О РАВНОВЕСИЯХ ЭДЖВОРТА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ НЕКЛАССИЧЕСКИХ РЫНКОВ

В. А. Васильев

В данной статье устанавливается справедливость известной гипотезы Эджворта [1, 2] об асимптотической эквивалентности ядер и равновесий для трех видов неклассических рынков:

— смешанных экономических систем, характеризующихся совместным функционированием централизованного планирования и рыночного регулирования,

— моделей равновесия, учитывающих наличие общественных благ,

— экономических систем с неавтономными предпочтениями.

Моделирование условий совершенной конкуренции, как и в основополагающих работах [1, 3], осуществляется с помощью реплик $\mathcal{E}_{(r)}$, представляющих собой объединения r экземпляров исходной экономики $\mathcal{E}$. Согласно традиционной интерпретации увеличение числа однотипных экономических агентов в реплике $\mathcal{E}_{(r)}$ приводит к уменьшению их индивидуального влияния на пропорции обмениваемых продуктов. Тем самым создаются предпосылки для децентрализованного (базирующегося на механизме свободных цен) формирования распределений, предотвращающих распадение экономической системы на автономные коалиции участников.

Ключевой проблемой формализации и проверки гипотезы Эджворта является установление вида коалиционной устойчивости, адекватной тому или иному способу определения равновесных пропорций обмена. Детальное описание изучаемых в работе вариантов коалиционной устойчивости и асимптотики соответствующих ядер приводится в терминах равновесий Эджворта, под которыми, как и в работах [4, 5], понимаются сбалансированные распределения экономики $\mathcal{E}$, чьи стандартные продолжения в $\mathcal{E}_{(r)}$ принадлежат соответствующим ядрам при всех $r \geqslant 1$. Основным средством анализа равновесий Линдала, согласованных распределений и информационных равновесий, реализующих равновесные пропорции обмена в изучаемых неклассических рынках, является их характеризация с помощью отношения нечеткого доминирования. Следует подчеркнуть, что рассматриваемые концепции равновесия требуют более тонкого конструирования нечетких ядер, реплик и доминирования в них, нежели прямая модификация традиционных понятий применительно к некоторому вложению исходной экономики в стандартную модель экономического обмена. В частности, важной особенностью доминирования в репликах моделей линдаловского типа является учет эффекта переполнения: значения функций полезности участников блокирующей коалиции определяются не только уровнем потребления общественных благ, но и строением этой коалиции. Главная причина — неавтономность индивидуальных предпочтений. Что касается смешанных экономических систем, в них определяющую роль играет нелинейность функций дохода, обусловленная множественностью механизмов регулирования. Следствием является существенная зависимость типа коалиционной устойчивости от порядковой структуры равновесных цен, что в значительной степени отличает смешанные модели от классических.

Основные результаты работы состоят в доказательстве аналогов известной теоремы Дебре — Скарфа [3] о стягиваемости ядер реплик к равновесиям для всех трех видов неклассических рынков. Как уже отмечалось, предлагаемый анализ равновесных состояний базируется на систематическом использовании нечеткого доминирования для характеризации согласованных распределений, равновесий Линдала и информационных равновесий. Значительное внимание уделяется альтернативным способам определения доминирования в репликах и сравнительному анализу равновесий Эджворта, характеризующих асимптотическое поведение соответствующих ядер.

§ 1. Смешанные экономические системы с двумя типами цен

В этом параграфе устанавливаются условия, обеспечивающие совпадение равновесий Эджворта и согласованных распределений для двух конкретизаций общей модели смешанной экономики, предложенной в [6].

Существенной чертой смешанной экономической системы является совместное функционирование двух различных механизмов регулирования — централизованного планирования и свободных рыночных цен. Таким образом, в отличие от классических, изучаемые модели характеризуются наличием двух типов рынков. На первом цены стабильны и распределение благ в значительной мере определяется действующей системой централизованных заказов и рационирования. На втором цены свободные и формируются стандартным механизмом уравнивания спроса и предложения. Предполагается, что избыток продуктов, приобретенных на первом рынке, может быть реализован каждым из участников по свободным рыночным ценам.

