СЧЕТНОСТЬ ШИРИНЫ СТРУКТУР АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СВОДИМОСТИ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

С. Т. Федоряев

Введение

Понятия сводимости конструктивизаций и структуры конструктивизаций относительно рассматриваемой сводимости естественно возникают при исследовании таких классических вопросов в теории конструктивных моделей как зависимость или независимость тех или иных свойств моделей от выбора нумерации, существование (единственность) нумерации модели с заданным свойством, изучение соотношений (в подходящем смысле) между различными нумерациями данной модели и т. п. Известно несколько подходов к формализации понятия сводимости. Классическими и наиболее изученными являются автосводимость и сводимость конструктивизаций по Колмогорову (см., например, [1–3]). Развитие теории конструктивных моделей, возможность применения (через понятие эффективности на модели) развитой теории алгоритмов к исследованию разрешимости многочисленных алгоритмических проблем [1] алгебры и теории моделей, таких как проблема равенства, сопряженности элементов группы и т. п., привели к появлению новых формализаций понятия сводимости, имеющих явный как алгоритмический, так и алгебраический смысл. В [1] предложены понятия алгебраической, программной и равномерной сводимости.

В настоящей работе продолжается изучение структурных свойств алгебраической сводимости конструктивизаций [1, 4–6]. В § 2 на основе идеи ветвимости модели [7] сформулировано условие рекурсивной несовместности двух последовательностей отношений конструктивной модели, которое обеспечивает существование конструктивизации, при которой разрешимы все отношения одной последовательности и неразрешимы все отношения другой. Это позволило в классах классических алгебраических систем явно указать счетное число независимых совокупностей алгоритмических массовых проблем. Иными словами, на языке структурных свойств это означает счетность ширины структуры алгебраической сводимости для рассматриваемой модели. В § 3 рассматриваются дистрибутивные решетки с относительными дополнениями, а в § 4 — линейные порядки.

Как известно, для конструктивизируемой модели $\mathfrak{M}$ выполняется следующая система нестрогих неравенств для алгебраической, программной, равномерной размерности, авторазмерности и колмогоровской размерности соответственно:

$$\mathbf{Alg} - \dim \mathfrak{M} \leqslant \mathbf{P} - \dim \mathfrak{M} \leqslant \mathbf{U} - \dim \mathfrak{M} \leqslant \mathbf{A} - \dim \mathfrak{M} \leqslant \mathbf{K} - \dim \mathfrak{M}.$$

Естественно возникают следующие вопросы, поставленные В. А. Успенским и А. Л. Семеновым в [1].

1. Проблема соотношений алгоритмических размерностей:

(а) бывают ли конструктивизируемые модели, для которых один из этих знаков «$\leqslant$» можно заменить на «$<$»?

(б) когда знак «$\leqslant$» можно заменить на знак «$=$»?

2. Проблема спектра алгоритмических размерностей:

какие наборы чисел могут быть наборами алгоритмических размерностей алгебраических систем: алгебраической, программной, равномерной, колмогоровской и авторазмерности?

Известен ряд результатов по различению этих размерностей [4, 8, 9] и о совпадении всех размерностей [4, 9] в нетривиальном случае (например, когда модель жесткая, все размерности очевидным образом совпадают). Особый интерес представляет эта проблематика для классических математических объектов. В настоящей работе в § 3, 4 полностью решены проблемы спектра и соотношений алгоритмических размерностей, а также получен критерий алгоритмической устойчивости для дистрибутивных решеток с относительными дополнениями и нулем в языке с идеалом Фреше, для рассеянных линейных порядков в языке с блок-отношением и для достаточно широких классов линейных порядков. Различены алгебраическая размерность и авторазмерность в классе линейных порядков.

Автор глубоко признателен С. С. Гончарову за внимание к работе.

§ 1. Предварительные сведения

Отношение на модели $\mathfrak{A}$, инвариантное относительно действия группы автоморфизмов модели $\mathfrak{A}$, будем называть *устойчивым отношением*. Пусть ν и μ — конструктивизации модели $\mathfrak{A}$ [3].

Определение 1.1 [1, 4]. *Конструктивизация ν алгебраически сводится к конструктивизации μ* (символически $\nu \leqslant \mu$), если всякое устойчивое отношение на модели $\mathfrak{A}$, разрешимое при конструктивизации μ, является разрешимым и при ν. Две конструктивизации называются *алгебраически эквивалентными*, если каждая из них алгебраически сводится к другой, а число классов алгебраически эквивалентных конструктивизаций модели $\mathfrak{A}$ называется *алгебраической размерностью* (символически $\mathbf{Alg}-\dim\mathfrak{M}$). (Аналогичные понятия для других типов сводимостей могут быть найдены, например, в [1, 8].)

Введенное отношение сводимости задает на множестве классов алгебраически эквивалентных конструктивизаций частичный порядок. Таким образом определенное частично упорядоченное множество $\mathbb{L}(\mathfrak{A})$ для модели $\mathfrak{A}$ будем называть *структурой алгебраической сводимости модели* $\mathfrak{A}$.

Содержательный смысл алгебраической сводимости и структуры относительно этой сводимости состоит в следующем. Для каждого элемента ν структуры алгебраической сводимости $\mathbb{L}(\mathfrak{A})$ произвольной конструктивизируемой модели $\mathfrak{A}$ определим не более чем счетную «характеристическую» совокупность алгоритмических массовых проблем

$$\Omega_\nu = \{\mathbf{S}_{\nu,\mu} \mid \mu \in \mathbb{L}(\mathfrak{A}), \mu \nleqslant \nu\},$$

где $\mathbb{S}_{\nu,\mu}$ — устойчивое ν-разрешимое и μ-неразрешимое отношение, существующее для $\nu, \mu \in \mathbb{L}(\mathfrak{A})$ таких, что $\mu \not\leqslant \nu$. Доопределим естественным образом отображение $\nu \longmapsto \Omega_\nu$ до отображения с областью определения $\mathbb{H}(\mathfrak{A})$, (где $\mathbb{H}(\mathfrak{A})$ — совокупность всех конструктивизаций $\mathfrak{A}$), полагая $\Omega_\nu = \Omega_\mu$, если конструктивизации ν и μ алгебраически эквивалентны. Тогда выполняется следующее свойство, определяющее отношение зависимости одной совокупности алгоритмических массовых проблем от другой.

Предложение 1.1. *Пусть $\nu, \mu \in \mathbb{H}(\mathfrak{A})$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mu \leqslant \nu$;

(2) *все отношения из совокупности Ω_ν μ-разрешимы;*

(3) *для любой конструктивизации модели $\mathfrak{A}$ разрешимость всех отношений совокупности Ω_μ влечет разрешимость всех отношений из Ω_ν.*

Доказательство. Поскольку все отношения из Ω_ν ν-разрешимы, импликации (3) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (1) очевидны.

Пусть теперь $\mu \leqslant \nu$ и все отношения из Ω_μ являются η-разрешимыми. Тогда $\eta \leqslant \mu \leqslant \nu$. Следовательно, все отношения из Ω_ν будут η-разрешимыми. Предложение 1.1 доказано.

Таким образом, алгебраическая сводимость конструктивизаций означает не что иное, как зависимость одной совокупности Ω_ν алгоритмических массовых проблем от другой Ω_μ. Элемент структуры алгебраической сводимости однозначно определяется некоторой «характеристической» совокупностью Ω_ν, ее выбор также однозначен с точностью до естественной эквивалентности, а структура алгебраической сводимости отражает все зависимости между совокупностями алгоритмических массовых проблем, характеризующих какое-либо эффективное представление рассматриваемой модели, и описывает в определенном смысле внутреннюю сложность самой модели. Этим объясняется интерес к изучению этого объекта.

Заметим, что зависимости отдельных совокупностей алгоритмических массовых проблем для конкретных алгебраических систем исследовались многими авторами. В булевых алгебрах Дж. Б. Реммел изучал зависимости некоторых совокупностей проблем, состоящих из множества атомов и идеалов Фреше $\mathbb{F}_\alpha, \alpha < \omega_1^{ck}$, [10, 11]. В классе линейных порядков некоторые зависимости для отношения соседей и блок-отношения получены М. Ф. Мозесом [12]. Отношения $\mathbb{D}_n(\mathbb{V}_\infty)$ линейной зависимости n элементов бесконечномерного пространства $\mathbb{V}_\infty$, отношения $\mathbb{D}_n(\mathbb{F}_\infty)$ алгебраической зависимости n элементов алгебраически замкнутого поля $\mathbb{F}_\infty$ и соответствующие отношения зависимости для систем $\langle \mathbb{U}, cl \rangle$ с операцией замыкания изучались в работах [13–17]. В данной работе для исследования ширины структур алгебраической сводимости рассматриваются независимые совокупности алгоритмических массовых проблем. Совокупности $T_1, T_2, \ldots, T_n$, $n \in N \cup \{\omega\}$, алгоритмических массовых проблем на модели $\mathfrak{A}$ *независимы*, если существуют конструктивизации $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ модели $\mathfrak{A}$ такие, что все проблемы из T_i ν_j-разрешимы тогда и только тогда, когда $i = j$.

В данной работе мы используем понятие рекурсивной модели, эквивалентное понятию конструктивной модели (см. [2]). Под *представлением*

$\{\mathfrak{A}_t, t \geqslant 0\}$ (см. [2, 7]) *рекурсивной модели* $\mathfrak{A}$ *сигнатуры* σ понимаем строго вычислимую последовательность конечных сигнатур $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \ldots \subseteq \sigma_n \subseteq \ldots$ такую, что $\sigma = \bigcup_{n \geqslant 0} \sigma_n$, и строго вычислимую последовательность конечных моделей $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_n \subseteq \ldots$ соответственно сигнатур $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$ такую, что $\mathfrak{A} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathfrak{A}_n$.

