АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ И СВОДИМОСТИ КОНСТРУКТИВИЗАЦИЙ В УНИВЕРСАЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ

О. В. Кудинов

Рассматривается проблема алгебраической зависимости для различных типов конструктивизаций полей. Исследуется алгоритмическая сложность отношений, связанных с понятием алгебраической зависимости, на алгебраически замкнутом поле счетной степени трансцендентности (т.е. универсальной области). Предлагается некоторая классификация, из которой выводится ряд результатов о сводимостях конструктивизаций таких полей.

Определение и основные свойства конструктивизаций можно найти в статье [1]; там же для любой универсальной области F построена ее стандартная конструктивизация ν, относительно которой разрешима проблема алгебраической зависимости кортежей элементов из F. В [1] доказано, что авторазмерность поля F бесконечна.

Понятие автосводимости конструктивизаций, а также определения алгебраической сводимости и проблемной сводимости, соответствующих эквивалентностей и размерностей приведены в книге [2]. ***Устойчивыми множествами кортежей модели*** $\mathfrak{M}$ называются множества, инвариантные относительно ее автоморфизмов. Конструктивизация α алгебраически (проблемно) сводится к конструктивизации β тогда и только тогда, когда для любого устойчивого отношения S на $\mathfrak{M}$ (множества $S \subseteq \bigcup_{k>0} |\mathfrak{M}|^k$) рекурсивность $\beta^{-1}(S)$ влечет рекурсивность $\alpha^{-1}(S)$, что записывается в виде $\alpha \leqslant_{\mathrm{alg}} \beta$ ($\alpha \leqslant_{\mathrm{pr}} \beta$). В [2] поставлена следующая задача: исследовать указанные сводимости, их связи и соответствующие им размерности на примерах «естественных», а не искусственно построенных моделей.

Для установления качественных результатов об этих сводимостях конструктивизаций произвольной универсальной области достаточно выяснить алгоритмическую природу следующих множеств:

$$AD_n(F,\nu) = \{\langle m_1,\ldots,m_n\rangle \in \omega^n \mid \text{элементы } \nu(m_1),\ldots,\nu(m_n) \text{ алгебраически зависимы над } P\},$$

$$AD(F,\nu) = \textstyle\bigcup_{n>0} AD_n(F,\nu),$$

где P — простое подполе поля F. В неявном виде для $n = 1$ это делалось в книге [3], где фактически описана сложность множества $AD_1(F,\nu)$. Очевидно, что $AD_n(F,\nu)$ рекурсивно перечислимо и

$$AD_n(F,\nu) \leqslant_T AD_{n+1}(F,\nu) \text{ для всякого } n > 0.$$

В дальнейшем через $\overline{L}$ обозначаем алгебраическое замыкание, а через $[L]_{\mathrm{s}}$ — сепарабельное замыкание поля L.

Основной результат данной работы представлен в следующей теореме.

Теорема. *Пусть F — универсальная область и $S = \{A_i\}_{i>0}$ — вычислимое семейство рекурсивно перечислимых множеств натуральных чисел, $A = \bigoplus_{i>0} A_i$. Тогда у поля F существует конструктивизация α такая, что*

$$AD_n(F,\alpha) \equiv_T \bigoplus_{i=1}^{n} A_i, \quad AD(F,\alpha) \equiv_T A$$

для всех $n > 0$.

В качестве поля k рассмотрим P в случае нулевой характеристики F и $\overline{P}$ в случае положительной характеристики F. Возьмем счетный набор переменных $(x_i)_{i\in\omega}$ и определим поле $K \leftrightharpoons [\mathrm{k}(x_0,\ldots,x_n,\ldots)]_{\mathrm{s}}$.