Проблема корректного определения ядер в репликах смешанных экономических систем обусловлена как наличием фиксированных цен на рационируемые продукты, так и множественностью типов коалиционной устойчивости согласованных распределений, отвечающих различным видам свободных цен второго рынка. Универсальный способ преодоления указанных трудностей опирается на кусочно-линейную аппроксимацию нелинейных функций дохода и приводит к формированию нескольких типов ядер, характеризующих все возможные варианты коалиционной устойчивости. В результате проверка гипотезы Эджворта редуцируется к анализу асимптотического поведения каждого из ядер в отдельности. Отметим, что некоторые модификации общей модели [7] (например, рассматриваемые далее смешанные системы со стабильными закупочными ценами) допускают и глобальную линеаризацию бюджетных ограничений. Последнее обстоятельство позволяет ограничиться рассмотрением единого для всех согласованных распределений вида коалиционной устойчивости. Однако возможность линеаризации «в целом» является скорее исключением, чем правилом. Поэтому при всей важности изучения упомянутых модификаций наиболее перспективным направлением представляется кусочно-линейная аппроксимация, позволяющая, с одной стороны, давать более тонкую классификацию коалиционной устойчивости (даже при наличии универсального ядра), а с другой — проводить детальный сравнительный анализ ядер различных конкретизаций общей модели смешанной экономики с двумя видами цен.

1.1. Перейдем к формальному описанию смешанной экономической системы с двумя типами цен. Обозначим через $\mathbb{R}^l_+$ неотрицательный ортант l-мерного арифметического пространства, зафиксируем вектор $q \in \mathbb{R}^l_+$ и положим

$$\mathcal{E}^q = \langle N, L, \{X'_i, X''_i, w^i, u_i, \alpha_i, \beta^i, \theta^i\}_{i\in N}; q\rangle,$$

где

$N = \{1, \dots, n\}$	—	множество участников,
$L = \{1, \dots, l\}$	—	множество продуктов,
$X'_i \subseteq \mathbb{R}^l_+$	—	потребительское множество участника $i \in N$ при фиксированных ценах q,
$X''_i \subseteq \mathbb{R}^l_+$	—	потребительское множество участника $i \in N$ при свободных ценах $p \in \mathbb{R}^l_+$,
$u_i\colon X'_i \times X''_i \to \mathbb{R}$	—	функция полезности участника $i \in N$,
$w^i \in \mathbb{R}^L_+$	—	начальный запас участника $i \in N$,
$\beta^i \in \mathbb{R}^l_+$	—	максимальный объем потребления, доступный участнику $i \in N$ по фиксированным ценам q,
$\theta^i \in \mathbb{R}^l_+$	—	величина централизованного заказа для участника $i \in N$.

Функции $\alpha_i\colon \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ характеризуют доходы, получаемые экономическими агентами при передаче «госзаказов» θ^i в фонды централизованного распределения. Таким образом, предполагается, что суммы, выплачиваемые участникам за выполнение централизованных заказов, зависят, вообще говоря, и от текущих цен свободного рынка.

Будем считать, что централизованные заказы не превышают начальных запасов экономических агентов: $\theta^i \leqslant w^i$, $i \in N$, причем имеется ненулевой заказ по крайней мере на один из продуктов: $\sum_N \theta^i \neq 0$. Кроме того, будем полагать, что рационирование $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^n)$ используется для перераспределения всего централизованного заказа: $\sum_N \beta^i = \sum_N \theta^i$. Далее предполагается одновременное функционирование двух рынков. На первом действуют фиксированные цены q и потребление $x'^i \in X'_i$ каждого из экономических агентов $i \in N$ ограничено сверху рационом β^i. На втором помимо покупки любого набора продуктов $x''^i \in X''_i$ по свободным ценам $p \in \mathbb{R}^l_+$ допускается следующий вид перепродажи товаров, приобретенных по ценам q: если текущие свободные цены p_k выше фиксированных, то каждый участник $i \in N$ приобретает на первом рынке максимальный объем β^i_k соответствующего продукта $k \in L$ и избыток (по сравнению с его потребностью x'^i_k), равный $\beta^i_k - x'^i_k$, перепродает по ценам p_k на втором рынке.

