КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ЧЕТВЕРТИ ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ СИСТЕМ НЕ ТИПА КОШИ — КОВАЛЕВСКОЙ*)

Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева

Ряд задач гидродинамики приводит к неклассическим системам уравнений следующего вида:

$$\mathcal{A}_0 D_t u + \mathcal{A}_1(D_{\bar{x}})u + \mathcal{A}_2(D_{\bar{x}}) \int\limits_0^t u(s,\bar{x})\,ds = f(t,\bar{x}), \tag{0.1}$$

где $\mathcal{A}_0$ — вырожденная числовая $(\nu \times \nu)$-матрица, $\mathcal{A}_1(D_{\bar{x}})$, $\mathcal{A}_2(D_{\bar{x}})$ — матричные дифференциальные операторы по $\bar{x}$. Примерами таких систем являются линеаризованная система Навье — Стокса, система волн Россби, система Соболева, система внутренних волн (см., например, [1–5]).

В силу вырожденности матрицы $\mathcal{A}_0$ система (0.1) не является системой типа Коши — Ковалевской, поэтому постановки краевых задач имеют свои особенности. К настоящему времени полная теория краевых задач для систем вида (0.1) не разработана, хотя исследовано большое число конкретных постановок.

В этой работе мы изучаем смешанные краевые задачи в четверти пространства для достаточно широкого класса интегродифференциальных систем с вырожденной матрицей при производной по t. В рассматриваемый класс включаются как классические, так и новые постановки, в частности, для системы Соболева, системы внутренних волн и системы гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска. При выполнении условия типа Лопатинского для исследуемого класса задач установлены разрешимость и корректность в весовых соболевских пространствах $W^l_{p,\gamma}$.

§ 1. Постановка краевой задачи и формулировка основных результатов

Рассматриваются смешанные краевые задачи в четверти пространства $\mathbb{R}^{++}_{n+1} = \{(t,\bar{x}) \,|\, t > 0,\, \bar{x} = (x, x_n) \in \mathbb{R}^+_n\}$ для интегродифференциальной системы уравнений

$$\mathcal{L}(D_t, D_t^{-1}, D_{\bar{x}})u = 0. \tag{1.1}$$

---

*) Исследования проводились при финансовой поддержке Фонда Сороса.

Здесь через D_t и D_{x_j} обозначены операторы дифференцирования по t и x_j соответственно, а через D_t^{-1} — оператор интегрирования по t:

$$D_t^{-1}u(t,\bar{x}) = \int\limits_0^t u(s,\bar{x})\,ds.$$

Сформулируем условия, при которых будут доказаны основные результаты. Сначала поставим условия на оператор $\mathcal{L}(D_t, D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$.

Условие 1. *Оператор $\mathcal{L}(D_t, D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$ задается $(\nu\times\nu)$-матрицей*

$$\mathcal{L}(D_t, D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = \begin{pmatrix} D_t\circ K(D_t^{-1}) & L(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) \\ M(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) & D_t^{-1}\circ N(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) \end{pmatrix},$$

где

$K(D_t^{-1}) = K_0 + D_t^{-1}\circ K_1 + \cdots + (D_t^{-1})^{l_1}\circ K_{l_1}$ — *матричный оператор размеров $m\times m$,* $\det K_0 \neq 0$;

$L(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = L_0(D_{\bar{x}}) + D_t^{-1}\circ L_1(D_{\bar{x}}) + \cdots + (D_t^{-1})^{l_2}\circ L_{l_2}(D_{\bar{x}})$ — *матричный оператор размеров $m\times(\nu-m)$;*

$M(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = M_0(D_{\bar{x}}) + D_t^{-1}\circ M_1(D_{\bar{x}}) + \cdots + (D_t^{-1})^{l_3}\circ M_{l_3}(D_{\bar{x}})$ — *матричный оператор размеров $(\nu-m)\times m$;*

$N(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = N_0(D_{\bar{x}}) + D_t^{-1}\circ N_1(D_{\bar{x}}) + \cdots + (D_t^{-1})^{l_4}\circ N_{l_4}(D_{\bar{x}})$ — *матричный оператор размеров $(\nu-m)\times(\nu-m)$.*

Укажем условия на элементы $l_{k,j}(\tau,\tau^{-1},i\bar{\xi})$ $(\tau = i\eta+\sigma,\ \bar{\xi}\in\mathbb{R}_n)$ матрицы $\mathcal{L}(\tau,\tau^{-1},i\bar{\xi})$, представляющей символ оператора $\mathcal{L}(D_t, D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$.

Условие 2. *Существуют целые числа $\mathrm{s}_1,\ldots,\mathrm{s}_\nu$, $\mathrm{t}_1,\ldots,\mathrm{t}_\nu$ такие, что* $(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant\nu}\mathrm{s}_k = 0,\ \mathrm{t}_j\geqslant 0,\ j=1,\ldots,\nu)$ *и для $k,j=1,\ldots,\nu$*

$$\begin{aligned} &l_{k,j}(\tau,\tau^{-1},i\bar{\xi}) = 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{s}_k+\mathrm{t}_j<0, \\ &l_{k,j}(\tau,\tau^{-1},ci\bar{\xi}) = c^{\mathrm{s}_k+\mathrm{t}_j}\,l_{k,j}(\tau,\tau^{-1},i\bar{\xi}), \quad c>0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Перепишем равенства (1.2) в матричном виде

$$\mathcal{L}(\tau,\tau^{-1},ci\bar{\xi}) = S(c)\mathcal{L}(\tau,\tau^{-1},i\bar{\xi})T(c), \tag{1.3}$$

где $S(c) = (\delta_i^j c^{\mathrm{s}_i})$, $T(c) = (\delta_i^j c^{\mathrm{t}_j})$. Отметим, что из условия 1 следуют равенства $\mathrm{t}_1 = \ldots = \mathrm{t}_{\mathrm{m}} = -\mathrm{s}_1 = \ldots = -\mathrm{s}_m$.

Условие 3. *Пусть $l(\tau,\tau^{-1},i\bar{\xi}) = \det\mathcal{L}(\tau,\tau^{-1},i\bar{\xi}) = \tau^{2m-\nu}a(\tau^{-1},i\bar{\xi})$. Степень полинома $a(\tau^{-1},i\bar{\xi})$ по $\bar{\xi}$ равна $\sum_i(\mathrm{s}_i+\mathrm{t}_i)$, и существует число $\gamma_1\geqslant 0$ такое, что равенство $a(\tau^{-1},i\bar{\xi}) = 0$ $(\operatorname{Re}\tau\geqslant\gamma_1,\ \ \bar{\xi}\in\mathbb{R}_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\bar{\xi}=0$.*

В силу условий 1–3 оператор

$$A_0(D_{\bar{x}}) = \begin{pmatrix} K_0 & L_0(D_{\bar{x}}) \\ M_0(D_{\bar{x}}) & N_0(D_{\bar{x}}) \end{pmatrix}$$

эллиптический по Дуглису — Ниренбергу (см. [6, 7]).

Для системы (1.1) рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(D_t, D_t^{-1}, D_{\bar{x}})u = 0, && (t,\bar{x}) \in \mathbb{R}^{++}_{n-1}, \\ &\mathcal{B}(D_t^{-1}, D_{\bar{x}})u\Big|_{x_n=0} = 0, && t > 0,\ x \in \mathbb{R}_{n-1}, \\ &u^+\big|_{t=0} = u_0^+(\bar{x}), && \bar{x} \in \mathbb{R}^+_n, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $u = \binom{u^+}{u^-}$, $u^+ = u^+(t,\bar{x})$ — вектор-функция с m компонентами, $u^- = u^-(t,\bar{x})$ — вектор-функция с $(\nu - m)$ компонентами. Определим условия на граничный оператор $\mathcal{B}(D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$.

Условие 4. *$\mathcal{B}(D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$ — матричный оператор размеров $\mu \times \nu$, где μ — число корней, лежащих в верхней полуплоскости, следующего уравнения по λ:*

$$a(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda) = 0, \quad \operatorname{Re}\tau \geqslant \gamma_1, \quad \xi \in \mathbb{R}_{n-1}\setminus\{0\}. \tag{1.5}$$

Условие 5. *Оператор $\mathcal{B}(D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$ имеет вид*

$$\mathcal{B}(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = B(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) \circ \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D_t^{-1} \circ I_{\nu-m} \end{pmatrix},$$

где $B(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = B_0(D_{\bar{x}}) + D_t^{-1} \circ B_1(D_{\bar{x}}) + \cdots + (D_t^{-1})^q \circ B_q(D_{\bar{x}})$, I_k — единичная $(k \times k)$-матрица.

Укажем условия на элементы $b_{k,j}(\tau^{-1}, i\bar{\xi})$, $\tau = i\eta + \sigma$ $(\bar{\xi} \in \mathbb{R}_n)$, матрицы $B(\tau^{-1}, i\bar{\xi})$, представляющей символ оператора $B(D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$.

Условие 6. *Существуют целые числа $m_k < 0$ $(k = 1, \ldots, \mu)$ такие, что для $j = 1, \ldots, \nu$*

$$\begin{aligned} &b_{k,j}(\tau^{-1}, i\bar{\xi}) = 0 \quad \text{при} \quad m_k + \mathrm{t}_j < 0, \\ &b_{k,j}(\tau^{-1}, ci\bar{\xi}) = c^{m_k+\mathrm{t}_j} b_{k,j}(\tau^{-1}, i\bar{\xi}), \quad c > 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Перепишем (1.6) в матричном виде (здесь $M(c) = (\delta_k^i c^{m_k})$)

$$B(\tau^{-1}, ci\bar{\xi}) = M(c)B(\tau^{-1}, i\bar{\xi})T(c).$$

Обозначим через S_n оператор следа на гиперплоскость $\{x_n = 0\}$.

Условие 7. *Существует число γ_2 $(\gamma_2 \geqslant \gamma_1)$ такое, что при $\operatorname{Re}\tau \geqslant \gamma_2$ для оператора*

$$\left\{ \begin{pmatrix} K(\tau^{-1}) & L(\tau^{-1}, D_{\bar{x}}) \\ M(\tau^{-1}, D_{\bar{x}}) & N(\tau^{-1}, D_{\bar{x}}) \end{pmatrix}, \ S_n \circ B(\tau^{-1}, D_{\bar{x}}) \right\}$$

выполнено условие Лопатинского (см. [5, 6]).

Из условий 1–7 вытекает, что «предельный» оператор $\{A_0(D_{\bar{x}}),\ S_n \circ B_0(D_{\bar{x}})\}$ удовлетворяет условию Лопатинского.

В дальнейшем $(b_{j,1}(\tau^{-1}, i\bar{\xi}) \dots b_{j,\nu}(\tau^{-1}, i\bar{\xi}))$ обозначает j-ю строку матрицы $B(\tau^{-1}, i\bar{\xi})$, а $\tilde{A}_{\theta,q}(\tau^{-1}, i\bar{\xi})$ — элементы матрицы $\tilde{A}(\tau^{-1}, i\bar{\xi})$, взаимной матрице $A(\tau^{-1}, i\bar{\xi}) = \begin{pmatrix} K(\tau^{-1}) & L(\tau^{-1}, i\bar{\xi}) \\ M(\tau^{-1}, i\bar{\xi}) & N(\tau^{-1}, i\bar{\xi}) \end{pmatrix}$.

Пусть k, l — натуральные числа, $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $\gamma > 0$, $r = \sum_i (\mathrm{s}_i + \mathrm{t}_i)$. Введем функциональные пространства:

$W_p^{k,l}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})$ — соболевское пространство функций $v = v(t, \bar{x})$ с нормой

$$\|v(t,\bar{x})\,;W_p^{k,l}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| = \|D_t^k v(t,\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| + \sum_{|\beta|\leqslant l} \|D_{\bar{x}}^\beta v(t,\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\|;$$

$W_{p,\gamma}^{k,l}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})$ — весовое (с экспоненциальным весом $e^{-\gamma t}$) соболевское пространство функций $v = v(t, \bar{x})$ с нормой

$$\|v(t,\bar{x})\,;W_{p,\gamma}^{k,l}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| = \|e^{-\gamma t} D_t^k v(t,\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| + \sum_{|\beta|\leqslant l} \|e^{-\gamma t} D_{\bar{x}}^\beta v(t,\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\|.$$

Сформулируем результаты о разрешимости краевой задачи (1.4). Для упрощения изложения будем считать, что вектор начальных данных $u_0^+(\bar{x})$ имеет компактный носитель U.

Теорема 1.1. *Пусть компоненты $u_{i,0}^+(\bar{x})$ $(i = 1, \dots, m)$ вектора начальных данных $u_0^+(\bar{x})$ принадлежат $W_p^{\mathrm{t}_1}(\mathbb{R}_n^+)$ и выполнены условия согласования*

$$\begin{aligned} M_0(D_{\bar{x}}) u_0^+(\bar{x}) &= 0, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}_n^+, \\ B_0(D_{\bar{x}}) u_0^+\big|_{x_n=0} &= 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Предположим, что

$$\begin{gathered} \deg_\lambda (b_{j,\theta}(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda) \tilde{A}_{\theta,q}(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda)) < r, \\ j = 1, \dots, \mu, \qquad \theta, q = 1, \dots, \nu. \end{gathered} \tag{1.8}$$

При $n/p' > \mathrm{t}_l - \mathrm{t}_1$ $(l = 1, \dots, \nu)$ существует число γ_0 $(\gamma_0 \geqslant \gamma_2)$ такое, что краевая задача (1.4) имеет единственное решение $u(t, \bar{x})$ с компонентами

$$\begin{aligned} u_i &\in W_{p,\gamma}^{1,\mathrm{t}_1}(\mathbb{R}^{++}_{n+1}), \quad i = 1, \dots, m, \\ u_j &\in W_{p,\gamma}^{0,\mathrm{t}_j}(\mathbb{R}^{++}_{n+1}), \quad j = m+1, \dots, \nu, \end{aligned} \tag{1.9}$$

и справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^m \|u_i(t,\bar{x})\,;W_{p,\gamma}^{1,\mathrm{t}_1}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| + \sum_{j=m+1}^{\nu} \|u_j(t,\bar{x})\,;W_{p,\gamma}^{0,\mathrm{t}_j}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| \leqslant c \sum_{i=1}^m \|u_{i,0}^+(\bar{x})\,;W_p^{\mathrm{t}_1}(\mathbb{R}_n^+)\|, \tag{1.10}$$

где константа $c = c(U)$ не зависит от $u_0^+(\bar{x})$, $\gamma \geqslant \gamma_0$.