Предложение. *В условиях теоремы у поля K существует конструктивизация μ такая, что для всех $n > 0$*

$$AD_n(K,\mu) \equiv_T \bigoplus_{i=1}^{n} A_i, \quad AD(K,\mu) \equiv_T A.$$

Нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть $f(x,t,y)$ — неприводимый над полем L сепарабельный по y многочлен. Тогда, начиная с некоторого натурального r, для всех $\alpha \geqslant r$, $c \in L^*$ многочлен $f(x, cx^\alpha, y)$ сепарабелен по y и неприводим.*

Доказательство. Сначала разложим f над полем $\overline{L}$ на абсолютно неприводимые множители $f = \prod_{j=1}^{m} g_j(x,t,y)$. Используя лемму [1, с. 343], найдем число $r > 0$ такое, что для всех $\alpha \geqslant r$ и $c \in L^*$ многочлены $g_j(x, cx^\alpha, y)$ абсолютно неприводимы. Ввиду [4, гл. 9, лемма 3.2, замечание] получим утверждение леммы 1.

Пусть k — бесконечное поле, $\bar a = (a_1,\ldots,a_m)$ — набор независимых переменных, $L = \mathrm{k}(\bar a)$ — поле рациональных функций от них. Для положительного целого $n < m$ полагаем $\tilde a \leftrightharpoons (a_1,\ldots,a_n)$, $\hat a \leftrightharpoons (a_1,\ldots,a_{m-1})$.

Лемма 2. *Пусть $P(\bar a, y)$ — неприводимый сепарабельный по y многочлен над k; $T_1,\ldots,T_r$ — элементы из $(L(y))^n$ и $h_1,\ldots,h_s$ — многочлены из $L[y]$ такие, что для всякого элемента $u \in \overline{L}$, удовлетворяющего условию $P(\bar a, u) = 0$, все $T_i(\bar a, u)$ являются алгебраически независимыми над k n-ками для $i = 1,\ldots,r$ и $h_j(\bar a, u) \neq 0$ для $j = 1,\ldots,s$.*

Тогда в поле $\mathrm{k}(\tilde a)$ найдется элемент v такой, что многочлен $P(\hat a, v, y)$ неприводим над k и сепарабелен по y; кроме того, для любого $\mathrm{k}(\hat a)$-гомоморфизма $\varphi\colon L[u] \to \overline{L}$, удовлетворяющего условию $\varphi(a_m) = v$, всякая n-ка $T_i^! = \varphi(T_i) \leftrightharpoons T_i(\hat a, v, \varphi(u))$ алгебраически независима над k для $i = 1,\ldots,r$ и $\varphi(h_j) \neq 0$ для $j = 1,\ldots,s$, где $u \in \overline{L}$, $P(\bar a, u) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную n-ку

$$T_i(u) = \langle f_1^{(i)}(\bar a, u), \ldots, f_n^{(i)}(\bar a, u)\rangle$$

элементов из $L(u)$ при фиксированном $u \in \overline{L}$, $P(\bar a, u) = 0$. Предположим, что для любых (не всех равных нулю одновременно) целых чисел $d_0,\ldots,d_n$ найдутся натуральные числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ такие, что $d_0 + \alpha_1 d_1 + \ldots + \alpha_n d_n \neq$

0, и элемент $a_m \cdot a_1^{-\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{-\alpha_n}$ алгебраически зависит от $T_i(u)$. Тогда множество

$$B_i = \{\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle \in \omega^n \mid a_m \cdot a_1^{-\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{-\alpha_n} \text{ алгебраически зависит от } T_i(\bar{a}, u) \text{ над k}\}$$

не включается ни в одно аффинное линейное многообразие $M \subset \mathbb{Q}^n$. Иначе говоря, найдутся такие n-ки $\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_n$ из B_i, где $\bar{b}_j = \langle \alpha_1^j, \ldots, \alpha_n^j \rangle$, что уже $\{\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_n\}$ не содержится ни в одном таком M. Это означает, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1^0 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_n^0 \\ 1 & \alpha_1^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_n^1 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 1 & \alpha_1^n & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

