играют вопросы внутреннего строения нумераций с особыми структурными свойствами в полурешетках Роджерса: наибольшие, минимальные, неразложимые и т. д. Исследование минимальных нумераций было начато Фридбергом, показавшим наличие у семейства всех рекурсивно перечислимых множеств однозначных вычислимых нумераций, которые естественным образом являются минимальными. В работах М. Б. Пур-Эль, Ю. Л. Ершова (см. [1]) были найдены примеры семейств с различными типами минимальных нумераций. По своему строению минимальные нумерации подразделяются на три класса: эквивалентные однозначным (разрешимые нумерации), позитивные и неэквивалентные позитивным.

Вычислимые минимальные, но не позитивные нумерации изучены слабо. По существу, известно лишь, что некоторые семейства рекурсивно перечислимых множеств обладают счетным числом таких нумераций [2, 3]. В то же время исследование частных случаев минимальных нумераций, а именно: разрешимых (однозначных) и позитивных нумераций — продвинуто достаточно далеко (см., например, монографию [1] и приведенную в ней библиографию).

Одной из причин сложившейся ситуации является отсутствие внутреннего описания минимальных нумераций и, вследствие этого, единственный подход к ним как к нумерациям, порождающим минимальные элементы в полурешетках нумераций.

В работе приводятся внутренние критерии минимальности нумерации по алгоритмическому описанию ее нумерационной эквивалентности. При этом возникает естественная классификация класса минимальных нумераций. Полученные критерии позволяют ответить на ряд известных в теории нумераций вопросов.

Результаты частично анонсированы в [4, 5].

Общие понятия, используемые в статье, содержатся в монографиях Ю. Л. Ершова [1] и Х. Роджерса [6].

Стандартные обозначения и соглашения

На протяжении всей статьи будут использоваться следующие обозначения:

N — множество натуральных чисел $0, 1, 2, \ldots$;

c, l, r — тройка канторовских нумерационных функций [6, с. 89];

θ_α — нумерационная эквивалентность $\{\langle x, y\rangle \mid \alpha x = \alpha y\}$ нумерации α;

W_n — рекурсивно перечислимое множество (р. п. множество) с постовским номером n;

φ_m — одноместная частично рекурсивная функция (ч. р. функция) с клиниевским номером m;

π — главная вычислимая нумерация всех вычислимых нумераций семейств р. п. множеств;

$\pi_n(x)$ — р. п. множество номера x в нумерации π_n;

ε — главная вычислимая нумерация семейства всех позитивных эквивалентностей;

M^* — замыкание множества M $(M \subseteq N \times N)$ до отношения эквивалентности на N;

$[x]_\eta$ — смежный класс эквивалентности η, содержащий число x;

$[R]_\eta = \bigcup_{x \in R} [x]_\eta$, где $R \subseteq N$;

δf — область определения функции f;

ρf — совокупность значений функции f;

$f(x)\downarrow$ означает $x \in \delta f$, а $f(x)\uparrow$ означает $x \notin \delta f$, где f — частичная функция.

Для вычислимой нумерации α через α_x^t обозначается конечная часть множества αx, построенная к концу шага t в некотором заранее фиксированном равномерно эффективном перечислении семейства $\{\alpha x \mid x \in N\}$ (если α — заданная нумерация) или множество элементов, перечисленных в αx к концу шага t конструкции (если α — строящаяся нумерация).

Аналогичные обозначения применяются для р. п. множеств и ч. р. функций.

На протяжении всей статьи условимся считать, что

$\rho\varphi_n = W_n$ для всех $n \in N$, причем $W_n^t = \varnothing$, $\pi_n^t(x) = \varnothing$, а φ_n^t — нигде не определенная функция при $n > t$, $x > t$;

ε_n^t — рекурсивная эквивалентность на N, число нетривиальных смежных классов которой конечно, при этом предикат $\langle x, y\rangle \in \varepsilon_n^t$ рекурсивен по x, y, n, t.

В большинстве теорем доказательства проводятся методом приоритета. На каждом шаге приоритетной конструкции рассматривается несколько случаев. Будем считать, что проверяются последовательно условия описанных в конструкции случаев. Если условия ни одного случая не выполнены, автоматически переходим к следующему шагу. В противном случае выполняем инструкции первого из случаев, условия которого выполнены, после чего сразу переходим к следующему шагу. Аналогично поступаем, когда случаи делятся на подслучаи. Если на шаге $t + 1$ конструкции некоторое строящееся множество A^{t+1} или значение строящейся функции $g(\ldots, t + 1)$ в явном виде не определено к концу шага $t + 1$, то будем считать по определению $A^{t+1} \rightleftharpoons A^t$, $g(\ldots, t + 1) \rightleftharpoons g(\ldots, t)$.

В приоритетных конструкциях число $a \in N$ будем называть *неиспользованным* на шаге $t+1$, если a к концу шага t не перечислено ни в одно из строящихся в нумерации α множеств $\alpha x, x \in N$.

Автор выражает благодарность С. С. Гончарову за полезное обсуждение полученных результатов.

§ 1. Критерии минимальности

Напомним, что нумерация α множества A называется *минимальной*, если для любой нумерации β множества A из сводимости β к α следует их эквивалентность [1].

Теорема 1.1. *Пусть α: $N \to A$ — нумерация множества A. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(а) *α — минимальная нумерация;*

(б) *для каждой общерекурсивной функции $f(x)$ такой, что $[\rho f]_{\theta_\alpha} = N$, существует общерекурсивная функция $g(x)$ такая, что $\langle x, f(g(x))\rangle \in \theta_\alpha$ при любом $x \in N$;*

(в) *для каждой общерекурсивной функции $f(x)$ такой, что $[\rho f]_{\theta_\alpha} = N$, существует общерекурсивная функция $G(x)$, которая удовлетворяет условиям $\langle x, G(x)\rangle \in \theta_\alpha$ и $G(x) \in \rho f$ при любом $x \in N$;*

(г) *для каждого р. п. множества $R \subseteq N$ такого, что $[R]_{\theta_\alpha} = N$, существует общерекурсивная функция $G(x)$, которая удовлетворяет условиям $\langle x, G(x)\rangle \in \theta_\alpha$ и $G(x) \in R$ при любом $x \in N$;*

(д) *для каждого р. п. множества $R \subseteq N$ такого, что $[R]_{\theta_\alpha} = N$, существует позитивная эквивалентность $\eta \subseteq \theta_\alpha$, для которой $[R]_\eta = N$.*

Доказательство.

(а) $\Longrightarrow$ (б) Пусть α — минимальная нумерация, $f(x)$ — общерекурсивная функция (о. р. функция) такая, что $[\rho f]_{\theta_\alpha} = N$. Определим $\beta x \rightleftharpoons \alpha f(x)$ при всех $x \in N$. Тогда $\beta \leqslant \alpha$, а условие $[\rho f]_{\theta_\alpha} = N$ означает, что β нумерует все множество A. Пусть о. р. функция $g(x)$ сводит нумерацию α к нумерации β. Тогда $\alpha x = \beta g(x) = \alpha f(g(x))$ при любом $x \in N$.

(б) $\Longrightarrow$ (в) Пусть для о. р. функции f выполнено равенство $[\rho f]_{\theta_\alpha} = N$, а о. р. функция $g(x)$ удовлетворяет утверждения (б). Достаточно определить о. р. функцию G как $G \rightleftharpoons f \circ g$.

(в) $\Longrightarrow$ (г) Пусть р. п. множество R удовлетворяет равенству $[R]_{\theta_\alpha} = N$, и пусть $R = \rho f$ для некоторой о. р. функции $f(x)$. Согласно утверждению (в) существует о. р. функция $G(x)$ с требуемыми свойствами.

(г) $\Longrightarrow$ (д) Пусть $[R]_{\theta_\alpha} = N$ для р. п. множества R. По утверждению (г) существует о. р. функция $G(x)$, которая удовлетворяет условиям $\rho G \subseteq R$ и $\alpha x = \alpha G(x)$ для всех $x \in N$. Очевидно, что эквивалентность $\eta \rightleftharpoons \{\langle x, G(x)\rangle \mid x \in N\}^*$ позитивна и $[R]_\eta = N$. Включение $\eta \subseteq \theta_\alpha$ следует из соотношения $\langle x, G(x)\rangle \in \theta_\alpha$ при всех $x \in N$.

(д) $\Longrightarrow$ (а) Пусть нумерация β множества A сводится к α посредством о.р. функции f. Предположим, что $R \rightleftharpoons \rho f$. Тогда $[R]_{\theta\alpha} = N$. Следовательно, найдется позитивная эквивалентность $\eta \subseteq \theta_\alpha$ такая, что $[R]_\eta = N$.

Определим $h(x) \rightleftharpoons l(\mu_t(l(t) \in R^{r(t)} \& \langle l(t), x\rangle \in \eta^{r(t)}))$ для каждого $x \in N$. Поскольку $[R]_\eta = N$, функция h всюду определена. Несложно заметить, что о.р. функция $g(x) \rightleftharpoons \mu_y(f(y) = h(x))$ сводит нумерацию α к нумерации β. Теорема 1.1 доказана.

Из приведенных критериев минимальности, на наш взгляд, наиболее удобным в практическом использовании является критерий утверждения (д). Покажем, как он работает при решении одного вопроса. В. В. Вьюгиным приведена [7] довольно сложная конструкция вычислимого семейства р.п. множеств, не имеющего минимальных вычислимых нумераций. Семейство, построенное в [7], не является дискретным.

Теорема 1.2. *Существует вычислимое дискретное семейство р.п. множеств, не имеющее минимальных вычислимых нумераций.*

Доказательство. Строим нумерацию α по шагам. Семейство $\mathfrak{A} \rightleftharpoons \{\alpha x \mid x \in N\}$ будет искомым. Для каждой пары чисел $n, k \in N$ в процессе построения мы стараемся определить пару вспомогательных π_n-номеров $a(n,k)$ и $b(n,k)$.

Шаг 0. Полагаем $\alpha_x^0 \rightleftharpoons \varnothing$ для всех $x \in N$. Числа $a(n,k), b(n,k)$ не определены для всех $n, k \in N$.

Шаг $t+1$. Пусть $n \rightleftharpoons l(l(t)), k \rightleftharpoons r(l(t)), a \rightleftharpoons c(n,2k), b \rightleftharpoons c(n,2k+1)$.

Случай 1: $\alpha_a^t = \alpha_b^t = \varnothing$. Полагаем $\alpha_a^{t+1} \rightleftharpoons \{2c(n,k), z_0, z_1\}, \alpha_b^{t+1} \rightleftharpoons \{2c(n,k), z_2, z_3\}$, где z_0, z_1, z_2, z_3 — четыре наименьших неиспользованных нечетных числа.

Случай 2: числа $a(n,k)$, $b(n,k)$ еще не определены, и существуют такие $x, y \in N$, что $\alpha_a^t \subseteq \pi_n^t(x)$, $\alpha_b^t \subseteq \pi_n^t(y)$. Выбираем для a, b соответствующие им наименьшие числа x, y и полагаем $a(n,k) \rightleftharpoons x$, $b(n,k) \rightleftharpoons y$.

Случай 3: числа $a(n,k)$, $b(n,k)$ определены, $\alpha_a^t \subseteq \pi_n^t(a(n,k))$, $\alpha_b^t \subseteq \pi_n^t(b(n,k))$, $\langle a(n,k), b(n,k)\rangle \notin \varepsilon_k^t$. Полагаем $\alpha_a^{t+1} \rightleftharpoons \alpha_a^t \cup \{v_0, z_0\}$, $\alpha_b^{t+1} \rightleftharpoons \alpha_b^t \cup \{v_1, z_1\}$, где z_0, z_1 — два наименьших неиспользованных нечетных числа, v_0 — меньшее из двух чисел множества $\alpha_b^t \setminus \alpha_a^t$, а v_1 — меньшее из двух чисел множества $\alpha_a^t \setminus \alpha_b^t$.

Свойства конструкции

Зафиксируем произвольные натуральные числа n, k. Обозначим через a, b и $T(n,k)$ соответственно числа $c(n,2k), c(n,2k+1)$ и множество $\{t+1 \mid l(l(t)) = n, r(l(t)) = k\}$.

Свойство 1. *Множества αa, αb содержат в точности одно четное число; им является $2c(n,k)$. В каждом из множеств αa, αb содержатся по крайней мере два нечетных числа.*

Свойство 2. *Ни одно нечетное число из $\alpha a \cup \alpha b$ не может быть перечислено в множество αc для $c \neq a, c \neq b$.*

Свойство 3. *Если на бесконечно многих шагах из $T(n,k)$ реализуется случай 3, то множества αa, αb бесконечны и совпадают. В противном случае множества αa, αb конечны и не содержатся одно в другом.*

Свойства 1–3 очевидны, и из них сразу вытекает дискретность семейства $\mathfrak{A}$.

Свойство 4. *Если π_n — нумерация семейства $\mathfrak{A}$, то, начиная с некоторого шага, значения $a(n,k), b(n,k)$ определены, причем $a(n,k) \neq b(n,k)$.*

Пусть t_0+1 — наименьшее число из $T(n,k)$. Тогда на шаге t_0+1 имеет место случай 1. Пусть x, y — наименьшие π_n-номера множеств αa, αb и t_1+1 — наименьшее число из $T(n,k)$ такое, что $t_1 > t_0$, $\alpha_a^{t_0+1} \subseteq \pi_n^{t_1}(x)$, $\alpha_b^{t_0+1} \subseteq \pi_n^{t_1}(y)$. Тогда если значения $a(n,k), b(n,k)$ не определены на шагах $t, t_0+1 < t < t_1+1$, то на шаге t_1+1 выполняются условия случая 2, по инструкциям которого будут определены $a(n,k) = x$ и $b(n,k) = y$. Итак, начиная с некоторого шага, значения $a(n,k), b(n,k)$ определены.

Докажем, что $a(n,k) \neq b(n,k)$. Допустим, что $a(n,k) = b(n,k)$ и оба этих числа определены впервые на шаге t_2+1. Напомним, что $\langle x,x\rangle \in \varepsilon_k^t$ для любых $x,k,t \in N$. Значит, для всех $t+1 \in T(n,k)$, бóльших t_2+1, на шаге $t+1$ будет нарушено условие $\langle a(n,k), b(n,k)\rangle \notin \varepsilon_k^t$ случая 3. Следовательно, $\alpha a \neq \alpha b$, $\alpha a = \alpha_a^{t_2} \subseteq \pi_n(a(n,k))$, $\alpha b = \alpha_b^{t_2} \subseteq \pi_n(b(n,k))$, что противоречит выбору π_n и дискретности семейства $\mathfrak{A}$.

Свойство 5. *Если π_n — нумерация семейства $\mathfrak{A}$, то для бесконечно многих t имеют место включения $\alpha_a^t \subseteq \pi_n(a(n,k))$, $\alpha_b^t \subseteq \pi_n(b(n,k))$.*

Пусть $t_0+1 \in T(n,k)$ такое, что на шаге t_0+1 выполняется случай 2. Тогда $\alpha_a^{t_0} \subseteq \pi_n^{t_0}(a(n,k))$, $\alpha_b^{t_0} \subseteq \pi_n^{t_0}(b(n,k))$. Если для всех $t+1 \in T(n,k)$, бóльших t_0+1, на шаге $t+1$ не выполняются условия случая 3, то доказывать нечего. Заметим, что в множества $\alpha a, \alpha b$ новые элементы после шага t_0+1 могут быть перечислены только на шагах $t+1 \in T(n,k)$ в результате выполнения случая 3, и только это может стать источником нарушения доказываемых включений. Поэтому достаточно доказать следующее утверждение: если на шаге t_1+1, где $t_1 > t_0$, $t_1+1 \in T(n,k)$, имеет место случай 3, то найдется $t_2 \geqslant t_1+1$ такое, что $\alpha_a^{t_2} \subseteq \pi_n^{t_2}(a(n,k))$, $\alpha_b^{t_2} \subseteq \pi_n^{t_2}(b(n,k))$.

Из конструкции следует, что множества $\alpha_a^t \setminus \alpha_b^t$, $\alpha_b^t \setminus \alpha_a^t$ двухэлементны для любого $t \geqslant t_0+1$, при этом указанные разности состоят из нечетных чисел. Пусть $\alpha_a^{t_1} \setminus \alpha_b^{t_1} = \{u_0, u_1\}$, $u_0 < u_1$, $\alpha_b^{t_1} \setminus \alpha_a^{t_1} = \{v_0, v_1\}$, $v_0 < v_1$, и пусть z_0, z_1 — два наименьших не использованных к концу шага t_1 нечетных числа. По условию случая 3 имеем $\alpha_a^{t_1} \subseteq \pi_n^{t_1}(a(n,k))$, $\alpha_b^{t_1} \subseteq \pi_n^{t_1}(b(n,k))$. После выполнения инструкций случая 3 на шаге t_1+1 получим $\alpha_a^{t_1+1} = (\alpha_a^{t_1} \cap \alpha_b^{t_1}) \cup \{u_0, v_0, u_1, z_0\}$, $\alpha_b^{t_1+1} = (\alpha_a^{t_1} \cap \alpha_b^{t_1}) \cup \{u_0, v_0, v_1, z_1\}$.