Теорема 1.2. *Пусть вектор начальных данных $u_0^+(\bar{x})$ удовлетворяет условиям теоремы* 1.1. *Предположим, что для некоторых индексов* j, θ, q

$$\deg_\lambda(b_{j,\theta}(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda)\tilde{A}_{\theta,q}(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda)) = r. \tag{1.11}$$

При $n/p' > \mathrm{t}_l - \mathrm{t}_1 + 1$ ($l = 1, \ldots, \nu$) *существует число* γ_0 ($\gamma_0 \geqslant \gamma_2$) *такое, что краевая задача* (1.4) *имеет единственное решение* $u(t, \bar{x})$ *с компонентами* (1.9) *и справедлива оценка* (1.10).

Замечание 1.1. В сформулированных теоремах утверждается существование и единственность решения. Но при этом в теореме 1.2 на p налагается более жесткое требование, чем в теореме 1.1. Действительно, неравенство $n/p' > \mathrm{t}_l - \mathrm{t}_1$ переписывается в виде $p(n - \mathrm{t}_l + \mathrm{t}_1) > n$, а неравенство $n/p' > \mathrm{t}_l - \mathrm{t}_1 + 1$ — в виде $p(n - \mathrm{t}_l + \mathrm{t}_1 - 1) > n$. Аналогичная ситуация возникала в [8] при изучении некоторого класса краевых задач для системы Соболева [9] (см. § 2). Как вытекает из [8] условие на p связано с поведением решения задачи (1.4) при $|\bar{x}| \to \infty$.

§ 2. Примеры краевых задач для некоторых систем гидродинамики

Система внутренних волн в приближении Буссинеска. Систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p + \rho g e_3 = f(t, \bar{x}),\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\omega_0^2}{g}(e_3, v) = f_4(t, \bar{x}),\\
&\operatorname{div} v = 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

в случае $f = (f_1, f_2, f_3) = 0$, $f_4 = 0$ принято называть (см., например, [3, 4]) *системой внутренних волн в приближении Буссинеска.* Здесь использованы следующие обозначения:

$v = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости,
ρ — изменение плотности жидкости, вызванное ее движением,
p — давление,
e_3 — орт оси $0x_3$,
g — ускорение свободного падения,
ω_0^2 — квадрат частоты Вяйселя — Брента.

При $\omega_0^2 = \mathrm{const}$ система описывает случай экспоненциально стратифицированной жидкости. Исключая из системы (2.1) $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, получим (см. [4])

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial \nabla p}{\partial t} + \omega_0^2(e_3, v)e_3 = h(t, \bar{x}),\\
&\operatorname{div} v = 0.
\end{aligned}$$

Интегрируя полученные уравнения (при заданных начальных условиях) приходим к следующей системе уравнений первого порядка вида (0.1):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p + \omega_0^2 \int_0^t (e_3, v)e_3\, ds = g(t, \bar{x}),\\
&\operatorname{div} v = 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Рассмотрим смешанную задачу для системы (2.2) при $g = (g_1, g_2, g_3) = 0$ в четверти пространства $t > 0$, $x_3 > 0$, $x \in \mathbb{R}_2$ с начальным условием

$$v|_{t=0} = v^0(\bar{x}) \tag{2.3}$$

и краевым условием

$$\left.\sum_{i=1}^{3} b_i v_i + b_4 \int_0^t p\, ds \right|_{x_3=0} = 0, \tag{2.4}$$

где b_j — вещественные постоянные. Эта задача имеет вид (1.4); при этом $\nu = 4$, $m = 3$, $u^+ = u^+(t, \bar{x}) = v(t, \bar{x})$, $u^- = u^-(t, \bar{x}) = p(t, \bar{x})$,

$$K(D_t^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (D_t^{-1})^2 \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix},$$

$$L(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = \begin{pmatrix} D_{x_1} \\ D_{x_2} \\ D_{x_3} \end{pmatrix}, \quad M(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = (D_{x_1} D_{x_2} D_{x_3}), \quad N(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = 0,$$

$$\mathcal{B}(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = B(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) \circ \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & D_t^{-1} \circ I_1 \end{pmatrix}, \quad B(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = (b_1\, b_2\, b_3\, b_4).$$

Пусть $S(c) = (\delta_i^j c^{s_i})$, $T(c) = (\delta_i^j c^{t_j})$, где $s_1 = s_2 = s_3 = -1$, $s_4 = 0$, $t_1 = t_2 = t_3 = 1$, $t_4 = 2$. Матрица $\mathcal{L}(\tau, \tau^{-1}, i\bar{\xi})$ — символ оператора $\mathcal{L}(D_t, D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$ — удовлетворяет равенству (1.3). Вычислив ее определитель, получим

$$\det \mathcal{L}(\tau, \tau^{-1}, i\bar{\xi}) = \tau^2 a(\tau^{-1}, i\bar{\xi}) = \tau^2 |\bar{\xi}|^2 + \omega_0^2 |\xi|^2.$$

Отметим, что $a(\tau^{-1}, i\bar{\xi}) = 0$ при $\operatorname{Re}\tau > 0$, $\bar{\xi} \in \mathbb{R}_3$ тогда и только тогда, когда $\bar{\xi} = 0$. Уравнение

$$a(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda) = 0 \quad (\operatorname{Re}\tau > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}_2 \backslash \{0\}) \tag{2.5}$$

имеет два корня

$$\lambda^{\pm}(\tau, \xi) = \pm i \sqrt{\frac{\tau^2 + \omega_0^2}{\tau^2}}\, |\xi|,$$

где $\operatorname{Im}\lambda^+(\tau, \xi) > 0$, $\operatorname{Im}\lambda^-(\tau, \xi) < 0$. Таким образом, число строк матрицы граничного оператора $\mathcal{B}(D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$ [см. (1.4)] совпадает с числом корней уравнения (2.5), лежащих в верхней полуплоскости. Для задачи (2.2)–(2.4) условие 7 можно переформулировать следующим образом:

Условие 7′. *Существует число* $\gamma_2 > 0$ *такое, что*

$$l(\tau, \xi) = -i\,(b_1\xi_1 + b_2\xi_2) + b_3 \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \omega_0^2}}\, |\xi| + b_4 \neq 0, \quad \operatorname{Re}\tau \geqslant \gamma_2,\ \xi \in \mathbb{R}_2 \backslash \{0\}.$$

Лемма 2.1. *Условие* $7'$ *выполнено тогда и только тогда, когда* $|b_3| + |b_4| \neq 0$, $b_3 b_4 \geqslant 0$. *При этом справедлива оценка*

$$|l(\tau,\xi)| \geqslant |\, d_1 b_3 |\xi| + b_4 \,|,$$

где $d_1 > 0$ *— константа.*

Доказательство. Покажем, что если существует число $\gamma_2 > 0$ такое, что $l(\tau,\xi) \neq 0$ при $\operatorname{Re}\tau \geqslant \gamma_2$, $\xi \in \mathbb{R}_2 \setminus \{0\}$, то $b_3 b_4 \geqslant 0$, $|b_3| + |b_4| \neq 0$. Доказательство проведем от противного. Предположим, что выполнено одно из следующих условий: $|b_3| + |b_4| = 0$ либо $b_3 b_4 < 0$. Выбирая вектор (ξ_1, ξ_2) ортогональным вектору (b_1, b_2) в первом случае и полагая $|\xi| = -(b_4\sigma) / b_3[\sigma^2 + \omega_0^2]^{1/2}$ во втором, получим, что $l(\tau,\xi) = 0$ при любой вещественной части τ; противоречие.

Докажем обратное утверждение. Пусть $b_3 b_4 \geqslant 0$, $|b_3| + |b_4| \neq 0$. Нетрудно видеть, что величина

$$-\operatorname{Im} l(\tau,\xi) = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 - b_3 \operatorname{Im} \frac{\tau}{[\tau^2 + \omega_0^2]^{1/2}}\, |\xi|$$

может обращаться в нуль при любых b_j. Поскольку $\operatorname{Re}\tau / [\tau^2 + \omega_0^2]^{1/2} > 0$ при $\operatorname{Re}\tau > 0$, имеем

$$\operatorname{Re} l(\tau,\xi) = b_3 \operatorname{Re} \frac{\tau}{[\tau^2 + \omega_0^2]^{1/2}}\, |\xi| + b_4 \neq 0$$

для любых τ, ξ ($\operatorname{Re}\tau > 0$, $\xi \in \mathbb{R}_2 \setminus \{0\}$). Лемма 2.1 доказана.

Матрица $B(\tau^{-1}, i\bar\xi)$ — символ оператора $B(D_t^{-1}, D_{\bar x})$ — в нашем случае есть $(b_1\, b_2\, b_3\, b_4)$. Поэтому матрица $M(c)$ из условия 6 состоит из одного элемента. Поскольку $\mathrm{t}_1 = \mathrm{t}_2 = \mathrm{t}_3 = 1$, $\mathrm{t}_4 = 2$, чтобы удовлетворить условию 6, будем рассматривать краевое условие

$$\sum_{i=1}^{3} b_i v_i \Big|_{x_3=0} = 0 \tag{2.6}$$

(тогда $M(c) = c^{-1}$) либо

$$\int_0^t p\, ds \Big|_{x_3=0} = 0 \tag{2.7}$$

(тогда $M(c) = c^{-2}$).

Таким образом, первая краевая задача и задача (2.2), (2.3), (2.6) при $b_3 \neq 0$ (в частности, вторая краевая задача: $b_1 = b_2 = 0$) удовлетворяют условиям 1–7.

Система Соболева. Малые колебания несжимаемой вращающейся жидкости с постоянной плотностью ($\rho = \mathrm{const}$) описываются системой Соболева [9]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + [v, \boldsymbol{\alpha}] + \nabla p = f(t, \bar x), \\ &\operatorname{div} v = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Относительно краевых задач для этой системы см., например, [8, 10–13]. В статье авторов [8] изучалась краевая задача для системы (2.8) при $f = 0$

с условиями (2.3), (2.4). Эта задача также имеет вид (1.4) со следующими данными: $\nu = 4$, $m = 3$, $u^+ = u^+(t,\bar{x}) = v(t,\bar{x})$, $u^- = u^-(t,\bar{x}) = p(t,\bar{x})$,

$$K(D_t^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + D_t^{-1} \circ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = \begin{pmatrix} D_{x_1} \\ D_{x_2} \\ D_{x_3} \end{pmatrix}, \quad M(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = (D_{x_1} D_{x_2} D_{x_3}),$$

$$N(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = 0, \quad \mathcal{B}(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = B(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) \circ \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & D_t^{-1} \circ I_1 \end{pmatrix},$$

$$B(D_t^{-1}, D_{\bar{x}}) = (b_1\, b_2\, b_3\, b_4).$$

В этом случае операторы $\mathcal{L}(D_t, D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$, $\mathcal{B}(D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$ удовлетворяют условиям 1–5. Действительно, соответствующие величины s_k, t_k для матриц $S(c)$, $T(c)$ принимают значения $\mathrm{s}_1 = \mathrm{s}_2 = \mathrm{s}_3 = -1$, $\mathrm{s}_4 = 0$, $\mathrm{t}_1 = \mathrm{t}_2 = \mathrm{t}_3 = 1$, $\mathrm{t}_4 = 2$, а для определителя матрицы символа исходного оператора имеем

$$\det \mathcal{L}(\tau, \tau^{-1}, i\bar{\xi}) = \tau^2 |\bar{\xi}|^2 + \alpha^2 \xi_3^2.$$

В работе [8] условие Лопатинского записано в виде

$$l(\tau,\xi) = b_4\sqrt{1 + \alpha^2/\tau^2} - \frac{i\tau}{\sqrt{\tau^2+\alpha^2}}\left[b_1\Big(\xi_1 - \frac{\alpha\xi_2}{\tau}\Big) + b_2\Big(\xi_2 + \frac{\alpha\xi_1}{\tau}\Big)\right] + b_3|\xi| \neq 0 \quad (2.9)$$

при $\operatorname{Re}\tau \geqslant \gamma_2$, $\xi \in \mathbb{R}_2 \setminus \{0\}$. Отметим, что при записи определителя Лопатинского $l(\tau,\xi)$ в [8, формула (2)] была допущена опечатка: пропущен множитель $\tau/\sqrt{\tau^2+\alpha^2}$.

Критерий выполнимости условия (2.9) дает следующая

Лемма 2.2 [8]. (а) *Если $b_4 = 0$, то условие (2.9) выполнено тогда и только тогда, когда $b_1^2 + b_2^2 < c_0 b_3^2$, где $c_0 = 2\Big/\Big(\sqrt{1+\alpha^2/\gamma_2^2} - 1\Big)$.*

(б) *Если $b_4 \neq 0$, то условие (2.9) выполнено тогда и только тогда, когда $b_3 b_4 \geqslant 0$ и $b_1^2 + b_2^2 \leqslant c_0 b_3^2$.*

Кроме того, в цитируемой работе указана оценка снизу

$$|l(\tau,\xi)| \geqslant |\xi|\left(|b_3| - \sqrt{(b_1^2+b_2^2)/c_0^2}\right) + |b_4| \operatorname{Re}\sqrt{1+\alpha^2/\tau^2}.$$

Из леммы 2.2 вытекает, что условие 7 выполняется для краевой задачи (2.8), (2.3), (2.4), если коэффициенты b_1, b_2, b_3, b_4 граничного оператора подчинены требованиям $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}_3 \setminus \{b_3 = 0\} \cup (0,0,0)$, $b_3 b_4 \geqslant 0$, $|b_3| + |b_4| \neq 0$.

Чтобы обеспечить условие 6, так же, как и в случае системы (2.2), следует рассмотреть краевую задачу для системы (2.8) с условиями (2.3), (2.6) или (2.3), (2.7).