невырождена. Известно, что с помощью элементарных преобразований над строками можно привести матрицу A к невырожденной диагональной матрице $\mathrm{diag}(\delta_0, \ldots, \delta_n)$. Каждой матрице

$$A' \in M_{n+1}(\mathbb{Q}) \qquad [A' = (\alpha_i^j)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}]$$

биективно соответствует система элементов $\overline{L}$ вида $c_j = a_m^{\alpha_0^j} \cdot a_1^{-\alpha_1^j} \cdot \ldots \cdot a_n^{-\alpha_n^j}$, где $j = 0, \ldots, n$. Элементарному преобразованию вида «к j-й строке прибавить ℓ-ю строку, умноженную на b» соответствует преобразование, при котором j-й элемент системы умножается на ℓ-й элемент в степени b. Аналогичное соответствие имеет место при умножении на скаляр. Следовательно, все элементы $a_m^{\delta_0}, a_1^{\delta_1}, \ldots, a_n^{\delta_n}$ алгебраически зависят от $T_i(\bar{a}, u)$ над k, что невозможно, так как $\delta_j \neq 0$ для $j = 0, \ldots, n$; противоречие. Поэтому найдутся целые (не все равные нулю) числа $d_0^{(i)}, \ldots, d_n^{(i)}$ такие, что для всех $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, удовлетворяющих условию $d_0^{(i)} + \alpha_1 d_1^{(i)} + \ldots + \alpha_n d_n^{(i)} \neq 0$, выполнено соотношение $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle \notin B_i$. Если числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ фиксированы, то по лемме о замене [5] для поля $\mathrm{k}(\bar{a}, u)$ можно выбрать базис трансцендентности над k:

$$f_1^{(i)}(\bar{a}, u), \ldots, f_n^{(i)}(\bar{a}, u), \quad a_m \cdot a_1^{-\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{-\alpha_n}, \quad a_{i_1}, \ldots, a_{i_{m-n-1}},$$

где $1 \leqslant i_s \leqslant m$, $i_s \leqslant i_{s+1}$. Пусть

$$\{j_1, \ldots, j_n\} \rightleftharpoons \{1, \ldots, m\} - \{i_1, \ldots, i_{m-n-1}\}.$$

Рассмотрим поле $\mathrm{k}(\hat{a}, t)$, где элемент t алгебраически независим над $\mathrm{k}(\hat{a})$, $z \rightleftharpoons t \cdot a_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\alpha_n}$ и найдем элемент $\hat{u} \in \overline{\mathrm{k}(\hat{a}, t)}$ такой, что $P(\hat{a}, z, \hat{u}) = 0$. Возможны два случая.

Случай 1: $i_{m-n-1} \neq m$. Система

$$f_1^{(i)}(\hat{a}, z, \hat{u}), \ldots, f_n^{(i)}(\hat{a}, z, \hat{u}), \; a_{i_1}, \ldots, a_{i_{m-n-1}}, \; t$$

является базисом трансцендентности поля $\mathrm{k}(\hat{a}, t, \hat{u})$ над k.

Случай 2: $i_{m-n-1} = m$. Система

$$f_1^{(i)}(\hat{a}, z, \hat{u}), \ldots, f_n^{(i)}(\hat{a}, z, \hat{u}),\ a_{i_1}, \ldots, a_{i_{m-n-2}},\ a_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\alpha_n},\ t$$

является базисом трансцендентности поля $\mathrm{k}(\hat{a}, t, \hat{u})$ над k.