Предположим, что для любого $t \geqslant t_1+1$ не выполняется хотя бы одно из включений $\alpha_a^t \subseteq \pi_n^t(a(n,k))$, $\alpha_b^t \subseteq \pi_n^t(b(n,k))$. Тогда для любого

$t+1 \in T(n,k)$, $t > t_1$, на шаге $t+1$ условия случаев 1–3 не выполняются. Следовательно, $\alpha a = \alpha_a^{t_1+1}$, $\alpha b = \alpha_b^{t_1+1}$. Пусть для определенности $\alpha a \not\subseteq \pi_n^t(a(n,k))$ при любом $t \geqslant t_1+1$. Значит, $z_0 \notin \pi_n(a(n,k))$. С одной стороны, двухэлементное множество $\{2c(n,k), u_1\}$, отделяющее множество αa от остальных множеств дискретного семейства $\mathfrak{A}$, содержится в $\pi_n(a(n,k))$. С другой стороны, двухэлементное множество $\{2c(n,k), z_0\}$, также отделяющее множество αa, не содержится в $\pi_n(a(n,k))$. Это противоречит тому, что π_n нумерует семейство $\mathfrak{A}$. Свойство 5 установлено.

Свойство 6. *Если π_n — нумерация семейства $\mathfrak{A}$, то $\alpha a = \pi_n(a(n,k))$, $\alpha b = \pi_n(b(n,k))$.*

Свойство 6 легко следует из свойства 5 и дискретности семейства $\mathfrak{A}$.

Свойство 7. *Если π_n — нумерация семейства $\mathfrak{A}$, то $\langle a(n,k), b(n,k)\rangle \in \varepsilon k$ тогда и только тогда, когда $\alpha a \neq \alpha b$.*

Если $\langle a(n,k), b(n,k)\rangle \in \varepsilon_k^{t_0}$ для некоторого t_0, то для всех $t \geqslant t_0$, $t+1 \in T(n,k)$ на шагах $t+1$ не имеет места случай 3. Тогда по свойству 3 имеем $\alpha a \neq \alpha b$.

Если $\langle a(n,k), b(n,k)\rangle \notin \varepsilon_k^t$ для всех t, то по свойству 5 на бесконечно многих шагах $t+1 \in T(n,k)$ имеет место случай 3. Тогда по свойству 3 $\alpha a = \alpha b$.

Свойство 8. *Семейство $\mathfrak{A}$ не имеет минимальных нумераций.*

Пусть π_n — произвольная нумерация семейства $\mathfrak{A}$. Покажем, что π_n не является минимальной. Пусть $R \rightleftharpoons \{x \mid x \in N,\ \exists m(2m \in \pi_n(x)\ \&\ l(m) \neq n)\} \cup \{a(n,k) \mid k \in N\} \cup \{b(n,k) \mid k \in N,\ \langle a(n,k), b(n,k)\rangle \in \varepsilon k\}$. Ясно,что R — р. п. множество. Из свойств 6, 7 вытекает, что $[R]_{\theta_{\pi_n}} = N$.

Пусть k — произвольное число. Если $\langle a(n,k), b(n,k)\rangle \in \varepsilon k$, то по свойству 7 $\alpha a \neq \alpha b$, а по свойству 6 $\pi_n(a(n,k)) \neq \pi_n(b(n,k))$. Следовательно, $\varepsilon k \not\subseteq \theta_{\pi_n}$. Если $\langle a(n,k), b(n,k)\rangle \notin \varepsilon k$, то $\pi_n(a(n,k)) = \alpha a = \alpha b = \pi_n(b(n,k))$. По построению множества R число $a(n,k)$ является единственным π_n-номером множества αa в R. Поэтому $b(n,k) \notin [R]_{\varepsilon k}$. Отсюда и из теоремы 1.1 вытекает неминимальность нумерации π_n. Теорема 1.2 доказана.

Следствие. *Существует вычислимое дискретное семейство р. п. множеств, не имеющее вычислимых позитивных нумераций.*

Семейство без позитивных нумераций, но с минимальными нумерациями построено С. С. Марченковым [8], однако оно не является дискретным. Автору известен пример дискретного семейства без вычислимых позитивных нумераций, построенный В. В. Вьюгиным в 1975 г. Пример В. В. Вьюгина основан на очень красивых идеях; к сожалению, он не опубликован.

§ 2. Классификация минимальных нумераций

Классифицируя вычислимые нумерации по их нумерационным эквивалентностям относительно арифметической иерархии, А. И. Мальцев ввел понятия разрешимых и позитивных нумераций и показал, что разрешимые и позитивные нумерации являются минимальными [9]. Напомним, что нумерация α называется *разрешимой*, если $\theta_\alpha \in \Sigma_1^0 \cap \Pi_1^0$, и *позитивной*, если $\theta_\alpha \in \Sigma_1^0$. Как уже отмечалось ранее, по разрешимым и позитивным нумерациям имеется довольно много работ. Отметим лишь, что наиболее интересные результаты по разрешимым и позитивным нумерациям, полученные в последние годы, принадлежат С. С. Гончарову [10–13].

Предложим естественный, на наш взгляд, подход к классификации нумерационных эквивалентностей совокупности всех минимальных нумераций. Обозначим через $K(\alpha)$ совокупность всех нумераций, сводящихся к минимальной нумерации α, вместе со сводящими о.р. функциями. Эту совокупность можно отождествить с областями значений сводящих функций. Таким образом, $K(\alpha)$ рассматриваем как семейство р.п. множеств. Из теоремы 1.1 следует, что для каждого подходящего р.п. множества $R \in K(\alpha)$ найдется соответствующая позитивная эквивалентность $\eta \subseteq \theta_\alpha$. Чем эффективнее процесс построения η по R, тем нумерация α алгоритмически «более простая». Дадим теперь точные определения некоторых понятий.

Определение 2.1. Нумерация α называется *эффективно минимальной*, если существует ч.р. функция $h(n)$ такая, что для любого $n \in N$ если $[W_n]_{\theta_\alpha} = N$, то $h(n)\downarrow$, $\varepsilon h(n) \subseteq \theta_\alpha$ и $[W_n]_{\varepsilon h(n)} = N$.

Замечание 2.1. В силу полноты нумерации ε функцию h из определения 2.1 можно выбрать общерекурсивной.

Определение 2.2. Нумерация α называется *строго минимальной*, если существует позитивная эквивалентность $\eta \subseteq \theta_\alpha$ такая, что для любого $n \in N$ если $[W_n]_{\theta_\alpha} = N$, то $[W_n]_\eta = N$.

Обозначим через D, P, SM, EM и M классы разрешимых, позитивных, строго минимальных, эффективно минимальных и минимальных нумераций соответственно. Очевидно, что $D \subseteq P \subseteq SM \subseteq EM \subseteq M$. Как известно, $D \subset P$ (см. [14, 15]) и $P \subset M$ (см. [2, 3]). Цель данного параграфа — показать, что все оставшиеся включения являются строгими, при этом соответствующие примеры построить из класса вычислимых нумераций дискретных семейств. Предварительно приведем аналоги теоремы 1.1 для нумераций классов EM и SM.

Теорема 2.1. *Пусть α: $N \to A$ — нумерация множества A. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(а) *α — эффективно минимальная нумерация;*

(б) *существует ч.р. функция $f(n)$ такая, что для любого $n \in N$ как только о.р. функция φ_n сводит некоторую нумерацию β: $N \to A$ к нумерации α, то $f(n)\downarrow$ и $\varphi_{f(n)}$ есть о.р. функция, сводящая α к β;*

(в) *существует ч.р. функция $g(n,x)$ такая, что для любого $n \in N$ если φ_n — о.р. функция и $[\rho\varphi_n]_{\theta_\alpha} = N$, то $\lambda x g(n,x)$ — о.р. функция и $\langle x, \varphi_n(g(n,x))\rangle \in \theta_\alpha$ для всех $x \in N$;*

(г) *существует ч.р. функция $G(n,x)$ такая, что для любого $n \in N$ если φ_n — о.р. функция и $[\rho\varphi_n]_{\theta_\alpha} = N$, то $\lambda x G(n,x)$ — о.р. функция, $G(n,x) \in \rho\varphi_n$ и $\langle x, G(n,x)\rangle \in \theta_\alpha$ для всех $x \in N$;*

(д) *существует ч. р. функция $G(n,x)$ такая, что для любого $n \in N$ если $[W_n]_{\theta_\alpha} = N$, то $\lambda x G(n,x)$ — о. р. функция, $G(n,x) \in W_n$ и $\langle x, G(n,x)\rangle \in \theta_\alpha$ для всех $x \in N$.*

Доказательство. Напомним, что $\rho\varphi_n = W_n$ для всех n.

(а) $\Longrightarrow$ (б) Пусть ч. р. функция h удовлетворяет определению 2.1. Определим двухместные ч. р. функции H, F. Для любых $n, x \in N$ положим

$$H(n,x) \rightleftharpoons l(\mu_t(l(t) \in W_n^{r(t)} \ \&\ h^{r(t)}(n)\downarrow \&\langle x, l(t)\rangle \in \varepsilon_{h(n)}^{r(t)})),$$

$$F(n,x) \rightleftharpoons l(\mu_t(\varphi_n^{r(t)}(l(t))\downarrow \& H^{r(t)}(n,x)\downarrow \& \varphi_n(l(t)) = H(n,x))).$$

По s_m^n-теореме существует о. р. функция f такая, что $\varphi_{f(n)} \simeq \lambda x F(n,x)$ для любого $n \in N$. Покажем, что функция f удовлетворяет утверждению (б). Пусть β: $N \to A$ — некоторая нумерация множества A, сводящаяся к α, и пусть φ_n — сводящая о. р. функция. Тогда $[W_n]_{\theta_\alpha} = N$ и, следовательно, $h(n)\downarrow$, $\varepsilon h(n) \subseteq \theta_\alpha$ и $[W_n]_{\varepsilon h(n)} = N$. Отсюда вытекает всюду-определенность как функции $\lambda x H(n,x)$, так и функции $\lambda x F(n,x)$. Для любого $x \in N$ имеем $\langle x, H(n,x)\rangle \in \theta_\alpha$, откуда $\alpha x = \alpha H(n,x)$. С другой стороны, для любых $x \in N$ по построению функций H, F справедливо равенство $H(n,x) = \varphi_n(F(n,x))$. Отсюда $\beta\varphi_{f(n)}(x) = \beta F(n,x) = \alpha\varphi_n(F(n,x)) = \alpha H(n,x) = \alpha x$ для всех $x \in N$. Значит, о. р. функция $\varphi_{f(n)}$ сводит нумерацию α к нумерации β.

(б) $\Longrightarrow$ (в) Пусть ч. р. функция f удовлетворяет утверждению (б). Определим $g(n,x) \simeq \varphi_{f(n)}(x)$, $n, x \in N$. Пусть φ_n — о. р. функция, для которой $[\rho\varphi_n]_{\theta_\alpha} = N$. Определим нумерацию β так: $\beta x \rightleftharpoons \alpha\varphi_n(x)$, $x \in N$. Ясно, что β — нумерация всего множества A. Тогда $\varphi_{f(n)}$ — о. р. функция и $\alpha x = \beta\varphi_{f(n)}(x) = \alpha\varphi_n(\varphi_{f(n)}(x))$. Отсюда следует, что $\lambda x g(n,x)$ — о. р. функция и $\langle x, \varphi_n(g(n,x))\rangle \in \theta_\alpha$ для всех $x \in N$.

(в) $\Longrightarrow$ (г) Пусть ч. р. функция g удовлетворяет утверждению (в). Для любых $n, x \in N$ положим $G(n,x) \simeq \varphi_n(g(n,x))$. Нетрудно проверить, что функция G удовлетворяет утверждению (г).

(г) $\Longrightarrow$ (д) Очевидно, что функция G, удовлетворяющая утверждению (г), удовлетворяет и утверждению (д).

(д) $\Longrightarrow$ (а) Пусть ч. р. функция G удовлетворяет утверждению (д). Для каждого $n \in N$ определим позитивную эквивалентность

$$\eta_n \rightleftharpoons \{\langle x, G(n,x)\rangle \mid x \in N, G(n,x)\downarrow\}^*.$$

Очевидно, что последовательность $\{\eta_n\}$ вычислима. Тогда найдется о. р. функция h такая, что $\eta_n = \varepsilon h(n)$ для всех $n \in N$.

Пусть $n \in N$ такое, что $[W_n]_{\theta_\alpha} = N$. Из утверждения (д) и построения η_n следует, что $\varepsilon h(n) \subseteq \theta_\alpha$ и $[W_n]_{\varepsilon h(n)} = N$.

Следствие. *Если нумерации α, β эквивалентны, то $\alpha \in EM$ тогда и только тогда, когда $\beta \in EM$.*

Замечание 2.2. Условие $\rho\varphi_n = W_n$ лишь упрощает доказательство теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть α: $N \to A$ — нумерация множества A. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(а) *α — строго минимальная нумерация;*

(б) *существует ч. р. функция $f(n)$ такая, что*

1) *для любого $n \in N$ если $[\rho\varphi_n]_{\theta_\alpha} = N$, то $f(n)\downarrow$ и $\varphi_{f(n)}$ — о. р. функция;*
2) *для любых $n, x \in N$ если $\varphi_{f(n)}(x)\downarrow$, то $\varphi_n(\varphi_{f(n)}(x))\downarrow$ и справедливо включение $\langle x, \varphi_n(\varphi_{f(n)}(x))\rangle \in \theta_\alpha$;*

(в) *существует ч. р. функция $g(n, x)$ такая, что*

1) *для любого $n \in N$ если $[\rho\varphi_n]_{\theta_\alpha} = N$, то $\lambda x g(n, x)$ — о. р. функция;*
2) *для любых $n, x \in N$ если $g(n, x)\downarrow$, то $\varphi_n(g(n, x))\downarrow$ и справедливо включение $\langle x, \varphi_n(g(n, x))\rangle \in \theta_\alpha$;*

(г) *существует ч. р. функция $G(n, x)$ такая, что*

1) *для любого $n \in N$ если $[\rho\varphi_n]_{\theta_\alpha} = N$, то $\lambda x G(n, x)$ — о. р. функция,*
2) *для любых $n, x \in N$ если $G(n, x)\downarrow$, то $G(n, x) \in \rho\varphi_n$ и справедливо включение $\langle x, G(n, x)\rangle \in \theta_\alpha$;*

(д) *существует ч. р. функция $G(n, x)$ такая, что*

1) *для любого $n \in N$ если $[W_n]_{\theta_\alpha} = N$, то $\lambda x G(n, x)$ — о. р. функция;*
2) *для любых $n, x \in N$ если $G(n, x)\downarrow$, то $G(n, x) \in W_n$ и справедливо включение $\langle x, G(n, x)\rangle \in \theta_\alpha$.*

Доказательство получается незначительным изменением доказательства теоремы 2.1 и нами опускается.

Следствие. *Если α, β — эквивалентные нумерации, то $\alpha \in SM$ тогда и только тогда, когда $\beta \in SM$.*

Теорема 2.3. *Существует дискретное семейство конечных множеств, обладающее вычислимой минимальной, но не эффективно минимальной нумерацией.*

Доказательство. Будем строить по шагам нумерацию α и позитивную эквивалентность η. Все α-номера разобьем на попарно не пересекающиеся списки $L_n \rightleftharpoons \{x \mid l(x) = n\}$, $n \in N$. В построении будут употребляться метки видов $\boxed{n}$, $n \in N$, и $\boxed{+}$. Метка $\boxed{n}$ ставится на пары α-номеров L_n-списка. На каждом шаге конструкции метка $\boxed{n}$ может стоять не более чем на одной паре чисел L_n-списка. Метка $\boxed{n}$ может сниматься и ставиться снова через несколько шагов. Метка $\boxed{+}$ ставится на натуральные числа. Будучи поставлена на некоторое число, метка $\boxed{+}$ с этого числа больше не снимается. Если метка $\boxed{+}$ ставится на число n на шаге t_0, то метка $\boxed{n}$ на шагах $t \geqslant t_0$ не может быть поставлена ни на одну пару чисел L_n-списка. Обозначим через g одноместную о. р. функцию, определенную так: $W_{g(x)} \rightleftharpoons N \setminus \{x\}, x \in N$.