Система гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска. Рассмотрим еще одну систему гидродинамики, а именно, систему гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска [5]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1}{\partial t} + \alpha v_2 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = h_1(t,\bar{x}),\\
&\frac{\partial v_2}{\partial t} - \alpha v_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = h_2(t,\bar{x}),\\
&\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \omega_0^2 v_3 + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial x_3} = h_3(t,\bar{x}),\\
&\operatorname{div} v = 0.
\end{aligned}$$

Интегрируя третье уравнение по t, приведем систему к виду (0.1):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} + [v,\boldsymbol{\alpha}] + \nabla p + e_3\omega_0^2 \int\limits_0^t (e_3, v)\,ds = g(t,\bar{x}),\\
&\operatorname{div} v = 0,
\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \alpha e_3$

Полагая $g = (g_1, g_2, g_3) = 0$, рассмотрим краевую задачу в четверти пространства с условиями (2.3) и (2.4).

Как и в рассматриваемых выше примерах краевая задача при $g_i = 0$ в четверти пространства с условиями (2.3) и (2.4) имеет вид (1.4), а операторы $\mathcal{L}(D_t, D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$, $\mathcal{B}(D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$ удовлетворяют условиям 1–7 при $b_3 \neq 0$, $b_4 = 0$ либо $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $b_4 \neq 0$. Отметим, что операторы $L(D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$, $M(D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$, $N(D_t^{-1}, D_{\bar{x}})$ такие же, как в случае систем (2.2) и (2.8), а оператор $K(D_t^{-1})$ имеет вид

$$K(D_t^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + D_t^{-1} \circ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0\\ -\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + (D_t^{-1})^2 \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \omega_0^2\end{pmatrix}.$$

Теоремы 1.1 и 1.2 для задач (2.8),(2.3),(2.7) и (2.8),(2.3),(2.6). Для задачи (2.8), (2.3), (2.7) имеем $B(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda) = (0\,0\,0\,1)$, а для задачи (2.8), (2.3), (2.6) — $B(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda) = (b_1\, b_2\, b_3\, 0)$. Поскольку

$$\tilde{A}(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda) = \begin{pmatrix}
\xi_2^2 + \lambda^2 & -\xi_1\xi_2 - \frac{\alpha\lambda^2}{\tau} & -\xi_1\lambda + \frac{\alpha\xi_2\lambda}{\tau} & -i\xi_1 + \frac{\alpha i\xi_2}{\tau}\\
-\xi_1\xi_2 + \frac{\alpha\lambda^2}{\tau} & \xi_1^2 + \lambda^2 & -\xi_2\lambda - \frac{\alpha\xi_1\lambda}{\tau} & -i\xi_2 - \frac{\alpha i\xi_1}{\tau}\\
-\xi_1\lambda - \frac{\alpha\xi_2\lambda}{\tau} & -\xi_2\lambda + \frac{\alpha\xi_1\lambda}{\tau} & \xi_1^2 + \xi_2^2 & -i\lambda - \frac{i\alpha^2\lambda}{\tau^2}\\
-i\xi_1 - \frac{\alpha i\xi_2}{\tau} & -i\xi_2 + \frac{\alpha i\xi_1}{\tau} & -i\lambda - \frac{i\alpha^2\lambda}{\tau^2} & 1 + \frac{\alpha^2}{\tau^2}
\end{pmatrix},$$

мы видим, что для задачи (2.8), (2.3), (2.7) (а также для задачи (2.8), (2.3), (2.6) при $b_1 = b_2 = 0$) выполнено неравенство (1.8). В силу теоремы 1.1 при $p > 3/2$ эти задачи корректно разрешимы в классах функций

$$v_i \in W^{1,1}_{p,\gamma}(\mathbb{R}_4^{++}) \quad (i = 1,2,3), \qquad p \in W^{0,2}_{p,\gamma}(\mathbb{R}_4^{++}).$$

Для задачи (2.8), (2.3), (2.6) при $|b_1| + |b_2| \neq 0$ выполняется равенство (1.11). Поэтому по теореме 1.2 при $p > 3$ эта задача также корректно разрешима в указанных классах. Возникает естественный вопрос: будет ли задача (2.8), (2.3), (2.6) разрешима в этих классах при $p \leqslant 3$? В [8] доказана теорема, из которой следует, что при $3/2 < p \leqslant 3$ для разрешимости задачи достаточно потребовать выполнения равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}_2} (b_1 v_2^0(x,0) - b_2 v_1^0(x,0))\, dx = 0. \tag{2.10}$$

Нетрудно показать, что (2.10) является необходимым условием разрешимости задачи при $3/2 < p \leqslant 3$.

§ 3. Построение приближенных решений

В этом параграфе строится последовательность приближенных решений $\{u_k(t,\bar{x})\}$ краевой задачи (1.4). При построении мы следуем схеме, подробно описанной в [14–16].

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу с параметрами τ, ξ ($\operatorname{Re}\tau > \gamma_2$, $\xi \in \mathbb{R}_{n-1}\setminus\{0\}$):

$$\begin{pmatrix} K(\tau^{-1}) & L(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \\ M(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) & N(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^+ \\ \frac{1}{\tau}\omega^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} K_0 \hat{u}_0^+(\xi, x_n) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_n > 0,$$

$$\begin{gathered} (B_0(i\xi, D_{x_n}) + \tau^{-1} B_1(i\xi, D_{x_n}) + \cdots \\ + \tau^{-q} B_q(i\xi, D_{x_n})) \begin{pmatrix} \omega^+ \\ \frac{1}{\tau}\omega^- \end{pmatrix}\Bigg|_{x_n=0} = 0, \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\sup_{x_n > 0} \Big[\|\omega^+(\tau, \xi, x_n)\| + \|\omega^-(\tau, \xi, x_n)\| \Big] < \infty.$$

Предположим, что выполнены условия согласования

$$\begin{gathered} M_0(i\xi, D_{x_n}) \hat{u}_0^+(\xi, x_n) = 0, \quad x_n > 0, \\ B_0(i\xi, D_{x_n}) \hat{u}_0^+(\xi, 0) = 0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Система уравнений и краевое условие из (3.1), а также условия согласования (3.2) получаются формальным применением оператора Фурье по x и оператора Лапласа по t к задаче (1.4) и условиям согласования (1.7).

Введем следующие обозначения:

$$A(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) = \begin{pmatrix} K(\tau^{-1}) & L(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \\ M(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) & N(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \end{pmatrix};$$

$$a(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) = \det A(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n});$$

$\tilde{A}(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})$ — матрица взаимная к $A(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})$, $\operatorname{Re}\tau \geqslant \gamma_2$, $\xi \in \mathbb{R}_{n-1}\backslash\{0\}$.

Выпишем частное решение уравнения $a(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})\omega = g(\tau, \xi, x_n)$, $x_n > 0$, $\operatorname{Re}\tau > \gamma_2$, $\xi \in \mathbb{R}_{n-1}\backslash\{0\}$, в виде

$$\omega(\tau,\xi,x_n) = \int\limits_0^{x_n} J_+(\tau,\xi,x_n - y_n)\, g(\tau,\xi,y_n)\, dy_n + \int\limits_{x_n}^{\infty} J_-(\tau,\xi,x_n - y_n)\, g(\tau,\xi,y_n)\, dy_n,$$

где

$$J_+(\tau,\xi,x_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^+} \frac{\exp(ix_n\lambda)}{a(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda)}\, d\lambda,$$

$$J_-(\tau,\xi,x_n) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^-} \frac{\exp(ix_n\lambda)}{a(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda)}\, d\lambda;$$

здесь контур $\Gamma^+ = \Gamma^+(\tau,\xi)$ охватывает все корни уравнения (1.5), лежащие в верхней полуплоскости, а контур $\Gamma^- = \Gamma^-(\tau,\xi)$ — в нижней. Запишем это решение в операторном виде $\omega(\tau,\xi,x_n) = Rg(\tau,\xi,x_n)$. Тогда частное решение системы дифференциальных уравнений

$$A(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})v = h(\tau,\xi,x_n), \quad x_n > 0, \quad \operatorname{Re}\tau \geqslant \gamma_2, \quad \xi \in \mathbb{R}_{n-1}\backslash\{0\},$$

можно представить в виде

$$v(\tau,\xi,x_n) = \tilde{A}(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \circ Rh(\tau,\xi,x_n). \tag{3.3}$$

Действительно, в силу равенств

$$a(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \circ Rh_i(\tau,\xi,x_n) = h_i(\tau,\xi,x_n) \quad (i = 1,\dots,\nu)$$

получаем

$$A(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \circ \tilde{A}(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \circ Rh(\tau,\xi,x_n) = (a(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \circ I_\nu) \circ Rh(\tau,\xi,x_n) = h(\tau,\xi,x_n).$$

Выпишем теперь решение краевой задачи

$$\begin{aligned} &A(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})v = 0, \quad x_n > 0,\\ &B(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})v\Big|_{x_n=0} = \varphi,\\ &\sup_{x_n>0} \|v(\tau,\xi,x_n)\| < \infty, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\operatorname{Re}\tau \geqslant \gamma_2$, $\xi \in \mathbb{R}_{n-1}\backslash\{0\}$. В силу условий на матрицы $A(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda)$ и $B(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda)$ краевую задачу (3.4) можно представить в следующем виде:

$$S^{-1}\Big(\frac{1}{|\xi|}\Big) \circ A\Big(\tau^{-1}, \frac{i\xi}{|\xi|}, \frac{1}{|\xi|}D_{x_n}\Big) \circ T^{-1}\Big(\frac{1}{|\xi|}\Big)v = 0, \quad x_n > 0,$$

$$M^{-1}\Big(\frac{1}{|\xi|}\Big) \circ B\Big(\tau^{-1}, \frac{i\xi}{|\xi|}, \frac{1}{|\xi|}D_{x_n}\Big) \circ T^{-1}\Big(\frac{1}{|\xi|}\Big)v\Big|_{x_n=0} = \varphi,$$

$$\sup_{x_n>0} \|v(\tau,\xi,x_n)\| < \infty,$$

где $\operatorname{Re}\tau \geqslant \gamma_2$, $\quad \xi \in \mathbb{R}_{n-1}\backslash\{0\}$. Ввиду диагональности матриц S, T, M

$$A\Big(\tau^{-1}, i\xi', \frac{1}{|\xi|}D_{x_n}\Big) \circ T(|\xi|)v = 0, \quad x_n > 0,$$
$$B\Big(\tau^{-1}, i\xi', \frac{1}{|\xi|}D_{x_n}\Big) \circ T(|\xi|)v\Big|_{x_n=0} = M^{-1}(|\xi|)\varphi,$$
$$\sup_{x_n>0} \|v(\tau,\xi,x_n)\| < \infty,$$

где $\xi'_k = \xi_k/|\xi|$, $k = 1,\dots,n-1$. Поэтому решение задачи (3.4) можно записать следующим образом:

$$v(\tau,\xi,x_n) = T^{-1}(|\xi|)\,\omega\,(\tau,\xi',|\xi|x_n), \tag{3.5}$$

где $\omega = \omega\,(\tau,\xi',y_n)$ — решение краевой задачи

$$\begin{aligned} &A(\tau^{-1}, i\xi', D_{y_n})\,\omega\, = 0, \qquad y_n > 0,\\ &B(\tau^{-1}, i\xi', D_{y_n})\,\omega\Big|_{y_n=0} = M^{-1}(|\xi|)\varphi,\\ &\sup_{y_n>0} \|\,\omega\,(\tau,\xi',y_n)\| < \infty, \qquad \operatorname{Re}\tau \geqslant \gamma_2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Пусть $\omega_j = \omega_j\,(\tau,\xi',y_n)$, $j = 1,\dots,\mu$ — канонический базис, соответствующий краевой задаче (3.6) (см. [7]), т.е. ω_j — ограниченное решение системы

$$A(\tau^{-1}, i\xi', D_{y_n})\,\omega = 0, \quad y_n > 0,$$

удовлетворяющее граничному условию

$$B(\tau^{-1}, i\xi', D_{y_n})\,\omega\Big|_{y_n=0} = e_j,$$

где e_j — единичный вектор, j-я компонента которого равна единице. Тогда решение (3.5) принимает вид

$$\begin{aligned} v(\tau,\xi,x_n) &= T^{-1}(|\xi|)(\omega_1\,(\tau,\xi',|\xi|x_n)\dots\omega_\mu\,(\tau,\xi',|\xi|x_n)) \circ M^{-1}(|\xi|)\varphi\\ &= T^{-1}(|\xi|)\sum_{j=1}^{\mu} |\xi|^{-m_j}\,\omega_j\,(\tau,\xi',|\xi|x_n)\varphi_j, \end{aligned} \tag{3.7}$$

т.е. $v_i(\tau,\xi,x_n) = \sum_{j=1}^{\mu} |\xi|^{t_i-m_j}\,\omega_{i,j}\,(\tau,\xi',|\xi|x_n)\varphi_j$ $(i = 1,\dots,\nu)$. Ввиду (3.3), (3.7) для любой финитной достаточно гладкой вектор-функции $\hat{u}_0^+(\xi,x_n)$ равномерно ограниченное решение краевой задачи (3.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \omega^+\,(\tau,\xi,x_n)\\ \frac{1}{\tau}\,\omega^-\,(\tau,\xi,x_n) \end{pmatrix} &= \tilde{A}(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \circ R\begin{pmatrix} v_0^+\\ 0 \end{pmatrix}(\tau,\xi,x_n)\\ &+ T^{-1}(|\xi|)\sum_{j=1}^{\mu} |\xi|^{-m_j}\,\omega_j\,(\tau,\xi',|\xi|x_n)\varphi_j(\tau,\xi), \end{aligned} \tag{3.8}$$

где

$$v_0^+ = v_0^+(\xi, x_n) = \frac{1}{\tau} K_0 \hat{u}_0^+(\xi, x_n), \tag{3.9}$$

$$\varphi(\tau,\xi) = -B(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \circ \tilde{A}(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \circ R \begin{pmatrix} v_0^+ \\ 0 \end{pmatrix} (\tau, \xi, x_n)\Bigg|_{x_n=0}. \tag{3.10}$$

В дальнейшем мы существенно используем следующее

Предложение 3.1. *При достаточно большой вещественной части τ, $\operatorname{Re}\tau > 0$, вектор-функции $\omega^+(\tau,\xi,x_n)$ и $\omega^-(\tau,\xi,x_n)$ из (3.8) представимы в виде сходящихся рядов по степеням $1/\tau$, причем минимальная степень равна единице.*