Поясним лишь первый случай, так как второй рассматривается аналогично. В случае 1 для $k = 1, \ldots, n$ найдутся неприводимые полиномы P_k такие, что

$$P_k\left(f_1^{(i)}(\hat{a}, z, \hat{u}), \ldots, f_n^{(i)}(\hat{a}, z, \hat{u}),\ a_{i_1}, \ldots, a_{i_{m-n-1}},\ t,\ a_{j_k}\right) = 0$$

есть нетривиальная алгебраическая зависимость a_{j_k} от выбранного базиса. Тогда

$$D_0(\mathrm{k}(\hat{a})) \cup T_{\text{полей}} \cup \{P(\hat{a}, z, \hat{u}) = 0\} \cup \{R(\hat{a}, t) \neq 0 \mid R \in \mathrm{k}[\hat{a}, y] - \{0\}\} \vdash \bigwedge_{k=1}^{n} P_k(T_i(\hat{a}, z, \hat{u}),\ a_{i_1}, \ldots, a_{i_{m-n-1}},\ t,\ a_{j_k}) = 0,$$

где через $D_0(\mathfrak{M})$ обозначена бескванторная диаграмма соответствующей модели $\mathfrak{M}$.

По теореме компактности существует конечный набор $R_1^{(i)}, \ldots, R_{\ell_i}^{(i)} \in \mathrm{k}[\hat{a}, y] - \{0\}$ такой, что

$$D_0(\mathrm{k}(\hat{a})) \cup T_{\text{полей}} \cup \{R_j^{(i)}(\hat{a}, t) \neq 0 \mid j = 1, \ldots, \ell_i\} \vdash (P(\hat{a}, z, \hat{u}) = 0 \to \bigwedge_{k=1}^{n} P_k(T_i(\hat{a}, z, \hat{u}), a_{i_1}, \ldots, a_{i_{m-n-1}}, t, a_{j_k}) = 0),$$

где вместо z поставлено выражение $t \cdot a_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\alpha_n}$. Заметим, что если $c \in k^*$, $R_j^{(i)}(\hat{a}, c) \neq 0$ при $j = 1, \ldots, \ell_i$, то для $v = c \cdot a_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\alpha_n}$ элементы a_{j_k} $(k = 1, \ldots, n)$ алгебраически зависят от $T_i(\hat{a}, v, \tilde{u})$, $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{m-n-1}}$, где $P(\hat{a}, v, \tilde{u}) = 0$, т.е. ранг трансцендентности последней системы равен $m - 1$, элементы $f_1^{(i)}(\hat{a}, v, \tilde{u}), \ldots, f_n^{(i)}(\hat{a}, v, \tilde{u})$ алгебраически независимы над k. Рассмотрение отдельной n-ки закончено.

Пользуясь леммой 1, можно выбрать набор чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ так, что $d_0^{(i)} + \alpha_1 d_1^{(i)} + \ldots + \alpha_n d_n^{(i)} \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$ и многочлен $P(\hat{a}, v, y)$ неприводим для всех $c \in \mathrm{k}^*$, а затем провести все рассуждения для этого набора. Поскольку k бесконечно, можно найти элемент $c \in \mathrm{k}^*$, для которого $R_j^{(i)}(\hat{a}, c) \neq 0$ при всех $i = 1, \ldots, r$; $j = 1, \ldots, \ell_i$ и $h_k(\hat{a}, v, \tilde{u}) \neq 0$ для всякого $\tilde{u}$, $P(\hat{a}, v, \tilde{u}) = 0$. Элемент $v = c \cdot a_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\alpha_n}$ искомый. Лемма 2 доказана.

Доказательство предложения. Пусть c, ℓ, r — стандартные канторовские нумерующие функции, $A' = \{c(n-1, m) \mid m \in A_n\}$ — рекурсивно перечислимое множество и g — частично рекурсивная функция, перечисляющая A' и такая, что множество $\mathrm{dom}(g)$ рекурсивно.

Пусть $K' \leftrightharpoons [\mathrm{k}(a_0, \ldots, a_m, \ldots, b_0, b_1, \ldots)]_{\mathrm{s}} \simeq K$ и ν — естественная конструктивизация этого поля. Будем по шагам строить частичные нумерации μ^s поля K' с конечными областями определения $\mathcal{D}_s$ такими, что $\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_{s+1} \cap \{0, \ldots, s\}$, и элементы v_s поля $\mathrm{k}[a_0, \ldots, a_{\ell(g(s))-1}]$.