Таким образом, бюджетное множество $B_i(p)$ участника $i \in N$ при свободных ценах $p \in \mathbb{R}^l_+$ определяется по формуле

$$B_i(p) = \{(x'^i, x''^i) \in X_i(\beta) \mid q \cdot x'^i + p \cdot x''^i \leqslant d_i(p, x'^i)\},$$

где

$$X_i(\beta) = \{(x'^i, x''^i) \in X'_i \times X''_i \mid x'^i \leqslant \beta^i\},$$
$$d_i(p, x'^i) = \alpha_i(p) + p \cdot (w^i - \theta^i) + (p - q)^+ \cdot (\beta^i - x'^i);$$

здесь и ниже используются общепринятые обозначения:

$p \cdot x$ — скалярное произведение векторов p и x,

$p \wedge q$, $p \vee q$, $(p-q)^+$ для $p = (p_1, \dots, p_l)$ и $q = (q_1, \dots, q_l)$ — векторы из $\mathbb{R}^l$ с компонентами $(p \wedge q)_k = \min\{p_k, q_k\}$, $(p \vee q)_k = \max\{p_k, q_k\}$, $(p-q)^+_k = \max\{p_k - q_k, 0\}$ соответственно.

Множества спроса $D_i(p)$, которые характеризуют оптимальные реакции участников на цены p, определяются стандартным образом:

$$D_i(p) = \{\overline{x}^i \in B_i(p) \mid \mathcal{P}^\beta_i(\overline{x}^i) \cap B_i(p) = \varnothing\},$$

где $\mathcal{P}^\beta_i(\overline{x}^i) = \{x^i \in X_i(\beta) \mid u_i(x^i) > u_i(\overline{x}^i)\}$. Обозначим через $X(\beta) = \prod_N X_i(\beta)$ множество допустимых распределений экономики $\mathcal{E}^q$ и определим совокупность сбалансированных распределений экономики $\mathcal{E}^q$ следующим образом:

$$X[N] = \left\{x \in X(\beta) \mid \sum_N x^{0i} = \sum_N w^i\right\},$$

полагая здесь и далее $x^{0i} = x'^i + x''^i$ для всех $x^i = (x'^i, x''^i) \in X_i = X'_i \times X''_i$.

Определение 1.1. Распределение $\overline{x} \in X[N]$ называется *согласованным*, если существует вектор цен $\overline{p} \in \mathbb{R}^l_+$ такой, что $\overline{x}^i \in D_i(\overline{p})$ для всех $i \in N$; при этом пара $(\overline{x}, \overline{p})$ называется *согласованным состоянием модели* $\mathcal{E}^q$, а вектор $\overline{p}$ — *согласованными ценами* (поддерживающими $\overline{x}$).

- Множество согласованных распределений модели $\mathcal{E}^q$ будем обозначать через $W^q = W(\mathcal{E}^q)$.

Основная трудность, связанная с доказательством непустоты W^q, состоит в том, что многозначное отображение избыточного спроса

$$E(p) = \sum_N D_i(p) - \sum_N w^i$$

неоднородно и, вообще говоря, не является полем касательных направлений какой-либо сферы в $\mathbb{R}^l$ [7]. Кроме того, из-за отсутствия априорных оценок для нормы согласованных цен в качестве области определения отображения E приходится рассматривать весь неотрицательный ортант $\mathbb{R}^l_+$, что исключает использование стандартных средств типа теоремы Какутани о неподвижных точках соответствий на выпуклых компактах.