Конструкция

Шаг 0. Полагаем $\alpha_x^0 \rightleftharpoons \{2x\}$ для всех $x \in N$ и $\eta^0 \rightleftharpoons \{\langle x, x\rangle \mid x \in N\}$. На шаге 0 ни одна из меток не стоит.

Шаг $t+1$. Пусть $n \rightleftharpoons l(t)$. Выполняется один из следующих случаев.

Случай 1: метка $\boxed{n}$ стоит на паре чисел $\langle a, b\rangle$, $\varphi_n^t(g(a))\downarrow$, $\langle a, b\rangle \in \varepsilon^t\varphi_n(g(a))$. Ставим метку $\boxed{+}$ на число n, снимаем метку $\boxed{n}$ с пары $\langle a, b\rangle$. Выбираем наименьшее неиспользованное до шага $t+1$ нечетное число x и наименьшее число $c \in L_n \setminus \{a, b\}$. Полагаем $\eta^{t+1} \rightleftharpoons (\eta^t \cup \{\langle a, c\rangle\})^*, \alpha_a^{t+1} = \alpha_c^{t+1} \rightleftharpoons \alpha_a^t \cup \alpha_c^t, \alpha_b^{t+1} \rightleftharpoons \alpha_b^t \cup \{x\}$.

Случай 2: метка $\boxed{+}$ не стоит на числе n, метка $\boxed{n}$ не стоит ни на одной паре чисел и существуют $a, b \in L_n$ такие, что $a < b$ и для всех $m \leqslant n$ выполнено условие $a \in W_m^t \longleftrightarrow b \in W_m^t$. Выбираем пару $\langle a, b\rangle$ с наименьшим канторовским номером, удовлетворяющую приведенным условиям, и ставим метку $\boxed{n}$ на пару $\langle a, b\rangle$. Полагаем $\alpha_a^{t+1} = \alpha_b^{t+1} \rightleftharpoons \alpha_a^t \cup \alpha_b^t$.

Случай 3: метка $\boxed{n}$ стоит на паре чисел $\langle a, b\rangle$, и хотя бы для одного $m \leqslant n$ нарушено условие: $a \in W_m^t \longleftrightarrow b \in W_m^t$. Снимаем метку $\boxed{n}$ с пары $\langle a, b\rangle$. Полагаем $\alpha_a^{t+1} \rightleftharpoons \alpha_a^t \cup \{x_0\}, \alpha_b^{t+1} \rightleftharpoons \alpha_b^t \cup \{x_1\}$, где x_0, x_1 — два наименьших нечетных числа, не использованных до шага $t+1$.

Конструкция описана. Определим $\mathfrak{A} \rightleftharpoons \{\alpha x \mid x \in N\}, \eta \rightleftharpoons \bigcup_t \eta^t$.

Свойства конструкции

Свойство 1. *Если x, y — элементы разных списков, то $\alpha x \cap \alpha y = \varnothing$.*

Свойство 2. *Если $\alpha_x^t \cap \alpha_y^t \neq \varnothing$, то либо $\alpha_x^t = \alpha_y^t$, либо $\alpha_x^t \nsubseteq \alpha_y^t$ и $\alpha_y^t \nsubseteq \alpha_x^t$.*

Свойство 3. *На любом шаге конструкции метка $\boxed{n}$ может стоять только на парах α-номеров L_n-списка и при этом самое большее на одной паре.*

Свойство 4. *Если метка $\boxed{+}$ к концу шага t не стоит на числе n и $a, b \in L_n, a < b$, то $\alpha_a^t = \alpha_b^t$ в том и только том случае, когда к концу шага t метка $\boxed{n}$ стоит на паре $\langle a, b\rangle$.*

Свойство 5. *Если метка $\boxed{+}$ на шаге t_0 ставится на число n, то для всех $x, y \in L_n$ равенства $\alpha x = \alpha_x^{t_0}$ и $\alpha x = \alpha y$ имеют место тогда и только тогда, когда $\langle x, y\rangle \in \eta$.*

Свойства 1–5 очевидны.

Обозначим через T_n множество шагов $\{t+1 \mid t \in N, l(t) = n\}$.

Свойство 6. *Для любого n такого, что на n не ставится метка $\boxed{+}$, найдутся такие числа t_0, a, b, что $a, b \in L_n$ и на всех шагах $t \geqslant t_0$ метка $\boxed{n}$ стоит на паре $\langle a, b\rangle$.*

Метка $\boxed{n}$ по конструкции может сниматься и ставиться только на шагах из T_n. Поскольку по условию метка $\boxed{+}$ не ставится на число n, на всех шагах из T_n не имеет места случай 1.

Рассмотрим разбиение множества L_n на множества вида $L_n \cap W_0^{\sigma_0} \cap W_1^{\sigma_1} \cap \ldots \cap W_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $W_i^0 = N \setminus W_i$, $W_i^1 = W_i$, $i \leqslant n$. Поскольку L_n — бесконечное множество, хотя бы один из классов этого разбиения бесконечен. Пусть $\langle a, b\rangle$ — пара чисел с наименьшим канторовским номером такая, что $a < b$ и оба числа a, b содержатся в одном и том же классе разбиения множества L_n. Пусть t_1 — наименьшее число такое, что $a \in W_m \longleftrightarrow a \in W_m^{t_1}$, $b \in W_m \longleftrightarrow b \in W_m^{t_1}$ для всех $m \leqslant n$.

Если на шаге t_1 метка $\boxed{n}$ стоит на некоторой паре $\langle c, d\rangle$ и на всех бо́льших шагах метка $\boxed{n}$ с этой пары не снимается, то в качестве чисел t_0, a, b достаточно взять числа t_1, c, d. В противном случае найдется шаг $t_0 \geqslant t_1$, $t_0 \in T_n$, на котором будут выполняться условия случая 2 и метка $\boxed{n}$ будет поставлена на пару $\langle a, b\rangle$. В силу выбора t_1 и пары $\langle a, b\rangle$ на всех шагах $t > t_0$, $t \in T_n$, условия случая 3 не будут выполняться и метка $\boxed{n}$ не будет снята с пары $\langle a, b\rangle$.

Свойство 7. *Семейство $\mathfrak{A}$ дискретное и состоит из конечных множеств.*

Вследствие свойств 1, 2, 5 достаточно доказать это утверждение для подсемейств $\mathfrak{A}_n \rightleftharpoons \{\alpha x \mid x \in L_n\}$, где число n в ходе конструкции не отмечается меткой $\boxed{+}$. По свойству 6 метка $\boxed{n}$ стабилизируется на некоторой паре $\langle a, b\rangle$, начиная с некоторого шага t_0. Значит, на всех шагах $t \in T_n$, $t \geqslant t_0$, ни один из случаев 1–3 не имеет места. Следовательно, $\alpha x = \alpha_x^{t_0}$ для любого $x \in L_n$, поскольку в αx элементы могут перечисляться только на шаге 0 и шагах из T_n. Дискретность семейства $\mathfrak{A}_n$ следует из свойства 2 и выбора t_0.

Свойство 8. *Каждое множество из $\mathfrak{A}$ имеет не более двух α-номеров. Пусть $a < b$, тогда $\alpha a = \alpha b$ в том и только том случае, когда $a, b \in L_n$ для некоторого n и либо метка $\boxed{n}$, начиная с некоторого шага, постоянно стоит на паре $\langle a, b\rangle$, либо метка $\boxed{+}$ на некотором шаге ставится на число n и $\langle a, b\rangle \in \eta$.*

Свойство 8 является очевидным следствием свойств 3–6 и того факта, что любой нетривиальный смежный класс эквивалентности η двухэлементен, причем оба элемента принадлежат одному списку.

Свойство 9. *Нумерация α не является эффективно минимальной.*

Покажем, что никакая о.р. функция φ_n не удовлетворяет определению эффективной минимальности нумерации α. Рассмотрим сначала ситуацию, когда на некотором шаге $t_0 \in T_n$ метка $\boxed{+}$ ставится на число n. Это происходит в результате выполнения инструкций случая 1. Пусть $\langle a, b\rangle$ — пара, на которой к началу шага t_0 стояла метка $\boxed{n}$. По условию случая 1 $\langle a,b\rangle \in \varepsilon\varphi_n(g(a))$. После выполнения предписаний случая 1 получим $\alpha_a^{t_0} \neq \alpha_b^{t_0}$, а по свойству 5 $\alpha_a^{t_0} = \alpha a, \alpha_b^{t_0} = \alpha b$. Пусть c — наименьшее число из $L_n \setminus \{a,b\}$. Тогда $\alpha a = \alpha c$. Напомним, что $W_{g(a)} = N \setminus \{a\}$. Имеем $[W_{g(a)}]_{\theta_\alpha} = N$, $\alpha a \neq \alpha b$ и $\langle a,b\rangle \in \varepsilon\varphi_n(g(a))$. Следовательно, $\varepsilon\varphi_n(g(a)) \not\subseteq \theta_\alpha$.

Предположим теперь, что метка $\boxed{+}$ не ставится на число n ни на одном шаге конструкции. Выберем числа t_0, a, b, удовлетворяющие свойству 6. Тогда $\alpha a = \alpha b = \alpha_a^{t_0}$. Следовательно, $[W_{g(a)}]_{\theta_\alpha} = N$. С другой стороны, на всех шагах $t \geqslant t_0$, $t \in T_n$, не выполняются условия случая 1. Поэтому $\langle a,b\rangle \notin \varepsilon\varphi_n(g(a))$. Отсюда и из свойства 8 получаем, что если $\varepsilon\varphi_n(g(a)) \subseteq \theta_\alpha$, то смежные классы эквивалентности $\varepsilon\varphi_n(g(a))$, содержащие a, b, одноэлементны, откуда $[W_{g(a)}]\varepsilon\varphi_n(g(a)) = W_{g(a)} \neq N$. Свойство 9 следует теперь из теоремы 2.1.

Свойство 10. *Нумерация α минимальна.*

Пусть W_m — произвольное р. п. множество, для которого $[W_m]_{\theta_\alpha} = N$. Покажем, что для любого $n \geqslant m$, не отмеченного меткой $\boxed{+}$, выполнено включение $L_n \subseteq W_m$. Из свойства 8 следует, что для таких n достаточно доказать принадлежность $a, b \in W_m$, где $a, b \in L_n$ и метка $\boxed{n}$, начиная с некоторого шага t_0, стоит на паре $\langle a,b\rangle$. Поскольку $[W_m]_{\theta_\alpha} = N$, хотя бы одно из чисел a, b содержится в W_m. В силу выбора t_0, как только одно из чисел a, b на шаге $t_1 \geqslant t_0$, $t_1 + 1 \in T_n$, окажется в множестве $W_m^{t_1}$, так на этом же шаге t_1 и второе из них окажется в $W_m^{t_1}$.

Определим позитивную эквивалентность $\eta_m \rightleftharpoons (\eta \cup \{\langle c,d\rangle \mid c,d \in L_k, k < m$, на k не ставится метка $\boxed{+}$, метка $\boxed{k}$ стабилизируется на паре $\langle c,d\rangle\})^*$. Из свойства 8 легко следует, что $\eta_m \subseteq \theta_\alpha$ и $[W_m]_{\eta_m} = N$. Значит, α — минимальная нумерация.

Утверждение теоремы содержится в свойствах 7, 9, 10.

Теорема 2.4. *Существует слабо эффективно дискретное семейство р. п. множеств, имеющее вычислимую строго минимальную, но не позитивную нумерацию.*

Доказательство. Строим по шагам нумерацию α и позитивную эквивалентность η. Все α-номера разобьем на попарно не пересекающиеся списки $L_n \rightleftharpoons \{x \mid l(x) \rightleftharpoons n\}, n \in N$. В построении употребляются метки трех видов: $\boxed{n}$, $n{\uparrow}m$ (для $n < m$, $n, m \in N$) и $\boxed{+}$. Метки вида $\boxed{n}$ ставятся на упорядоченные пары α-номеров L_n-списка, метки вида $n{\uparrow}m$ — на упорядоченные четверки α-номеров $\langle x,y,z,u\rangle$, где $x, y \in L_n$, $z \in \{x,y\}$, $u \in L_m$. Метки вида $\boxed{n}$ могут сниматься, а затем ставиться вновь, метки вида $n{\uparrow}m$ ставятся, но не снимаются. На каждом шаге конструкции метка $\boxed{n}$ может стоять не более чем на одной паре α-номеров L_n-списка. Для любых $n, m, a, b \in N$ метка $n{\uparrow}m$ на каждом шаге может стоять не более чем на одной четверке вида $\langle a,b,x,y\rangle$, $x \in \{a,b\}$, $y \in N$. Метка $\boxed{+}$ ставится на метки вида $\boxed{n}$ и не снимается.

Шаг 0. Полагаем $\alpha_x^0 \rightleftharpoons \{2x\}$ для всех $x \in N$ и $\eta^0 \rightleftharpoons \{\langle x, x\rangle \mid x \in N\}$. На шаге 0 ни одна из меток не стоит.

Шаг $2t+1$. Пусть $n \rightleftharpoons l(t)$.

Случай 1: метка $\boxed{n}$ не стоит, и существуют числа $a \in L_n$, $b \in L_n$, $a \neq b$, такие, что ни a, ни b не является последней координатой четверки, помеченной какой-нибудь меткой вида $k{\uparrow}n$, где $k < n$, и для всех $p \leqslant n$ выполнено условие $[a]_{\eta^{2t}} \cap W_p^{2t} \neq \varnothing \longleftrightarrow [b]_{\eta^{2t}} \cap W_p^{2t} \neq \varnothing$. Выбираем пару $\langle a, b\rangle$, удовлетворяющую приведенным условиям, с наименьшим канторовским номером и ставим на нее метку $\boxed{n}$. Для всех $x \in [\{a, b\}]_{\eta^{2t}}$ полагаем $\alpha_x^{2t+1} \rightleftharpoons \alpha_a^{2t} \cup \alpha_b^{2t}$.

Случай 2: метка $\boxed{n}$ стоит на некоторой паре $\langle a, b\rangle$ и не помечена меткой $\boxed{+}$. Далее рассмотрим два варианта.

Случай 2.1: $\langle a, b\rangle \in \varepsilon_n^{2t}$. Ставим метку $\boxed{+}$ на метку $\boxed{n}$. Выбираем два наименьших не использованных до шага $2t+1$ нечетных числа u, v, полагаем $\alpha_x^{2t+1} \rightleftharpoons \alpha_a^{2t} \cup \{u\}$ для всех $x \in [a]_{\eta^{2t}}$ и $\alpha_x^{2t+1} \rightleftharpoons \alpha_b^{2t} \cup \{v\}$ для всех $x \in [b]_{\eta^{2t}}$.

Случай 2.2: $\langle a, b\rangle \notin \varepsilon_n^{2t}$, и для некоторого $p \leqslant n$ нарушено условие $[a]_{\eta^{2t}} \cap W_p^{2t} \neq \varnothing \longleftrightarrow [b]_{\eta^{2t}} \cap W_p^{2t} \neq \varnothing$. Снимаем метку $\boxed{n}$ с пары $\langle a, b\rangle$. Выбираем два наименьших не использованных до шага $2t+1$ нечетных числа u, v, полагаем $\alpha_x^{2t+1} \rightleftharpoons \alpha_a^{2t} \cup \{u\}$ для всех $x \in [a]_{\eta^{2t}}$ и $\alpha_x^{2t+1} \rightleftharpoons \alpha_b^{2t} \cup \{v\}$ для всех $x \in [b]_{\eta^{2t}}$.

Шаг $2t+2$. Пусть $n \rightleftharpoons l(t)$, $m \rightleftharpoons n+1+l(r(t))$.

Случай 1: метка $\boxed{n}$ стоит на паре $\langle a, b\rangle$ и не помечена меткой $\boxed{+}$, метка $n{\uparrow}m$ не стоит на четверке вида $\langle a, b, x, y\rangle$, $x, y \in N$, и в точности одно из пересечений $[a]_{\eta^{2t+1}} \cap W_m^{2t+1}$, $[b]_{\eta^{2t+1}} \cap W_m^{2t+1}$ пустое. Пусть c то из чисел a, b, для которого $[c]_{\eta 2t+1} \cap W_m^{2t+1} = \varnothing$. Пусть $d \in L_m$ — наименьшее такое число, что d не является элементом пары, на которую хотя бы один раз до шага $2t+2$ ставилась метка $\boxed{m}$, и d не является последней координатой ни одной четверки, отмеченной меткой вида $k{\uparrow}m$, $k < m$. Ставим метку $n{\uparrow}m$ на четверку $\langle a, b, c, d\rangle$.