Шаг -1. Полагаем $\mathcal{D}_{-1} \leftrightharpoons \varnothing$, $\mu^{-1} \leftrightharpoons \varnothing$, элемент v_{-1} не определен.

Шаг $s+1$. Пусть уже построены v_s, μ^s, $\mathcal{D}_s = \{n_0, \ldots, n_{\ell_s}\}$. Полагаем $y_j \leftrightharpoons \mu^s(n_j)$, $z \leftrightharpoons \nu(s+1)$ для $j = 0, \ldots, \ell_s$. Если $z = b_{g(j)}$ для какого-то $j \leqslant s$, то $z' \leftrightharpoons v_j$, иначе полагаем $z' \leftrightharpoons z$. Обозначим

$$\bar{b}^s = \{a_j \mid j \in \omega\} \cup \{b_j \mid j \in \omega\} - \{b_{g(j)} \mid j \leqslant s \text{ и } g(j)\downarrow\}.$$

Если $z' \notin [\mathrm{k}(\bar{b}^s)]_{\mathrm{s}}$, то $\mathcal{D}_{s+1} \leftrightharpoons \mathcal{D}_s$, $\ell_{s+1} \leftrightharpoons \ell_s$, значение $\mu^{s+1}(s+1)$ не определено и $\mu^{s+1} \equiv \mu^s$ на $\mathcal{D}_s$; в противном случае

$$\mathcal{D}_{s+1} \leftrightharpoons \mathcal{D}_s \cup \{s+1\}, \quad \ell_{s+1} \leftrightharpoons \ell_s + 1, \quad n_{\ell_{s+1}} \leftrightharpoons s+1, \quad y_{\ell_{s+1}} \leftrightharpoons z'.$$

Если значение $g(s+1)$ не определено, то $\mu^{s+1} \equiv \mu^s$ на $\mathcal{D}_s$ и $\mu^{s+1}(s+1) \leftrightharpoons z'$ при $s+1 \in \mathcal{D}_{s+1}$, иначе находим элемент $u \in [\mathrm{k}(\bar{b}^s)]_{\mathrm{s}}$ такой, что $\mathrm{k}(\bar{b}^s, u) = \mathrm{k}(\bar{b}^s, y_0, \ldots, y_{\ell_{s+1}})$, затем находим неприводимый над k многочлен $P_{s+1}(\bar{b}^s, y)$ такой, что $P_{s+1}(\bar{b}^s, u) = 0$, и функции $f_j \in \mathrm{k}(\bar{b}^s)[y]$ такие, что $y_j = f_j(\bar{b}^s, u)$ при $j = 0, \ldots, \ell_{s+1}$. Чтобы применить лемму 2 для $n = \ell(g(s+1))$ в случае $n > 0$, строим n-ки T_i для $i = 1, \ldots, r_s$ следующим образом: если n-ка $\langle f_{j_1}(\bar{b}^s, u), \ldots, f_{j_n}(\bar{b}^s, u)\rangle$ алгебраически независима над k, то помещаем ее среди T_i, если $m < n$ и m-ка $\langle f_{j_1}(\bar{b}^s, u), \ldots, f_{j_m}(\bar{b}^s, u)\rangle$ алгебраически независима над k, то находим элементы $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-m}}$ такие, что n-ка $\langle f_{j_1}(\bar{b}^s, u), \ldots, f_{j_m}(\bar{b}^s, u),\ a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-m}}\rangle$ алгебраически независима над k; последнюю помещаем в список из T_i. Так поступаем со всеми функциями f_j для $j \leqslant \ell_{s+1}$, при $n = 0$ этого не делаем.