Доказательство. Выпишем представления компонент вектор-функций $\omega^+(\tau,\xi,x_n)$ и $(1/\tau)\omega^-(\tau,\xi,x_n)$. Для этого перепишем задачу (3.1) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&K(\tau^{-1})\omega^+ + L(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})\frac{1}{\tau}\omega^- = \frac{1}{\tau}K_0\hat{u}_0^+(\xi,x_n), \quad x_n > 0,\\
&M(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})\omega^+ + N(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})\frac{1}{\tau}\omega^- = 0, \qquad x_n > 0,\\
&B(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \circ \begin{pmatrix} \omega^+ \\ \frac{1}{\tau}\omega^- \end{pmatrix}\Bigg|_{x_n=0} = 0,\\
&\sup_{x_n>0}\Big[\|\omega^+(\tau,\xi,x_n)\| + \|\omega^-(\tau,\xi,x_n)\|\Big] < \infty.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

В силу соотношений $K(\tau^{-1}) = K_0 + \frac{1}{\tau}K_1 + \ldots + \frac{1}{\tau^{l_1}}K_{l_1}$, $\det K_0 \neq 0$ существует число γ_0 ($\gamma_0 \geqslant \gamma_2$) такое, что при $\operatorname{Re}\tau \geqslant \gamma_0$ первые m уравнений системы дают равенства

$$\begin{aligned}
\omega^+(\tau,\xi,x_n) + (K(\tau^{-1}))^{-1}L(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})\frac{1}{\tau}\omega^-(\tau,\xi,x_n)&\\
= (K(\tau^{-1}))^{-1}K_0\frac{1}{\tau}\hat{u}_0^+(\xi,x_n).&
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Правую часть (3.12) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&(K(\tau^{-1}))^{-1}K_0\frac{1}{\tau}\hat{u}_0^+(\xi,x_n)\\
&\qquad = \left(I_m + \frac{1}{\tau}K_0^{-1}K_1 + \ldots + \frac{1}{\tau^{l_1}}K_0^{-1}K_{l_1}\right)^{-1}\frac{1}{\tau}\hat{u}_0^+(\xi,x_n).
\end{aligned}$$

Следовательно, при $\operatorname{Re}\tau \geqslant \gamma_0$

$$(K(\tau^{-1}))^{-1}K_0\frac{1}{\tau}\hat{u}_0^+(\xi,x_n) = \frac{1}{\tau}\hat{u}_0^+(\xi,x_n) + \frac{1}{\tau^2}\mathcal{K}(\tau^{-1})\hat{u}_0^+(\xi,x_n). \tag{3.13}$$

Используя (3.12), (3.13), сведем решение задачи (3.11) к решению следующей задачи:

$$\begin{aligned}
&\Big(M(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})(K(\tau^{-1}))^{-1}L(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) - N(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})\Big)\frac{1}{\tau}\omega^-\\
&\qquad = M(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})\Big(\frac{1}{\tau}\hat{u}_0^+(\xi,x_n) + \frac{1}{\tau^2}\mathcal{K}(\tau^{-1})\hat{u}_0^+(\xi,x_n)\Big), \quad x_n > 0,
\end{aligned}$$

$$B(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \circ \begin{pmatrix} (K(\tau^{-1}))^{-1} L(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \\ -I_{\nu-m} \end{pmatrix} \frac{1}{\tau}\omega^- \Big|_{x_n=0}$$
$$= B(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau}\hat{u}_0^+(\xi,0) + \frac{1}{\tau^2}\mathcal{K}(\tau^{-1})\hat{u}_0^+(\xi,0) \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\sup_{x_n>0} \|\omega^-(\tau,\xi,x_n)\| < \infty.$$

Ввиду условий на операторы $M(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})$, $B(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})$ и условий согласования (3.2) правые части системы и граничного условия представимы в виде сходящегося ряда по степеням $1/\tau$, причем минимальная степень равна двум, т. е.

$$\Big(M(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})(K(\tau^{-1}))^{-1} L(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) - N(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})\Big)\frac{1}{\tau}\omega^-$$
$$= \frac{1}{\tau^2}\mathcal{M}(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})\hat{u}_0^+(\xi, x_n), \qquad x_n > 0,$$

$$B(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \circ \begin{pmatrix} (K(\tau^{-1}))^{-1} L(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \\ -I_{\nu-m} \end{pmatrix} \frac{1}{\tau}\omega^- \Big|_{x_n=0}$$
$$= \frac{1}{\tau^2} b(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})\hat{u}_0^+(\xi,0),$$
$$\sup_{x_n>0} \|\omega^-(\tau,\xi,x_n)\| < \infty.$$

Нетрудно показать, что из условия 7 следует однозначная разрешимость последней задачи. Поэтому компоненты вектор-функции $\omega^-(\tau,\xi,x_n)$ можно представить в виде сходящихся рядов по степеням $1/\tau$, при этом минимальная степень равна единице. В силу (3.12) такое же утверждение верно для компонент вектор-функции $\omega^+(\tau,\xi,x_n)$. Предложение 3.1 доказано.

Используя формулы (3.8)–(3.10), можно было бы получить формальное решение краевой задачи (1.4) в виде

$$u^+(t,\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{t\tau} e^{ix\xi} \omega^+(\tau,\xi,x_n)\, d\xi\, d\eta,$$
$$u^-(t,\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{t\tau} e^{ix\xi} \omega^-(\tau,\xi,x_n)\, d\xi\, d\eta,$$
$$\eta = \operatorname{Im}\tau, \qquad \operatorname{Re}\tau > \gamma_0.$$

Однако ввиду условий на операторы $\mathcal{L}(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})$ и $B(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n})$ компоненты вектор-функций $\omega^+(\tau,\xi,x_n)$ и $\omega^-(\tau,\xi,x_n)$ имеют особенности при $|\xi| \to 0$. Нетрудно привести примеры, когда эти особенности не интегрируемые (см. [8]). По этой причине для получения формул решения задачи (1.4) необходима регуляризация обратного оператора Фурье. Аналогичная ситуация возникает при построении решений смешанных краевых задач в четверти пространства для уравнений соболевского типа (см. [14]). В [14] подробно описан метод построения решения, а в [15, 16] изложена техника получения результатов по L_p-теории краевых задач для таких уравнений. Метод основан на использовании интегрального представления функции $f \in L_p(\mathbb{R}_{n-1})$, полученного С. В. Успенским (см. [17]):

$$f(x) = \lim_{h\to 0}(2\pi)^{1-n}\int\limits_h^{h^{-1}} v^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp\Big(i\,\frac{x-y}{v}\,\xi\Big)G(\xi)f(y)\,d\xi\,dy\,dv, \tag{3.14}$$

где $G(\xi) = 2N|\xi|^{2N}\exp(-|\xi|^{2N})$ и N — достаточно большое натуральное число. Используя этот метод, построим последовательность приближенных решений $\{u_k(t,\bar{x})\}$ задачи (1.4). При $\gamma > \gamma_0$ определим вектор-функции

$$v_k^+(\tau,\bar{x}) = (\sqrt{2\pi})^{1-n}\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi}G(\xi v)\omega^+(\tau,\xi,x_n)\,d\xi\,dv, \tag{3.15}$$

$$v_k^-(\tau,\bar{x}) = (\sqrt{2\pi})^{1-n}\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi}G(\xi v)\omega^-(\tau,\xi,x_n)\,d\xi\,dv. \tag{3.16}$$

Поскольку $\omega^+(\tau,\xi,x_n)$, $\omega^-(\tau,\xi,x_n)$ являются аналитическими функциями по τ и представимы в виде степенных рядов

$$\omega^+(\tau,\xi,x_n) = \sum_1^\infty \frac{1}{\tau^j}\omega_j^+(\xi,x_n), \qquad \omega^-(\tau,\xi,x_n) = \sum_1^\infty \frac{1}{\tau^j}\omega_j^-(\xi,x_n), \tag{3.17}$$

интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(i\eta+\gamma)t}v_k^+(i\eta+\gamma,\bar{x})\,d\eta, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(i\eta+\gamma)t}v_k^-(i\eta+\gamma,\bar{x})\,d\eta$$

не зависят от $\gamma > \gamma_0$.

Рассмотрим вектор-функцию $u_k(t,\bar{x}) = \begin{pmatrix} u_k^+(t,\bar{x}) \\ u_k^-(t,\bar{x}) \end{pmatrix}$, где

$$u_k^+(t,\bar{x}) = (\sqrt{2\pi})^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(i\eta+\gamma)t}v_k^+(i\eta+\gamma,\bar{x})\,d\eta, \tag{3.18}$$

$$u_k^-(t,\bar{x}) = (\sqrt{2\pi})^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(i\eta+\gamma)t}v_k^-(i\eta+\gamma,\bar{x})\,d\eta. \tag{3.19}$$

Непосредственно из определений функций v_k^+, v_k^- вытекают тождества

$$K(\tau^{-1})v_k^+(\tau,\bar{x}) + L(\tau^{-1}, D_{\bar{x}})\frac{1}{\tau}v_k^-(\tau,\bar{x})$$
$$\equiv \frac{1}{\tau}(\sqrt{2\pi})^{1-n}\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi}G(\xi v)K_0\hat{u}_0^+(\xi,x_n)\,d\xi\,dv, \quad x_n > 0;$$

$$M(\tau^{-1}, D_{\bar{x}})v_k^+(\tau,\bar{x}) + N(\tau^{-1}, D_{\bar{x}})\,\frac{1}{\tau}\,v_k^-(\tau,\bar{x}) \equiv 0, \quad x_n > 0;$$
$$B(\tau^{-1}, D_{\bar{x}})\circ\left.\begin{pmatrix} v_k^+ \\ \frac{1}{\tau}v_k^- \end{pmatrix}\right|_{x_n=0} \equiv 0, \quad \operatorname{Re}\tau > \gamma_0.$$

Тогда вектор-функция $u_k(t,\bar{x})$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(D_t, D_t^{-1}, D_{\bar{x}})u_k = 0, && (t,\bar{x}) \in \mathbb{R}_{n+1}^{++};\\
&\mathcal{B}(D_t^{-1}, D_{\bar{x}})u_k\Big|_{x_n=0} = 0, && t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_{n-1};\\
&u_k^+\big|_{t=0} = u_{0k}^+(\bar{x}), && \bar{x} \in \mathbb{R}_n^+,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

где

$$u_{0k}^+(t,\bar{x}) = (2\pi)^{1-n}\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{i(x-y)\xi}G(\xi v)u_0^+(y,x_n)d\xi dy dv. \tag{3.21}$$

В силу (3.14) имеем $u_0^+(\bar{x}) = \lim\limits_{k\to\infty} u_{0k}^+(\bar{x})$. Поэтому вектор-функцию $u_k(t,\bar{x})$ можно рассматривать как приближенное решение задачи (1.4).

В следующем параграфе будут проведены оценки $u_k(t,\bar{x})$ и доказана сходимость последовательности $\{u_k(t,\bar{x})\}$ к решению задачи (1.4).

§ 4. Оценки последовательности приближенных решений

При выводе оценок вектор-функции $u_k(t,\bar{x})$ существенно используются оценки контурных интегралов

$$J_+(\tau,\xi,x_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^+} \frac{\exp(ix_n\lambda)}{a(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda)}\,d\lambda,$$

$$J_-(\tau,\xi,x_n) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^-} \frac{\exp(ix_n\lambda)}{a(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda)}\,d\lambda$$

и компонент $\omega_{i,j}(\tau,\xi',|\xi|x_n)$ $(i = 1,\dots,\nu, \;\; j = 1,\dots,\mu)$ канонического базиса краевой задачи (3.6).

При условиях 1–3 справедлива

Лемма 4.1 [15]. *При* $x_n > 0$, $\gamma = \operatorname{Re}\tau > \gamma_0$, $\xi \in \mathbb{R}_{n-1}\backslash\{0\}$, $r = \sum_1^\nu(\mathrm{s}_i + \mathrm{t}_i)$ *для любых* l, q, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ *имеют место оценки*

$$|D_{x_n}^l D_\eta^q D_\xi^\beta J_+(i\eta+\gamma,\xi,x_n)| \leqslant c|\xi|^{l+1-|\beta|-r}\exp(-\delta x_n|\xi|),$$

$$|D_{x_n}^l D_\eta^q D_\xi^\beta J_-(i\eta+\gamma,\xi,-x_n)| \leqslant c|\xi|^{l+1-|\beta|-r}\exp(-\delta x_n|\xi|),$$

где c, $\delta > 0$ — *константы.*

В силу леммы 4.1 и теоремы Лизоркина о мультипликаторах [18] для любого вектора $\nu = (\nu', \nu_n)$ функции

$$\mu_\nu^+(i\eta+\gamma,\bar\xi) = (i\xi)^{\nu'}|\xi|^{r-|\nu|}\int_0^\infty e^{-ix_n\xi_n} D_{x_n}^{\nu_n} J_+(i\eta+\gamma,\xi,x_n)\,dx_n,$$

$$\mu_\nu^-(i\eta+\gamma,\bar\xi) = (i\xi)^{\nu'}|\xi|^{r-|\nu|}\int_{-\infty}^0 e^{-ix_n\xi_n} D_{x_n}^{\nu_n} J_-(i\eta+\gamma,\xi,x_n)\,dx_n$$

являются мультипликаторами в $L_p(\mathbb{R}_{n+1})$. Из предложения 5.1 [7] вытекает, что для любого вектора $\nu = (\nu', \nu_n)$ функции

$$h_{\nu,l,j}(i\eta+\gamma,\bar\xi) = (i\xi)^{\nu'}|\xi|^{-|\nu|}\int_0^\infty e^{ix_n\xi_n} D_{x_n}^{\nu_n+1}\omega_{l,j}(\tau,\xi',|\xi|x_n)\,dx_n, \quad \xi' = \frac{\xi}{|\xi|},$$

также являются мультипликаторами в $L_p(\mathbb{R}_{n+1})$.

Лемма 4.2 [15]. *При* $\operatorname{Re}\tau > \gamma_0$, $\xi \in \mathbb{R}_{n-1}\backslash\{0\}$ *имеют место равенства*

$$c_r D_{x_n}^k\left(J_+(\tau,\xi,x_n) - J_-(\tau,\xi,x_n)\right)\Big|_{x_n=0} = \delta_{r-1}^k \quad (k = 1, \dots, r-1),$$

где c_r — *коэффициент при старшей производной в операторе* $a(\tau, i\xi, D_{x_n})$.