Случай 2: метка $\boxed{n}$ стоит на паре $\langle a, b\rangle$ и не помечена меткой $\boxed{+}$, метка $n{\uparrow}m$ стоит на четверке $\langle a, b, c, d\rangle$ и $d \in W_m^{2t+1}$. Полагаем $\eta^{2t+2} \rightleftharpoons (\eta^{2t+1} \cup \{\langle c, d\rangle\})^*$. Для всех $x \in [\{a, b\}]_{\eta^{2t+2}}$ полагаем $\alpha_x^{2t+2} \rightleftharpoons \alpha_a^{2t+1} \cup \alpha_d^{2t+1}$.

Определим $\mathfrak{A} \rightleftharpoons \{\alpha x \mid x \in N\}$.

Свойства конструкции

Свойство 1. *Если метка* $\boxed{n}$ *стоит на паре* $\langle a, b\rangle$ *к концу шага* t *конструкции и не помечена меткой* $\boxed{+}$, *то* $\alpha_a^t = \alpha_b^t$.

Свойство 2. *Если на шаге t_0 на паре $\langle a,b\rangle$ стоит метка* $\boxed{n}$ *, а на метке* $\boxed{n}$ *стоит метка* $\boxed{+}$ *, то на всех шагах $t \geqslant t_0$ обе эти метки не снимаются, $\alpha a = \alpha_a^{t_0}$, $\alpha b = \alpha_b^{t_0}$, $\alpha a \neq \alpha b$, $\langle a,b\rangle \in \varepsilon_n^{t_0}$.*

Свойство 3. *Для любых x, y, t_0 если $\langle x,y\rangle \in \eta^{t_0}$, то $\alpha_x^t = \alpha_y^t$ для всех $t \geqslant t_0$.*

Свойство 4. *Для любых n, t каждый смежный класс эквивалентности η^t содержит в точности один элемент списка L_n.*

Свойство 5. *Для $x \in L_n$ через $\sigma^t(n,x)$ обозначим двоичную последовательность $\sigma_0^t\sigma_1^t...\sigma_n^t$, определенную так: $\sigma_i^t = 1 \longleftrightarrow [x]_{\eta^t} \cap W_i^t \neq \varnothing$, $i \leqslant n$. Тогда функция $\lambda t\sigma^t(n,x)$ стабилизируется, т.е. для некоторого $s \in N$ имеет место равенство $\sigma^t(n,x) = \sigma^s(n,x)$ при всех $t \geqslant s$.*

Свойства 1–5 очевидны.

Обозначим через A_n множество чисел $x \in L_n$, являющихся последней координатой четверки, помеченной в ходе конструкции меткой вида $m\!\uparrow\! n$, где $m < n$.

Свойство 6. *Для любого $n \in N$ справедливы следующие два утверждения:*

(а) *A конечно;*

(б) *существуют t_0, a, b такие, что на всех шагах $t \geqslant t_0$ метка* $\boxed{n}$ *стоит на паре $\langle a,b\rangle$.*

Доказываем индукцией по n. Допустим, что все множества A_m конечны и все метки $\boxed{m}$ стабилизируются для $m < n$ к шагу s. .

(а) Метки вида $m\!\uparrow\! n$ ставятся на четверки чисел $\langle a,b,c,d\rangle$ только на четных шагах в результате выполнения инструкций случая 1, при этом необходимо, чтобы метка $\boxed{m}$ стояла на паре чисел $\langle a,b\rangle$. Кроме того, при фиксированных a,b метка $m\!\uparrow\! n$ может ставиться не более чем на одну четверку $\langle a,b,c,d\rangle$, для которой $d \in L_n$. Таким образом, не более n чисел может попасть в множество A_n после шага s.

(б) Пусть $k \rightleftharpoons 2^{n+1}$ и $x_0, x_1, \ldots, x_k$ — наименьшие $k+1$ элементов множества $L_n \setminus A_n$. Выберем наименьшее число t_1 такое, что все функции $\lambda t\sigma^t(n,x_j)$ при $j \leqslant k$ стабилизируются к моменту t_1 и ни одна из меток вида $m\!\uparrow\! n$ при $m < n$ после шага t_1 не ставится.

Если на шаге t_1 метка $\boxed{n}$ стоит на паре $\langle c,d\rangle$, с которой $\boxed{n}$ в дальнейшем не снимается, то достаточно положить $t_0 = t_1$, $a = c$, $b = d$. Если метка $\boxed{n}$ на некотором шаге $t_2 > t_1$ снимается с пары $\langle c,d\rangle$ либо метка $\boxed{n}$ на шаге t_1 не стоит ни на одной паре (в этом случае будем считать $t_2 = t_1$), то в качестве t_0 выберем наименьшее число, удовлетворяющее условиям $t_0 \geqslant t_2$, t_0 — нечетное число, $l\left(\frac{t_0-1}{2}\right) = n$. Поскольку к шагу t_0 все функции $\lambda t\sigma^t(n,x_j)$ при $j \leqslant k$ стабилизировались и число двоичных последовательностей длины $n+1$ равно k, ввиду свойства 4 найдутся хотя бы два числа $x_{j_1} \neq x_{j_2}, 0 \leqslant j_1, j_2 \leqslant k$, для которых $\sigma^{t_2}(n,x_{j_1}) = \sigma^{t_2}(n,x_{j_2})$.

Выберем среди таких пар чисел $\langle x_{j_1}, x_{j_2}\rangle$ пару $\langle a,b\rangle$ с наименьшим канторовским номером. Тогда на шаге t_0 для пары $\langle a,b\rangle$ будут выполнены все условия случая 1 и метка $\boxed{n}$ будет поставлена на пару $\langle a,b\rangle$.

На всех шагах $t > t_0$ в силу выбора t_1 и неравенства $t_0 > t_1$ ни одно из условий $[a]_{\eta^t} \cap W_p^t \neq \varnothing \longleftrightarrow [b]_{\eta^t} \cap W_p^t \neq \varnothing$ для $p \leqslant n$ не может быть нарушено. Следовательно, на всех нечетных шагах $t > t_0$ и $l\left(\frac{t-1}{2}\right) = n$ не выполняются условия случая 2.2. Значит, метка $\boxed{n}$ на всех шагах $t \geqslant t_0$ с пары $\langle a,b\rangle$ не снимается.

Свойство 7. *Семейство $\mathfrak{A}$ слабо эффективно дискретное.*

Покажем сначала, как для любого множества αx построить множество F_x, отделяющее αx от всех множеств семейства $\mathfrak{A} \setminus \{\alpha x\}$. Пусть $x \in L_n$.

Если $[x]_\eta$ одноэлементно или метка $\boxed{n}$ ни разу не ставилась на пару, в состав которой входит x, то по описанию конструкции имеем $F_x \rightleftharpoons \alpha_x^0 = \alpha x$.

Если смежный класс $[x]_\eta$ нетривиален и $x \in A_n$, то $\langle x,y\rangle \in \eta$ для некоторых $m < n$, $y \in L_m$. По свойству 3 $\alpha x = \alpha y$. Достаточно положить $F_x \rightleftharpoons F_y$.

Если метка $\boxed{n}$ несколько раз ставится на пары, содержащие x, но не стабилизируется на x, то $F_x \rightleftharpoons \alpha_x^{t_0} = \alpha x$. Здесь t_0 — наименьшее такое число, что после шага t_0 метка $\boxed{n}$ не ставится на пару, в состав которой входит x, и $[x]_\eta = [x]_{\eta^{t_0}}$. Существование t_0 следует из того, что в смежный класс $[x]_\eta$ новые пары перечисляются на четных шагах в результате выполнения случая 2, но для этого необходимо, чтобы метка $\boxed{n}$ стояла на паре, содержащей x.

Если x является элементом пары $\langle a,b\rangle$, на которой с некоторого шага t_1 стабилизируется метка $\boxed{n}$, то достаточно положить $F_x \rightleftharpoons \alpha_x^{t_1}$. (Будем считать, что если на метку $\boxed{n}$ ставится метка $\boxed{+}$, то это происходит на шаге t_1.) Действительно, по построению $\alpha_x^{t_1} \not\subseteq \alpha_y^{t_1}$ для всех $y \in L_n \setminus \{a,b\}$. Далее, $\alpha_x^{t_1} \not\subseteq \alpha y$ для всех $y \in A_n$, так как в A_n попадают числа, ни разу не отмеченные меткой $\boxed{n}$. Значит, $\alpha_x^{t_1} \not\subseteq \alpha y$ для всех $y \in \bigcup_{m\leqslant n} L_m \setminus \{a,b\}$.

Если же $y \in \bigcup_{m>n} L_m \setminus [\{a,b\}]_\eta$, то по построению $\alpha x \cap \alpha y = \varnothing$. Учитывая все сказанное и свойства 1, 2, получаем, что $F_x = \alpha_x^{t_1}$ отделяет αx от $\mathfrak{A} \setminus \{\alpha x\}$.

Таким образом, $\{F_x\}$ — отделяющая последовательность конечных множеств для семейства $\mathfrak{A}$. Значит, $\mathfrak{A}$ — дискретное семейство. По описанию $\{F_x\}$ нетрудно построить равномерно эффективную процедуру перечисления последовательности $\{F_x\}$. Итак, $\mathfrak{A}$ — слабо эффективно дискретное семейство.

Свойство 8. *Имеет место включение $\eta \subseteq \theta_\alpha$. Если метка $\boxed{n}$ стабилизируется на паре $\langle a,b\rangle$ и метка $\boxed{+}$ не ставится на метку $\boxed{n}$, то $\langle a,b\rangle \notin \eta$, $[a]_{\theta_\alpha} = [a]_\eta \cup [b]_\eta$.*

Включение $\eta \subseteq \theta_\alpha$ вытекает из свойства 3. Если метка $\boxed{n}$ стабилизируется на паре $\langle a,b\rangle$, то $a \in L_n$, $b \in L_n$, $a \neq b$. Отсюда и из доказательства свойства 7, а также свойств 1, 2, 4 легко следует, что $\langle a,b\rangle \notin \eta$, $[a]_{\theta_\alpha} = [a]_\eta \cup [b]_\eta$.

Свойство 9. *Если ни на одной паре чисел смежного класса $[x]_{\theta_\alpha}$ не стабилизируется ни одна метка вида $\boxed{n}$, не помеченная $\boxed{+}$, то справедливо равенство $[x]_{\theta_\alpha} = [x]_\eta$.*

Свойство 10. *Если метка $\boxed{n}$ стабилизируется на паре $\langle a,b\rangle$ и метка $\boxed{+}$ ставится на метку $\boxed{n}$, то $[a]_{\theta_\alpha} = [a]_\eta$, $[b]_{\theta_\alpha} = [b]_\eta$, $\alpha a \neq \alpha b$.*

Свойства 9, 10 очевидно следуют из построения и свойства 2.

Свойство 11. *Нумерация α не является позитивной.*

Покажем, что $\varepsilon n \neq \theta_\alpha$ для любого $n \in N$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: метка $\boxed{n}$ стабилизируется на паре $\langle a,b\rangle$, и метка $\boxed{+}$ ставится на метку $\boxed{n}$. Тогда по свойству 2 $\alpha a \neq \alpha b$ и $\langle a,b\rangle \in \varepsilon n$. Значит, $\varepsilon n \not\subseteq \theta_\alpha$.

Случай 2: метка $\boxed{n}$ стабилизируется с некоторого шага t_0 на паре $\langle a,b\rangle$, но метка $\boxed{+}$ на $\boxed{n}$ не ставится. По свойству 8 $\langle a,b\rangle \in \theta_\alpha$. На всех шагах $2t+1 \geqslant t_0$ и $l(t) = n$ не выполняются условия случая 2.1. Значит, $\langle a,b\rangle \notin \varepsilon n$. Следовательно, $\theta_\alpha \not\subseteq \varepsilon n$.

Свойство 12. *Нумерация α является строго минимальной.*

Пусть W_m — такое р.п. множество, что $[W_m]_{\theta_\alpha} = N$. Тогда $[x]_{\theta_\alpha} \cap W_m \neq \varnothing$ для каждого $x \in N$. Нам нужно доказать, что $[x]_\eta \cap W_m \neq \varnothing$ для всех $x \in N$. В силу свойств 8–10 это нужно сделать только для всех смежных классов вида $[a_n]_\eta, [b_n]_\eta$, где $\langle a_n, b_n\rangle$ — пара, на которой с шага t_n стабилизируется метка $\boxed{n}$, не помеченная $\boxed{+}$, $n \in N$. По свойству 8 $[a_n]_\eta \cap [b_n]_\eta = \varnothing$ и $([a_n]_\eta \cup [b_n]_\eta) \cap W_m \neq \varnothing$. Значит, W_m пересекается хотя бы с одним из смежных классов $[a_n]_\eta$, $[b_n]_\eta$.

Фиксируем $n, \langle a_n, b_n\rangle$. Рассмотрим сначала ситуацию, когда $n \geqslant m$. Пусть t — наименьшее число, для которого $l(t) = n$, $2t+1 > t_n$ и $[\{a_n, b_n\}]_{\eta^{2t}} \cap W_m^{2t} \neq \varnothing$. Тогда $\langle a_n, b_n\rangle \notin \varepsilon_n^{2t}$, иначе метка $\boxed{+}$ на шаге $2t+1$ была бы поставлена на метку $\boxed{n}$, что противоречит выбору пары $\langle a_n, b_n\rangle$. Случай 2.2 на шаге $2t+1$ также не выполняется в силу выбора t_n. Следовательно, $[a_n]_{\eta^{2t}} \cap W_m^{2t} \neq \varnothing$, $[b_n]_{\eta^{2t}} \cap W_m^{2t} \neq \varnothing$.

Пусть теперь $n < m$. Выберем наименьшее число s такое, что $l(s) = n$, $2s+2 > t_n$, $n+1+l(r(s)) = m$, $[\{a_n, b_n\}]_{\eta^{2s+1}} \cap W_m^{2s+1} \neq \varnothing$. Если метка $n{\uparrow}m$ на шаге $2s+1$ не стоит на четверке вида $\langle a_n, b_n, x, y\rangle$, где $x, y \in N$, то на шаге $2s+2$ выполняются условия случая 1 и метка $n{\uparrow}m$ будет поставлена на некоторую четверку чисел $\langle a_n, b_n, c, d\rangle$. Без потери общности будем считать, что $[a_n]_{\eta^{2s+1}} \cap W_m^{2s+1} = \varnothing$ или, что то же самое, $c = a_n$. Если метка $n{\uparrow}m$ на шаге t_n уже стояла на некоторой четверке $\langle a_n, b_n, c, d\rangle$, то будем считать $s = t_n$. Итак, после шага s метка $n{\uparrow}m$ постоянно стоит на четверке $\langle a_n, b_n, c, d\rangle$ и $[a_n]_{\eta^{2s+1}} \cap W_m^{2s+1} = \varnothing$.

Допустим, что $d \notin W_m$. На всех шагах $t \geqslant 2s+2$ число d не может попасть в качестве последней координаты ни в одну четверку, отличную от $\langle a_n, b_n, c, d\rangle$, и метка $\boxed{m}$ на этих же шагах не может быть поставлена на пару, содержащую d. Следовательно, $[d]_{\theta_\alpha}$ одноэлементно. Но тогда $[W_m]_{\theta_\alpha} \neq N$, что противоречит выбору W_m. Итак, $d \in W_m$. Тогда на некотором шаге $2t+2$ таком, что $t \geqslant s$, $l(t) = n$, $n+1+l(r(t)) = m$, $d \in W_m^{2t+1}$, выполняется случай 2, по которому пара $\langle a_n, d\rangle$ будет перечислена в η. Следовательно, $[a_n]_\eta \cap W_m$ также непусто.

Итак, для любого р. п. множества W_m если $[W_m]_{\theta_\alpha} = N$, то $[W_m]_\eta = N$. Тогда по теореме 2.2 нумерация α является строго минимальной.

Утверждение теоремы 2.4 следует из свойств 7, 11, 12.

Замечание 2.3. Из [3, 16] вытекает, что семейства, построенные в теоремах 2.3 и 2.4, обладают также вычислимыми позитивными нумерациями.

Вопрос 1. Существуют ли дискретные семейства конечных множеств, обладающие вычислимыми строго минимальными, но не позитивными нумерациями?

Вопрос 2. Существует ли (дискретное) семейство рекурсивно перечислимых (конечных) множеств, обладающее вычислимыми эффективно, но не строго минимальными нумерациями?