Пусть $\bar{a}$ — кортеж. Пишем $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|$, если все элементы $\bar{a}$ лежат в $|\mathfrak{A}|$, где $|\mathfrak{A}|$ — основное множество модели $\mathfrak{A}$.

Через $\mathbf{N}$ обозначим множество натуральных чисел и в дальнейшем считаем (если особо не оговорено), что $|\mathfrak{A}| = \mathbf{N}$.

Пусть $\bar{n} = (n_0, \ldots, n_k)$ — кортеж чисел. Через $\langle \bar{n} \rangle$ будем обозначать его номер в некоторой фиксированной гёделевской нумерации всех кортежей натуральных чисел. Примем также следующие обозначения:

$p_0 < p_1 < \ldots$ — перечисление всех простых чисел в порядке возрастания,

$R \upharpoonright (i_1, \ldots, i_m)$ — m-местное отношение, получающееся проектированием n-местного отношения R, $m < n$, на места $i_1, \ldots, i_m$ соответственно.

Все необходимые сведения о дистрибутивных решетках с относительными дополнениями можно найти в [2, 3]; относительно линейных порядков см. [18].

§ 2. Условия рекурсивной несовместности

Определение 2.1. Последовательности $\{Q_s(\mathfrak{A}), s \geqslant 0\}$ и $\{T_i(\mathfrak{A}), i \geqslant 0\}$ отношений на рекурсивной модели $\mathfrak{A}$ удовлетворяют *условию рекурсивной несовместности*, если для некоторого представления $\{\mathfrak{A}_t, t \geqslant 0\}$ модели $\mathfrak{A}$ существуют семейство отношений $\{Q_s^t, s \geqslant 0\}$ на $\mathfrak{A}_t$, $t \geqslant 0$, и общерекурсивная возрастающая неограниченная функция f, обладающие следующими свойствами:

(1) для любых s, m существуют набор $\bar{a} \in Q_s(\mathfrak{A})$, бесконечно много чисел t и изоморфные вложения $\varphi_t : \mathfrak{A}_t \hookrightarrow \mathfrak{A}_{t+1}$ такие, что $\varphi_t(\bar{a}) \notin Q_s^{t+1}$, φ_t тождественно на $\mathfrak{A}_m$ и $\forall i \leqslant f(t)(\bar{b} \in \mathfrak{A}_t \cap T_i(\mathfrak{A}) \Longleftrightarrow \varphi_t(\bar{b}) \in T_i(\mathfrak{A}))$;

(2) $\bar{a} \in Q_s(\mathfrak{A}) \Longleftrightarrow \forall t(\bar{a} \in \mathfrak{A}_t \to \bar{a} \in Q_s^t)$;

(3) отношения Q_s^t и $T_i(\mathfrak{A})$ равномерно рекурсивны, т. е. рекурсивны следующие множества:

$$\{\langle s, t, \langle a_1, \ldots, a_{n_s} \rangle \rangle \mid (a_1, \ldots, a_{n_s}) \in Q_s^t, s, t \geqslant 0\},$$
$$\{\langle i, \langle b_1, \ldots, b_{r_i} \rangle \rangle \mid (b_1, \ldots, b_{r_i}) \in T_i(\mathfrak{A}), i \geqslant 0\}.$$

Замечание 2.1. Если $Q_s(\mathfrak{A})$ — равномерно рекурсивная последовательность отношений, то для отношений $Q_s^t = \{\bar{a} \mid \bar{a} \in \mathfrak{A}_t \cap Q_s(\mathfrak{A})\}$ проверка выполнения условия рекурсивной несовместности сводится к проверке свойства (1).

Теорема 2.1. *Если последовательности отношений* $\{Q_s(\mathfrak{A}), s \geqslant 0\}$ *и* $\{T_i(\mathfrak{A}), i \geqslant 0\}$ *на модели* $\mathfrak{A}$ *удовлетворяют условию рекурсивной несовместности, то при некоторой конструктивизации модели* $\mathfrak{A}$ *все отношения* $T_i(\mathfrak{A})$ *разрешимы, а все отношения* $Q_s(\mathfrak{A})$ *неперечислимы.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{A}_t,\ t \geqslant 0\}$ — представление рекурсивной модели $\mathfrak{A}$ и f — общерекурсивная функция из условия рекурсивной несовместности для данных последовательностей отношений. Зафиксируем некоторый эффективный список всех рекурсивно перечислимых множеств $W_{n,k} \subseteq \mathbf{N}^n$, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 0$. Через $W^t_{n,k}$ обозначим те наборы n-ок чисел, которые появляются за первые t шагов в перечислении множества $W_{n,k}$. По шагам построим искомую конструктивизацию μ модели A. На каждом шаге будем строить частичную нумерацию μ^t. В процессе построения на числа могут ставиться метки $\oplus$ и $\langle k,s\rangle$, где k, $s \in \mathbf{N}$.

Шаг 0. Положим $\mu^0 = \varnothing$.

Шаг $t+1$. Проверим, найдется ли число $\langle k,s\rangle \leqslant t+1$ такое, что на $\langle k,s\rangle$ не стоит метка $\oplus$ и существуют набор $\bar{m} \in W^{t+1}_{n_s,k}$, где n_s —местность относительно Q_s, и изоморфное вложение $\varphi{:}\mathfrak{A}_t \hookrightarrow \mathfrak{A}_{t+1}$ такие, что

$$\mu^t(\bar{m}) \in Q^t_s,\ \varphi(\mu^t(\bar{m})) \notin Q^{t+1}_s,$$
$$\forall i \leqslant f(t)\,(\bar{b} \in \mathfrak{A}_t \cap T_i(\mathfrak{A}) \Longleftrightarrow \varphi(\bar{b}) \in T_i(\mathfrak{A})),$$
$$\varphi\restriction\mu^t(G) = \mathrm{id},$$

где G содержит все числа из $|\mathfrak{A}_t|$, на которых стоят метки, меньшие $\langle k,s\rangle$.

Если такое число $\langle k,s\rangle$ существует, то возьмем наименьшее такое число $\langle k,s\rangle$ и наименьший набор $\langle \bar{m}\rangle$ с перечисленными свойствами. Продолжим отображение $\varphi\circ\mu^t{:}|\mathfrak{A}_t| \longmapsto \mathfrak{A}_{t+1}$ до биекции $\mu^{t+1}{:}|\mathfrak{A}_{t+1}| \longmapsto \mathfrak{A}_{t+1}$ и зафиксируем эту нумерацию. На число $\langle k,s\rangle$ поставим метку $\oplus$. Со всех чисел, больших $\langle k,s\rangle$, снимем метку $\oplus$. На элементы $|\mathfrak{A}_{t+1}|$ поставим метку $\langle k,s\rangle$ и снимем с них все метки, бо́льшие $\langle k,s\rangle$. Перейдем к следующему шагу.

Если такого числа $\langle k,s\rangle$ нет, то продолжим отображение $\mu^t{:}|\mathfrak{A}_t| \longmapsto \mathfrak{A}_t$ до биекции $\mu^{t+1}{:}|\mathfrak{A}_{t+1}| \longmapsto \mathfrak{A}_{t+1}$ и перейдем к следующему шагу. Конструкция завершена.

Лемма 2.1. *На каждое число метка $\oplus$ может ставиться лишь конечное число, и существует бесконечно много чисел, на которые ставится метка $\oplus$.*

Доказательство легко вытекает из условия рекурсивной несовместности и конструкции.

Лемма 2.2. *Существует бесконечно много чисел k таких, что метка $\oplus$ на некотором шаге ставится на k и больше не снимается.*

Доказательство следует из леммы 2.1.

Лемма 2.3. *Если после шага t_0 на элементе n стоит метка $\langle k,s\rangle$, которая уже не снимается, то для всех $t \geqslant t_0$ справедливо равенство $\mu^t(n) = \mu^{t_0}(n)$.*

Доказательство непосредственно следует из конструкции.

Лемма 2.4. *Значение $\mu(n) = \lim_{n\to\infty}\mu^t(n)$ определено для всех n и, кроме того, $\mu{:}\mathbf{N} \overset{\text{на}}{\longmapsto} \mathfrak{A}$.*

Доказательство следует из лемм 2.2, 2.3 ввиду того, что $\mathbf{N} = |\mathfrak{A}|$ и $\mu^t\,{:}|\mathfrak{A}_t| \to \mathfrak{A}_t$ — биекция.

Лемма 2.5. *Нумерация μ является конструктивизацией модели $\mathfrak{A}$.*

Доказательство следует из конструкции и леммы 2.4.

Лемма 2.6. *Если на число $\langle k, s\rangle$ на некотором шаге метка $\oplus$ ставится и больше не снимается, то $W_{n_s,k} \neq \mu^{-1}(Q_s(\mathfrak{A}))$.*

Доказательство. Пусть t — шаг, на котором на число $\langle k, s\rangle$ ставится метка $\oplus$ и больше не снимается. Тогда найдется набор $\bar{m} \in W^t_{n_s,k}$ такой, что $\mu^t(\bar{m}) \notin Q^t_s$ и на все элементы набора $\bar{m}$ ставится метка $\langle k, s\rangle$, которая больше не снимается. В силу леммы 2.3 и условия рекурсивной несовместности $\mu(\bar{m}) = \mu^t(\bar{m}) \notin Q_s(\mathfrak{A})$. Лемма 2.6 доказана.