Лемма 4.3 [16]. *При* $\operatorname{Re}\tau > \gamma_0$, $\xi \in \mathbb{R}_{n-1}\backslash\{0\}$ *имеет место равенство*

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ix_n\xi_n}\left(\chi(x_n)J_+(\tau,\xi,x_n) + \chi(-x_n)J_-(\tau,\xi,x_n)\right)dx_n = \frac{1}{a(\tau^{-1}, i\bar\xi)},$$

где $\chi(x_n)$ — *функция Хевисайда,* $\bar\xi = (\xi, \xi_n)$.

Из лемм 4.1–4.3 вытекает

Лемма 4.4. *При* $\operatorname{Re}\tau > \gamma_0$, $\xi \in \mathbb{R}_{n-1}\backslash\{0\}$, $l \leqslant r-1$ *справедливы равенства*

$$\int_0^\infty e^{-ix_n\xi_n} D_{x_n}^l J_+(\tau,\xi,x_n)\,dx_n + \int_{-\infty}^0 e^{-ix_n\xi_n} D_{x_n}^l J_-(\tau,\xi,x_n)\,dx_n = \frac{(i\xi_n)^l}{a(\tau^{-1}, i\bar\xi)}. \quad (4.1)$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_0^\infty e^{-iy_n\xi_n} D_{y_n} J_+(\tau,\xi,y_n)\,dy_n + \int\limits_{-\infty}^0 e^{-iy_n\xi_n} D_{y_n} J_-(\tau,\xi,y_n)\,dy_n$$
$$= e^{-iy_n\xi_n} J_+(\tau,\xi,y_n)\Big|_0^\infty + e^{-iy_n\xi_n} J_-(\tau,\xi,y_n)\Big|_{-\infty}^0$$
$$+ \int\limits_0^\infty e^{-iy_n\xi_n} i\xi_n J_+(\tau,\xi,y_n)\,dy_n + \int\limits_{-\infty}^0 e^{-iy_n\xi_n} i\xi_n J_-(\tau,\xi,y_n)\,dy_n.$$

Ввиду лемм 4.1–4.3 отсюда получаем (4.1) при $l = 1$. Аналогичным образом рассматривается случай $l > 1$. Лемма 4.4 доказана.

Введем операторы P_k^1 и P_k^2 по следующим формулам:

$$P_k^1 u_0^+(t,\bar{x}) = (\sqrt{2\pi})^{-n} \int\limits_{1/k}^k v^{-1} \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi+t\tau} G(\xi v) \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \tau I_{\nu-m} \end{pmatrix}$$
$$\times \tilde{A}(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}) \circ R \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} K_0 \hat{u}_0^+ \\ 0 \end{pmatrix} (\tau,\xi,x_n)\,d\xi\,d\eta\,dv,$$

$$P_k^2 u_0^+(t,\bar{x}) = (\sqrt{2\pi})^{-n} \int\limits_{1/k}^k v^{-1} \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi+t\tau} G(\xi v) \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \tau I_{\nu-m} \end{pmatrix}$$
$$\times T^{-1}(|\xi|)\Big(\sum_{j=1}^{\mu} |\xi|^{-m_j} \omega_j\Big(\tau, \frac{\xi}{|\xi|}, |\xi| x_n\Big) \varphi_j(\tau,\xi)\Big) d\xi\,d\eta\,dv, \qquad \tau = i\eta + \sigma,$$

где оператор R определен в § 3, а функция $\varphi_j(\tau,\xi)$ — формулой (3.10). В силу (3.8)–(3.10), (3.15), (3.16), (3.18) и (3.19) получаем $u_k(t,\bar{x}) = P_k^1 u_0^+(t,\bar{x}) + P_k^2 u_0^+(t,\bar{x})$.

Оценим функции $P_k^1 u_0^+(t,\bar{x})$ и $P_k^2 u_0^+(t,\bar{x})$. Напомним, что $\mathrm{t}_1 = \ldots = \mathrm{t}_m = -\mathrm{s}_1 = \ldots = -\mathrm{s}_m$.

Лемма 4.5. *Если $u_0^+ \in W_p^{\mathrm{t}_1}(\mathbb{R}_n^+)$, то для компонент $v_{l,k}^1(t,\bar{x})$ вектор-функции $P_k^1 u_0^+(t,\bar{x})$ имеют место оценки*

$$\|D_{x_j}^{\mathrm{t}_l} v_{l,k}^1(t,\bar{x}) ; L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\| \leqslant c \sum_{i=1}^m \|u_{i,0}^+(\bar{x}) ; W_p^{\mathrm{t}_1}(\mathbb{R}_n^+)\|, \tag{4.2}$$
$$\gamma > \gamma_0,\ j = 1,\ldots,n,\ l = 1,\ldots,\nu,$$

где константа c не зависит от k и $u_0^+(\bar{x})$, причем

$$\|D_{x_j}^{\mathrm{t}_l} (v_{l,k}^1(t,\bar{x}) - v_{l,m}^1(t,\bar{x})) ; L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\| \to 0 \tag{4.3}$$

при $k,\ m \to \infty$.

Доказательство. Обозначим $\psi(\xi, x_n) = K_0 \hat{u}_0^+(\xi, x_n)$. Согласно определению $P_k^1 u_0^+(t, \bar{x})$ при $j \leqslant n-1$ имеем

$$D_{x_j}^{t_l} v_{l,k}^1(t,\bar{x}) = (\sqrt{2\pi})^{-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi + t\tau} G(\xi v)(i\xi_j)^{t_l} \sum_{q=1}^{m} \tilde{a}_{l,q}(\tau, i\xi, D_{x_n})$$

$$\circ \left[\int\limits_0^{x_n} J_+(\tau, \xi, x_n - y_n) \frac{1}{\tau} \psi_q(\xi, y_n)\, dy_n \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_n}^{\infty} J_-(\tau, \xi, x_n - y_n) \frac{1}{\tau} \psi_q(\xi, y_n)\, dy_n \right] d\xi\, d\eta\, dv, \qquad (4.4)$$

где $\tilde{a}_{l,q}(\tau, i\xi, D_{x_n})$ — элемент матричного оператора

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \tau I_{\nu-m} \end{pmatrix} \tilde{A}(\tau^{-1}, i\xi, D_{x_n}).$$

Используя лемму 4.2, например в случае $\deg_\lambda \tilde{a}_{l,q}(\tau, i\xi, i\lambda) < r$, получаем

$$\tilde{a}_{l,q}(\tau, i\xi, D_{x_n}) \left[\int\limits_0^{x_n} J_+(\tau, \xi, x_n - y_n) \psi_q(\xi, y_n)\, dy_n \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_n}^{\infty} J_-(\tau, \xi, x_n - y_n) \psi_q(\xi, y_n)\, dy_n \right]$$

$$= \int\limits_0^{x_n} \tilde{a}_{l,q}(\tau, i\xi, D_{x_n}) J_+(\tau, \xi, x_n - y_n) \psi(\xi, y_n)\, dy_n$$

$$+ \int\limits_{x_n}^{\infty} \tilde{a}_{l,q}(\tau, i\xi, D_{x_n}) J_-(\tau, \xi, x_n - y_n) \psi(\xi, y_n)\, dy_n.$$

Учитывая последнее соотношение, равенство $\frac{1}{\tau} = \int\limits_0^{\infty} e^{-\tau s}\, ds$, $\operatorname{Re}\tau > 0$, а также тот факт, что интеграл в правой части (4.4) не зависит от $\operatorname{Re}\tau > \gamma_0$, находим

$$e^{-\gamma t} D_{x_j}^{t_l} v_{l,k}^1(t,\bar{x}) = (\sqrt{2\pi})^{-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi + it\eta} G(\xi v)(i\xi_j)^{t_l}$$

$$\times \sum_{q=1}^{m} \left[\int\limits_0^{x_n} \tilde{a}_{l,q}(\tau, i\xi, D_{x_n}) J_+(\tau, \xi, x_n - y_n) \left(\int\limits_0^{\infty} e^{-i\eta s - \gamma s} \psi_q(\xi, y_n)\, ds \right) dy_n \right.$$

$$+\int\limits_{x_n}^{\infty} \tilde{a}_{l,q}(\tau, i\xi, D_{x_n}) J_-(\tau, \xi, x_n - y_n)\Bigl(\int\limits_0^{\infty} e^{-i\eta s-\gamma s}\psi_q(\xi, y_n)\,ds\Bigr)\,dy_n\Bigr]\,d\xi\,d\eta\,dv.$$

Введем функцию

$$f_q(s,\xi,y_n) = \chi(s)\chi(y_n)e^{-\gamma s}\psi_q(\xi,y_n). \tag{4.5}$$

Через $\hat{f}_q(\eta,\bar{\xi})$ обозначим ее преобразование Фурье по s и y_n. Используя формулу преобразования Фурье свертки, вычисляем

$$e^{-\gamma t}D_{x_j}^{t_l}v_{l,k}^1(t,\bar{x}) = \sum_{q=1}^{m}(\sqrt{2\pi})^{-n}\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi+it\eta}G(\xi v)(i\xi_j)^{t_l}$$

$$\times\Bigl[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi(x_n-y_n)\tilde{a}_{l,q}(\tau,i\xi,D_{x_n})J_+(\tau,\xi,x_n-y_n)$$

$$\times\Bigl(\int\limits_0^{\infty}e^{-i\eta s}f_q(s,\xi,y_n)\,ds\Bigr)\,dy_n$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi(y_n-x_n)\tilde{a}_{l,q}(\tau,i\xi,D_{x_n})J_-(\tau,\xi,x_n-y_n)$$

$$\times\Bigl(\int\limits_0^{\infty}e^{-i\eta s}f_q(s,\xi,y_n)\,ds\Bigr)\,dy_n\Bigr]\,d\xi\,d\eta\,dv$$

$$=\sum_{q=1}^{m}(\sqrt{2\pi})^{-n}\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{i\bar{x}\bar{\xi}+it\eta}G(\xi v)(i\xi_j)^{t_l}$$

$$\times\Bigl[\int\limits_0^{\infty}e^{-iy_n\xi_n}\tilde{a}_{l,q}(\tau,i\xi,D_{y_n})J_+(\tau,\xi,y_n)\,dy_n$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-iy_n\xi_n}\tilde{a}_{l,q}(\tau,i\xi,D_{y_n})J_-(\tau,\xi,y_n)\,dy_n\Bigr]\hat{f}_q(\eta,\bar{\xi})\,d\bar{\xi}\,d\eta\,dv.$$

Из условия 2 следует соотношение

$$\tilde{A}(\tau^{-1},i\xi,D_{x_n}) = (|\xi|^r I_\nu)\circ T\Bigl(\frac{1}{|\xi|}\Bigr)\circ\tilde{A}\Bigl(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},\frac{1}{|\xi|}D_{x_n}\Bigr)\circ S\Bigl(\frac{1}{|\xi|}\Bigr),$$

поэтому $\tilde{a}_{l,q}(\tau,i\xi,D_{x_n})$ можно записать в виде

$$\tilde{a}_{l,q}(\tau,i\xi,D_{x_n}) = |\xi|^{r-t_l-s_q}\tilde{a}_{l,q}\Bigl(\tau,\frac{i\xi}{|\xi|},\frac{1}{|\xi|}D_{x_n}\Bigr). \tag{4.6}$$

Отсюда с учетом разложения (3.17) получаем, что функция

$$(i\xi_j)^{\mathrm{t}_l}|\xi|^{\mathrm{s}_q}\left[\int\limits_0^\infty e^{-iy_n\xi_n}\tilde{a}_{l,q}(\tau,i\xi,D_{y_n})J_+(\tau,\xi,y_n)\,dy_n\right.$$
$$\left.+\int\limits_{-\infty}^0 e^{-iy_n\xi_n}\tilde{a}_{l,q}(\tau,i\xi,D_{y_n})J_-(\tau,\xi,y_n)\,dy_n\right]$$

представима в виде линейной комбинации функций $\mu_\nu^+(i\eta+\sigma,\bar{\xi})$ и $\mu_\nu^-(i\eta+\sigma,\bar{\xi})$, являющихся мультипликаторами в $L_p(\mathbb{R}_{n+1})$. Поскольку $\mathrm{t}_1=-\mathrm{s}_1=\ldots=-\mathrm{s}_m$, повторяя аналогичные рассуждения из [15], приходим к оценке

$$\|e^{-\gamma t}D_{x_j}^{\mathrm{t}_l}v_{l,k}^1(t,\bar{x})\,;L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\|\leqslant c\sum_{q=1}^m\|(K_0u_0^+)_q(\bar{x})\,;W_p^{\mathrm{t}_1}(\mathbb{R}_n^+)\|, \tag{4.7}$$

где константа $c>0$ не зависит от $u_0^+(\bar{x})$ и k. Следовательно, оценка (4.2) при $j<n$ доказана.

Рассмотрим случай $j=n$. Согласно вышеизложенному при $\gamma>\gamma_0$ имеем

$$e^{-\gamma t}D_{x_n}^{\mathrm{t}_l}v_{l,k}^1(t,\bar{x})=\sum_{q=1}^m(\sqrt{2\pi})^{-n}\int\limits_{1/k}^k v^{-1}\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}e^{i\bar{x}\bar{\xi}+it\eta}G(\xi v)(i\xi_n)^{\mathrm{t}_l}$$
$$\times\left[\int\limits_0^\infty e^{-iy_n\xi_n}\tilde{a}_{l,q}(\tau,i\xi,D_{y_n})J_+(\tau,\xi,y_n)\,dy_n\right.$$
$$\left.+\int\limits_{-\infty}^0 e^{-iy_n\xi_n}\tilde{a}_{l,q}(\tau,i\xi,D_{y_n})J_-(\tau,\xi,y_n)\,dy_n\right]\hat{f}_q(\eta,\bar{\xi})\,d\bar{\xi}\,d\eta\,dv.$$

Отсюда, как и в предыдущем случае, можно получить неравенство (4.7) при $j=n$.

Из оценки (4.7) имеем (4.2) в случае $\deg_\lambda\tilde{a}_{l,q}(\tau,i\xi,i\lambda)<r$. Аналогично рассматривается общий случай. Доказательство (4.3) проводится точно так же. Лемма 4.5 доказана.