Главный прием, используемый для доказательства существования согласованных распределений, заключается в конструировании специальной параметризации E и в последующем анализе некоторых предельных характеристик модели $\mathcal{E}^q$, описывающих свойства этой модели при высоком уровне свободных цен. Основным инструментом анализа является обобщенная лемма Гейла — Никайдо — Дебре (подробности см. в [7, 8]).

Ниже рассматриваются две конкретизации модели $\mathcal{E}^q$:

1) $\widehat{\alpha}_i(p) = p \wedge q \cdot \theta^i, \qquad i \in N;$

2) $\alpha_i(p) = q \cdot \theta^i, \qquad i \in N.$

Первая соответствует форме оплаты госзаказа в общей модели, предложенной В. Л. Макаровым (см. [6]), вторая представляет собой модификацию, введенную и изучавшуюся автором в [7–11].

Принципиальная трудность кооперативной характеризации множества W^q связана в обоих случаях с нелинейностью функций полного дохода $d_i(p, x'^i)$ по свободным ценам p. Для преодоления этой трудности воспользуемся кусочной линейностью функций d_i, имеющей место для рассматриваемых конкретизаций, и разделим W^q на несколько составляющих в соответствии с типом возможных согласованных цен p. Последующий анализ коалиционной устойчивости согласованных распределений осуществляется для каждой из этих частей в отдельности.

Приведем формальные определения. Для каждого $K \subseteq L$ положим

$$P_K = \{p \in \mathbb{R}^l_+ \mid p_k \geqslant q_k,\ k \in K;\ p_j \leqslant q_j,\ j \in J\},$$

где через J обозначено дополнение K, т. е. $J = L \backslash K$. Упоминавшиеся выше составляющие представляют собой подмножества множества W^q, отвечающие тому или иному типу согласованных цен, классифицируемых с помощью конусов P_K:

$$W^q_K = \{x \in W^q \mid \exists p \in P_K\colon (x,p) \text{ — согласованное состояние } \mathcal{E}^q\}.$$

Распределения из W^q_K будем называть *K-согласованными распределениями экономики $\mathcal{E}^q$.*

Замечание 1.1. Нетрудно проверить, что в условиях строгой монотонности функций u_i по x''^i и локальной насыщенности множеств X''_i (см. ниже в п. 1.4 предположение (A2$''$)) все согласованные цены неотрицательны. Следовательно, справедливо соотношение

$$W^q = \bigcup_{K \subseteq L} W^q_K.$$

Замечание 1.2. Хотя основной причиной нарушения линейности функций d_i по p можно считать слагаемое $(p-q)^+ \cdot (\beta^i - x'^i)$, важное значение имеет также и вид функций α_i. В частности, как вытекает из дальнейшего, первый из рассматриваемых случаев характеризуется более глубокой нелинейностью — довольно общий прием, позволяющий линеаризовать упомянутую составляющую d_i, не снимает трудностей, связанных со слагаемым $p \wedge q \cdot \theta^i$.

1.2. Перейдем к характеризации коалиционной устойчивости распределений из W^q_K. Начнем с рассмотрения второго случая, когда функции

α_i не зависят от p, т. е. $\alpha_i(p) = q \cdot \theta^i$ $(i \in N)$. Зафиксируем $K \subseteq L$ и для каждого вектора $z \in \mathbb{R}^l$ через z_K обозначим его проекцию на $\mathbb{R}^K$:

$$(z_K)_k = \begin{cases} z_k, & k \in K, \\ 0, & k \in J = L \setminus K. \end{cases}$$

Ниже используются следующие сокращения:

$$\gamma^i = \theta^i - \beta^i, \quad \widehat{w}^i = w^i - \gamma^i.$$

Определение 1.2. *Коалиция $S \subseteq N$ K-доминирует сбалансированное распределение* $\overline{x} \in X[N]$, если существуют $x^i = (x'^i, x''^i) \in X_i(\beta)$ $(i \in S)$ такие, что

(K1) $$u_i(x^i) > u_i(\overline{x}^i), \quad i \in S,$$

(K2) $$\sum_S x_K^{0i} \leqslant \sum_S \widehat{w}_K^i,$$

(K3) $$q_{K \cup I} \cdot \sum_S x^{0i} + q_{J \setminus I} \cdot \sum_S x'^i \leqslant q_{K \cup I} \cdot \sum_S w^i + q_{J \setminus I} \cdot \sum_S \theta^i$$

при всех $I \subseteq J$.