Лемма 2.7. *Для всех s множество $\mu^{-1}(Q_s(\mathfrak{A}))$ не рекурсивно перечислимо.*

Доказательство. Предположим противное: $W_{n_s,k} = \mu^{-1}(Q_s(\mathfrak{A}))$ для некоторого k. Пусть $t_0 > \langle k, s\rangle$ — шаг, после которого метка $\oplus$ не ставится на числа, меньшие $\langle k, s\rangle$. Ввиду условия рекурсивной несовместности найдется набор $\bar{m} \in W_{n_s,k}$ такой, что $\mu(\bar{m}) \in Q_s(\mathfrak{A})$ и существуют бесконечно много чисел t и изоморфные вложения $\varphi_t{:}\mathfrak{A}_t \hookrightarrow \mathfrak{A}_{t+1}$, обладающие следующими свойствами:

$$\varphi_t(\mu(\bar{m})) \notin Q^{t+1}_s,$$
$$\forall i \leqslant f(t)(\bar{b} \in \mathfrak{A}_t \cap T_i(\mathfrak{A}) \Longleftrightarrow \varphi_t(\bar{b}) \in T_i(\mathfrak{A})),$$
$$\varphi_{t\restriction \mu^{t_0}(G)} = \mathrm{id},$$

где G содержит все числа из $|\mathfrak{A}_{t_0}|$, на которых стоят метки, меньшие $\langle k, s\rangle$. Тогда для некоторого шага $t > t_0$ верно соотношение

$$\bar{m} \in W^{t+1}_{n_s,k},\ \mu^t(\bar{m}) = \mu(\bar{m}) \in Q^t_s,$$

и существует изоморфное вложение φ_t с указанными свойствами. Если к шагу $t+1$ метка $\oplus$ на числе $\langle k, s\rangle$ не стоит, то на шаге $t+1$ метка $\oplus$ ставится на $\langle k, s\rangle$. Таким образом, на некотором шаге, большем t_0, метка $\oplus$ стоит на $\langle k, s\rangle$ и, в силу выбора шага t_0, больше не снимается. Ввиду леммы 2.6 приходим к противоречию. Лемма 2.7 доказана.

Лемма 2.8. *Для всех i отношение $T_i(\mathfrak{A})$ μ-разрешимо.*

Доказательство. Заметим, что если $\bar{m} \in |\mathfrak{A}_t|$ и $i \leqslant f(t)$, то $\mu(\bar{m}) \in T_i(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда $\mu^t(\bar{m}) \in T_i(\mathfrak{A})$. Последнее условие можно проверить эффективно. Лемма 2.8 доказана.

Утверждение теоремы 2.1 следует из лемм 2.5, 2.7 и 2.8. Теорема 2.1 доказана.

§ 3. Дистрибутивные решетки с относительными дополнениями

В работе [7] получен критерий автоустойчивости дистрибутивных решеток с относительными дополнениями и нулем. Этот критерий сводится к проверке конечности множества атомов. Как известно, автосводимость конструктивизаций влечет их алгебраическую сводимость. Поэтому случай конечного числа атомов вырождается и изучению подлежит класс $\mathfrak{D}$ счетных дистрибутивных решеток с относительными дополнениями и нулем, имеющих бесконечное число атомов.

Введем следующие обозначения:

$A(D)$ — множество атомов решетки D;

$F(D)$ — идеал Фреше решетки D;

$|a|$ ($\|a\|$) — число различных атомов, лежащих (не лежащих) под элементом a решетки D;

$\mathrm{gr}(X)$ — подрешетка решетки D, порожденная множеством X (как решетка сигнатуры $\langle \cup, \cap, \setminus \rangle$), где $X \subset |D|$;

$\mathbb{O}$ — «нуль» (наименьший элемент решетки D);

D_L — подрешетка решетки $\langle P(L), \cup, \cap, \setminus \rangle$, порожденная всеми интервалами $[a, b) = \{c \mid a \leqslant c < b\}$, где $a, b \in L$, L — линейный порядок с первым элементом;

$\langle D, F \rangle$ — дистрибутивная решетка D с относительными дополнениями и нулем в языке с идеалом Фреше.

Модифицируя известный результат для булевых алгебр [10], докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть $L \in \mathfrak{D}$ — рекурсивная решетка с рекурсивным идеалом Фреше. Тогда существует рекурсивная решетка D, изоморфная L и такая, что множество атомов и идеал Фреше рекурсивны.*

Доказательство. Эффективная версия предложения 2 [3, с. 70] позволяет построить рекурсивно перечислимую порождающую последовательность $b_0 = \mathbb{O}, b_1, \ldots$ решетки L. По шагам определим конечные подрешетки $D_0 \subseteq D_1 \subseteq \ldots$ решетки L так, что подрешетка $D = \cup_{n \geqslant 0} D_n$ будет искомой. На каждом шаге будем отмечать некоторые атомы D_n.

Шаг 0. Положим $D_0 = \{b_0\}$.

Шаг $n+1$. Выберем множество A всех отмеченных атомов решетки D_n и определим

$$D_{n+1} = \mathrm{gr}(D_n \cup \{b_{n+1} \setminus \cup_{a \in A} a\}).$$

Отметим атомы D_{n+1}, лежащие в $F(L)$, и перейдем к следующему шагу.

Нетрудно установить следующие свойства:

1) $x \in A(D)$ тогда и только тогда, когда найдется шаг n такой, что $x \in D_n$ и x отмечается;
2) $F(D) = D \cap F(L)$;
3) $x \notin D \Longleftrightarrow (x \notin L \vee \exists\, a \in A(D)(\mathbb{O} \subset x \cap a \subset a))$.

Таким образом, D — рекурсивная подрешетка L и множества $A(D)$, $F(D)$ рекурсивные.

Непосредственно проверяется, что отображение $\varphi{:}D/F(D) \mapsto L/F(L)$, действующее по правилу $\varphi(x/F(D)) = x/F(L)$, есть изоморфизм решеток $D/F(D)$ и $L/F(L)$. Положим

$$C = \{(a, b) \mid a \in D,\, b \in L,\, |a| = |b|,\, \|a\| = \|b\|,\, \varphi(a/F(D)) = b/F(L)\}.$$

Нетрудно показать, что множество $C \subset D \times L$ является соответствием между D и L [3, с. 71]. Используя известный критерий изоморфизма не более чем счетных решеток, заключаем, что $D \cong L$ [3, с. 72]. Теорема 3.1 доказана.

Используя теорему 2.1, укажем счетное число независимых совокупностей алгоритмических массовых проблем для решеток из $\mathfrak{D}$.

Теорема 3.2. *Структура алгебраической сводимости решетки $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}$, допускающей конструктивизацию с разрешимым идеалом Фреше, имеет счетную ширину.*

Доказательство. Ввиду эквивалентности категорий конструктивных и рекурсивных моделей (см. [2]), а также теоремы 3.1 считаем, что $\mathfrak{A}$ — рекурсивная решетка с рекурсивными множествами $A(\mathfrak{A})$ и $F(\mathfrak{A})$. Определим устойчивые равномерно рекурсивные отношения на решетке $\mathfrak{A}$:

$$T_i(\mathfrak{A}) = \{a \mid a \in F(\mathfrak{A}), |a| = p_i \cdot n,\ n \in \mathbb{N}, n \neq 0\},\ i \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем произвольное число $s \in \mathbb{N}$ и построим представление $\{\mathfrak{A}_t, t \geqslant 0\}$ рекурсивной решетки $\mathfrak{A}$, для которого последовательности $\{Q(\mathfrak{A}) = T_s(\mathfrak{A})\}$ и $\{T_i(\mathfrak{A}), i \in \mathbb{N}, i \neq s\}$ удовлетворяют условию рекурсивной несовместности.

Рассмотрим два случая.

Случай 1: в решетке $\mathfrak{A}$ имеется элемент a_*, под которым лежит бесконечно много атомов. По шагам построим искомое представление для модели $\mathfrak{A}$, последовательность конечных деревьев $D_0 \subseteq D_1 \subseteq \ldots$ и определим общерекурсивную возрастающую функцию f.

Шаг 0. Положим $\mathfrak{A}_0 = \{\mathbb{O}, a_*\}$, $D_0 = \{a_*\}$, $f(0) = 0$.

Шаг $t+1$. Выберем наименьший элемент $c \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_t$ и набор из $q_t + 1$ атомов решетки $\mathfrak{A}$, лежащих под некоторой концевой вершиной $d \notin F(\mathfrak{A})$ дерева D_t, где $q_t = \Pi_{\substack{i \leqslant f(t) \\ i \neq s}} p_i$.

Обозначим множество этих $q_t + 1$ атомов через A и положим

$$\mathfrak{A}_{t+1} = \mathrm{gr}(\mathfrak{A}_t \cup \{c\} \cup A).$$

Обозначим через D_{t+1} множество элементов D_t и ненулевых элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}_{t+1}$ вида $(b \setminus c) \setminus (\cup_{a \in A} a)$ и $(b \cap c) \setminus (\cup_{a \in A} a)$ (b — концевая вершина D_t) вместе с частичным порядком, индуцируемым решеткой $\mathfrak{A}$. На концевую вершину d дерева D_t поставим метку $\oplus$.

Определим $f(t+1)$ как наибольшее i такое, что в $\mathfrak{A}_{t+1}$ имеется p_i атомов $\mathfrak{A}$. Если такого i нет, то полагаем $f(t+1) = 0$. После этого переходим к следующему шагу.

Корректность конструкции вытекает из следующего простого замечания.

Замечание 3.1. Если $d_1, \ldots, d_n$ — все концевые вершины дерева D_t, то $d_i \subseteq a_*$ и $a_* \setminus \cup_i d_i \in F(\mathfrak{A})$.

Таким образом, существует концевая вершина дерева D_t, под которой в $\mathfrak{A}$ лежит бесконечно много атомов.

Для дальнейшего изучения случая 1 нам потребуются некоторые вспомогательные результаты, приведенные ниже.

Замечание 3.2. Дерево $D = \cup_{t \geqslant 0} D_t$ является поддеревом полного бинарного дерева.

Лемма 3.1. *Если на концевую вершину d дерева D_t на шаге $t+1$ ставится метка $\oplus$, то d — не концевая вершина D_{t+1}.*

Доказательство. Так как на d ставится на шаге $t+1$ метка $\oplus$, имеем $d \notin F(\mathfrak{A})$ и $\cup_{a \in A} a \subseteq d$, где $\varnothing \neq A \subset A(D)$. Поэтому либо элемент $(d \setminus c) \setminus (\cup_{a \in A} a)$, либо элемент $(d \cap c) \setminus (\cup_{a \in A} a)$ отличен от $\mathbb{O}$ и d, т.е. d — не концевая вершина D_{t+1}.