Роль h_j играют те функции $f_j(\bar{b}^s, y)$, для которых $y_j \neq 0$. При $n > 0$ по лемме 2 найдем элемент $v_{s+1} \in k(a_0, \ldots, a_{n-1})$ такой, что

- ◇ функции $[f_j(\bar{b}^s, y)]_{v_{s+1}}^{b_{g(s+1)}}$ корректно определены при $j = 0, \ldots, \ell_{s+1}$,
- ◇ многочлен $[P_{s+1}(\bar{b}^s, y)]_{v_{s+1}}^{b_{g(s+1)}}$ неприводим над k, имеет ту же степень и ненулевую производную по y,
- ◇ выполнены остальные утверждения леммы 2.

Пусть $y_{i_0}, \ldots, y_{i_t}$ — те из элементов y_j, которые лежат в поле $[\mathrm{k}(\bar{b}^{s+1})]_{\mathrm{s}}$. Тогда в этом же поле найдется элемент w, удовлетворяющий условию

$$\mathrm{k}(\bar{b}^{s+1}, y_{i_0}, \ldots, y_{i_t}) = \mathrm{k}(\bar{b}^{s+1}, w),$$

т. е. $y_{i_k} = h_k(\bar{b}^{s+1}, w)$ для $k = 0, \ldots, t$ и некоторых $h_k \in \mathrm{k}(\bar{b}^{s+1})[y]$. Справедливо равенство $w = R(\bar{b}^s, u)$ для некоторого $R \in \mathrm{k}(\bar{b}^s)[y]$. Пусть $Q \in \mathrm{k}[\bar{b}^{s+1}, y]$ — неприводимый над k сепарабельный многочлен такой, что $Q(\bar{b}^{s+1}, w) = 0$. Найдется элемент $\tilde{u}_0 \in [\mathrm{k}(\bar{b}^{s+1})]_{\mathrm{s}}$, подчиненный условию $[P_{s+1}(\bar{b}^s, \tilde{u}_0)]_{v_{s+1}}^{b_{g(s+1)}} = 0$. Возьмем $w_0 \leftrightharpoons [R(\bar{b}^s, \tilde{u}_0)]_{v_{s+1}}^{b_{g(s+1)}}$. Тогда имеет место равенство $Q(\bar{b}^{s+1}, w_0) = 0$ (так как $Q(\bar{b}^{s+1}, R(\bar{b}^s, y))$ делился как полином на $P_{s+1}(\bar{b}^s, y)$) и существует автоморфизм φ поля $[\mathrm{k}(\bar{b}^s)]_{\mathrm{s}}$ такой, что $\varphi \restriction_{\mathrm{k}(\bar{b}^s)} = \mathrm{id}$, $\varphi(w_0) = w$. Элемент $\tilde{u} \leftrightharpoons \varphi(\tilde{u}_0)$ обладает следующими свойствами:

$$[P_{s+1}(\bar{b}^s, \tilde{u})]_{v_{s+1}}^{b_{g(s+1)}} = 0, \quad [R(\bar{b}^s, \tilde{u})]_{v_{s+1}}^{b_{g(s+1)}} = w,$$

следовательно, $[f_{i_k}(\bar{b}^s, \tilde{u})]^{b_{g(s+1)}}_{v_{s+1}} = y_{i_k}$. Поэтому один из таких элементов $\tilde{u}$ можно найти эффективно. Для $j = 0, \dots, \ell_{s+1}$ полагаем

$$\mu^{s+1}(n_j) = [f_j(\bar{b}^s, \tilde{u})]^{b_{g(s+1)}}_{v_{s+1}},$$

тем самым нумерация μ^{s+1} задана на множестве $\mathcal{D}_{s+1}$. Описание конструкции закончено.