Условия (K1)–(K3) наиболее простой вид приобретают при $K = L$: коалиция $S \subseteq N$ L-доминирует $\overline{x} \in X[N]$, если найдутся $x^i \in X_i(\beta)$ такие, что

(L1) $$u_i(x^i) > u_i(\overline{x}^i), \quad i \in S,$$

(L2) $$\sum_S x^{0i} \leqslant \sum_S \widehat{w}^i,$$

(L3) $$q \cdot \sum_S x^{0i} \leqslant q \cdot \sum_S w^i.$$

Условия (L1), (L2) аналогичны традиционным требованиям, предъявляемым к отношению доминирования в экономике обмена

$$\mathcal{E}^0 = \langle N, \{X_i(\beta), \widehat{w}^i, u_i\}_{i \in N} \rangle$$

с начальными запасами $\widehat{w}^i = w^i - \theta^i + \beta^i$, полученными перераспределением w^i посредством централизованного заказа $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^n)$ и рационирования $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^n)$. Требование сбалансированности коалиционного распределения $(x^i)_S$ по ценам q, выражаемое условием (L3), отражает специфическую черту экономики $\mathcal{E}^q$ — наличие фиксированных цен, действующих на первом рынке.

Отметим, что требование (L3) существенно лишь при неэквивалентном обмене исходных начальных запасов w^i на $\widehat{w}^i$: если $q \cdot \theta^i = q \cdot \beta^i$ для всех $i \in N$, то соотношение (L3) является прямым следствием (L2). В общем случае каждое из $2^{|J|}$ неравенств условия (K3), как и при L-доминировании, отражает требование сбалансированности $(x^i)_S$ по всем возможным «крайним» реализациям цен свободного рынка, имеющим вид

$$p_{K\cup I} = q_{K\cup I}, \quad p_{J\setminus I} = 0 \quad (I \subseteq J).$$

При этом учитывается тот факт, что при нулевых свободных ценах на продукты из $J\setminus I$ вся выручка участника $i \in N$ от реализации его начального запаса $w^i{}_{J\setminus I}$ составляет лишь гарантированную централизованным заказом величину $q_{J\setminus I} \cdot \theta^i$.

Для описания равновесий Эджворта, отвечающих распределениям из W^q, необходимо формализовать понятие реплики модели $\mathcal{E}^q$. Зафиксируем натуральное число $r \geqslant 1$ и через $N_{(r)}$ обозначим, используя терминологию [4, 5], «объединение r экземпляров множества N»:

$$N_{(r)} = \{(i,m) \mid i \in N,\ m = 1,\dots,r\}. \tag{1.1}$$

Для каждой пары $(i,m) \in N_{(r)}$ положим

$$X'_{im} = X'_i, \quad X''_{im} = X''_i, \quad w^{im} = w^i, \quad u_{im} = u_i, \tag{1.2}$$

$$\alpha_{im} = \alpha_i, \quad \beta^{im} = \beta^i, \quad \theta^{im} = \theta^i. \tag{1.3}$$

Определение 1.3. Смешанная экономическая система

$$\mathcal{E}^q_{(r)} = \langle N_{(r)}, L, \{X'_{im}, X''_{im}, w^{im}, u_{im}, \alpha_{im}, \beta^{im}, \theta^{im}\}_{(i,m)\in N_{(r)}}; q\rangle,$$

определенная в соответствии с формулами (1.1)–(1.3), называется *r-репликой* (*репликой объема r*) *экономики* $\mathcal{E}^q$.