§ 3. Наименьшие нумерации

Нумерация α множества A называется *наименьшей*, если она сводится к любой нумерации β множества A. В частности, наименьшая нумерация минимальна. Конечные множества имеют разрешимую наименьшую нумерацию, а бесконечные не могут иметь наименьших невычислимых нумераций [1]. В этом параграфе рассматриваются только вычислимые нумерации бесконечных семейств р. п. множеств и бесконечных семейств о. р. функций.

Все известные примеры наименьших нумераций являются разрешимыми или позитивными. Для семейств о. р. функций этот факт замечен А. И. Мальцевым [9], для некоторых сильно вычислимых семейств конечных множеств — В. Л. Селивановым [17]. В обоих случаях наименьшая нумерация разрешима.

Все нумерации эффективно дискретного семейства позитивны [9]. Можно строить такие семейства с позитивными неразрешимыми нумерациями [1]. Известен пример не дискретного семейства р. п. множеств, все нумерации которого позитивны [18]. Естественным является исследование вопроса о существовании наименьших не позитивных нумераций.

Теорема 3.1. *Существует дискретное семейство р. п. множеств, все вычислимые нумерации которого являются минимальными, но не эффективно минимальными.*

Доказательство. Обозначим через L_n и $\check{L}_n$ множества $\{x \mid l(x) = n\}$ и $\{x \mid l(x) \geqslant n\}$, $n \in N$, соответственно. Числам x из L_n и $\check{L}_n$ будут соответствовать тройки α-номеров $\langle 3x, 3x+1, 3x+2\rangle$. Пусть зафиксирована какая-либо эффективная последовательность $\{U_n\}_{n\in N}$ рекурсивных последовательностей натуральных чисел такая, что члены последовательности U_n — это элементы из $\check{L}_n$, причем каждое число из $\check{L}_n$ встречается в U_n бесконечно часто и соседние члены в U_n различны, $n \in N$.

Будем строить по шагам нумерацию α, последовательность $\{f_k\}_{k \in N}$ одноместных ч. р. функций, «сводящих» нумерации π_k к нумерации α, а также вспомогательные о. р. функции $q_n(t)$, $u_n(t)$, $n \in N$, $p(x,t)$, $s(n,x,t)$ и вспомогательную последовательность троек $\{F^t\}_{t \in N}$.

Общерекурсивная функция q_n монотонно не убывающая и принимает значения в множестве $\check{L}_n, n \in N$. Каждая о. р. функция $u_n, n \in N$, интерпретируется как курсор, который на шаге 0 устанавливается на первом члене последовательности U_n, а на шаге $t+1$ либо остается на месте, либо сдвигается на следующий элемент из U_n. Значением $u_n(t)$ является число, обозреваемое курсором u_n на шаге t. Будем говорить, что курсор u_n *стабилизируется*, если, начиная с некоторого шага t_0, он не сдвигается.

Общерекурсивная функция p принимает только значения 0, 1 и играет роль переключателя. В некоторых ситуациях, когда $\lambda t p(x,t)$ принимает значение i бесконечно часто, в пределе имеем $\alpha(3x+2) = \alpha(3x+i)$.

Сигнализирующая о. р. функция $s(k,x,t)$ предназначена для сдерживания роста множеств $\alpha 3x$, $\alpha(3x+1)$, $\alpha(3x+2)$, чтобы вовремя определять значения функции f_k. Функция s принимает значения 0, 1.

Множество F^t состоит из троек вида $\langle k,y,*\rangle$ и вида $\langle k,y,x\rangle$, где числа k,y,x принадлежат N, и играет роль счетчика для определения значений функций f_k. Для любых k, t в F^t содержится в точности одна тройка, первая координата которой есть k.

В построении употребляются метки вида $\boxed{n}$, $n \in N$. Метка $\boxed{n}$ ставится на числа из L_n и, будучи поставлена на некотором шаге на число x, в дальнейшем с числа x не снимается. В пределе метка $\boxed{n}$ может стоять на бесконечном, но рекурсивном множестве чисел из L_n.

Через g обозначена одноместная о. р. функция, для которой $W_{g(x)} = N \setminus \{3x+2\}$ при всех $x \in N$.

Конструкция

Шаг 0. Для всех $x,n,k,y \in N$ полагаем, что $\alpha^0_{3x} \rightleftharpoons \{2l(x), 14x+1, 14x+3\}$, $\alpha^0_{3x+1} \rightleftharpoons \{2l(x), 14x+5, 14x+7\}$, $\alpha^0_{3x+2} \rightleftharpoons \{2l(x), 14x+9, 14x+11\}$, $p(x,0) \rightleftharpoons 0$, $s(k,x,0) \rightleftharpoons 0$, значение $q_n(0)$ равно наименьшему числу из $\check{L}_n$, а значение $f^0_k(y)$ не определено. Для каждого $k \in N$ устанавливаем курсор u_k на первом члене последовательности U_k. Полагаем $F^0 \rightleftharpoons \{\langle k,0,*\rangle \mid k \in N\}$. Ни одна метка $\boxed{n}$, $n \in N$, на шаге 0 не стоит ни на каком числе.

Шаг $5t+1$. Пусть $T \rightleftharpoons 5t$, $n \rightleftharpoons l(t)$. Если существует число $x \in L_n$ такое, что все числа, на которых метка $\boxed{n}$ стоит на шаге T, меньше x, $g(x) > n$, $\varphi^T_n(g(x))\downarrow$ и хотя бы одна из пар $\langle 3x+2, 3x\rangle$, $\langle 3x+2, 3x+1\rangle$ содержится в $\varepsilon^T\varphi_n(g(x))$, то ставим метку $\boxed{n}$ на наименьшее x, удовлетворяющее приведенным условиям, и полагаем $p(x, T+1) = 1-i$, где i меньшее из чисел 0, 1, для которого $\langle 3x+2, 3x+i\rangle \in \varepsilon^T\varphi_n(g(x))$.

Шаг $5t+2$. Пусть $T \rightleftharpoons 5t+1$, $n \rightleftharpoons l(t)$, $x \rightleftharpoons q_n(T)$. Если $\{3x+i \mid$

$i \leqslant 2\} \subseteq W_n^T$, то полагаем $q_n(T+1)$ равным наименьшему числу из $\check{L}_n$, большему, чем $q_n(T)$.

Шаг $5t+3$. Пусть $T \rightleftharpoons 5t+2$, $k \rightleftharpoons r(t)$. Пусть $\langle k, y, *\rangle$ — тройка из F^T, первая координата которой равна k. Если $\pi_k^T(y)$ содержит хотя бы одно число вида $14x+1$, $14x+5$ или $14x+9$, то выбираем наименьшее такое x. Полагаем $F^{T+1} \rightleftharpoons (F^T \setminus \{\langle k, y, *\rangle\}) \cup \{\langle k, y, x\rangle\}$, если $x \in \check{L}_k$, и $F^{T+1} \rightleftharpoons (F^T \setminus \{\langle k, y, *\rangle\}) \cup \{\langle k, y+1, *\rangle\}$, если $x \notin \check{L}_k$.

Шаг $5t+4$. Пусть $T \rightleftharpoons 5t+3, k \rightleftharpoons r(t), x \rightleftharpoons u_k(T)$. Пусть $x \in L_n$. Если для каждого $z \in N$ такого, что $f_k^T(z)\downarrow$ и $f_k(z) \in \{3x+i \mid i \leqslant 2\}$, выполнено включение $\alpha_{f_k(z)}^T \subseteq \pi_k^T(z)$, то рассмотрим следующие два случая:

Случай 1: $\langle k, y, x\rangle \in F^T$ для некоторого $y \in N$, и имеет место в точности одно из включений $\alpha_{3x+i}^T \subseteq \pi_k^T(y)$, $i \leqslant 2$. Полагаем $f_k(y) \rightleftharpoons 3x+i$, где $i \leqslant 2$ и $\alpha_{3x+i}^T \subseteq \pi_k^T(y)$. Сдвигаем курсор u_k на следующий элемент последовательности U_k. Полагаем $s(k, x, T+1) \rightleftharpoons 1$, $F^{T+1} \rightleftharpoons F^T \setminus \{\langle k, y, x\rangle\}$.

Случай 2: $\langle k, y, x\rangle$ не принадлежит F^T ни для какого $y \in N$. Сдвигаем курсор u_k на следующий элемент последовательности U_k. Полагаем $s(k, x, T+1) \rightleftharpoons 1$.

Шаг 5t+5. Пусть $T \rightleftharpoons 5t+4$, $n \rightleftharpoons l(t)$, $x \rightleftharpoons c(n, r(r(t)))$, $j \rightleftharpoons p(x, T)$ и выполнены следующие условия: $x \neq q_m(T)$ для любого $m \leqslant n$; $s(m, x, T) = 1$ для каждого $m \leqslant n$ такого, что $\rho f_m^T \cap \{3x+i \mid i \leqslant 2\} \neq \varnothing$; нет ни одного $m \leqslant n$, для которого $u_m(T) = x, \rho f_m^T \cap \{3x+i \mid i \leqslant 2\} = \varnothing$ и $\langle m, y, x\rangle \in F^T$ для некоторого $y \in N$. Для всех $m \leqslant n$ полагаем $s(m, x, T+1) \rightleftharpoons 0$. Пусть z_0, z_1 — наибольшие нечетные числа из множеств α_{3x+j}^T, α_{3x+2}^T соответственно, а z_2, z_3 — наименьшие не использованные до шага $T+1$ числа такие, что $z_2 > z_1$, $z_3 > z_0$. Полагаем $\alpha_{3x+2}^{T+1} \rightleftharpoons (\alpha_{3x+2}^T \cup \alpha_{3x+j}^T \cup \{z_2\}) \setminus \{z_0\}$, $\alpha_{3x+j}^{T+1} \rightleftharpoons (\alpha_{3x+2}^T \cup \alpha_{3x+j}^T \cup \{z_3\}) \setminus \{z_1\}$. Полагаем $p(x, T+1) \rightleftharpoons 1-j$, если метка $\boxed{n}$ не стоит на числе x, и $p(x, T+1) \rightleftharpoons j$, если метка $\boxed{n}$ стоит на числе x.

Свойства конструкции

Свойство 1. *Для любых $n \in N$ и $x \in L_n$ множества $\alpha(3x+i)$, $i \leqslant 2$, содержат в точности одно четное число, и этим числом является $2n$.*

Свойство 2. *При $x \neq y$ множества $\alpha a, \alpha b$ не содержат общих нечетных чисел, если $a \in \{3x+i \mid i \leqslant 2\}$, $b \in \{3y+i \mid i \leqslant 2\}$.*

Свойство 3. *Для любого x либо все три множества $\alpha(3x+i)$, $i \leqslant 2$, бесконечны и равны между собой, либо все они конечны и попарно не включаются друг в друга, либо два из них бесконечны и совпадают, а оставшееся множество конечно и не содержится в этих двух.*

Свойство 4. *Семейство $\mathfrak{A} \rightleftharpoons \{\alpha x \mid x \in N\}$ является дискретным.*

В множество αx элементы перечисляются на шаге 0 и на шагах вида $5t+5$. Свойства 1–3 очевидны из описания предписаний, выполняемых на этих шагах. Свойство 4 сразу следует из свойств 2, 3. Более детальное описание множеств из $\mathfrak{A}$ содержится в свойствах 5–8.

Свойство 5. *Все множества $\alpha(3x+i)$, $i \leqslant 2$, конечные тогда и только тогда, когда множество $\alpha(3x+2)$ конечное.*

Свойство 6. *Если $\alpha(3x+2)$ — бесконечное множество и на число x не ставится ни одна из меток $\boxed{n}$, $n \in N$, то $\lim\limits_t p(x,t)$ не существует и оба множества $\alpha 3x$, $\alpha(3x+1)$ бесконечны.*

Свойство 7. *Если $\alpha(3x+2)$ — бесконечное множество и на число x ставится некоторая метка $\boxed{n}$, $n \in N$, то $\lim\limits_t p(x,t)$ существует, множество $\alpha(3x+j)$ бесконечное, а множество $\alpha(3x+1-j)$ конечное; здесь $j \rightleftharpoons \lim\limits_t p(x,t)$.*

Свойство 8. *Для любых x,t множества $\alpha^t_{3x} \setminus (\alpha^t_{3x+1} \cup \alpha^t_{3x+2})$, $\alpha^t_{3x+1} \setminus (\alpha^t_{3x} \cup \alpha^t_{3x+2})$, $\alpha^t_{3x+2} \setminus (\alpha^t_{3x} \cup \alpha^t_{3x+1})$ двухэлементны. Для всякого x существует t_0 такое, что при $t \geqslant t_0$ эти множества отделяют соответственно множества $\alpha 3x$, $\alpha(3x+1)$ и $\alpha(3x+2)$ друг от друга и от всех остальных множеств семейства $\mathfrak{A}$.*

Свойство 9. *Для любого n функция q_n монотонно не убывающая, причем $\lim\limits_t q_n(t) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\{3x+i \mid i \leqslant 2\} \subseteq W_n$ для всех $x \in \check{L}_n$.*

Свойство 10. *Для любых m,x,t, если $u_m(t) = x$ и $u_m(t+1) \neq x$, то $s(m,x,t+1) = 1$.*

Свойства 5–10 достаточно очевидны.

Для $n,k,t_0 \in N$ и $x \in L_n$ обозначим через $F(k,t_0)$ множество шагов вида $5t+3$ при $5t+3 \geqslant t_0$ и $r(t) = k$, через $S(k,t_0)$ — множество шагов вида $5t+4$ при $5t+4 \geqslant t_0$ и $r(t) = k$, а через $T(n,x,t_0)$ — множество шагов вида $5t+5$ таких, что $5t+5 \geqslant t_0$, $c(n,r(r(t))) = x$ и $l(t) = n$.

Свойство 11. *Для любых n,x таких, что $x \in L_n$, множество $\alpha(3x+2)$ является конечным тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(а) *$x = \lim\limits_t q_m(t)$ хотя бы для одного $m \leqslant n$;*

(б) *существует число $m \leqslant n$ такое, что $\rho f_m \cap \{3x+i \mid i \leqslant 2\} \neq \varnothing$ и $\lim\limits_t s(m,x,t) = 0$;*

(в) *некоторый курсор u_m, $m \leqslant n$, стабилизируется на числе x.*

Пусть $\alpha(3x+2)$ — конечное множество и условия (а), (б) не выполняются. Докажем, что тогда выполняется условие (в). Пусть t_1 — наименьшее число, для которого выполнены следующие условия:

◇ на всех шагах $t \in T(n, x, t_1)$ нарушено хотя бы одно из условий выполнения предписаний шага t;

◇ $\rho f_m \cap \{3x + i \mid i \leqslant 2\} = \rho f_m^{t_1} \cap \{3x + i \mid i \leqslant 2\}$ для всех $m \leqslant n$;

◇ $x \neq q_m(t)$ для каждого $m \leqslant n$ при всех $t \geqslant t_1$;

◇ для всех $m \leqslant n$ таких, что $\rho f_m \cap \{3x + i \mid i \leqslant 2\} \neq \varnothing$, функция $\lambda t s(m, x, t)$ после шага t_1 хотя бы один раз принимает значение 1.

Пусть $m \leqslant n$, $\rho f_m \cap \{3x + i \mid i \leqslant 2\} \neq \varnothing$, и пусть t_2 — наименьшее число, для которого $t_2 > t_1$ и $s(m, x, t_2) = 1$. Заметим, что $s(m, x, t) = 1$ для всех $t \in T(n, x, t_2)$ до тех пор, пока на шаге t не будут выполняться предписания шага t. Поэтому можно считать, что $s(m, x, t_1) = 1$ для всех $m \leqslant n$ таких, что $\rho f_m \cap \{3x + i \mid i \leqslant 2\} \neq \varnothing$.

Итак, на всех шагах $t \in T(n, x, t_1)$ выполнены все (кроме последнего) условия шага t, т.е. существует по крайней мере одно $m_0 \leqslant n$ такое, что $u_{m_0}(t_1 - 1) = x$, $\rho f_{m_0} \cap \{3x + i \mid i \leqslant 2\} = \varnothing$, $\langle m_0, y, x\rangle \in F^{t_1 - 1}$ для некоторого $y \in N$. Остается только заметить, что $u_{m_0}(t) = x$ при всех $t \geqslant t_1$. Курсор u_{m_0} сдвигается только на шагах из $S(m_0, 0)$. Если курсор u_{m_0} впервые будет сдвинут на шаге $t_3 \in S(m_0, t_1)$, то $\langle m_0, y, x\rangle \in F^{t_3 - 1}$, на шаге t_3 будет выполняться случай 1 и $f_k(y)$ примет значение из $\{3x + i \mid i \leqslant 2\}$, что невозможно. Следовательно, начиная с шага t_1, курсор u_{m_0} стабилизируется на числе x.