Непосредственно из замечания 3.1 и леммы 3.1 получаем

Следствие 3.1. *Существует бесконечно много вершин дерева D, отмеченных меткой $\oplus$.*

Следствие 3.2. *Для любого t существует концевая вершина D_t, под которой лежит бесконечно много вершин дерева D, отмеченных меткой $\oplus$.*

Доказательство получается индукцией по t, если применить следствие 3.1 и замечание 3.2.

Лемма 3.2. *Если d — концевая вершина дерева D_t, то $d \in A(\mathfrak{A}_t)$.*

Доказательство. При $t = 0$ лемма очевидна. Пусть d — концевая вершина дерева D_{t+1}. Тогда найдется концевая вершина b дерева D_t такая, что $b \in A(\mathfrak{A}_t), \mathfrak{A}_{t+1} = \mathrm{gr}(\mathfrak{A}_t \cup \{c\} \cup A)$ и либо $d = (b \setminus c) \setminus (\cup_{a \in A} a)$, либо $d = (b \cap c) \setminus (\cup_{a \in A} a)$. Нетрудно проверить, что $d \in A(\mathfrak{A}_{t+1})$. Лемма 3.2 доказана.

Следствие 3.3. *Для любого m существуют $a \in A(\mathfrak{A}_m)$, бесконечно много t и такие элементы $a_t \in A(\mathfrak{A}_t)$, лежащие под a, что в булевой алгебре $\mathfrak{A}_{t+1}$ под a_t лежит $q_t + 1$ атомов $\mathfrak{A}$.*

Доказательство следует из леммы 3.2, следствия 3.2 и конструкции.

Лемма 3.3. *Последовательности отношений*

$$\{Q(\mathfrak{A})\}, \quad \{T_i(\mathfrak{A}), i \in \mathbb{N}, i \neq s\}$$

на решетке $\mathfrak{A}$ удовлетворяют условию рекурсивной несовместности.

Доказательство. Ввиду замечания 2 1. достаточно проверить свойство (1).

Для фиксированного m по следствию 3.3 существуют $a \in A(\mathfrak{A}_m)$, бесконечно много t и такие элементы $a_t \in A(\mathfrak{A}_t)$, лежащие под a, что в $\mathfrak{A}_{t+1}$ под a_t лежит $q_t + 1$ атомов $\mathfrak{A}$. Поэтому найдется шаг $t_0 > m$ такой, что в $\mathfrak{A}_{t_0}$ под a лежит p_{s+1} атомов $\mathfrak{A}$. Пусть b — объединение p_s элементов из этих p_{s+1} атомов решетки $\mathfrak{A}$, а $c \in A(\mathfrak{A})$ и $c \subset b$. Зафиксируем произвольный шаг $t > t_0$, для которого определен элемент a_t. Пусть d — объединение q_t атомов $\mathfrak{A}$, лежащих в булевой алгебре $\mathfrak{A}_{t+1}$ под a_t.

Определим отображение $\varphi_t : \mathfrak{A}_t \hookrightarrow \mathfrak{A}_{t+1}$ следующим образом:

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} x \cup d, & \text{если } c \subseteq x; \\ x \setminus d, & \text{если } c \nsubseteq x. \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что φ_t — изоморфное вложение, причем φ_t оставляет на месте все элементы из $\mathfrak{A}_m$ и $x \in F(\mathfrak{A}) \iff \varphi_t(x) \in F(\mathfrak{A})$. Нетрудно заметить, что если $x \in F(\mathfrak{A})$, то

$$|\varphi_t(x)| = \begin{cases} |x| + q_t, & \text{если } d \nsubseteq x \text{ и } c \subseteq x, \\ |x| - q_t, & \text{если } d \subseteq x \text{ и } c \nsubseteq x, \\ |x|, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поэтому при $i \leqslant f(t), i \neq s$ имеет место эквивалентность

$$x \in \mathfrak{A}_t \cap T_i(\mathfrak{A}) \Longleftrightarrow \varphi_t(x) \in T_i(\mathfrak{A}).$$

Очевидно, что $b \in Q(\mathfrak{A})$ и $|\varphi_t(b)| = p_s + q_t$. Поэтому $\varphi_t(b) \notin Q^{t+1}$. Лемма 3.3 доказана.

Таким образом, случай 1 разобран.

Случай 2: решетка $\mathfrak{A}$ не имеет элемента, под которым лежит бесконечно много атомов. Тогда можно построить вычислимую последовательность $\{\mathfrak{A}_t,\ t \geqslant 0\}$ конечных булевых алгебр такую, что $\mathfrak{A} = \bigcup_{t \geqslant 0} \mathfrak{A}_t$ и в $\mathfrak{A}_{t+1}$ имеется q_t атомов $\mathfrak{A}$, несравнимых с атомами $\mathfrak{A}_t$, где число q_t и функция f определяются так же, как в случае 1.

Проверка условия рекурсивной несовместности для выбранных последовательностей отношений проводится аналогично случаю 1 и поэтому опускается.

Согласно теореме 2.1 в каждом из этих случаев для любого $s \in \mathbf{N}$ существует конструктивизация μ_s решетки $\mathfrak{A}$ такая, что устойчивое отношение $T_i(\mathfrak{A})$ μ_s-разрешимо тогда и только тогда, когда $i \neq s$. Следовательно, структура алгебраической сводимости решетки $\mathfrak{A}$ имеет счетную ширину. Теорема 3.2 доказана.

Замечание 3.3. Фактически мы показали, что для решетки $\mathfrak{A}$ из условия теоремы 3.2 совокупности $\tau_i = \{T_j(\mathfrak{A}) \mid j \in \mathbf{N}, j \neq i\}$, $i \in \mathbf{N}$, алгоритмических массовых проблем независимы. Заметим также, что построены независимые совокупности одноместных проблем. Как будет отмечено позже, для линейных порядков это можно сделать не всегда.

Для атомных решеток класса $\mathfrak{D}$ имеет место

Предложение 3.1. *Если $D \in \mathfrak{D}$ атомная решетка и $D/F(D)$ конструктивизируема, то структура алгебраической сводимости решетки D имеет счетную ширину.*

Доказательство. Рассмотрим только случай, когда D не имеет наибольшего элемента. Пусть (L_0, ν_0) — конструктивный линейный базис решетки $D/F(D)$ [3, с. 70]. По конструктивизации ν_0 определим конструктивизацию ν линейно упорядоченного множества $L = \omega \times L_0$ следующим образом:

$$\nu(x) = (\nu_0(l(x)), r(x))$$

(элементы L рассматриваем как пары (a,b), $a \in L_0$, $b \in \omega$ с лексикографическим порядком), где ℓ и r — канторовские функции, нумерующие пары натуральных чисел [19]. Заметим, что эта конструктивизация такова, что идеал Фреше атомной решетки D_L разрешим в естественной конструктивизации D_L, построенной по ν.

Так как D и D_L — счетные атомные решетки и $D/F(D) \cong D_L/F(D_L)$, в силу предложения 4 [3, с. 76] получаем $D \cong D_L$. Остается применить теорему 3.2. Предложение 3.1 доказано.

Следствие 3.4. *Пусть D — конструктивизируемая суператомная решетка D. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *D не алебраически устойчива;*

(2) *D бесконечна;*

(3) *структура алгебраической сводимости решетки D имеет счетную ширину.*

Доказательство. Установим справедливость импликации (2) $\Rightarrow$ (3) (остальные очевидны). Пусть D — счетная суператомная решетка атомарного типа $\langle\alpha,\beta,n\rangle$. Тогда D изоморфна решетке интервалов линейно упорядоченного множества $\omega^\alpha \cdot n + \omega^\beta$ [3, с. 85]. Так как D конструктивизируема, α — конструктивный ординал [3, с. 395]. Пусть $\langle\alpha_0,\beta_0,n_0\rangle$ — атомарный тип суператомной решетки $D/F(D)$. Поскольку $\alpha_0 \leqslant \alpha$, в силу [19] α_0 — конструктивный ординал. Поэтому решетка $D/F(D)$ конструктивизируема. Следствие 3.4 доказано.

Получим теперь описание ширины структур алгебраической сводимости и описание спектра и соотношений алгоритмических размерностей, а также критерий алгоритмической устойчивости для дистрибутивных решеток с относительными дополнениями и нулем в языке с идеалом Фреше.

Теорема 3.3. *Для конструктивизируемой дистрибутивной решетки $\langle D,F\rangle$ с относительными дополнениями и нулем следующие условия эквивалентны:*

(1) *решетка $\langle D,F\rangle$ не алгебраически устойчива;*

(2) *алгебраическая размерность $\langle D,F\rangle$ равна ω;*

(3) *структура алгебраической сводимости решетки $\langle D,F\rangle$ имеет счетную ширину;*

(4) *решетка $\langle D,F\rangle$ имеет бесконечно много атомов.*

Доказательство. Импликации (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) очевидны.

Если $\langle D,F\rangle$ имеет конечное число атомов, то непосредственным построением сводящей функции доказывается автоустойчивость и, следовательно, алгебраическая устойчивость решетки $\langle D,F\rangle$.

Для доказательства импликации (4) $\Rightarrow$ (3) применим теорему 3.2. Заметим, что отношение $F(D)$ инвариантно относительно построенных вложений φ_t, и воспользуемся условием рекурсивной несовместности. Теорема 3.3 доказана.