Как видно из определения, реплики $\mathcal{E}^q_{(r)}$ представляют собой объединения r экземпляров исходной экономики $\mathcal{E}^q$, в которых все участники (i,m), $m = 1,\dots,r$, одного и того же типа i имеют идентичные характеристики X'_i, X''_i, w^i, u_i, α_i, β^i и θ^i, совпадающие с характеристиками соответствующего участника экономики $\mathcal{E}^q$.

В дальнейшем при рассмотрении моделей $\mathcal{E}^q_{(r)}$ используются те же обозначения, что для $\mathcal{E}^q$. В частности, под $W_K(\mathcal{E}^q_{(r)})$ и $C_K(\mathcal{E}^q_{(r)})$ понимаются множества K-согласованных распределений и K-ядро экономики $\mathcal{E}^q_{(r)}$ соответственно. Через $X[N_{(r)}]$ обозначаем совокупность сбалансированных распределений $\mathcal{E}^q_{(r)}$, а через $X_{\rm sim}[N_{(r)}]$ — множество симметричных распределений из $X[N_{(r)}]$, характеризующихся тем, что участники одного и того же типа получают одинаковые наборы продуктов. Ясно, что распределение z принадлежит $X_{\rm sim}[N_{(r)}]$ тогда и только тогда, когда существует сбалансированное распределение $x = (x^1,\dots,x^n) \in X[N]$ такое, что $z^{im} = x^i$, $i \in N$, $m = 1,\dots,r$, или (в сокращенном виде)

$$z = x_{(r)}, \quad \text{где } x_{(r)} = \underbrace{(x,\dots,x)}_{r\ \text{раз}}.$$

Обозначим через $C^q_{K,r}$ «основание» симметричной составляющей K-ядра экономики $\mathcal{E}^q_{(r)}$, т. е.

$$C^q_{K,r} = \{x \in X[N] \mid x_{(r)} \in C_K(\mathcal{E}^q_{(r)})\},$$

и приведем центральное определение этого параграфа.

Определение 1.4. Распределение $\bar{x} \in X[N]$ называется *K-равновесием Эджворта модели $\mathcal{E}^q$*, если справедливо включение

$$\bar{x} \in \bigcap_{r=1}^{\infty} C^q_{K,r}.$$

- Множество K-равновесий Эджворта модели $\mathcal{E}^q$ обозначим $C^q_{K,E}$.

Итак, $C^q_{K,E} = \bigcap_{r=1}^{\infty} C^q_{K,r}$ и $\bar{x} \in C^q_{K,E}$ тогда и только тогда, когда все реплики $\bar{x}_{(r)}$ распределения $\bar{x}$ содержатся в K-ядрах соответствующих реплик $\mathcal{E}^q_{(r)}$.

1.3. Как уже отмечалось, установление справедливости гипотезы Эджворта применительно к рассматриваемой модели $\mathcal{E}^q$ базируется на характеризации множеств W^q_K в терминах нечеткого доминирования. Говоря нестрого, последнее является естественным обобщением введенного ранее понятия K-доминирования на так называемые нечеткие коалиции.

Приведем формальное определение. Как обычно (см., например, [5, 12]), *нечеткими коалициями* будем называть ненулевые элементы $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ единичного куба $I_n = [0,1]^n$. При этом соответствующие компоненты τ измеряют степень участия экономических агентов в обычной коалиции $\operatorname{supp}\tau = \{i \in N \mid \tau_i > 0\}$, называемой *носителем* τ. Положим $T = I_n \backslash \{0\}$ и для произвольных $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in T$ и $z = (z^1, \ldots, z^n) \in (\mathbb{R}^l)^N$ будем использовать обозначение $z(\tau) = \sum\limits_N \tau_i z^i$.