Достаточность условий (а), (б) для конечности множества $\alpha(3x + 2)$ очевидна. Допустим, что условия (а), (б) не выполняются, но выполняется условие (в). Пусть t_4 — наименьшее число, для которого:

◇ $\rho f_m \cap \{3x + i \mid i \leqslant 2\} = \rho f_m^{t_4} \cap \{3x + i \mid i \leqslant 2\}$ для всех $m \leqslant n$;

◇ $x \neq q_m(t)$ для всех $m \leqslant n$ и $t \geqslant t_4$;

◇ для всех $m \leqslant n$ таких, что $\rho f_m \cap \{3x + i \mid i \leqslant 2\} \neq \varnothing$, функция $\lambda t s(m, x, t)$ после шага t_4 хотя бы один раз принимает значение 1;

◇ курсор u_{m_0} стабилизируется на числе x с шага t_4 для некоторого $m_0 \leqslant n$.

Докажем, что для некоторого $t_5 \in S(m_0, t_4)$ для всех $z \in Z$ выполнено включение $\alpha^{t_5 - 1}_{f_{m_0}(z)} \subseteq \pi^{t_5 - 1}_{m_0}(z)$, где $Z \rightleftharpoons \{z \mid f^{t_4}_{m_0}(z) \in \{3x + i \mid i \leqslant 2\}\}$. Если $Z = \varnothing$, то доказывать нечего. Если $Z \neq \varnothing$, то в силу выбора t_4 найдется $t_5 \in S(m_0, t_4)$ такое, что $s(m_0, x, t_5) = 1$ и, следовательно,

$$\alpha^{t_5 - 1}_{f_{m_0}(z)} \subseteq \pi^{t_5 - 1}_{m_0}(z), \qquad z \in Z.$$

Существуют $y_0 \in N$, $t_6 \in F(m_0, t_5)$ такие, что $\langle m_0, y_0, x\rangle \in F^{t_6}$, иначе на некотором шаге из $S(m_0, t_5)$ выполнялся бы случай 2, что невозможно. Далее, $\langle m_0, y_0, x\rangle \in F^t$ при всех $t \geqslant t_6$, иначе на некотором шаге из $S(m_0, t_6)$ выполнялся бы случай 1, что также невозможно. Следовательно, $u_{m_0}(t) = x$ и $\langle m_0, y_0, x\rangle \in F^t$ при всех $t \in T(n, x, t_6)$. Значит, $\alpha(3x + 2) = \alpha^{t_6}_{3x+2}$.

Свойство 12. *Для любого n совокупность всех $x \in L_n$, для которых множество $\alpha(3x + 2)$ конечно, является конечной.*

Из свойства 10 следует, что если курсор u_m, $m \leqslant n$, не стабилизируется ни на одном числе, то либо $\lim_t s(m,x,t)$ не существует, либо $\lim_t s(m,x,t) = 1$ для всех $x \in L_n$. Отсюда и из свойства 11 вытекает свойство 12.

Свойство 13. *Нумерация α является минимальной.*

Пусть р. п. множество W_n такое, что $[W_n]_{\theta_\alpha} = N$. Покажем, что $\lim_t q_n(t) = \infty$. Допустим, что это не так. Пусть $q_n(t) = q_n(t_0)$ при всех $t \geqslant t_0$ для некоторого t_0 и $x \rightleftharpoons q_n(t_0)$. По свойству 11 множество $\alpha(3x+2)$ конечное, а по свойствам 2, 3, 5 множества $\alpha 3x$, $\alpha(3x+1)$, $\alpha(3x+2)$ имеют в нумерации α в точности по одному номеру. В силу выбора t_0 имеем $\{3x+i \mid i \leqslant 2\} \not\subseteq W_n^t$ при $t \geqslant t_0$, что противоречит условию $[W_n]_{\theta_\alpha} = N$.

Итак, $\lim_t q_n(t) = \infty$. Тогда по свойству 9 $\{3x+i \mid i \leqslant 2, x \in \check{L}_n\} \subseteq W_n$. Кроме того, W_n содержит все α-номера конечных множеств, так как по свойствам 2, 3 каждое конечное множество семейства $\mathfrak{A}$ имеет в точности один α-номер.

Напомним, что множество всех чисел из L_m, на которые ставится метка $\boxed{m}$, является рекурсивным. Пусть R_1^m — множество чисел $x \in L_m$, отмеченных меткой $\boxed{m}$, для которых $\alpha(3x+2)$ бесконечно, а R_2^m — множество чисел $x \in L_m$, не отмеченных меткой $\boxed{m}$ и для которых $\alpha(3x+2)$ бесконечно. Оба множества R_1^m, R_2^m рекурсивны. Для $x \in R_1^m$ имеет место равенство $p(x,t) = \lim_s p(x,s)$, если на шаге t метка $\boxed{m}$ уже стоит на числе x. Следовательно, эквивалентность $\eta \rightleftharpoons (\{\langle 3x+2, 3x+\lim_s p(x,s)\rangle \mid x \in R_1^m, m < n\} \cup \{\langle 3x+2, 3x+i\rangle \mid i \leqslant 1, x \in R_2^m, m < n\})^*$ позитивная. Соотношения $\eta \subseteq \theta_\alpha$ и $[W_n]_\eta = N$ легко следуют из свойств 6, 7. По теореме 1.1 нумерация α является минимальной.

Свойство 14. *Нумерация α не является эффективно минимальной.*

Вследствие замечания 2.1 достаточно показать, что никакая о. р. функция φ_n не годится в качестве функции h в определении 2.1.

Пусть множества R_1^n, R_2^n выбраны как в доказательстве свойства 13. Рассмотрим сначала случай, когда $R_1^n \neq \varnothing$. Пусть x — наименьший элемент из R_1^n, а $j = \lim_t p(x,t)$. По свойству 7 $\lim_t p(x,t)$ существует и $\alpha(3x+2) = \alpha(3x+j)$. Поскольку $W_{g(x)} = N \setminus \{3x+2\}$, имеем $[W_{g(x)}]_{\theta_\alpha} = N$. Пусть метка $\boxed{n}$ поставлена на число x на шаге $T+1$. Тогда $T+1$ — это шаг вида $5t+1$, $l(t) = n$, $j = p(x, T+1)$, $\langle 3x+2, 3x+i\rangle \in \varepsilon^T \varphi_n(g(x))$; здесь $i = 1-j$. По свойству 7 $\alpha(3x+i)$ конечное и, следовательно, $\alpha(3x+2) \neq \alpha(3x+i)$. Таким образом, $\langle 3x+2, 3x+i\rangle \in \varepsilon\varphi_n(g(x)) \setminus \theta_\alpha$.

Пусть теперь $R_1^n = \varnothing$. По свойству 12 множество R_2^n бесконечное. Пусть x — наименьший элемент из R_2^n такой, что $g(x) > n$. По свойству 6 $\alpha(3x+2) = \alpha(3x+1) = \alpha 3x$. Тогда $[W_{g(x)}]_{\theta_\alpha} = N$. Так как метка $\boxed{n}$ на число x не ставится, на всех шагах $5t+1$ при $l(t) = n$ ни одна из пар $\langle 3x+2, 3x\rangle$, $\langle 3x+2, 3x+1\rangle$ не содержится в $\varepsilon^{5t}\varphi_n(g(x))$. Следовательно, если $\varepsilon\varphi_n(g(x)) \subseteq \theta_\alpha$, то смежный класс $[3x+2]_{\varepsilon\varphi_n(g(x))}$ одноэлементен. Но тогда $[W_{g(x)}]_{\varepsilon\varphi_n(g(x))}$ не содержит число $3x+2$.

Итак, в каждом рассмотренном случае о.р. функция φ_n не удовлетворяет определению 2.1. Значит, нумерация α не является эффективно минимальной.

Свойство 15. *Для любых k, y если π_k — нумерация семейства $\mathfrak{A}$ и $y \in \delta f_k$, то $\pi_k(y) = \alpha f_k(y)$.*

Пусть на шаге $t_0 + 1$ значение $f_k(y)$ равно некоторому числу a. Тогда по конструкции $t_0+1 \in S(k,0)$, $\langle k, y, [\frac{a}{3}]\rangle \in F^{t_0}$ и на шаге t_0+1 выполняется случай 1. При этом $\alpha_a^{t_0} \subseteq \pi_k^{t_0}(y)$. Пусть $b \neq c$ — элементы множества $\{3\,[\frac{a}{3}] + i \mid \leqslant 2\} \setminus \{a\}$. По свойству 8 множество $\alpha_a^{t_0} \setminus (\alpha_b^{t_0} \cup \alpha_c^{t_0})$ двухэлементное. Пусть v_0, v_1 $(v_0 < v_1)$ — его элементы. Если в αa после шага t_0 не перечисляется ни одно число, то по свойствам 4, 8 $\alpha a = \pi_k(y)$. Если на некотором шаге $t_1 > t_0$ в αa перечисляются новые элементы, то $\alpha_a^{t_1} \setminus (\alpha_b^{t_1} \cup \alpha_c^{t_1}) = \{v_1, v_2\}$, где $v_2 > v_1$ и $v_2 \notin \alpha_x^{t_1}$ для всех $x \neq a$. Кроме того, $v_1 \notin \alpha_x^{t_1}$ для всех $x \neq a$. Если на всех шагах $t > t_1$ новые элементы не перечисляются в αa, то $v_1 \notin \alpha x$ для всех $x \neq a$ и $v_1 \in \pi_k(y)$. Следовательно, $\alpha a = \pi_k(y)$. Если на некотором шаге $t_2 > t_1$ в αa перечисляются новые элементы, то функция $\lambda t s(k, [\frac{a}{3}], t)$ изменяет свое значение с 0 при $t = t_1$ на значение 1 при $t = t_2 - 1$. Значит, на некотором шаге $t_1' \in S(k, t_1)$ имеет место случай 1 или случай 2. Но тогда $\alpha_a^{t_1'-1} \subseteq \pi_k^{t_1'-1}(y)$. В частности, $v_1 \in \pi_k^{t_2}(y)$, $v_2 \in \pi_k^{t_2}(y)$ и мы оказываемся в ситуации, аналогичной ситуации шага t_1. Ввиду свойства 8 и выбора π_k отсюда следует равенство $\alpha a = \pi_k(y)$.

Свойство 16. *Для любого k если π_k — нумерация семейства $\mathfrak{A}$, то курсор u_k не стабилизируется.*

Пусть t_0 — произвольное число и $x \rightleftharpoons u_k(t_0)$. Достаточно показать, что $u_k(t_1) \neq x$ при некотором $t_1 > t_0$. Пусть $x \in L_n$. Пусть t_2 — наименьшее число из $T(n, x, t_0)$, на котором выполняются все условия шага t_2, если такое t_2 существует, и $t_2 = t_0$ в противном случае. Полагаем $Z \rightleftharpoons \{z \mid f_k^{t_2}(z)\downarrow,\ f_k(z) \in \{3x + i \mid i \leqslant 2\}\}$. По свойству 15 $\alpha_{f_k(z)}^{t_3} \subseteq \pi_k^{t_3}(z)$ для подходящего $t_3 \geqslant t_2$ и всех $z \in Z$.

Если $\langle k, y, x\rangle \notin F^t$ для всех $t \geqslant t_3$ и $y \in N$, то на наименьшем шаге $t_3' \in S(k, t_3)$ выполняется случай 2 и $u_k(t_3') \neq x$.

Пусть теперь t_4 — наименьшее число такое, что $t_4 \geqslant t_3$ и $\langle k, y, x\rangle \in F^{t_4}$ для некоторого $y \in N$. На всех шагах $t \in T(n, x, t_4)$ предписания шага t не будут выполняться до тех пор, пока курсор u_k будет оставаться на числе x, а тройка $\langle k, y, x\rangle$ — в множестве F^t. Пусть $t_5 \in T(n, x, t_4)$ — наименьшее число, для которого в точности для одного из чисел $3x + i$, $i \leqslant 2$, выполняется включение $\alpha_{3x+i}^{t_5-1} \subseteq \pi_k^{t_5-1}(y)$. Выполнимость хотя бы одного из включений $\alpha_{3x+i}^{t_5-1} \subseteq \pi_k^{t_5-1}(y)$, $i \leqslant 2$, очевидна ввиду выбора π_k и шага t_4. Если же таких включений больше одного, то на всех шагах из $S(k, t_5)$ не выполняется ни случай 1, ни случай 2, а на всех шагах из $T(n, x, t_5)$ в $\alpha(3x + 2)$ не перечисляется ни один новый элемент. Тогда по свойствам 3, 5 все множества $\alpha(3x+i)$, $i \leqslant 2$, конечны и попарно различны. Следовательно, в $\pi_k(y)$ содержатся два различных множества из $\mathfrak{A}$, что невозможно. Поэтому на шаге t_5 выполнены все условия случая 1. Таким образом, $u_k(t_5) \neq x$.

Свойство 17. *Для любого k если π_k — нумерация семейства $\mathfrak{A}$, то $y \in \delta f_k$ тогда и только тогда, когда $\pi_k(y) \in \{\alpha(3x+i) \mid i \leqslant 2, x \in \check{L}_k\}$.*

Докажем индукцией по y, что для любого y существует t такое, что $\langle k, y, *\rangle \in F^t$. При этом попутно получим доказательство свойства 17.

По построению $\langle k, 0, *\rangle \in F^0$. Допустим, что $\langle k, y, *\rangle \in F^{t_0}$ для некоторого t_0. Поскольку $\pi_k(y) \in \mathfrak{A}$, для некоторых $x \in N$ и $i_0 \leqslant 2$ выполняется равенство $\pi_k(y) = \alpha(3x+i_0)$. Пусть $x \in L_n$. По конструкции в $\alpha(3x+i_0)$ на шаге 0 перечисляется одно из чисел $14x+1$, $14x+5$, $14x+9$. Пусть t_1 — наименьшее число из $F(k, t_0)$, для которого $u_k(t_1 - 1) = x$ и хотя бы одно из чисел $14x+1, 14x+5, 14x+9$ перечислилось в $\pi_k^{t_1-1}(y)$. Выбор t_1 возможен ввиду свойства 16. По предписаниям шага t_1 и свойству 2 $u_k(t_1) = x$. Если $x \notin \check{L}_k$, то $F^{t_1} = (F^{t_1-1} \setminus \{\langle k, y, *\rangle\}) \cup \{\langle k, y+1, *\rangle\}$. Тогда, очевидно, $y \notin \delta f_k$. Если же $x \in \check{L}_k$, то $\langle k, y, x\rangle \in F^{t_1}$. До тех пор, пока на шагах $t \in T(n, x, t_1)$ будут выполняться условия $\langle k, y, x\rangle \in F^t$ и $u_k(t) = x$, новые элементы в $\alpha(3x+i_0)$ перечисляться не будут, если $\rho f_k^{t_1} \cap \{3x+i \mid i \leqslant 2\} = \varnothing$. Если же $\rho f_k^{t_1} \cap \{3x+i \mid i \leqslant 2\} \neq \varnothing$, то новые элементы в множество $\alpha(3x+i_0)$ могут перечисляться лишь после того, как на некотором шаге из $S(k, t_1)$ будет выполняться случай 1. Поскольку $\alpha^{t_1}_{3x+i_0} \subseteq \pi_k(y)$, найдется шаг $t_2 \in S(k, t_1)$, на котором выполняется случай 1. Тогда $f_k(y) = 3x+i_0, \langle k, y+1, *\rangle \in F^{t_2}$. Остается лишь заметить, что по свойству 15 $\pi_k(y) = \alpha f_k(y)$.

Свойство 18. *Любая вычислимая нумерация семейства $\mathfrak{A}$ сводится к α.*

Пусть β — произвольная вычислимая нумерация семейства $\mathfrak{A}$. Тогда $\beta = \pi_k$ для некоторого k. Пусть $R \rightleftharpoons \{y \mid \pi_k(y) \in \{\alpha(3x+i) \mid i \leqslant 2, x \in \check{L}_k\}\}$. Множество R рекурсивно по свойству 1. По свойству 17 $R = \delta f_k$. По свойству 15 функция f_k сводит на множестве R нумерацию π_k к нумерации α. Остается лишь доопределить функцию f_k так, чтобы сводимость была и на множестве $N \setminus R$. А это легко сделать ввиду следующих соображений: каждое из подсемейств $\mathfrak{A}_m \rightleftharpoons \{\alpha(3x+i) \mid i \leqslant 2,\ x \in L_m\}$ семейства $\mathfrak{A}$ по свойствам 2, 3, 12 является эффективно дискретным, а по свойству 1 подсемейство $\bigcup_{m<k} \mathfrak{A}_m$ также эффективно дискретное.