Следствие 3.5. *Для дистрибутивных решеток $\langle D,F\rangle$ с относительными дополнениями и нулем алгебраическая, программная, равномерная размерности и авторазмерность совпадают. Спектр указанных размерностей состоит из 0, 1 и ω, а спектр колмогороской размерности — из 0,1 и 2^ω.*

Если конструктивизируемая система имеет континуум автоморфизмов, то она будет иметь и континуум попарно неэквивалентных по Колмогорову конструктивизаций. Поэтому для конструктивизируемой дистрибутивной решетки $\langle D,F\rangle$ с относительными дополнениями и нулем имеем $\mathbf{K}-\dim\langle D,F\rangle = 1 \iff D$ конечна.

§ 4. Линейные порядки

В работе [7] получен критерий автоустойчивости линейных порядков, который сводится к проверке конечности множества соседних элементов.

Поэтому будем рассматривать только линейные порядки с бесконечным множеством соседних элементов.

Введем обозначения:

$|(a,b)|$ — число элементов интервала $(a,b) = \{c \mid \mathfrak{A} \models (a < c < b) \vee (b < c < a)\}$ линейного порядка $\mathfrak{A}$,

$S_n(x,y)$, $n \in \mathbf{N}$, $B(x,y)$, $P(x)$ и $S(x)$ — отношения, определяемые так:

$$\mathfrak{A} \models S_n(x,y) \Longleftrightarrow (x \neq y \,\&\, |(x,y)| = n),$$

$$\mathfrak{A} \models B(x,y) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \vee_i S_i(x,y),$$

$$\mathfrak{A} \models P(x) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models (\exists y)(S_0(x,y) \,\&\, y < x),$$

$$\mathfrak{A} \models S(x) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models (\exists y)(S_0(x,y) \,\&\, x < y).$$

Отношения $S_0(x,y)$, $B(x,y)$, $P(x)$ и $S(x)$ соответственно будем называть *отношением соседей*, *блок-отношением*, *отношением предшествования* и *отношением следования линейного порядка* $\mathfrak{A}$. Блок, содержащий элемент a, — это множество $\{a\} \cup \{x | \mathfrak{A} \models B(x,a)\}$.

Пусть $<$ — линейный порядок на $\mathfrak{A}$. Через $\ll$ обозначим естественный линейный порядок на множестве блоков $\mathfrak{A}$, а через $\langle \mathfrak{A}, B \rangle$ — линейный порядок $\mathfrak{A}$ в языке с блок-отношением.

Через ω, $\mathbf{Z}$ и η обозначим соответственно порядковые типы множества натуральных, целых и рациональных чисел. Из контекста будет ясно, когда n обозначает порядковый тип конечного n-элементного множества. Напомним, что линейный порядок, не содержащий подпорядка по типу рациональных чисел, называется *рассеянным* [18].

Используя теорему 2.1, укажем счетное число независимых совокупностей алгоритмических массовых проблем для линейных порядков.

Предложение 4.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — линейный порядок, $\mathfrak{B}$ — его устойчивый подпорядок, имеющий бесконечный блок. Если $\mathfrak{A}$ допускает конструктивизацию, при которой разрешимы подпорядок $\mathfrak{B}$, блок-отношение и отношение соседей линейного порядка $\mathfrak{B}$, то структура алгебраической сводимости $\mathfrak{A}$ имеет счетную ширину.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — рекурсивный порядок, $\mathfrak{B}$ — рекурсивный подпорядок и отношения $S_0(x,y)$ и $B(x,y)$ линейного порядка $\mathfrak{B}$ рекурсивны. Определим устойчивые равномерно рекурсивные отношения на линейном порядке $\mathfrak{A}$:

$$T_i(\mathfrak{A}) = \{(a,b) \mid a,b \in \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \models S_n(a,b),\ n = p_i \cdot k,\ k \in \mathbf{N}\},\ i \in \mathbf{N}.$$

Зафиксируем произвольное $s \in \mathbf{N}$ и построим представление $\{\mathfrak{A}_t, t \geqslant 0\}$ рекурсивной модели $\mathfrak{A}$, для которого последовательности отношений $\{Q(\mathfrak{A}) = T_s(\mathfrak{A})\}$, $\{T_i(\mathfrak{A}) \mid i \in \mathbf{N}, i \neq s\}$ удовлетворяют условию рекурсивной несовместности.

Выберем произвольным образом из бесконечного блока линейного порядка $\mathfrak{B}$ элемент c. Будем считать, что этот блок имеет тип ω (остальные случаи рассматриваются аналогично). Рассмотрим эффективную последовательность $C = \{c_0 = c, c_1, \dots\} \subseteq \mathfrak{B}$, такую, что определяемую условиями $\mathfrak{B} \models S_{n-1}(c_0, c_n) \,\&\, c_0 < c_n$.

Разберем два случая.

Случай 1: для любого i существует $j \geqslant i$ такое, что $\mathfrak{A} \models \neg S_o(c_j, c_{j+1})$. Искомое представление будем строить по шагам. На каждом шаге будем определять вспомогательные числа $n(t)$ и q_t таким образом, что $C \cap \mathfrak{A}_t = \{c_0, \ldots, c_{n(t)}\}$ и q_t делит $n(t), t \geqslant 1$.

Шаг 0. Положим $\mathfrak{A}_0 = \{c_0, \ldots, c_{n(0)}\}$ и $n(0) = p_0$.

Шаг $t+1$. Пусть $c_0, \ldots, c_{n(t)}$ — все элементы $C \cap \mathfrak{A}_t$, а $r(t)$ — число элементов $\mathfrak{A}_t$, не лежащих в $\mathfrak{B}$. Выберем наименьший элемент $a \in \mathfrak{A} \setminus (\mathfrak{A}_t \cup C)$ (в обычном порядке на $\mathbb{N}$), элементы

$$c_{i_0} = c_{n(t)} < c_{i_1} < \ldots < c_{i_{n(t)}} < c_{i_{n(t)+1}}$$

и конечные множества $A_k \subseteq (c_{i_k}, c_{i_{k+1}})$, $k = 0, \ldots, n(t)$ такие, что каждое A_k содержит не менее $r(t)$ элементов из $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ и интервал $(c_{i_k}, c_{i_{k+1}})$ содержит в точности $q_t^{(p_s-1)s_k}$ элементов из C для некоторого числа $s_k \geqslant 1$, где $q_t = \Pi_{\substack{i \leqslant t \\ i \neq s}} p_i$. Найдем наименьшее число $u \geqslant 1$ такое, что $n(t) \cdot p_{t+1}^u > i_{n(t)} + 1$, и положим

$$n(t+1) = n(t) \cdot p_{t+1}^u,$$

$$\mathfrak{A}_{t+1} = \mathfrak{A}_t \cup \{a\} \cup A_0 \cup \ldots \cup A_{n(t)} \cup \{c_i \mid i \leqslant n(t+1)\}.$$

Перейдем к следующему шагу.

Проверим свойство (1) условия рекурсивной несовместности для выбранных последовательностей отношений.

Для фиксированного m рассмотрим шаг $t_0 > m$ такой, что $t_0 > s+1$ и найдутся элементы $c_k, c_\ell \in \mathfrak{A}_{t_0}$ и

$$\cup_{i \geqslant 0}([c_i, c_{i+1}) \cap \mathfrak{A}_m) \subseteq [c_0, c_k), \mathfrak{B} \models S_{p_s}(c_k, c_\ell) \,\&\, c_k < c_\ell.$$

Пусть $t > t_0$ — произвольный шаг и c_r — элемент C такой, что

$$\cup_{i \geqslant 0}([c_i, c_{i+1}) \cap \mathfrak{A}_t) \subseteq [c_0, c_r).$$

Из построения ясно, что можно так определить изоморфные вложения

$$\Psi_{n(t)}{:}(c_{n(t)}, c_r) \cap \mathfrak{A}_t \hookrightarrow A_{n(t)},$$

$$\Psi_j{:}(c_j, c_{j+1}) \cap \mathfrak{A}_t \hookrightarrow A_j,\ j = k, \ldots, n(t) - 1,$$

что элементы $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ будут переходить в элементы $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$. Теперь изоморфное вложение $\varphi_t{:}\mathfrak{A}_t \hookrightarrow \mathfrak{A}_{t+1}$ определим следующим образом:

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} x, & \text{если } \mathfrak{A} \models (x < c_k \vee x > c_r), \\ \Psi_{n(t)}(x), & \text{если } x \in (c_{n(t)}, c_r), \\ \Psi_j(x), & \text{если } x \in (c_j, c_{j+1}) \text{ и } j = k, \ldots, n(t) - 1, \\ c_{i_j}, & \text{если } x = c_j \text{ и } j = k, \ldots, n(t). \end{cases}$$

Заметим, что $\mathfrak{B} \models S_q(\varphi_t(c_k), \varphi_t(c_\ell))$, где

$$q = q_t^{(p_s-1)s_k} + q_t^{(p_s-1)s_{k+1}} + \ldots + q_t^{(p_s-1)s_{l-1}} + p_s.$$

Используя простые свойства сравнений в теории чисел (см., например, [20]), легко понять, что $\varphi_t(c_k, c_\ell) \notin Q^{t+1}$ и $(c_k, c_\ell) \in Q(\mathfrak{A})$. Очевидно, что если $x, y \in \mathfrak{A}_t$, то

$$\mathfrak{B} \models B(x,y) \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models B(\varphi_t(x), \varphi_t(y)).$$

Покажем теперь, что если $x, y \in \mathfrak{A}_t$, $x < y$ и $i \leqslant t$, $i \neq s$, то

$$(x,y) \in T_i(\mathfrak{A}) \Longleftrightarrow \varphi_t(x,y) \in T_i(\mathfrak{A}).$$

Действительно, пусть $\mathfrak{B} \models B(x,y)$. Возможны только три случая: либо $\mathfrak{B} \models (y < c_k \vee x > c_r)$, либо $\mathfrak{B} \models (x < c_k \leqslant y = c_v < c_r)$, либо $\mathfrak{B} \models (c_k \leqslant x = c_u < y = c_v < c_r)$. Тогда

$$|\varphi_t(x,y) \supset \cap\mathfrak{B}| = \begin{cases} |(x,y \cap \mathfrak{B}|, \\ \quad \text{если } \mathfrak{B} \models (y < c_k \vee x > c_r); \\ |(x,y) \cap \mathfrak{B}| + n(t) + q_t^{(p_s-1)s_0} + q_t^{(p_s-1)s_1} + \ldots \\ +q_t^{(p_s-1)s_{v-1}}, \\ \quad \text{если } \mathfrak{B} \models (x < c_k \leqslant y = c_v < c_r); \\ |(x,y) \cap \mathfrak{B}| + q_t^{(p_s-1)s_u} + q_t^{(p_s-1)s_{u+1}} + \ldots \\ +q_t^{(p_s-1)s_{v-1}}, \\ \quad \text{если } \mathfrak{B} \models (c_k \leqslant x = c_u < y = c_v < c_r). \end{cases}$$

Поскольку p_i делит q_t и $n(t)$, эквивалентность очевидна.