Положим $\mu \leftrightharpoons \lim_{s\to\infty} \mu^s$. Понятно, что нумерация μ определена на рекурсивном множестве $\mathcal{D} = \bigcup_{s\in\omega} \mathcal{D}_s$ и ее образом является поле

$$K'' = [\mathrm{k}(\{a_j \mid j \in \omega\} \cup \{b_j \mid j \in \omega\} - \{b_{g(j)} \mid g(j)\downarrow\})]_{\mathrm{s}}.$$

Нумерация μ является конструктивизацией, так как

$$\mu(s) = 0 \leftrightarrow \mu^s(s) = 0,$$

$$\mu(r_1) + \mu(r_2) = \mu(r_3) \leftrightarrow \exists\, s(\mu^s(r_1) + \mu^s(r_2) = \mu^s(r_3)),$$

т. е. номер r_3 находится эффективно. Аналогично рассматривается случай умножения.

Пусть $n > 0$ и дана n-ка чисел $\langle m_1, \dots, m_n\rangle$. Используя оракулы для множеств $A_1, \dots, A_n$, найдем шаг s такой, что $\mu^s(m_1), \dots, \mu^s(m_n) \in [\mathrm{k}(\{a_j \mid j \in \omega\} \cup \{b_j \mid j \in \omega - \bigcup_{i=1}^n A'_i\})]_{\mathrm{s}}$, где $A'_i \leftrightharpoons \{k \in A' \mid \ell(k) = i-1\}$, $i > 0$. Система элементов $\mu(m_1), \dots, \mu(m_n)$ алгебраически независима над k тогда и только тогда, когда система $\mu^s(m_1), \dots, \mu^s(m_n)$ алгебраически независима над k. Поэтому $AD_n(K'', \mu) \leqslant_T \bigoplus_{i=1}^n A_i$ и $AD(K'', \mu) \leqslant_T A$. Однако равенство

$$A' = \{k \in \omega \mid \mu(\nu^{-1}(b_k)),\ a_0, \dots, a_{\ell(k)-1} \text{ алгебраически зависимы над k}\}$$

обращает эти сравнения. Предложение доказано.

Лемма 3. *Пусть конструктивное поле (K, ν) эффективно вложено в свое чисто несепарабельное расширение (F, β). Тогда*

$$AD_n(K, \nu) \equiv_T AD_n(F, \beta) \text{ для всех } n \geqslant 1 \text{ и } AD(K, \nu) \equiv_T AD(F, \beta).$$

Доказательство. Очевидны сводимости $AD_n(K, \nu) \leqslant_T AD_n(F, \beta)$ и $AD(K, \nu) \leqslant_T AD(F, \beta)$. Однако по всякой n-ке элементов из F мы можем эффективно найти n-ку из K, элементы которой являются степенями соответствующих элементов первой с показателями вида p^m, где p — характеристика. Тогда ранг трансцендентности над P у этих двух систем одинаков. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы. Ввиду вышеизложенного остается лишь заметить, что тьюрингова степень исследуемых множеств сохраняется при чисто несепарабельных расширениях полей. Так как универсальная область F является чисто несепарабельным расширением поля, изоморфного K, теорема доказана.

Замечание 1. Относительно характеристики и индекса семейства S конструкция теоремы проводилась равномерно, но конструктивизировалась не сама универсальная область F, а изоморфная ей.

Следствие 1. *Алгебраическая размерность универсальной области F бесконечна.*

Доказательство. Всякому $n > 0$ сопоставим конструктивизацию α_n, для которой $AD_n(F, \alpha_n) \equiv_T 0$, но $AD_{n+1}(F, \alpha_n) \not\equiv_T 0$. Все такие конструктивизации попарно неэквивалентны в смысле алгебраической сводимости. Следствие 1 доказано.

Укажем выделенную роль стандартной конструктивизации ν поля F.