Утверждение теоремы 3.1 следует теперь из свойств 4, 13, 14, 18.

Следствие 1. *Существует не дискретное семейство р. п. множеств, все вычислимые нумерации которого являются минимальными, но не эффективно минимальными.*

Следствие 2. *Существует семейство р. п. множеств, полурешетка вычислимых нумераций которого нетривиальна и имеет наименьший элемент, порожденный не эффективно минимальными нумерациями.*

Следствие 3. *Существуют семейства р. п. множеств (которые могут быть как дискретными, так и не дискретными), полурешетка вычислимых нумераций которых содержит счетное число минимальных элементов, каждый из которых порожден не эффективно минимальными нумерациями.*

Следствие 4. *Существуют семейства р. п. множеств (как дискретные, так и не дискретные) с одноэлементной полурешеткой вычислимых нумераций, которая порождается не эффективно минимальными нумерациями.*

Следствие 4 есть переформулировка утверждений теоремы 3.1 и следствия 1 в терминах полурешеток вычислимых нумераций. Следствия 1–3 получаются с помощью очень простого приема. Для $A \subseteq N$ через $2A$ и $2A+1$ обозначим соответственно множества $\{2x \mid x \in A\}$ и $\{2x+1 \mid x \in A\}$.

Определение 3.1. *Прямой суммой семейств* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ множеств натуральных чисел называется семейство $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \rightleftharpoons \{2A \mid A \in \mathfrak{A}\} \cup \{2B+1 \mid B \in \mathfrak{B}\}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство, построенное в теореме 3.1, $\mathfrak{B}_1$ — не дискретное семейство р. п. множеств, все вычислимые нумерации которого позитивны, построенное В. Л. Селивановым [18], $\mathfrak{B}_2$ — любое конечное семейство непустых р. п. множеств с нетривиальной полурешеткой вычислимых нумераций, $\mathfrak{B}_3$ — семейство общерекурсивных функций, имеющее счетное число попарно не эквивалентных однозначных нумераций [19, 20]. Легко проверить, что семейства $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}_i$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют соответственно следствиям 1–3.

Теорема 3.2. *Существует дискретное семейство р. п. множеств, все вычислимые нумерации которого являются строго минимальными, но не позитивными.*

Доказательство. Пусть множества L_n, $\check{L}_n$, и последовательности U_n, $n \in N$, определены как в доказательстве теоремы 3.1. Числам из L_n и $\check{L}_n$ соответствуют пары α-номеров $\langle 2x, 2x+1 \rangle$. Будем строить по шагам нумерацию α, позитивную эквивалентность $\eta \subseteq \theta_\alpha$ и ч. р. функции f_k, $k \in N$, «сводящие» нумерации π_k к нумерации α. Будем также строить вспомогательные о. р. функции $q_{\check{n}}(t)$, $u_n(t)$, $s(n, x, t)$ и вспомогательную последовательность множеств троек $\{F^t\}_{t \in N}$, которые являются аналогами соответствующих функций и множеств троек конструкции теоремы 3.1.

Отметим, что множества F^t несколько отличаются от соответствующих множеств конструкции теоремы 3.1, а именно: для любых t, k, y в множестве F^t содержится не более одной тройки, первые две координаты которой есть k и y. Таким образом, троек с фиксированной первой координатой в F^t может быть очень много.

Будем также строить вспомогательную последовательность двухэлементных множеств $\{A^t_x\}_{x,t \in N}$ такую, что для любых x, t множество A^t_x отделяет α^t_x от всех множеств семейства $\{\alpha^t_y \mid y \in N\} \setminus \{\alpha^t_x\}$, иными словами, $A^t_x \subseteq \alpha^t_x$ и $A^t_x \not\subseteq \alpha^t_y$ при $\alpha^t_y \neq \alpha^t_x$. В построении употребляются метки вида $\boxed{n}$, $n \in N$, которые ставятся (но не снимаются) на числа из L_n.

Для $n \geqslant 1$ через L'_n, L''_n обозначим соответственно множества $\{2x \mid l(2x) = n\}$, $\{2x+1 \mid l(2x+1) = n\}$, $L'_0 \rightleftharpoons L_0$, $L''_0 \rightleftharpoons \varnothing$. Ясно,что при $n \geqslant 1$ L'_n, L''_n — бесконечные множества и $L'_n \cap L''_n = \varnothing$, $L'_n \cup L''_n = L_n$. Будем считать, что задана какая-либо ч. р. функция h, удовлетворяющая следующим требованиям:

1) $\delta h = \{\langle n, x \rangle \mid n \in N, x \in L_n\}$,
2) $h(n, x) = x$ для всех $n \in N$, $x \in L'_n$,

3) для любого $n \geqslant 1$ $\{h(n,x) \mid x \in L''_n\} = \bigcup_{m<n} L'_m$,

4) для любого $n \in N$ функция $\lambda x h(n,x) \upharpoonright L_n$ является одно-однозначной.

Предназначение функции h состоит в том, что для любых $n \in N$, $x \in L''_n$ пары чисел $\langle 2x+i, 2h(n,x)+i\rangle$, $i \leqslant 1$, являются потенциальными кандидатами для перечисления в η, причем эти пары могут перечисляться в η только одновременно. Пусть $L_{n,k} \rightleftharpoons \{x \mid x \in L''_n,\ h(n,x) \in L'_k\}$, $n \geqslant 1, k < n$. Ясно, что множества $L_{n,k}$, $k < n$, бесконечны и образуют разбиение множества L''_n.

Конструкция

Шаг 0. Для всех $x, n \in N$ полагаем, что $\alpha^0_{2x} = A^0_{2x} \rightleftharpoons \{5x+1, 5x+2\}$, $\alpha^0_{2x+1} = A^0_{2x+1} \rightleftharpoons \{5x+3, 5x+4\}$, $s(n,x,0) \rightleftharpoons 0$, $q_n(0)$ равно наименьшему элементу из $\check{L}_n$, $f^0_n(x)$ не определено.
Для каждого $n \in N$ устанавливаем курсор u_n на первом элементе последовательности U_n. Полагаем $\eta^0 \rightleftharpoons \{\langle x,x\rangle \mid x \in N\}$, $F^0 \rightleftharpoons \{\langle k,y,*\rangle \mid k,y \in N\}$. Ни одна из меток $\boxed{n}$, $n \in N$, на шаге 0 не стоит ни на одном числе.

Шаг $5t+1$. Пусть $T \rightleftharpoons 5t$, $n \rightleftharpoons l(t)$. Если метка $\boxed{n}$ не стоит ни на одном числе и $\langle 2x, 2x+1\rangle \in \varepsilon^T_n$ для некоторого $x \leqslant T$, $x \in L'_n$, то ставим метку $\boxed{n}$ на наименьшее такое число x.

Шаг $5t+2$. Пусть $T \rightleftharpoons 5t+1$, $n \rightleftharpoons l(t)$, $x \rightleftharpoons q_n(T)$ и $x \in L_m$. Рассмотрим следующие три случая.

Случай 1: $x \in L''_m$, $m > n$. Полагаем $q_n(T+1)$ равным наименьшему числу из $\check{L}_n$, большему, чем $q_n(T)$.

Случай 2: $x \in L'_m$ и $[2x+i]_{\eta^T} \cap W^T_n \neq \varnothing$ для каждого $i \leqslant 1$. Полагаем $q_n(T+1)$ равным наименьшему числу из $\check{L}_n$, большему, чем $q_n(T)$.

Случай 3: $x \in L''_n$, $2x \in W^T_n$, $2x+1 \in W^T_n$. Полагаем $q_n(T+1)$ равным наименьшему числу из $\check{L}_n$, большему, чем $q_n(T)$. Кроме того,

$$\eta^{T+1} \rightleftharpoons (\eta^T \cup \{\langle 2x+i, 2h(n,x)+i\rangle \mid i \leqslant 1\})^*,$$
$$\alpha^{T+1}_z \rightleftharpoons \alpha^T_{2x} \cup \alpha^T_{2h(n,x)} \quad \text{для всех} \quad z \in [2x]_{\eta^{T+1}},$$
$$\alpha^{T+1}_z \rightleftharpoons \alpha^T_{2x+1} \cup \alpha^T_{2h(n,x)+1} \quad \text{для всех} \quad z \in [2x+1]_{\eta^{T+1}}.$$

Шаг $5t+3$. Пусть $T \rightleftharpoons 5t+2$, $k \rightleftharpoons r(t)$, $y \rightleftharpoons l(l(t))$. Если $\langle k,y,*\rangle \in F^T$, а множество $\pi^T_k(y)$ содержит хотя бы одно из множеств A^0_z для некоторого $z \in N$, то выбираем пару $\langle n,x\rangle$, наименьшую в лексикографическом упорядочении пар натуральных чисел и такую, что $x \in L_n$ и выполнено хотя бы одно из включений $A^0_{2x+i} \subseteq \pi^T_k(y)$, $i \leqslant 1$. Полагаем $F^{T+1} \rightleftharpoons (F^T \setminus \{\langle k,y,*\rangle\}) \cup \{\langle k,y,x\rangle\}$, если $x \in L'_n$, $n \geqslant k$, либо $x \in L_{n,m}$, $n > k$, $m \geqslant k$, и $F^{T+1} \rightleftharpoons F^T$ в противном случае.

Шаг $5t+4$. Пусть $T \rightleftharpoons 5t+3$, $k \rightleftharpoons r(t)$, $x \rightleftharpoons u_k(T)$, и пусть для всех $z \in N$ если $f_k^T(z)\downarrow$ и $f_k(z) \in [\{2x+i \mid i \leqslant 1\}]_{\eta^T}$, то $A^T_{f_k(z)} \subseteq \pi_k^T(z)$. Обозначим через Y множество $\{y \mid y \in N, \langle k, y, x\rangle \in F^T\}$ и рассмотрим следующие два случая.

Случай 1: $Y \neq \varnothing$, и для наименьшего $y \in Y$ имеет место в точности одно из включений $A^T_{2x+i} \subseteq \pi_k^T(y)$ для $i \leqslant 1$. Полагаем $f_k(y) \rightleftharpoons 2x+i$, где $i \leqslant 1$, $A^T_{2x+i} \subseteq \pi_k^T(y)$. Полагаем $F^{T+1} \rightleftharpoons F^T \setminus \{\langle k, y, x\rangle\}$. Сдвигаем курсор u_k на элемент последовательности U_k, следующий за $u_k(T)$. Полагаем $s(k, x, T+1) \rightleftharpoons 1$.

Случай 2: $Y = \varnothing$. Сдвигаем курсор u_k на элемент последовательности U_k, следующий за $u_k(T)$. Полагаем $s(k, x, T+1) \rightleftharpoons 1$.

Шаг $5t+5$. Пусть $T \rightleftharpoons 5t+4$, $n \rightleftharpoons l(t)$, $x \rightleftharpoons r(r(t))$. Допустим, что $x \in L'_n$ и выполнены следующие условия: метка $\boxed{n}$ не стоит на числе x; $x \neq q_m(T)$ для всех $m \leqslant n$; $s(m, x, T) = 1$ для каждого $m \leqslant n$ такого, что $\rho f_m^T \cap [\{2x+i \mid i \leqslant 1\}]_{\eta^T} \neq \varnothing$; нет ни одного $m \leqslant n$, для которого $\rho f_m^T \cap [\{2x+i \mid i \leqslant 1\}]_{\eta^T} = \varnothing$, $\langle 2u_m(T), 2x\rangle \in \eta^T$ и $\langle m, y, x\rangle \in F^T$ для некоторого $y \in N$. Тогда выполняем следующие предписания.

Полагаем $s(m, x, T+1) \rightleftharpoons 0$ для всех $m \leqslant n$. Пусть v_0, v_1 — наибольшие элементы множеств α^T_{2x}, α^T_{2x+1} соответственно, а v_2, v_3 — наименьшие, не использованные до шага $T+1$ числа, для которых $v_2 \neq v_3$, $v_2 > v_0$, $v_3 > v_1$. Для всех $z \in [2x]_{\eta^T}$ полагаем $A_z^{T+1} \rightleftharpoons \{v_0, v_2\}$, $\alpha_z^{T+1} \rightleftharpoons (\alpha^T_{2x} \cup \alpha^T_{2x+1} \cup \{v_2\}) \setminus \{v_1\}$, для всех $z \in [2x+1]_{\eta^T}$ полагаем $A_z^{T+1} \rightleftharpoons \{v_1, v_3\}, \alpha_z^{T+1} \rightleftharpoons (\alpha^T_{2x} \cup \alpha^t_{2x+1} \cup \{v_3\}) \setminus \{v_0\}$.

Конструкция описана. Положим $\mathfrak{A} \rightleftharpoons \{\alpha x \mid x \in N\}$. Заметим, что в конструкции использованы идеи теорем 2.4, 3.1. Поэтому ряд свойств аналогичен соответствующим свойствам конструкций этих теорем.

Свойства конструкции

Свойство 1. *Для любых x, y, t_0 если $\langle x, y\rangle \in \eta^{t_0}$, то $\alpha_x^t = \alpha_y^t$ при всех $t \geqslant t_0$. В частности, $\eta \subseteq \theta_\alpha$.*

Свойство 2. *Для любых x, t соотношение $\langle 2x, 2h(l(x), x)\rangle \in \eta^t$ верно тогда и только тогда, когда $\langle 2x+1, 2h(l(x), x)+1\rangle \in \eta^t$.*

Свойство 3. *Для любых x, y, t следующие три утверждения эквивалентны:*

$$\langle 2x, 2y\rangle \in \eta^t;$$

$$\langle 2x, 2h(l(x), x)\rangle \in \eta^t, \quad \langle 2y, 2h(l(y), y)\rangle \in \eta^t, \quad h(l(x), x) = h(l(y), y);$$

$$\langle 2x+1, 2y+1\rangle \in \eta^t.$$

Свойство 4. *Для любых x, y если $\langle x, y\rangle \in \eta$, то $x \equiv y \pmod 2$.*

Свойство 5. *Для любого n функция q_n монотонно не убывающая, причем, если $\lim_t q_n(t)$ конечен, то $\lim_t q_n(t) \notin \bigcup_{m>n} L''_m$.*

Свойство 6. *Для любых m, x, t если $u_m(t) = x$, $u_m(t+1) \neq x$, то $s(m, x, t+1) = 1$.*

Свойства 1–6 очевидны.

Для любых $n, x, t_0 \in N$ обозначим через $T(n, x, t_0)$ множество шагов вида $5t+5$ при $5t+5 \geqslant t_0$, $l(t) = n$, $r(r(t)) = x$, $x \in L'_n$.

Пусть x — фиксированное число. После шага 0 перечисление элементов в множества $\alpha 2x, \alpha(2x+1)$ возможно либо на шагах вида $5t+2$, либо на шагах вида $5t+5$. На шагах вида $5t+2$ происходит «склеивание» множеств с η^{5t+1}-эквивалентными номерами, при этом $\alpha_{2x}^{5t+2} \neq \alpha_{2x+1}^{5t+2}$. По свойствам 1–3 если $[2x]_{\eta^{t_0}}$ более чем одноэлементное множество, то на всех шагах $t \geqslant t_0$ вместо множеств α_{2x}^t и α_{2x+1}^t достаточно рассматривать множества $\alpha_{2h(l(x),x)}^t$ и $\alpha_{2h(l(x),x)+1}^t$, при этом $h(l(x), x) \in L'_{l(h(l(x),x))}$.

Рассмотрим теперь устройство множеств $\alpha 2x$, $\alpha(2x+1)$ при $l(x) = n$ и $x \in L'_n$. Перечисление элементов в эти множества на шагах $T+1$ вида $5t+5$ возможно лишь при $T+1 \in T(n, x, 0)$ и, разумеется, при выполнении условий шага $T+1$. При этом в $\alpha(2x+i)$ перечисляются все элементы из α_{2x+1-i}^T, кроме наибольшего, а также перечисляется неиспользованное ранее число; здесь i — любое из чисел 0, 1. Если это будет происходить бесконечно часто, то множества $\alpha 2x$ и $\alpha(2x+1)$ окажутся одинаковыми. Отметим, что изменение множеств A_z^T для $z \in [\{2x+i \mid i \leqslant 1\}]_{\eta^T}$ может происходить только на шагах $T+1 \in T(n, x, 0)$ при выполнении условий шага $T+1$.