Таким образом, случай 1 разобрали.

Случай 2: существует элемент $c_i \in C$ такой, что $\mathfrak{A} \models S_0(c_j, c_{j+1})$ для всех $j \geqslant i$.

Построение аналогично построению в случае 1, нужно только исключить выбор множества A_k, определение функции $r(t)$ и положить $n(0) = p_0^k > i$ для подходящего k.

Согласно теореме 2.1 структура алгебраической сводимости линейного порядка $\mathfrak{A}$ имеет счетную ширину. Предложение 4.1 доказано.

Предложение 4.2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — линейный порядок без бесконечных блоков. Предположим, что длины блоков $\mathfrak{A}$ не ограничены в совокупности. Если $\mathfrak{A}$ допускает конструктивизацию, при которой блок-отношение и отношение соседей разрешимы, то структура алгебраической сводимости $\mathfrak{A}$ имеет счетную ширину.*

Доказательство. Как и в предыдущем утверждении, определим устойчивые равномерно рекурсивные отношения на рекурсивном порядке $\mathfrak{A}$:

$$T_i(\mathfrak{A}) = \{\, (a,b) \mid \mathfrak{A} \models S_n(a,b),\ n = p_i \cdot k,\ k \in \mathbb{N}\}, i \in \mathbb{N},$$

и покажем, что последовательности отношений $\{Q(\mathfrak{A}) = T_s(\mathfrak{A})\}$ и $\{T_i(\mathfrak{A}) \mid i \in \mathbb{N},\ i \neq s\}$ удовлетворяют условию рекурсивной несовместности.

Заметим, что для любого $n \in \mathbb{N}$, произвольного блока C линейного порядка $\mathfrak{A}$ и элемента $x \notin C$ найдутся такие элементы $x_0, \ldots, x_n$, лежащие между C и x, что $\mathfrak{A} \models (\&_{i,j \leqslant n} \neg B(x_i, x_j))$. Это свойство и неограниченность в совокупности длин всех блоков $\mathfrak{A}$ позволяют построить искомое представление $\{\mathfrak{A}_t,\ t \geqslant 0\}$ следующим образом.

Шаг 0. Пусть C — произвольный блок длины, не менее 2. Положим $\mathfrak{A}_0 = C$.

Шаг $t+1$. Пусть $C_0 \ll \ldots \ll C_n$ — все блоки $\mathfrak{A}$, имеющие не менее двух своих представителей в $\mathfrak{A}_t$; l — наибольшее число элементов $\mathfrak{A}_t$, лежащих в одном неодноэлементном блоке линейного порядка $\mathfrak{A}$; r — число элементов $x \in \mathfrak{A}_t$ таких, что в $\mathfrak{A}_t$ имеется единственный элемент из блока, содержащего x.

Эффективно выберем конечные интервалы $A_0, \ldots, A_n$ и конечные подмножества $B_0, \ldots, B_{n+1}$ линейного порядка $\mathfrak{A}$ так, чтобы выполнялись следующие свойства:

1) A_k является интервалом некоторого блока C_{i_k}; длины A_k не меньше $l + q_t$, где
$$q_t = \Pi_{\substack{i \leqslant t \\ i \neq s}} p_i, \; k = 0, \ldots, n;$$

2) элементы B_k расположены между блоками $C_{i_{k-1}}$ и C_{i_k}; B_k содержит не менее r элементов и для любых $x, y \in B_k$ имеем $\mathfrak{A} \models \urcorner B(x,y)$, где $k = 0, \ldots, n+1$ и $C_{i_{-1}} \ll C_{i_0} \ll \ldots \ll C_{i_n} \ll C_{i_{n+1}}$ — подходящие блоки $\mathfrak{A}$;

3) имеет место одно из следующих условий:

   (а) $C_{i_{n+1}} \subseteq (-\infty, c)$, где c — наименьший элемент $\mathfrak{A}_t$; в этом случае на интервал $(-\infty, c)$ ставим метку;

   (б) $C_{i_{-1}} \subseteq (d, +\infty)$, где d — наибольший элемент $\mathfrak{A}_t$; в этом случае на интервал $(d, +\infty)$ ставим метку;

   (в) $C_{i_{-1}} \cup C_{i_{n+1}} \subseteq (c, d)$, где c, d — соседние элементы $\mathfrak{A}_t$; в этом случае метку ставим на (c, d).

Найдем наименьший (в обычном порядке на $\mathbb{N}$) элемент $a \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_t$ и положим
$$A = \cup_{k \leqslant n}(A_k \cup B_k) \cup B_{n+1} \cup \{a\} \cup \mathfrak{A}_t,$$
$$\mathfrak{A}_{t+1} = A \cup \{x \mid \exists y \in A(\mathfrak{A} \models B(a,y) \,\&\, x \in (a,y))\}.$$
Перейдем к следующему шагу.

Свойства конструкции

Свойство 4.1. *Если $x, y \in \mathfrak{A}_t$ и $\mathfrak{A} \models (B(x,y) \,\&\, x < z < y)$, то $z \in \mathfrak{A}$.*

Свойство 4.2. *Каждый интервал может отмечаться только один раз.*

Свойство 4.3. *Если интервал (a,b) отмечается на шаге $t > m$, то либо интервал (a,b) лежит между соседними элементами $\mathfrak{A}_m$, либо a не меньше наибольшего элемента $\mathfrak{A}_m$, либо b не больше наименьшего элемента $\mathfrak{A}_m$.*

Свойство 4.4. *Для любого m существует интервал (d,c), внутри которого лежит бесконечно много отмеченных интервалов, причем либо $d = -\infty$ и c — наименьший элемент $\mathfrak{A}_m$, либо $c = +\infty$ и d — наибольший элемент $\mathfrak{A}_m$, либо c и d — соседние элементы $\mathfrak{A}_m$.*

Проверим условие рекурсивной несовместности для выбранных последовательностей отношений.

Для фиксированного m рассмотрим интервал (c, d), определенный для $\mathfrak{A}_m$ в свойстве 4.4 конструкции. Будем считать, что c и d — соседние элементы $\mathfrak{A}_m$ и $\mathfrak{A} \models c < d$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Пусть $t_0 > m$ и $t_0 > s+1$ — такой шаг, что

(1) $a \in \mathfrak{A}_{t_0}$, где a — наибольший элемент блока, содержащего элемент c;

(2) $b \in \mathfrak{A}_{t_0}$, где b — наименьший элемент блока, содержащего элемент d;

(3) для некоторых x, y, $z \in \mathfrak{A}_{t_0} \cap (a, b)$ выполняется соотношение
$$\mathfrak{A} \models (S_{p_s}(x, y) \& S_0(z, y) \& x < z < y).$$

Заметим, что внутри интервала (a, b) лежит бесконечно много отмеченных интервалов и для любого блока C линейного порядка $\mathfrak{A}$ либо $C \cap (a, b) = \varnothing$, либо $C \subseteq (a, b)$.

Пусть теперь на шаге $t+1$, $t > t_0$, ставится метка на некоторый интервал, вложенный в (a,b); $x, y \in C_{k_0}$ и C_{k_1}, C_{k_2} — соответственно наименьший и наибольший блоки, имеющие не менее двух своих представителей в $(a, b) \cap \mathfrak{A}_t$, $0 \leqslant k_0$, k_1, $k_2 \leqslant n$. Из построения на шаге $t+1$ ясно, что можно так определить изоморфное вложение $\varphi_t : \mathfrak{A}_t \hookrightarrow \mathfrak{A}_{t+1}$, чтобы выполнялись следующие свойства:

- при $k \neq k_0$, $k_1 \leqslant k \leqslant k_2$ образ $C_k \cap (a, b) \cap \mathfrak{A}_t$ есть интервал в A_k; соседние элементы $C_{k_0} \cap \mathfrak{A}_t$, за исключением y и z, φ_t переводит в соседние элементы A_{k_0} и $\mathfrak{A} \models S_{q_t}(\varphi_t(z), \varphi_t(y))$;
- элементы $(a, b) \cap \mathfrak{A}_t$, расположенные между блоками C_k и C_{k+1}, вложение φ_t переводит в множество $B_{k+1} (k = k_1, \ldots, k_2 - 1)$, элементы, меньшие блока C_{k_1}, переводит в множество B_0, элементы большие блока C_{k_2}, переводит в множество B_{n+1};
- φ_t тождественно вне интервала (a, b).

Выписанные условия на φ_t, свойство 4.1 конструкции, а также выбор интервала (a, b), элемента $(x, y) \in Q(\mathfrak{A})$ и множеств A_k, B_k обеспечивают выполнение условия рекурсивной несовместности.

Таким образом, структура алгебраической сводимости имеет счетную ширину. Предложение 4.2 доказано.

М. Ф. Мозес в [12] доказал следующие утверждения.