Лемма 4.6. *Если $u_0^+\in W_p^{\mathrm{t}_1}(\mathbb{R}_n^+)$, то для компонент $v_{l,k}^2(t,\bar{x})$ вектор-функции $P_k^2u_0^+(t,\bar{x})$ имеют место оценки*

$$\|D_{x_j}^{\mathrm{t}_l}v_{l,k}^2(t,\bar{x})\,;L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\|\leqslant c\sum_{i=1}^m\|u_{i,0}^+(\bar{x})\,;W_p^{\mathrm{t}_1}(\mathbb{R}_n^+)\|, \tag{4.8}$$

$$j=1,\ldots,n,\quad l=1,\ldots,\nu,$$

где константа c не зависит от k и $u_0^+(\bar{x})$, причем

$$\|D_{x_j}^{\mathrm{t}_l}(v_{l,k}^2(t,\bar{x})-v_{l,m}^2(t,\bar{x}))\,;L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\|\to 0\quad(k,\,m\to\infty). \tag{4.9}$$

Доказательство. Обозначим через $g(\tau,\xi,x_n)$ вектор-функцию с компонентами

$$g_l(\tau,\xi,x_n)=\sum_{j=1}^{\mu}|\xi|^{-m_j}\omega_{l,j}\Big(\tau,\frac{\xi}{|\xi|},|\xi|x_n\Big)\varphi_j(\tau,\xi)\quad(l=1,\dots,\nu),$$

где $\varphi_j(\tau,\xi)$ — компоненты вектор-функции $\varphi(\tau,\xi)$ [см. (3.10)]. Тогда

$$P_k^2u_0^+(t,\bar{x})=(\sqrt{2\pi})^{-n}\int\limits_{1/k}^{k}v^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}e^{ix\xi+t\tau}G(\xi v)\begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & \tau I_{\nu-m}\end{pmatrix}$$
$$\circ T^{-1}(|\xi|)g(\tau,\xi,x_n)\,d\xi\,d\eta\,dv. \tag{4.10}$$

Из условия 6 вытекает соотношение

$$B\Big(\tau^{-1},i\xi,D_{x_n}\Big)=M(|\xi|)\circ B\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},\frac{1}{|\xi|}D_{x_n}\Big)\circ T(|\xi|).$$

Учитывая (4.6), получаем

$$B(\tau^{-1},i\xi,D_{x_n})\circ\tilde{A}(\tau^{-1},i\xi,D_{x_n})$$
$$=M(|\xi|)\circ B\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},\frac{1}{|\xi|}D_{x_n}\Big)\circ(|\xi|^rI_\nu)\circ\tilde{A}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},\frac{1}{|\xi|}D_{x_n}\Big)\circ S\Big(\frac{1}{|\xi|}\Big).$$

Следовательно, справедливо представление

$$g_l(\tau,\xi,x_n)=-\sum_{j=1}^{\mu}\omega_{l,j}\Big(\tau,\frac{\xi}{|\xi|},|\xi|x_n\Big)b_j\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)\circ(|\xi|^rI_\nu)$$
$$\circ\tilde{A}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)\circ S\Big(\frac{1}{|\xi|}\Big)\circ R\begin{pmatrix}\frac{1}{\tau}K_0\hat{u}_0^+\\ 0\end{pmatrix}(\tau,\xi,z_n)\Big|_{z_n=0},$$

где $b_j\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)$ — j-я строка матрицы $B\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)$. Обозначим через

$b_{j,p}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)$ — элементы строки $b_j\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)$,
$\tilde{A}_{p,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)$ — элементы $\tilde{A}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)$.

Перепишем $g_l(\tau,\xi,x_n)$ в развернутом виде:

$$g_l(\tau,\xi,x_n)=-\sum_{j=1}^{\mu}\omega_{l,j}\Big(\tau,\frac{\xi}{|\xi|},|\xi|x_n\Big)\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{m}|\xi|^{r-s_q}b_{j,p}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)$$
$$\circ\tilde{A}_{p,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)$$

$$\circ \left[\int_0^{z_n} J_+(\tau,\xi,z_n-y_n)\frac{1}{\tau}\psi_q(\xi,y_n)\,dy_n \right.$$

$$\left. + \int_{z_n}^{\infty} J_-(\tau,\xi,z_n-y_n)\frac{1}{\tau}\psi_q(\xi,y_n)\,dy_n \right]\Bigg|_{z_n=0}, \quad (4.11)$$

где $\psi(\xi,y_n) = K_0\hat{u}_0^+(\xi,y_n)$. Далее для простоты будем считать, что

$$\deg_\lambda(b_{j,p}(\tau^{-1},i\xi,i\lambda)\tilde{A}_{p,q}(\tau^{-1},i\xi,i\lambda)) < r. \quad (4.12)$$

Ввиду леммы 4.2 имеем

$$g_l(\tau,\xi,x_n) = -\sum_{j=1}^{\mu}\omega_{l,j}\Big(\tau,\frac{\xi}{|\xi|},|\xi|x_n\Big)\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{m}|\xi|^{r-s_q}$$

$$\times \int_0^\infty b_{j,p}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{y_n}\Big)\circ\tilde{A}_{p,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{y_n}\Big)$$

$$\circ J_-(\tau,\xi,-y_n)\frac{1}{\tau}\psi_q(\xi,y_n)\,dy_n. \quad (4.13)$$

Поскольку интеграл в правой части (4.10) не зависит от $\operatorname{Re}\tau = \gamma$ при $\gamma > \gamma_0$, для l-й компоненты получаем

$$e^{-\gamma t}D_{x_1}^{t_l}v_{l,k}^2(t,\bar{x}) = -\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{m}(\sqrt{2\pi})^{1-n}\int_{1/k}^{k}v^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}_{n-1}}e^{ix\xi+it\eta}G(\xi v)$$

$$\times a_l(\tau)(i\xi_1)^{t_l}|\xi|^{r-s_q-t_l}\omega_{l,j}\Big(\tau,\frac{\xi}{|\xi|},|\xi|x_n\Big)\int_0^\infty\Big(b_{j,p}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{y_n}\Big)$$

$$\circ\tilde{A}_{p,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{y_n}\Big)\circ J_-(\tau,\xi,-y_n)\Big)\frac{1}{\tau}\psi_q(\xi,y_n)\,dy_n\,d\xi\,d\eta\,dv,$$

где

$$a_l(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } l \leqslant m, \\ \tau & \text{при } l \geqslant m+1. \end{cases}$$

Используя оценку (см. [7])

$$\Big|\omega_{l,j}\Big(\tau,\frac{\xi}{|\xi|},|\xi|x_n\Big)\Big| \leqslant c\exp(-\delta x_n|\xi|), \quad x_n > 0,$$

где c, $\delta > 0$ — константы, и лемму 4.1, можно записать

$$e^{-\gamma t}D_{x_1}^{\mathrm{t}_l}v_{l,k}^2(t,\bar{x}) = -\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{m}(\sqrt{2\pi})^{1-n}\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi+it\eta}G(\xi v)$$

$$\times(i\xi_1)^{\mathrm{t}_l}|\xi|^{r-\mathrm{s}_q-\mathrm{t}_l}\Bigg(\int\limits_0^{\infty}\Big(D_{z_n}\omega_{l,j}\Big(\tau,\frac{\xi}{|\xi|},|\xi|(x_n+z_n)\Big)\Big)$$

$$\times\int\limits_0^{\infty} a_l(\tau)\,b_{j,p}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)\circ\tilde{A}_{p,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)$$

$$\circ J_-(\tau,\xi,-z_n-y_n)\frac{1}{\tau}\psi_q(\xi,y_n)\,dy_n\,dz_n$$

$$+\int\limits_0^{\infty}\omega_{l,j}\Big(\tau,\frac{\xi}{|\xi|},|\xi|(x_n+z_n)\Big)\int\limits_0^{\infty}a_l(\tau)b_{j,p}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)$$

$$\circ\tilde{A}_{p,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)\circ D_{z_n}J_-(\tau,\xi,-z_n-y_n)$$

$$\times\frac{1}{\tau}\psi_q(\xi,y_n)\,dy_n\,dz_n\Bigg)\,d\xi\,d\eta\,dv = \Phi_k^1(t,\bar{x})+\Phi_k^2(t,\bar{x}).$$

Рассмотрим первое слагаемое $\Phi_k^1(t,\bar{x})$. Используя условие $x_n > 0$, функцию Хевисайда, равенство $\frac{1}{\tau} = \int\limits_0^{\infty} e^{-\tau s}ds$, $\operatorname{Re}\tau > 0$, а также функцию $f_q(s,\xi,y_n)$, определенную формулой (4.5), имеем

$$\Phi_k^1(t,\bar{x}) = \sum_{j=1}^{\mu}\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{m}(\sqrt{2\pi})^{1-n}\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi+it\eta}G(\xi v)$$

$$\times(i\xi_1)^{\mathrm{t}_l}|\xi|^{r-\mathrm{s}_q-\mathrm{t}_l}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi(x_n+z_n)\Big(D_{z_n}\omega_{l,j}\Big(\tau,\frac{\xi}{|\xi|},|\xi|(x_n+z_n)\Big)\Big)$$

$$\times\chi(z_n)\int\limits_{-\infty}^{\infty}a_l(\tau)b_{j,p}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)$$

$$\circ\tilde{A}_{p,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)J_-(\tau,\xi,-z_n-y_n)$$

$$\times\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\eta s}f_q(s,\xi,y_n)\,ds\Big)\,dy_n\,dz_n\,d\xi\,d\eta\,dv.$$

Применяя формулу преобразования Фурье для свертки и используя функцию $h_{\nu,l,j}(i\eta+\gamma,\bar{\xi})$, представим $\Phi_k^1(t,\bar{x})$ в следующем виде:

$$\Phi_k^1(t,\bar{x}) = \sum_{j=1}^{\mu}\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{m}(\sqrt{2\pi})^{1-n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}_n} e^{ix\xi-ix_n\xi_n+it\eta}$$
$$\times\Big(h_{0,l,j}(i\eta+\gamma,\bar{\xi})(i\xi_1)^{\mathrm{t}_l}|\xi|^{-\mathrm{t}_l}\int_{1/k}^{k} v^{-1}G(\xi v)\,dv$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz_n\xi_n}\chi(z_n)|\xi|^{r-\mathrm{s}_q}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} a_l(\tau)b_{j,p}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)$$
$$\circ\tilde{A}_{p,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)J_-(\tau,\xi,-z_n-y_n)$$
$$\times\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta s}f_q(s,\xi,y_n)\,ds\Big)\,dy_n\Big)\,dz_n\Big)\,d\bar{\xi}\,d\eta.$$

Так как функция $h_{0,l,j}(i\eta+\gamma,\bar{\xi})(i\xi_1)^{\mathrm{t}_l}|\xi|^{-\mathrm{t}_l}$ является мультипликатором в $L_p(\mathbb{R}_{n+1})$, получаем оценку

$$\|\Phi_k^1(t,\bar{x})\,;L_p\mathbb{R}_{n+1}^{++})\| \leqslant c_1\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{\theta=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{m}\|F_{j,\theta,q}(t,\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}_{n+1})\|, \tag{4.14}$$

где константа c_1 не зависит от k, $u_0^+(\bar{x})$ и функция $F_{j,\theta,q}$ имеет вид

$$F_{j,\theta,q}(t,\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi+it\eta}\chi(x_n)\Big(\int_{1/k}^{k} v^{-1}G(\xi v)\,dv\Big)|\xi|^{r-\mathrm{s}_q}$$
$$\times\Big(\int_{-\infty}^{\infty} a_l(\tau)b_{j,\theta}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{x_n}\Big)\circ\tilde{A}_{\theta,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{x_n}\Big)$$
$$\circ J_-(\tau,\xi,-x_n-y_n)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta s}f_q(s,\xi,y_n)\,ds\Big)\,dy_n\Big)\,d\xi\,d\eta.$$

Покажем справедливость оценки

$$\|F_{j,\theta,q}(t,\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}_{n+1})\| \leqslant c_2\sum_{i=1}^{m}\|u_{i,0}^+(\bar{x})\,;W_p^{\mathrm{t}_1}(\mathbb{R}_n^+)\| \tag{4.15}$$

с константой $c_2>0$, не зависящей от k и $u_0^+(\bar{x})$. Учитывая определение функции $f_q(s,\xi,y_n)$ и применяя формулу преобразования Фурье для свертки, находим

$$\|F_{j,\theta,q}(t,\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}_{n+1})\| = \|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{ix\xi - ix_n\xi_n + it\eta} m_{j,\theta,q}(\tau,\bar{\xi})|\xi|^{-s_q}$$

$$\times\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}G(\xi v)\,dv\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iy_n\xi_n - i\eta s} f_q(s,\xi,y_n)\,ds\,dy_n\Big)\,d\bar{\xi}\,d\eta\,;L_p(\mathbb{R}_{n+1})\|,$$

где

$$m_{j,\theta,q}(\tau,\bar{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{iy_n\xi_n}|\xi|^r a_l(\tau) b_{j,\theta}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{y_n}\Big)$$

$$\circ\tilde{A}_{\theta,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{y_n}\Big)\circ J_-(\tau,\xi,-y_n)\,dy_n.$$

Функция $m_{j,\theta,q}(i\eta+\gamma,\bar{\xi})$ так же, как и функции $\mu_\nu^+(i\eta+\gamma,\bar{\xi})$, $\mu_\nu^-(i\eta+\gamma,\bar{\xi})$, является мультипликатором в $L_p(\mathbb{R}_{n+1})$. Согласно определению функции $f_q(s,\xi,y_n)$ отсюда получаем неравенство (4.15). В силу неравенств (4.14), (4.15) заключаем

$$\|\Phi_k^1(t,\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\| \leqslant c\sum_{i=1}^{m}\|u_{i,0}^+(\bar{x})\,;W_p^{\mathrm{t}_1}(\mathbb{R}_n^+)\|.$$

Аналогично доказывается оценка

$$\|\Phi_k^2(t,\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\| \leqslant c\sum_{i=1}^{m}\|u_{i,0}^+(\bar{x})\,;W_p^{\mathrm{t}_1}(\mathbb{R}_n^+)\|.$$

Поскольку $e^{-\gamma t}D_{x_1}^{\mathrm{t}_l}v_{l,k}^2(t,\bar{x}) = \Phi_k^1(t,\bar{x}) + \Phi_k^2(t,\bar{x})$, из последних неравенств приходим к оценке (4.8) при $j=1$ и выполнении условия (4.12). Оценка (4.8) в общем случае (а также оценка (4.9)) доказывается аналогичным образом. Лемма 4.6 доказана.