Из вышеизложенного, а также свойств 1–4 легко вывести следующие свойства 7–14.

Свойство 7. *Для любых x, y, n если $x \in L_n$, $y \in L_n$ и $x \neq y$, то $(\alpha 2x \cup \alpha(2x+1)) \cap (\alpha 2y \cup \alpha(2y+1)) = \varnothing$.*

Свойство 8. *Для любых x, t верны соотношения $A_x^t \subseteq \alpha_y^t$ для всех $y \in [x]_{\eta^t}$ и $A_x^t \cap \alpha_z^t = \varnothing$ для всех $z \notin [x]_{\eta^t}$.*

Свойство 9. *Для любых x если смежный класс $[2x]_\eta$ одноэлементен, то $\alpha(2x+i) = \alpha_{2x+i}^0$, $A_{2x+i}^t = A_{2x+i}^0$ для всех $t \in N$, $i \leqslant 1$.*

Свойство 10. *Для любых x если смежный класс $[2x]_\eta$ более чем одноэлементный, то $\alpha(2x+i) = \alpha(2h(l(x), x)+i)$, $i \leqslant 1$, и $h(l(x), x) \in L'_{l(h(l(x),x))}$.*

Свойство 11. *Для любых x, n, t_0 если метка $\boxed{n}$ стоит на шаге t_0 на числе x, то $A_{2x+i}^t = A_{2x+i}^{t_0}$, $\langle 2x, 2x+1\rangle \in \varepsilon_n^{t_0} \setminus \theta_\alpha$ при всех $t \geqslant t_0$, $i \leqslant 1$.*

Свойство 12. *Для любых x, y если $x \equiv y \pmod 2$ и $\langle x, y\rangle \notin \eta$, то $\alpha x \cap \alpha y = \varnothing$.*

Свойство 13. *Для любых n, x, t_0 если $x \in L'_n$ и условия шага t не выполняются для всех $t \in T(n, x, t_0)$, то $\alpha 2x \neq \alpha(2x+1)$, $A^t_{2x+i} = A^{t_0}_{2x+i}$ при всех $i \leqslant 1$, $t \geqslant t_0$.*

Свойство 14. *Для любых n, x если $x \in L'_n$ и для бесконечно многих $t \in T(n, x, 0)$ выполняются условия шага t, то $\alpha 2x = \alpha(2x+1)$ и $A^0_{2x} \not\subseteq \alpha y$ для всех $y \in N \setminus [\{2x+i \mid i \leqslant 1\}]_\eta$.*

Свойство 15. *Семейство $\mathfrak{A}$ является дискретным.*

Свойство 15 является следствием свойств 1, 4, 7–10, 13, 14.

Свойство 16. *Для любых $a, b \in N$ равенство $\alpha a = \alpha b$ верно тогда и только тогда, когда либо $\langle a, b\rangle \in \eta$, либо $a \not\equiv b \,(\mathrm{mod}\ 2)$ (пусть для определенности a — четное число, b — нечетное число) и существуют x, n такие, что $x \in L'_n$, $\langle a, 2x\rangle \in \eta$, $\langle b, 2x+1\rangle \in \eta$ и для бесконечно многих $t \in T(n, x, 0)$ выполняются условия шага t.*

Свойство 16 является следствием свойств 1, 4, 7–10, 12–14.

Свойство 17. *Для любого n если $[W_n]_{\theta_\alpha} = N$, то $\lim\limits_t q_n(t) = \infty$.*

Пусть $[W_n]_{\theta_\alpha} = N$. Допустим, что для некоторых t_0, x справедливо равенство $q_n(t) = x$ при всех $t \geqslant t_0$. Пусть $x \in L_m$. Тогда $m \geqslant n$, а по свойству 5 либо $x \in L''_n$, либо $x \in L'_m$.

Если $x \in L''_n$, то в силу выбора t_0, x условие $2x + i_0 \notin W_n$ выполняется хотя бы для одного $i_0 \leqslant 1$. Тогда смежные классы $[2x]_\eta$, $[2x+1]_\eta$ одноэлементны и по свойствам 7–9 множество $\alpha(2x + i_0)$ имеет в нумерации α единственный номер $2x + i_0$. Тогда $2x + i_0 \notin [W_n]_{\theta_\alpha}$, что невозможно.

Если $x \in L'_m$, то в силу выбора t_0, x на всех шагах $t \in T(n, x, t_0)$ не выполняются условия шага t. Тогда $\alpha 2x \neq \alpha(2x+1)$ по свойству 13. По свойствам 1, 16 $[2x]_{\theta_\alpha} = [2x]_\eta, [2x+1]_{\theta_\alpha} = [2x+1]_\eta$. Следовательно, хотя бы для одного $i_0 \leqslant 1$ имеем $[2x+i_0]_{\theta_\alpha} \cap W_n = \varnothing$, что противоречит выбору W_n.

Свойство 18. *Для любого k если $[W_k]_{\theta_\alpha} = N$, то $[W_k]_\eta = N$.*

Пусть $[W_k]_{\theta_\alpha} = N$ и $2y$ — произвольное четное число. Докажем, что $[2y]_\eta \cap W_k \neq \varnothing$. Если $[2y]_\eta$ — одноэлементное множество, то $\alpha 2y \neq \alpha z$ для всех $z \neq 2y$. Следовательно, $2y \in W_k$.

Будем считать, что $[2y]_\eta$ более чем одноэлементное множество. Пусть $y \in L_m$, $x \rightleftharpoons h(m, y)$, $n \rightleftharpoons l(x)$. Напомним, что в силу требований 2, 3 на функцию h имеем $x \in L'_n$. По свойству 3 $\langle 2y, 2x\rangle \in \eta$. Если $n \geqslant k$, то из свойства 17 вытекает, что $[2x]_\eta \cap W_k \neq \varnothing$. Следовательно, $[2y]_\eta \cap W_k \neq \varnothing$. Пусть $n < k$. Ввиду требований 3, 4 на функцию h имеем $x = h(k, v)$ для единственного $v \in L''_k$. Из свойства 17 следует, что $2v \in W_k$ и $\langle 2x, 2v\rangle \in \eta$. Значит, $[2y]_\eta \cap W_k \neq \varnothing$.

Итак, $[2y]_\eta \cap W_k \neq \varnothing$ для любого $y \in N$. Аналогично доказывается, что $[2y+1]_\eta \cap W_k \neq \varnothing$ для любого $y \in N$. Следовательно, $[W_k]_\eta = N$.

Свойство 19. *Для любых n, x таких, что $x \in L'_n$ и метка $\boxed{n}$ не ставится на число x, соотношение $\alpha 2x \neq \alpha(2x+1)$ верно тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(а) $x = \lim_t q_m(t)$ *для некоторого* $m \leqslant n$;

(б) $\lim_t s(m,x,t) = 0$ *для некоторого* $m \leqslant n$ *такого, что* $\rho f_m \cap [\{2x+i \mid i \leqslant 1\}]_\eta \neq \varnothing$;

(в) *некоторый курсор* u_m, $m \leqslant n$, *стабилизируется на числе* y *таком, что* $\langle 2x, 2y\rangle \in \eta$.

Доказательство получается очевидным преобразованием доказательства свойства 11 конструкции теоремы 3.1 с учетом свойств 13, 14.

Свойство 20. *Нумерация* α *не является позитивной.*

Пусть n — произвольное число. Если метка $\boxed{n}$ в ходе конструкции ставится на некоторое число x, то по свойству 11 имеем $\alpha 2x \neq \alpha(2x+1)$ и $\langle 2x, 2x+1\rangle \in \varepsilon n$. Значит $\langle 2x, 2x+1\rangle \in \varepsilon n \setminus \theta_\alpha$.

Допустим теперь, что метка $\boxed{n}$ ни разу не ставится ни на одно число из L'_n. Тогда $\langle 2x, 2x+1\rangle \notin \varepsilon n$ для всех $x \in L'_n$. Пусть X_1 — множество чисел, являющихся пределами тех функций q_m, $m \leqslant n$, для которых этот предел существует. Пусть M — множество чисел m таких, что $m \leqslant n$ и курсор u_m стабилизируется на некотором числе.

Полагаем

$$X_2 \rightleftharpoons \{x \mid x \in L_n, [\{2x+i \mid i \leqslant 1\}]_\eta \cap (\bigcup_{m\in M} \rho u_m) \neq \varnothing\}.$$

Очевидно, что X_1, X_2 — конечные множества. Пусть x — наименьшее число из $L'_n \setminus (X_1 \cup X_2)$. Тогда из свойств 6, 19 следует равенство $\alpha 2x = \alpha(2x+1)$. Значит, $\langle 2x, 2x+1\rangle \in \theta_\alpha \setminus \varepsilon n$.

Таким образом, $\theta_\alpha \neq \varepsilon n$ для любого n. Следовательно, нумерация α не является позитивной.

Свойство 21. *Для любых* k, y *если* π_k *— нумерация семейства* $\mathfrak{A}$ *и* $y \in \delta f_k$, *то* $\pi_k(y) = \alpha f_k(y)$.

Свойство 22. *Для любого* k *если* π_k *— нумерация семейства* $\mathfrak{A}$, *то курсор* u_k *не стабилизируется ни на одном числе.*

Для $k \in N$ обозначим через $\tilde{L}(k)$ множество

$$\Big(\bigcup_{n\geqslant k} L'_n\Big) \cup \Big(\bigcup_{n>k}\bigcup_{m\geqslant k} L_{n,m}\Big).$$

Свойство 23. *Для любых* k, y *если* π_k *— нумерация семейства* $\mathfrak{A}$, *то* $y \in \delta f_k$ *тогда и только тогда, когда* $\pi_k(y) \in \{\alpha(2x+i) \mid i \leqslant 1, x \in \tilde{L}(k)\}$.

Доказательство свойств 21–23 аналогично доказательству свойств 15–17 конструкции теоремы 3.1.

Свойство 24. *Всякая вычислимая нумерация семейства* $\mathfrak{A}$ *сводится к нумерации* α.

Пусть π_k — произвольная нумерация семейства $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B} \rightleftharpoons \mathfrak{A} \setminus \{\alpha(2x+i) \mid i \leqslant 1, x \in \tilde{L}(k)\}$. Заметим, что для любого y соотношение $\pi_k(y) \in \mathfrak{B}$ верно тогда и только тогда, когда $\pi_k(y)$ содержит хотя бы одно из множеств

A^0_{2x}, A^0_{2x+1}, где $x \in N \setminus \tilde{L}(k)$. Учитывая свойства 7, 8, 23 и то, что множество $\tilde{L}(k)$ рекурсивно и состоит из целых смежных классов эквивалентности θ_α, получим рекурсивность области определения функции f_k.

Пусть t_0 — наименьшее число такое, что для всех $m < k$, $x \in L'_m$ множество шагов $t \in T(m, x, t_0)$, на которых выполняются условия шага t, является либо пустым, либо бесконечным. Существование t_0 следует из свойств 11, 19. В силу выбора t_0 и свойств 1, 4, 7–13 семейство конечных множеств $\{A^{t_0}_{2x+i} \mid i \leqslant 1, x \in N \setminus \tilde{L}(k)\}$ является отделяющим для множеств семейства $\mathfrak{B}$.

По свойству 21 функция f_k на множестве π_k-номеров δf_k сводит нумерацию π_k к нумерации α. Пользуясь построенным семейством конечных множеств, эту сводимость легко продолжить и на множество $N \setminus \delta f_k$. Таким образом, нумерация π_k сводима к нумерации α.

Утверждение теоремы 3.2 следует из свойств 1, 15, 18, 20, 24.

Следствие 1. *Существует не дискретное семейство р. п. множеств, все вычислимые нумерации которого являются строго минимальными, но не позитивными.*

Следствие 2. *Существуют семейства р. п. множеств с нетривиальной полурешеткой вычислимых нумераций, имеющие наименьшие нумерации, которые являются строго минимальными, но не позитивными.*

Следствие 3. *Существуют семейства р. п. множеств (как дискретные, так и не дискретные), полурешетка вычислимых нумераций которых содержит счетное число минимальных элементов, порожденных строго минимальными, не позитивными нумерациями.*

Следствие 4. *Существуют семейства р. п. множеств (как дискретные, так и не дискретные) с одноэлементной полурешеткой вычислимых нумераций, порожденной строго минимальной, не позитивной нумерацией.*

Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство, построенное в теореме 3.2, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ — семейства из доказательства следствий теоремы 3.1. Тогда семейства $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}_3$ удовлетворяют утверждениям следствий 1, 2, 3.

Следствие 5. *Семейство $\mathfrak{F}$ всех р. п. множеств имеет с точностью до эквивалентности счетное число минимальных, но не эффективно минимальных нумераций и счетное число строго минимальных, но не позитивных нумераций.*

Если $\mathfrak{A}$ — семейство р. п. множеств, построенное в теореме 3.1 или в теореме 3.2, то несложно показать, что семейство $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{A}$ является вычислимым и содержит наибольшее по включению множество N. Тогда $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{A}$ имеет с точностью до эквивалентности счетное число вычислимых позитивных нумераций $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ [21]. Пусть $\mathfrak{A}$ и α — семейство и нумерация, построенные в теореме 3.1 (в теореме 3.2). Тогда, очевидно, нумерации $\alpha \oplus \beta_0$, $\alpha \oplus \beta_1$, $\alpha \oplus \beta_2, \ldots$ попарно не эквивалентны и являются строго минимальными, но не позитивными (соответственно минимальными, но не эффективно минимальными).

Вопрос 3. Существуют ли (дискретные) семейства р. п. множеств, все вычислимые нумерации которых являются эффективно минимальными, но не строго минимальными?

Заключение

Введенные понятия эффективно минимальных и строго минимальных нумераций, а также полученные критерии позволили несколько прояснить некоторые вопросы, связанные с минимальными нумерациями, и в то же время породили массу новых вопросов. Например, проблемы, поставленные в статьях [10–13], а также проблемы 2, 38–41, 97 из [22] естественно возникают и для эффективно минимальных и строго минимальных нумераций. Представляют также интерес структурные критерии существования минимальных нумераций семейств р. п. множеств.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
2. **Хуторецкий А. Б.** Две теоремы существования для вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, № 4. С. 483–492.
3. **Марченков С. С.** О минимальных нумерациях систем рекурсивно перечислимых множеств // Докл. АН СССР. 1971. Т. 198, № 3. С. 530–532.
4. **Бадаев С. А.** О минимальных нумерациях // 9-я Всесоюз. конф. по мат. логике. Ленинград, 27–29 сент. 1988 г.: Тез. докл. Л.: Наука, 1988. С. 10.
5. **Бадаев С. А.** О минимальных нумерациях дискретных семейств // Международная конф. по алгебре, посвященная памяти А. И. Мальцева. Новосибирск, 21–29 авг. 1989 г.: Тез. докл. по теории моделей и алгебраических систем. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. С. 7.
6. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
7. **Вьюгин В. В.** О некоторых примерах верхних полурешеток вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 5. С. 512–529.
8. **Марченков С. С.** О существовании семейств без позитивных нумераций // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 4. С. 597–604.
9. **Мальцев А. И.** Позитивные и негативные нумерации // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 2. С. 278–280.
10. **Гончаров С. С.** Однозначные нумерации // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 5. С. 7–55.
11. **Гончаров С. С.** Предельно эквивалентные конструктивизации // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1982. Т. 2. С. 4–12.
12. **Гончаров С. С.** Позитивные нумерации семейств с однозначными нумерациями // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5. С. 481–488.
13. **Гончаров С. С.** Семейства с единственной однозначной, но не наименьшей нумерацией // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1988. Т. 8. С. 42–58.
14. **Ершов Ю. Л.** О вычислимых нумерациях // Алгебра и логика. 1968. Т. 7, № 5. С. 71–99.
15. **Хуторецкий А. Б.** О неглавных нумерациях // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, № 6. С. 726–732.
16. **Вьюгин В. В.** О дискретных классах рекурсивно перечислимых множеств // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 3. С. 243–256.
17. **Селиванов В. Л.** О нумерациях канонически вычислимых семейств конечных множеств // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 6. С. 1373–1380.
18. **Селиванов В. Л.** Две теоремы о вычислимых нумерациях // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 4. С. 470–484.
19. **Ершов Ю. Л.** Нумерации семейств общерекурсивных функций // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 5. С. 1015–1025.
20. **Бадаев С. А.** О вычислимых нумерациях семейств общерекурсивных функций // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 2. С. 129–148.
21. **Бадаев С. А.** О позитивных нумерациях // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 3. С. 483–496.
22. **Логическая** тетрадь. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1986.