Теорема 4.1. *Для всякого рекурсивного линейного порядка с рекурсивным блок-отношением существует изоморфный линейный порядок с рекурсивным блок-отношением и отношением соседей.*

Следствие 4.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — рекурсивный линейный порядок с рекурсивным блок-отношением и без бесконечных блоков. Тогда*

(1) *существует изоморфный рекурсивный линейный порядок с рекурсивными блок-отношением, отношением соседей и отношением предшествования;*

(2) *существует изоморфный рекурсивный линейный порядок с рекурсивными блок-отношением, отношением соседей и отношением следования.*

Таким образом, в силу предложений 4.1, 4.2 и теоремы 4.1 справедлива

Теорема 4.2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — линейный порядок и длины блоков $\mathfrak{A}$ не ограничены в совокупности. Если $\mathfrak{A}$ допускает конструктивизацию с разрешимым блок-отношением, то структура алгебраической сводимости линейного порядка $\mathfrak{A}$ имеет счетную ширину.*

Замечание 4.1. Фактически мы показали, что для линейного порядка $\mathfrak{A}$, удовлетворяющего условиям теоремы, совокупности $\tau_i = \{T_j(\mathfrak{A}) \mid j \in \mathbb{N}, j \neq i\}, i \in \mathbb{N}$, алгоритмических массовых проблем независимы, причем эти проблемы двуместные. Заметим, что у линейного порядка $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$ нет независимых совокупностей одноместных проблем, а у линейных порядков $\mathbf{Z} \times n$, $n \in \omega$, таких совокупностей лишь конечное число, в то же время эти линейные порядки удовлетворяют условию теоремы.

Следствие 4.2. *Пусть $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle$ — конструктивизируемый линейный порядок, длины блоков которого не ограничены в совокупности. Тогда структура алгебраической сводимости имеет счетную ширину; алгебраическая, программная, равномерная размерности и авторазмерность совпадают и равны ω.*

Доказательство. Необходимо только заметить, что блок-отношение соответственно линейного подпорядка в предложении 4.1 и всего линейного порядка в предложении 4.2 инвариантно относительно построенных в предложениях 4.1 и 4.2 вложений φ_t, и воспользоваться условием рекурсивной несовместности.

Теперь покажем, что, вообще говоря, в теореме 4.2 нельзя отказаться от условия неограниченности в совокупности длин всех блоков линейного порядка.

Теорема 4.3. *Существует линейный порядок, для которого структура алгебраической сводимости является трехэлементным линейно упорядоченным множеством.*

Доказательство. Покажем, что линейный порядок $\mathfrak{A}$ по типу $2 \times \eta$ искомый. Пусть $D_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \mathfrak{A} \models x_1 < \dots < x_n\}, n \geqslant 1$. Рассматривая алгебраическую сводимость конструктивизаций линейного порядка, можно учитывать только устойчивые отношения $R \subseteq D_n$, $n \geqslant 1$. Сначала опишем однородные отношения, содержащиеся в D_n. (Устойчивое отношение *однородно*, если для любых двух его элементов существует автоморфизм модели, переводящий один элемент в другой [5].) Для произвольного кортежа $(x_1, \dots, x_n) \in D_n$ определим набор $[(x_1, \dots, x_n)] = (A_1, k_1, A_2, k_2, \dots, k_{n-1}, A_n)$ так, что

$$
\begin{gathered}
A_i \in \{S, P\},\ k_i \in \{0, 1\},\\
k_i = 1 \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models B(x_i, x_{i+1}),\\
A_i = P \Longleftrightarrow x_i \in P,
\end{gathered}
$$

где P, S и B — отношение предшествования, отношение следования и блок-отношение линейного порядка $\mathfrak{A}$, а для $X \subseteq N^n$ определим $[X] \leftrightharpoons \{[(x_1, \dots, x_n)] \mid (x_1, \dots, x_n) \in X\}$.

Пусть $x_i \in D_n$, $R \subseteq D_n$. Положим

$$
\Big]\cup_i [x_i]\Big[= \{x \in D_n \mid [x] = [x_i] \text{ для некоторого } i\}.
$$

Ясно, что всякое однородное отношение, содержащееся в D_n, есть $[x]$ для подходящего $x \in D_n$.

Лемма 4.1. *Пусть R — непустое устойчивое отношение $\mathfrak{A}$ и $R \subseteq D_n$. Тогда выполнено одно из следующих условий:*

(1) $R = D_n$,

(2) *при любой конструктивизации разрешимость отношения R эквивалентна разрешимости блок-отношения,*

(3) *при любой конструктивизации разрешимость отношения R эквивалентна разрешимости отношения предшествования.*

Доказательство. Сначала индукцией по местности отношения покажем, что если $R \neq D_n$, то при любой конструктивизации разрешимость R влечет разрешимость P.

Базис индукции очевиден. Пусть $n \geqslant 2$ и $R^0 = R$, $R^1 = D_n \setminus R$. Выберем наборы α, β и индексы i, $j \in \{0,1\}$ так, что $(\alpha, 0, P) \in [R^i]$, $(P, 0, \beta) \in [R^j]$. Пусть $[R^i]$ состоит из следующих наборов:

$$(\alpha_i, 0, P), \qquad 1 \leqslant i \leqslant k, k \geqslant 1;$$

$$(\beta_j, 0, S), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, m \geqslant 0;$$

$$(\Delta_l, 1, P), \qquad 1 \leqslant l \leqslant s, s \geqslant 0.$$

Случай 1: $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$. Тогда $\left] \cup_{i=1}^k \alpha_i \right[$ — устойчивое непустое $(n-1)$-местное отношение и

$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \left] \cup_{i=1}^k \alpha_i \right[\iff$ для произвольно выбранных элементов y_1, y_2 таких, что $(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, y_2) \in D_{n+1}$, выполняется $(x_1, \dots, x_{n-1}, y_2) \in R^i$.

Следовательно, если R — разрешимое отношение, то $\left] \cup_{i=1}^k \alpha_i \right[$ также разрешимо. Поэтому можно считать, что $\left] \cup_{i=1}^k \alpha_i \right[= D_{n-1}$. Тогда $[D_n \setminus R^i]$ состоит из наборов вида $(\eta, S, 1, P)$, и разрешимость R влечет разрешимость отношения P.

Случай 2: $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \neq \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$. В этом случае найдется набор α' такой, что

$$(\alpha', 0, P) \in [R^{r_1}], (\alpha', 0, S) \in [R^{r_2}], \quad r_1, r_2 \in \{0,1\}, r_1 \neq r_2.$$

Аналогично, рассматривая два случая для отношения R^j, можно считать, что найдется набор β' такой, что

$$(P, 0, \beta') \in [R^{l_1}], (S, 0, \beta') \in [R^{l_2}], \text{ где } l_1, l_2 \in \{0,1\}, l_1 \neq l_2.$$

Выберем произвольные элементы p, $s \in \mathfrak{A}$ и кортежи u, v такие, что

$$\mathfrak{A} \models (S_0(s,p) \,\&\, s < p), [(p,u)] = (P, 0, \beta'), [(v,p)] = (\alpha', 0, P).$$

Нетрудно видеть, что

$$x \in P \iff \mathfrak{A} \models (x = p \vee (x < s \,\&\, (x,u) \in R^{l_1}) \vee (p < x \,\&\, (v,x) \in R^{r_1})).$$

Таким образом, мы показали, что разрешимость отношения $R \neq D_n$ влечет разрешимость отношения P. Поэтому, не нарушая общности, считаем, что $D_n \neq R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$, $A_i \in \{P, S\}$.

Пусть $A_1 = P$ или $A_1 = A_2 = S$, тогда разрешимость отношения R эквивалентна разрешимости $R \restriction (2, \ldots, n)$. Действительно,

$$
\begin{aligned}
(x_1, \ldots, x_n) \in R \iff & ((x_2, \ldots, x_n) \in R \restriction (2, \ldots, n) \& \\
& (x_1, \ldots, x_n) \in D_n \& x_1 \in A_1),
\end{aligned}
$$

$(x_2, \ldots, x_n) \in R \restriction (2, \ldots, n) \iff$ для произвольно выбранного элемента $x_1 \in A_1$ такого, что $(x_1, \ldots, x_n) \in D_n$, выполняется $(x_1, \ldots, x_n) \in R$.

Поэтому можно считать, что $[R]$ состоит из наборов

$$(S, 0, P, 0, \alpha_i),\ 1 \leqslant i \leqslant s,\ s \geqslant 0,\ (S, 1, P, 0, \beta_j),\ 1 \leqslant j \leqslant k,\ k \geqslant 0 \text{ и } n \geqslant 3.$$

Если $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$, то аналогичным образом нетрудно показать, что разрешимость отношения R эквивалентна разрешимости отношения $R \restriction (3, \ldots, n)$.

Теперь пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\} \neq \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$. Следовательно, для некоторых i, γ

$$(S, 1, P, 0, \gamma) \in [R^i \cap A_1 \times \ldots \times A_n],\ (S, 0, P, 0, \gamma) \notin [R^i \cap A_1 \times \ldots \times A_n].$$

Тогда имеет место эквивалентность

$(x_1, x_2) \in \big]\, (S, 1, P) \,\big[\iff$ $(x_1, x_2) \in D_2$ и для произвольно выбранных элементов $z_1, z_2, z_3, y_1, \ldots, y_n$ таких, что $(x_1, x_2, z_1, z_2, z_3, y_3) \in D_6$, $(y_1, \ldots, y_n) \in R^i \cap A_1 \times \ldots \times A_n$, $(z_1, z_3, y_3, \ldots, y_n) \notin R^i \cap A_1 \times \ldots \times A_n$ и $(z_1, z_3) \in S \times P$, выполняется $(x_1, x_2, y_3, \ldots, y_n) \in R^i \cap A_1 \times \ldots \times A_n$.

Следовательно, разрешимость отношения R эквивалентна разрешимости блок-отношению. Лемма 4.1 доказана.