Лемма 4.7. *Пусть* $u_0^+ \in L_p(\mathbb{R}_n^+)$, $U = \operatorname{supp} u_0^+ < \infty$. *Если* $n/p' > \mathrm{t}_l - \mathrm{t}_1$, *то для компоненты* $v_{l,k}^1(t,\bar{x})$ *вектор-функции* $P_k^1 u_0^+(t,\bar{x})$ *имеет место оценка*

$$\|v_{l,k}^1(t,\bar{x})\,;L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\| \leqslant c\sum_{i=1}^{m}\|u_{i,0}^+(\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}_n^+)\|, \qquad \gamma > \gamma_0,$$

где константа $c = c(U)$ *не зависит от* k *и* $u_0^+(\bar{x})$, *причем*

$$\|v_{l,k}^1(t,\bar{x}) - v_{l,m}^1(t,\bar{x})\,;L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\| \to 0 \qquad (k,\ m\to\infty).$$

Доказательство. Точно так же, как при доказательстве леммы 4.5, в случае $\gamma > \gamma_0$ имеем представление

$$e^{-\gamma t} v^1_{l,k}(t,\bar{x}) = \sum_{q=1}^{m} (\sqrt{2\pi})^{-n} \int_{1/k}^{k} v^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_n} e^{i\bar{x}\bar{\xi}+it\eta} G(\xi v)$$
$$\times \left[\int_0^\infty e^{-iy_n\xi_n} \tilde{a}_{l,q}(\tau, i\xi, D_{y_n}) J_+(\tau,\xi,y_n)\,dy_n \right.$$
$$\left. + \int_{-\infty}^{0} e^{-iy_n\xi_n} \tilde{a}_{l,q}(\tau, i\xi, D_{y_n}) J_-(\tau,\xi,y_n)\,dy_n \right] \hat{f}_q(\eta,\bar{\xi})\,d\bar{\xi}\,d\eta\,dv, \quad (4.16)$$

где $\hat{f}_q(\eta,\bar{\xi})$, $\bar{\xi} = (\xi,\xi_n)$, — преобразование Фурье по s и y_n функции $\chi(s)\chi(y_n)e^{-\gamma s}K_0\hat{u}_0^+(\xi,y_n)$. Используя лемму 4.4, формулу (4.16) можно переписать следующим образом:

$$e^{-\gamma t} v^1_{l,k}(t,\bar{x}) = \sum_{q=1}^{m} (\sqrt{2\pi})^{-n} \int_{1/k}^{k} v^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_n} e^{i\bar{x}\bar{\xi}+it\eta} G(\xi v)$$
$$\times \frac{\tilde{a}_{l,q}(\tau, i\bar{\xi})}{a(\tau^{-1}, i\bar{\xi})} \hat{f}_q(\eta,\bar{\xi})\,d\bar{\xi}\,d\eta\,dv.$$

Отметим, что из условия 2 вытекают равенства

$$\tilde{a}_{l,q}(\tau, i\bar{\xi}) = |\bar{\xi}|^{\mathrm{r}-\mathrm{t}_l-\mathrm{s}_q} \tilde{a}_{l,q}(\tau, i\bar{\xi}'), \quad \bar{\xi}' = \frac{\bar{\xi}}{|\bar{\xi}|} \quad l,\ q = 1,\dots,\nu,$$

из которых следует

$$\frac{\tilde{a}_{l,q}(\tau, i\bar{\xi})}{a(\tau^{-1}, i\bar{\xi})} = |\bar{\xi}|^{-\mathrm{t}_l-\mathrm{s}_q} \frac{\tilde{a}_{l,q}(\tau, i\bar{\xi}')}{a(\tau^{-1}, i\bar{\xi}')}.$$

Рассуждая, как в [15], получим требуемое утверждение. Лемма 4.7 доказана.

Лемма 4.8. *Пусть $u_0^+ \in L_p(\mathbb{R}_n^+)$. Тогда для компоненты $v^1_{l,k}(t,\bar{x})$ $(1 \leqslant l \leqslant m)$ вектор-функции $P_k^1 u_0^+(t,\bar{x})$ имеет место оценка*

$$\|D_t v^1_{l,k}(t,\bar{x})\,;L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| \leqslant c \sum_{i=1}^{m} \|u^+_{i,0}(\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}_n^+)\|, \quad \gamma > \gamma_0, \quad (4.17)$$

где константа c не зависит от k и $u_0^+(\bar{x})$, причем

$$\|D_t v^1_{l,k}(t,\bar{x}) - D_t v^1_{l,m}(t,\bar{x})\,;L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| \to 0 \quad (k,\ m \to \infty). \quad (4.18)$$

Доказательство. Поскольку интеграл в правой части (4.16) не зависит от $\operatorname{Re}\tau > \gamma_0$, имеем

$$e^{-\gamma t} D_t v^1_{l,k}(t,\bar{x}) = (\sqrt{2\pi})^{-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi + it\eta} G(\xi v) \sum_{q=1}^{m} \tau \tilde{a}_{l,q}(\tau, i\xi, D_{x_n})$$
$$\circ \left[\int\limits_0^{x_n} J_+(\tau, \xi, x_n - y_n) \frac{1}{\tau} \psi_q(\xi, y_n)\, dy_n \right.$$
$$\left. + \int\limits_{x_n}^{\infty} J_-(\tau, \xi, x_n - y_n) \frac{1}{\tau} \psi_q(\xi, y_n)\, dy_n \right] d\xi\, d\eta\, dv,$$

где $\psi_q(\xi, y_n) = (K_0 \hat{u}_0^+)_q(\xi, y_n)$. Поэтому, как и при доказательстве лемм 4.5, 4.6, используя лемму 4.4, последнее выражение можно привести к виду

$$e^{-\gamma t} D_t v^1_{l,k}(t,\bar{x}) = \sum_{q=1}^{m} (\sqrt{2\pi})^{-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{i\bar{x}\bar{\xi} + it\eta} G(\xi v)$$
$$\times \frac{\tau \tilde{a}_{l,q}(\tau, i\bar{\xi})}{a(\tau^{-1}, i\bar{\xi})} \hat{f}_q(\eta, \bar{\xi})\, d\bar{\xi}\, d\eta\, dv.$$

Учитывая условие $\mathrm{t}_l = -\mathrm{s}_q$ $(1 \leqslant l \leqslant m,\ 1 \leqslant q \leqslant m)$ и рассуждая как при выводе (3.17), получаем, что функция $\frac{\tau \tilde{a}_{l,q}(\tau, i\bar{\xi})}{a(\tau^{-1}, i\bar{\xi})}$ является мультипликатором в $L_p(\mathbb{R}_{n+1})$. Согласно определению $\hat{f}_q(\eta, \bar{\xi})$ приходим к (4.17) и (4.18). Лемма 4.8 доказана.

Лемма 4.9. *Пусть* $u_0^+ \in L_p(\mathbb{R}_n^+)$, $U = \operatorname{supp} u_0^+ < \infty$. *Предположим, что*

$$\deg_\lambda (b_{j,\theta}(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda) \tilde{A}_{\theta,q}(\tau^{-1}, i\xi, i\lambda)) < r \quad (j = 1, \ldots, \mu, \quad \theta, q = 1, \ldots, \nu).$$

Если $n/p' > \mathrm{t}_l - \mathrm{t}_1$, *то для компоненты* $v^2_{l,k}(t,\bar{x})$ *вектор-функции* $P^2_k u_0^+(t,\bar{x})$ *имеет место оценка*

$$\|v^2_{l,k}(t,\bar{x}) \,;\, L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| \leqslant c \sum_{i=1}^{m} \|u^+_{i,0}(\bar{x}) \,;\, L_p(\mathbb{R}_n^+)\|, \qquad \gamma > \gamma_0,$$

где константа $c = c(U)$ *не зависит от* k *и* $u_0^+(\bar{x})$, *причем*

$$\|v^2_{l,k}(t,\bar{x}) - v^2_{l,m}(t,\bar{x}) \,;\, L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| \to 0 \quad (k,\, m \to \infty).$$

Доказательство. Точно так же, как при доказательстве леммы 4.6, в случае $\gamma > \gamma_0$ имеем представление

$$e^{-\gamma t} v_{l,k}^2(t,\bar{x}) = -\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{\theta=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{m}(\sqrt{2\pi})^{1-n}\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi+it\eta}G(\xi v)$$

$$\times|\xi|^{r-s_q-t_l}\Bigl(\int\limits_0^{\infty} D_{z_n}\omega_{l,j}\Bigl(\tau,\frac{\xi}{|\xi|},|\xi|(x_n+z_n)\Bigr)\int\limits_0^{\infty} a_l(\tau)b_{j,\theta}\Bigl(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Bigr)$$

$$\circ\tilde{A}_{\theta,q}\Bigl(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Bigr)\circ J_-(\tau,\xi,-z_n-y_n)\frac{1}{\tau}\psi_q(\xi,y_n)\,dy_n\,dz_n$$

$$+\int\limits_0^{\infty}\omega_{l,j}\Bigl(\tau,\frac{\xi}{|\xi|},|\xi|(x_n+z_n)\Bigr)\int\limits_0^{\infty} a_l(\tau)b_{j,\theta}\Bigl(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Bigr)$$

$$\circ\tilde{A}_{\theta,q}\Bigl(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Bigr)\circ D_{z_n}J_-(\tau,\xi,-z_n-y_n)\frac{1}{\tau}\psi_q(\xi,y_n)\,dy_n\,dz_n\Bigr)\,d\xi\,d\eta\,dv$$

$$= F_k^1(t,\bar{x}) + F_k^2(t,\bar{x}),$$

где

$$\psi(\xi,y_n) = K_0\hat{u}_0^+(\xi,y_n),\quad a_l(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } l\leqslant m,\\ \tau & \text{при } l\geqslant m+1.\end{cases}$$

Рассмотрим первое слагаемое $F_k^1(t,\bar{x})$. Поскольку $x_n > 0$, как в случае с функцией $\Phi_k^1(t,\bar{x})$, из доказательства леммы 4.6 имеем

$$F_k^1(t,\bar{x}) = \sum_{j=1}^{\mu}\sum_{\theta=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{m}(\sqrt{2\pi})^{1-n}\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi+it\eta}G(\xi v)$$

$$\times|\xi|^{r-s_q-t_l}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi(x_n+z_n)\Bigl(D_{z_n}\omega_{l,j}\Bigl(\tau,\frac{\xi}{|\xi|},|\xi|(x_n+z_n)\Bigr)\Bigr)\chi(z_n)$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty} a_l(\tau)b_{j,\theta}\Bigl(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Bigr)\circ\tilde{A}_{\theta,q}\Bigl(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Bigr)$$

$$\circ J_-(\tau,\xi,-z_n-y_n)\Bigl(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta s}f_q(s,\xi,y_n)\,ds\Bigr)\,dy_n\,dz_n\,d\xi\,d\eta\,dv.$$

Используя функцию $h_{0,l,j}(\tau,\bar{\xi})$, как и при выводе оценки (4.14), нетрудно получить неравенство

$$\|F_k^1(t,\bar{x});L_p(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\|\leqslant c_1\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{\theta=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{m}\|\Psi_{j,\theta,q}(t,\bar{x});L_p(\mathbb{R}_{n+1})\|,$$

где константа c_1 не зависит от k, $u_0^+(\bar{x})$, и

$$\Psi_{j,\theta,q}(t,\bar{x}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi+it\eta}\chi(x_n)\Big(\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}G(\xi v)\,dv\Big)|\xi|^{r-s_q-t_l}$$

$$\times\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} a_l(\tau)b_{j,\theta}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{x_n}\Big)\circ\tilde{A}_{\theta,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{x_n}\Big)$$

$$\circ J_-(\tau,\xi,-x_n-y_n)\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta s}f_q(s,\xi,y_n)\,ds\Big)\,dy_n\Big)\,d\xi\,d\eta.$$

Учитывая лемму 4.1 и рассуждая как в [15], получим требуемое утверждение. Лемма 4.9 доказана.