Лемма 4. *Пусть μ_1 и μ_2 — конструктивизации универсальной области F такие, что $AD_n(F, \mu_1)$ рекурсивны для всех целых $n \geqslant 1$. Тогда $\mu_1 \leqslant_{\text{alg}} \mu_2$.*

Доказательство. Пусть $S \subseteq F^n$ — устойчивое множество и множество $\mu_2^{-1}(S)$ рекурсивно. Тогда по набору чисел $\langle m_1, \ldots, m_n \rangle$ можно эффективно найти базис трансцендентности над простым подполем P системы $\mu_1(m_1), \ldots, \mu_1(m_n)$. Пусть такой базис — это $\mu_1(m_{i_1}), \ldots, \mu_1(m_{i_k})$, где $0 \leqslant k \leqslant n$. Возьмем

$$\{j_1, \ldots, j_{n-k}\} \leftrightharpoons \{1, \ldots, n\} - \{i_1, \ldots, i_k\},$$

найдем для $\ell = 1, \ldots, m - k$ неприводимые полиномы

$$P_\ell(y) \in P(\mu_1(n_{i_1}), \ldots, \mu_1(n_{i_k}), \mu_1(n_{j_1}), \ldots, \mu_1(n_{j_{\ell-1}}))[y]$$

такие, что $P_\ell(\mu_1(n_{j_\ell})) = 0$. Взяв заранее $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \notin AD_n(F, \mu_2)$, найдем набор чисел $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ такой, что $\langle s_{i_1}, \ldots, s_{i_k} \rangle \notin AD_k(F, \mu_2)$ и

$$P_\ell(\mu_2(s_{i_1}), \ldots, \mu_2(s_{i_k}), \mu_2(s_{j_1}), \ldots, \mu_2(s_{j_\ell})) = 0$$

для $\ell = 1, \ldots, m - k$. Тогда

$$\langle m_1, \ldots, m_n \rangle \in \mu_1^{-1}(s) \leftrightarrow \langle s_1, \ldots, s_n \rangle \in \mu_2^{-1}(s),$$

т. е. множество $\mu_1^{-1}(s)$ рекурсивно. Лемма 4 доказана.

Лемма 4 означает, что в частичном порядке $\mathfrak{L}_{\text{alg}}(F)$, образованном классами алгебраически эквивалентных конструктивизаций поля F, стандартная конструктивизация ν представляет наименьший класс.

Следствие 2. *У всякой универсальной области F существует конструктивизация α, которая алгебраически эквивалентна, но не проблемно эквивалентна стандартной конструктивизации ν.*

Доказательство. Рассмотрим вычислимое семейство $S = \{A_i\}_{i>0}$ рекурсивно перечислимых множеств такое, что все множества A_i рекурсивны, но $\bigoplus_{i>0} A_i$ нерекурсивно. По лемме 4 соответствующая конструктивизация α алгебраически эквивалентна стандартной конструктивизации ν. Следствие 2 доказано.

Замечание 2. Если конструктивизация β универсальной области F проблемно эквивалентна стандартной конструктивизации ν, то она также автоэквивалентна ей [1]. Действительно, рекурсивность множества $AD(F, \beta)$ является в определенном смысле «эталоном» стандартности конструктивизации.

Автору неизвестно, насколько полно свойство минимальности в структуре $\mathfrak{L}_{\text{alg}}(F)$ и совпадение двух классов конструктивизаций (автоэквивалентных и проблемно эквивалентных данной конструктивизации) характеризуют стандартные конструктивизации универсальной области F.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ершов Ю. Л.** Алгоритмические проблемы в теории полей // Справочная книга по математической логике. М.: Наука, 1982. Т. 3. С. 296–353.
2. **Успенский. В. А., Семенов Л. А.** Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. М.: Наука, 1987.
3. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций. Ч. 3: Конструктивные модели. Новосибирск: Новосибир. гос. ун-т, 1974.
4. **Ленг С.** Основы диофантовой геометрии. М.: Мир, 1986.
5. **Зарисский О., Самюэль П.** Коммутативная алгебра. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. Т. 1.