Для завершения доказательства теоремы нам потребуются свойства некоторых отношений линейных порядков. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольный линейный порядок. Рассмотрим отношения P_k, определяемые формулами

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &\doteq \forall y (y < x \to \neg S_0(y, x)), \\
P_k(x) &= \exists y (P_{k-1}(y) \,\&\, S_0(y, x) \,\&\, y < x), k \geqslant 2.
\end{aligned}
$$

Предложение 4.3. 1. *Если $\mathfrak{A}$ — конструктивный линейный порядок с бесконечным числом неодноэлементных блоков и разрешимыми блок-отношением B и отношением P_k, то P_k разрешимо, а B неперечислимо в подходящей конструктивизации $\mathfrak{A}$.*

2. *Если $\mathfrak{A}$ — конструктивный линейный порядок с бесконечным разрешимым отношением P_k, $k \geqslant 2$, то P_k неперечислимо в подходящей конструктивизации $\mathfrak{A}$.*

Доказательство проводится с использованием условия рекурсивной несовместности для указанных отношений по аналогии с доказательством предложения 4.2.

Доказательство теоремы 4.3 вытекает из леммы 4.1 и предложения 4.3. Теорема 4.3 доказана.

Таким образом, у линейного порядка $2\times\eta$ нет независимых совокупностей алгоритмических массовых проблем. Кроме того, получается довольно неожиданное различение размерностей в классе линейных порядков.

Следствие 4.3. *Существует линейный порядок $\mathfrak{A}$ такой, что*

$$\mathbf{Alg}-\dim\mathfrak{A} < \mathbf{A}-\dim\mathfrak{A} = \omega.$$

Замечательно то, что данный пример в отличие от всех известных ранее (см. [8, 9]) отличается своей естественностью и простотой, не требует каких-либо алгоритмических построений. Аналогичным образом можно строить другие примеры линейных порядков $\mathfrak{A}$, длины блоков которых ограничены в совокупности и алгебраическая размерность $\mathfrak{A}(\langle\mathfrak{A},B\rangle)$ конечна.

Однако, как показывает следующий пример, в классе линейных порядков с ограниченными в совокупности длинами блоков есть линейные порядки счетной алгебраической размерности.

Пусть f — ограниченная рекурсивная функция и $f(x)\geqslant 2$ для всех x; $\mathfrak{A}$ — рекурсивный линейный порядок с бесконечным блоком и рекурсивным блок-отношением; $\mathfrak{A}'$ — линейный порядок типа $\Sigma\{\eta+f(i)\mid i\in\mathfrak{A}\}$. Определим устойчивый подпорядок

$$\mathfrak{B}'=\{x\mid \mathfrak{A}'\models\forall y(y<x\to\neg S_0(x,y))\&\exists z S_0(x,z)\}$$

линейного порядка $\mathfrak{A}'$. Таким же образом конструктивизация линейного порядка $\mathfrak{A}'$, при которой разрешимы $\mathfrak{B}'$, блок-отношение и отношение соседей $\mathfrak{B}'$. Согласно предложению 4.1 $\mathbf{Alg}-\dim\mathfrak{A}'=\omega$, причем длины блоков $\mathfrak{A}'$ ограничены в совокупности.

Другое применение предложения 4.1 состоит в следующем. С. С. Гончаровым построен (см. [2]) конструктивизируемый, но не сильно конструктивизируемый линейный порядок $\mathfrak{A}$ типа

$$\sum_m\sum_i\sum_h(\Delta(m,i,h)+1+\omega^k\times\eta),\quad \omega^{2m+k-1}\leqslant\Delta(m,i,h)\leqslant\omega^{2m+k}, k\geqslant 1.$$

Блок-отношение этого порядка неразрешимо при любой конструктивизации (см. [11]). Однако существует конструктивизация, при которой устойчивый линейный подпорядок типа $1+\omega^k\times\eta+1$ имеет разрешимые блок-отношение и отношение соседей. Поэтому $\mathbf{Alg}-\dim\mathfrak{A}=\omega$. Таким же образом разбирается аналогичный пример для рассеянного линейного порядка с неразрешимым при любой конструктивизации блок-отношением [21].

Для рассеянных линейных порядков в языке с блок-отношением описание ширины структур алгебраической сводимости и решение проблем спектра и соотношений алгоритмических размерностей дает следующая

Теорема 4.4. *Для конструктивизируемого рассеянного линейного порядка $\langle\mathfrak{A},B\rangle$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\langle\mathfrak{A},B\rangle$ не алгебраически устойчив,*

(2) *алгебраическая размерность $\langle\mathfrak{A},B\rangle$ равна ω,*

(3) *структура алгебраической сводимости линейного порядка* $\langle\mathfrak{A}, B\rangle$ *имеет счетную ширину,*

(4) $\langle\mathfrak{A}, B\rangle$ *бесконечен.*

Доказательство. Импликации (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (4) очевидны. Для доказательства импликации (4) $\Rightarrow$ (3) применим следствие 4.2. Необходимо только заметить, что бесконечный рассеянный линейный порядок содержит бесконечный блок.

Следствие 4.4. *Для рассеянных линейных порядков* $\langle\mathfrak{A}, B\rangle$ *алгебраическая, программная, равномерная размерности и авторазмерность совпадают. Спектр этих размерностей состоит из* 0,1 *и* ω, *а спектр колмогоровской размерности состоит из* 0,1, ω *и* 2^ω.

Получим характеризацию алгебраически устойчивых линейных порядков $\langle\mathfrak{A}, B\rangle$.

Теорема 4.5. *Для конструктивизируемого линейного порядка* $\langle\mathfrak{A}, B\rangle$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) $\langle\mathfrak{A}, B\rangle$ *алгебраически устойчив,*

(2) *линейный порядок* $\mathfrak{A}$ *имеет порядковый тип*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \times \eta + k_i + m_{n+1} \times \eta$$

для некоторых m_i, $k_i \in \omega$, $m_{n+1} \in \omega$, $k_i \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$,

(3) $\langle\mathfrak{A}, B\rangle$ *автоустойчив.*

Доказательство. Импликации (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) очевидны. Установим импликацию (1) $\Rightarrow$ (2). В силу следствий 4.2 и 4.1 длины блоков рекурсивного линейного порядка $\mathfrak{A}$ ограничены в совокупности и отношение предшествования, отношение следования, отношение соседей и блок-отношение рекурсивны. Следовательно, рекурсивно отношение P_1, определенное в предложении 4.3.

Предположим, что $\mathfrak{A}$ не имеет указанный в теореме порядковый тип. В силу условия рекурсивной несовместности нетрудно показать (аналогично как в предложении 4.2), что при подходящей конструктивизации $\langle\mathfrak{A}, B\rangle$ отношение P_1 неразрешимо. Противоречие с условием алгебраической устойчивости $\langle\mathfrak{A}, B\rangle$.

Таким образом, полученная характеризация совпадает с характеризацией С. Шварца [22] автоустойчивых линейных порядков $\langle\mathfrak{A}, B\rangle$. Поэтому справедливо

Следствие 4.5. *Для линейного порядка* $\langle\mathfrak{A}, B\rangle$ *алгебраическая, программная, равномерная устойчивости и автоустойчивость эквивалентны.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Успенский В. А., Семенов А. Л.** Теория алгоритмов: ее основные открытия и приложения // Алгоритмы в современной математике и ее приложениях. Новосибирск, 1982. Ч. 1. С. 99–342.
2. **Гончаров С. С.** Счетные булевы алгебры. Новосибирск: Наука, 1988.

3. **Ершов Ю. Л.** Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
4. **Федоряев С. Т.** Конструктивизируемые модели с линейной структурой алгебраической сводимости // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 6. С. 106–111.
5. **Федоряев С. Т.** О структурах алгебраической сводимости позитивных нумераций // Вычислительные системы. Новосибирск, 1989. Вып. 129. С. 144–151.
6. **Fedoryaev S. T.** Some properties of algebraic reducibility of constructivization // Third Logical Biennial Kleene'90, Bulgaria, June 1990. Sofia, 1990. P. 24–25.
7. **Гончаров С. С., Дзгоев В. Д.** Автоустойчивость моделей // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 1. С. 45–58.
8. **Хусаинов Б. М.** Об алгоритмической размерности унаров // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 4. С. 479–494.
9. **Гончаров С. С.** Алгоритмическая размерность абелевых групп // 17-я Всесоюз. алгебраическая конф., Минск, 14–17 сент. 1983 г.: Тез. докл. Минск, 1983. С. 51.
10. **Remmel J. B.** Recursive isomorphism types of recursive boolean algebras // J. Symbolic Logic. V. 46, N 3. P. 572–594.
11. **Remmel J. B.** Recursive boolean algebras with recursive atoms // J. Symbolic Logic. 1981. V. 46, N 3. P. 595–616.
12. **Crossley J. N., Manaster A. B., Moses M. F.** Recursive categoricity and recursive stability. Australia, 1983. (Preprint / Monash Univ.; № 49).
13. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций. Ч. 3: Конструктивные модели. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1974.
14. **Metakides G., Nerode A.** Recursion theory on fields and abstract dependence // J. Algebra. 1980. V. 65, N 1. P. 36–59.
15. **Metakides G., Nerode A.** Effective content of field theory // Ann. Math. Logic. 1979. V. 17, N 3. P. 289–320.
16. **Nerode A., Remmel J.** Recursive theory on matroids II // Proc. Southeast Asian Conf. on Logic. New York: North-Holland, 1983. P. 133–184.
17. **Shore R.** Controlling the dependence degree of a recursive enumerable vector space // J. Symbolic Logic. 1978. V. 43, N 1. P. 13–22.
18. **Rosenstein J. G.** Linear Orderings. New York: Acad. Press, 1982.
19. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
20. **Виноградов И. М.** Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.
21. **Пинус А. Г.** Об эффективных линейных порядках // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 6. С. 1246–1254.
22. **Schwarz S.** Quotient lattices, index sets and recursive linear orderings // Thes. ... doct. phylosophy. Univ. of Chicago, 1982.