Лемма 4.10. *Пусть* $u_0^+\in W_p^{t_1}(\mathbb{R}_n^+)$, $U=\operatorname{supp}u_0^+<\infty$. *Предположим, что для некоторых индексов* j, θ, q

$$\deg_\lambda(b_{j,\theta}(\tau^{-1},i\xi,i\lambda)\tilde{A}_{\theta,q}(\tau^{-1},i\xi,i\lambda))=r. \tag{4.19}$$

Если $n/p' > t_l - t_1 + 1$, *то для компоненты* $v_{l,k}^2(t,\bar{x})$ *вектор-функции* $P_k^2u_0^+(t,\bar{x})$ *имеет место оценка*

$$\|v_{l,k}^2(t,\bar{x})\,;L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\|\leqslant c\sum_{i=1}^{m}\|u_{i,0}^+(\bar{x})\,;W_p^{t_1}(\mathbb{R}_n^+)\|,\quad \gamma>\gamma_0, \tag{4.20}$$

где константа $c=c(U)$ *не зависит от* k *и* $u_0^+(\bar{x})$, *причем*

$$\|v_{l,k}^2(t,\bar{x})-v_{l,m}^2(t,\bar{x})\,;L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\|\to 0\quad (k,\,m\to\infty). \tag{4.21}$$

Доказательство. Как вытекает из предыдущих рассуждений, основные трудности возникают при $t_l>t_1$. При доказательстве леммы 4.6 уже отмечалось, что функции $P_k^2u_0^+(t,\bar{x})$ представимы формулой (4.10), при этом компоненты вектор-функции $g(\tau,\xi,x_n)$ имеют вид (4.11). Преобразуем (4.11), применив оператор

$$b_{j,\theta}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)\circ\tilde{A}_{\theta,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)$$

к интегралам

$$I_q(\tau,\xi,z_n)=\Big[\int\limits_0^{z_n} J_+(\tau,\xi,z_n-y_n)\frac{1}{\tau}\psi_q(\xi,y_n)\,dy_n$$

$$+\int\limits_{z_n}^{\infty} J_-(\tau,\xi,z_n-y_n)\frac{1}{\tau}\psi_q(\xi,y_n)\,dy_n\Big].$$

Поскольку выполнено условие (4.19), в силу леммы 4.2 получим

$$b_{j,\theta}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)\circ\tilde{A}_{\theta,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)\circ I_q(\tau,\xi,z_n)$$

$$=\int\limits_0^{z_n} b_{j,\theta}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)\circ\tilde{A}_{\theta,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)J_+(\tau,\xi,z_n-y_n)$$

$$\times\frac{1}{\tau}\psi_q(\xi,y_n)\,dy_n+\int\limits_{z_n}^{\infty} b_{j,\theta}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)\circ\tilde{A}_{\theta,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|},-\frac{1}{|\xi|}D_{z_n}\Big)$$

$$\circ J_-(\tau,\xi,z_n-y_n)\frac{1}{\tau}\psi_q(\xi,y_n)\,dy_n+\beta_{j,\theta,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|}\Big)\frac{|\xi|^{-r}}{c_r}\,\frac{1}{\tau}\psi_q(\xi,z_n),$$

где $\beta_{j,\theta,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|}\Big)$ — коэффициент при производной $D^r_{z_n}$ в операторе

$$b_{j,\theta}\Big(\tau^{-1},i\xi,D_{z_n}\Big)\circ\tilde{A}_{\theta,q}\Big(\tau^{-1},i\xi,D_{z_n}\Big).$$

В силу полученной формулы компоненту $g_l(\tau,\xi,x_n)$ можно представить в виде

$$g_l(\tau,\xi,x_n)=g_l^1(\tau,\xi,x_n)+g_l^2(\tau,\xi,x_n),\tag{4.22}$$

где функция $g_l^1(\tau,\xi,x_n)$ равна правой части равенства (4.13), а функция $g_l^2(\tau,\xi,x_n)$ имеет вид

$$g_l^2(\tau,\xi,x_n)=-\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{\theta=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{m}\omega_{l,j}\Big(\tau,\frac{i\xi}{|\xi|},|\xi|x_n\Big)$$

$$\times|\xi|^{-s_q}\beta_{j,\theta,q}\Big(\tau^{-1},\frac{i\xi}{|\xi|}\Big)\frac{|\xi|^{-r}}{c_r}\,\frac{1}{\tau}\psi_q(\xi,0).\tag{4.23}$$

Используя формулы (4.10) и (4.22), компоненту $e^{-\gamma t}v^2_{l,k}(t,\bar{x})$ при $\gamma>\gamma_0$ запишем в виде

$$e^{-\gamma t}v^2_{l,k}(t,\bar{x})=(\sqrt{2\pi})^{1-n}\int\limits_{1/k}^{k}v^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}e^{ix\xi+it\eta}G(\xi v)$$

$$\times|\xi|^{-\mathrm{t}_l}a_l(\tau)g_l^1(\tau,\xi,x_n)\,d\xi\,d\eta\,dv+(\sqrt{2\pi})^{1-n}\int\limits_{1/k}^{k}v^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}e^{ix\xi+it\eta}G(\xi v)$$

$$\times|\xi|^{-\mathrm{t}_l}a_l(\tau)g_l^2(\tau,\xi,x_n)\,d\xi\,d\eta\,dv=V^1_{l,k}(t,\bar{x})+V^2_{l,k}(t,\bar{x}).$$

Поскольку $n/p'>\mathrm{t}_l-\mathrm{t}_1$, рассуждая как в [15], можно вывести оценку

$$\|V^1_{l,k}(t,\bar{x})\,;L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\|\leqslant c\sum_{i=1}^{m}\|u^+_{i,0}(\bar{x})\,;L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n})\|\tag{4.24}$$

с константой $c = c(U)$, не зависящей от k и $u_0^+(\bar{x})$.

Оценим функцию $V_{l,k}^2(t,\bar{x})$. Согласно представлению (4.23) L_p-оценка функции $V_{l,k}^2(t,\bar{x})$ сводится к оценке функций вида

$$F_k(t,\bar{x}) = \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi+it\eta} G(\xi v) a_l(\tau) \times |\xi|^{-\mathfrak{t}_l+\mathfrak{t}_1} \omega_{l,j}\Big(\tau, \frac{\xi}{|\xi|}, |\xi| x_n\Big) \frac{1}{\tau} \psi_q(\xi,0)\, d\xi\, d\eta\, dv.$$

Используя равенство

$$\omega_{l,j}\Big(\tau, \frac{\xi}{|\xi|}, |\xi| x_n\Big)\psi_q(\xi,0) = \omega_{l,j}\Big(\tau, \frac{\xi}{|\xi|}, 0\Big)\psi_q(\xi,x_n) - \int\limits_0^{x_n} D_{y_n}\Big(\omega_{l,j}\Big(\tau, \frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|(x_n-y_n)\Big)\psi_q(\xi,y_n)\Big)\, dy_n,$$

запишем функцию $F_k(t,\bar{x})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} F_k(t,\bar{x}) &= (\sqrt{2\pi})^{1-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{i(x-y)\xi+it\eta} G(\xi v) \\ &\quad \times a_l(\tau)|\xi|^{-\mathfrak{t}_l+\mathfrak{t}_1} \omega_{l,j}\Big(\tau, \frac{\xi}{|\xi|}, 0\Big) \frac{1}{\tau} (K_0 \hat{u}_0^+)_q(y,x_n)\, d\xi\, dy\, d\eta\, dv \\ &\quad - (\sqrt{2\pi})^{1-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{i(x-y)\xi+it\eta} G(\xi v) a_l(\tau) |\xi|^{-\mathfrak{t}_l+\mathfrak{t}_1} \\ &\quad \times \int\limits_0^{x_n} D_{y_n}\Big(\omega_{l,j}\Big(\tau, \frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|(x_n-y_n)\Big) \frac{1}{\tau}(K_0\hat{u}_0^+)_q(y,y_n)\Big)\, dy_n\, d\xi\, dy\, d\eta\, dv \\ &= F_k^1(t,\bar{x}) + F_k^2(t,\bar{x}). \end{aligned}$$

Функции $a_l(\tau)\omega_{l,j}\Big(\tau, \frac{\xi}{|\xi|}, 0\Big)$ являются мультипликаторами в $L_p(\mathbb{R}_n)$. Поэтому

$$\|F_k^1(t,\bar{x}); L_p(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\| \leqslant c \, \| \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{i(x-y)\xi} G(\xi v) \times |\xi|^{-\mathfrak{t}_l+\mathfrak{t}_1} (K_0\hat{u}_0^+)_q(y,x_n)\, d\xi\, dy\, dv\,; L_p(\mathbb{R}_n^+)\|.$$

Используя неравенства Минковского и Юнга, получим

$$\|F_k^1(t,\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| \leqslant c\int\limits_{1/k}^{1} v^{-1}\,\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi}G(\xi v)|\xi|^{-\mathrm{t}_l+\mathrm{t}_1}\,d\xi\,;L_1(\mathbb{R}_{n-1})\Big\|\,dv$$

$$\times\|(K_0\hat{u}_0^+)_q(\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}^+_n)\|+c\int\limits_{1}^{k} v^{-1}\,\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} e^{ix\xi}G(\xi v)|\xi|^{-\mathrm{t}_l+\mathrm{t}_1}\,d\xi\,;L_p(\mathbb{R}_{n-1})\Big\|\,dv$$

$$\times\big\|\,\|(K_0\hat{u}_0^+)_q(y,x_n)\,;L_1(\mathbb{R}_{n-1})\|\,;L_p(\mathbb{R}^+_1)\big\|.$$

В силу условий $\mathrm{t}_l > \mathrm{t}_1$, $n/p' > \mathrm{t}_l - \mathrm{t}_1 + 1$ и определения ядра $G(\xi)$ справедливо неравенство

$$\|F_k^1(t,\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| \leqslant c\sum_{i=1}^{m}\|u^+_{i,0}(\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}^+_n)\|$$

с константой $c = c(U)$, не зависящей от k и $u_0^+(\bar{x})$.

Доказательство оценки

$$\|F_k^2(t,\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| \leqslant c\sum_{i=1}^{m}\|u^+_{i,0}(\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}^+_n)\|$$

при условии $n/p' > \mathrm{t}_l - \mathrm{t}_1 + 1$ проводится аналогично доказательству леммы 4.7. Последние две оценки приводят к неравенству

$$\|F_k(t,\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| \leqslant c\sum_{i=1}^{m}\|u^+_{i,0}(\bar{x})\,;L_p(\mathbb{R}^+_n)\|,$$

из которого с учетом (4.24) получаем (4.20). Точно так же устанавливается соотношение (4.21). Лемма 4.10 доказана.

Доказательство теорем 1.1 и 1.2. Как отмечалось, вектор-функция

$$u_k(t,\bar{x}) = \begin{pmatrix} u_k^+(t,\bar{x}) \\ u_k^-(t,\bar{x}) \end{pmatrix} = P_k^1 u_0^+(t,\bar{x}) + P_k^2 u_0^+(t,\bar{x})$$

является решением краевой задачи (3.20) с начальной функцией (3.21). Поэтому, как и в работе [8], для доказательства разрешимости задачи (1.4) требуется установить сходимость последовательностей $\{u_{l,k}(t,\bar{x})\}$ $(l = 1,\dots,\nu)$ в соответствующих пространствах.

Если $n/p' > \mathrm{t}_l - \mathrm{t}_1$ и выполнены условия теоремы 1.1, то из лемм 4.5–4.9 вытекает оценка

$$\sum_{i=1}^{m}\|u_{i,k}(t,\bar{x})\,;W^{1,\mathrm{t}_1}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| + \sum_{j=m+1}^{\nu}\|u_{j,k}(t,\bar{x})\,;W^{0,\mathrm{t}_j}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\|$$
$$\leqslant c\sum_{i=1}^{m}\|u^+_{i,0}(\bar{x})\,;W^{\mathrm{t}_1}_{p}(\mathbb{R}^+_n)\|,\quad \gamma > \gamma_0, \tag{4.25}$$

с константой c, не зависящей от k и $u_0^+(\bar{x})$; при этом

$$\sum_{i=1}^{m} \|u_{i,k}(t,\bar{x}) - u_{i,l}(t,\bar{x})\,; W_{p,\gamma}^{1,\mathrm{t}_1}(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\| + \sum_{j=m+1}^{\nu} \|u_{j,k}(t,\bar{x}) - u_{j,l}(t,\bar{x})\,; W_{p,\gamma}^{0,\mathrm{t}_j}(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\| \to 0, \quad k,\ l \to \infty. \tag{4.26}$$

Аналогично, если $n/p' > \mathrm{t}_l - \mathrm{t}_1 + 1$, то при условиях теоремы 1.2 из лемм 4.5–4.8 и леммы 4.10 также вытекают (4.25) и (4.26). В силу полноты пространств $W_{p,\gamma}^{r,s}(\mathbb{R}_{n+1}^{++})$ заключаем, что вектор-функция $u(t,\bar{x})$ имеет компоненты

$$u_i \in W_{p,\gamma}^{1,\mathrm{t}_1}(\mathbb{R}_{n+1}^{++}) \quad (i = 1,\dots,m),$$

$$u_j \in W_{p,\gamma}^{0,\mathrm{t}_j}(\mathbb{R}_{n+1}^{++}) \quad (j = m+1,\dots,\nu)$$

такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} \|u_{i,k}(t,\bar{x}) - u_i(t,\bar{x})\,; W_{p,\gamma}^{1,\mathrm{t}_1}(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\| \to 0,$$

$$\sum_{j=m+1}^{\nu} \|u_{j,k}(t,\bar{x}) - u_j(t,\bar{x})\,; W_{p,\gamma}^{0,\mathrm{t}_j}(\mathbb{R}_{n+1}^{++})\| \to 0$$

при $k \to \infty$. Тогда $u(t,\bar{x})$ является искомым решением краевой задачи (1.4) и из неравенства (4.25) для нее вытекает справедливость оценки (1.10).

Доказательство единственности решения задачи (1.4) проводится точно так же, как в случае смешанных краевых задач для уравнений соболевского типа [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ле Блон П., Майсек Л.** Волны в океане. М.: Мир, 1981.
2. **Лайтхилл Дж.** Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.
3. **Бреховских Л. М., Гончаров В. В.** Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982.
4. **Габов С. А., Свешников А. Г.** Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986.
5. **Габов С. А., Свешников А. Г.** Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
6. **Солонников В. А.** Об общих краевых задачах, эллиптических в смысле Дуглиса — Ниренберга. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 3. С. 665–706.
7. **Волевич Л. Р.** Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Мат. сб. 1965. Т. 68, № 3. С. 373–416.
8. **Демиденко Г. В., Матвеева И. И.** Об одном классе краевых задач для системы Соболева // Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Ин-т математики АН СССР. Сиб. отд-ние. 1989. С. 54–78.
9. **Соболев С. Л.** Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
10. **Дезин А. А.** Инвариантные дифференциальные операторы и граничные задачи // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1962. Т. 68. С. 3–88.

11. **Масленникова В. Н.** Явные представления и априорные оценки решений граничных задач для системы Соболева // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 5. С. 1182–1198.
12. **Масленникова В. Н., Боговский М. Е.** Асимптотическое поведение решений краевых задач для системы Соболева в полупространстве и явление погранслоя // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 109–152.
13. **Янов С. И.** О постановке смешанных задач для одного класса систем не типа Коши — Ковалевской // Дифференциальные уравнения с частными производными / Тр. семинара С. Л. Соболева. Новосибирск: Ин-т математики АН СССР. Сиб. отд-ние. 1981. № 2. С. 115–149.
14. **Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.** Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
15. **Демиденко Г. В.** Об условиях разрешимости смешанных задач для одного класса уравнений соболевского типа // Краевые задачи для уравнений с частными производными / Тр. семинара С. Л. Соболева. Новосибирск: Ин-т математики АН СССР. Сиб. отд-ние. 1984. № 1. С. 23–54.
16. **Демиденко Г. В.** L_p-теория краевых задач для уравнений соболевского типа. Новосибирск, 1991. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 16).
17. **Успенский С. В.** О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1972. Т. 117. С. 292–299.
18. **Лизоркин П. И.** Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов и его приложения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1969. Т. 105. С. 89–167.