Определение 1.5. *Нечеткая коалиция τ K-доминирует сбалансированное распределение* $\bar{x} \in X[N]$, если существует распределение $x \in X(\beta)$ такое, что

(KF1) $$u_i(x^i) > u_i(\bar{x}^i), \quad i \in \operatorname{supp}\tau,$$

(KF2) $$x^0_K(\tau) \leqslant \widehat{w}_K(\tau),$$

(KF3) $$q_{K\cup I} \cdot x^0(\tau) + q_{J\backslash I} \cdot x'(\tau) \leqslant q_{K\cup I} \cdot w(\tau) + q_{J\backslash I} \cdot \theta(\tau) \quad \text{для всех } I \subseteq J,$$

где, как и ранее, $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^n)$, $x^0 = x' + x''$, $\widehat{w} = w - \gamma$, при этом $x' = (x'^1, \ldots, x'^n)$, $x'' = (x''^1, \ldots, x''^n)$, $w = (w^1, \ldots, w^n)$, $\gamma = (\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$.

В частности, при $K = L$ коалиция $\tau \in T$ L-доминирует распределение $\bar{x} \in X[N]$, если существует распределение $x \in X(\beta)$ такое, что

(LF1) $$u_i(x^i) > u_i(\bar{x}^i), \quad i \in \operatorname{supp}\tau,$$

(LF2) $$x^0(\tau) \leqslant \widehat{w}(\tau),$$

(LF3) $$q \cdot x^0(\tau) \leqslant q \cdot w(\tau).$$

Определение 1.6. *Нечетким K-ядром экономики $\mathcal{E}^q$* называется множество $C^q_{K,F}$ всех распределений $\overline{x} \in X[N]$, которые не могут K-доминироваться никакой нечеткой коалицией τ:

$$C^q_{K,F} = \{x \in X[N] \,|\, \text{не существует } \tau \in T,\ K\text{-доминирующей } x\,\}.$$

Оказывается, что множества C^q_K и W^q_K связаны соотношением

$$W^q_K \subseteq C^q_K, \quad K \subseteq L.$$

Для проверки этих и более сильных вложений

$$W^q_K \subseteq C^q_{K,F}, \quad K \subseteq L \tag{1.4}$$

будем использовать полезное и в дальнейшем специальное представление бюджетных множеств $B_i(p)$, определяемое типом свободных цен p. Именно, простые преобразования показывают, что при $p \in P_K$ бюджетные ограничения

$$q \cdot x'^i + p \cdot x''^i \leqslant q \cdot \theta^i + p \cdot (w^i - \theta^i) + (p - q)^+ \cdot (\beta^i - x'^i), \quad i \in N,$$

переписываются в форме

$$F^K_i(p, x^i) \leqslant 0, \quad i \in N,$$

где

$$F^K_i(p, x^i) = q \cdot (-\gamma^i_K + x'^i_J - \theta^i_J) + p \cdot [(x^{0i} - \widehat{w}^i)_K + (x''^i + \theta^i - w^i)_J]. \tag{1.5}$$

Поэтому бюджетные множества $B_i(p)$ при $p \in P_K$ принимают вид

$$B_i(p) = \{x^i \in X_i(\beta) \,|\, F^K_i(p, x^i) \leqslant 0\}. \tag{1.6}$$

Используя представления (1.5), (1.6) и элементарное описание вершин параллелепипедов вида $\{z \in \mathbb{R}^J \,|\, 0 \leqslant z \leqslant a\}$, получаем простое доказательство (1.4).

Предложение 1.1. *Для всех $K \subseteq L$ верно вложение $W^q_K \subseteq C^q_{K,F}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное согласованное распределение $\overline{x} \in W^q_K$ и отвечающие ему согласованные цены $\overline{p} \in P_K$. Допустим, что существует нечеткая коалиция τ, которая K-доминирует $\overline{x}$ с помощью некоторого распределения $x \in X(\beta)$. Учитывая, что $\overline{x}^i$ доставляют максимум функциям u_i на бюджетных множествах $B_i(\overline{p})$, а также тот факт, что по определению доминирования $u_i(x^i) > u_i(\overline{x}^i)$, $i \in \operatorname{supp} \tau$, и используя представление (1.6), получаем

$$F^K_i(\overline{p}, x^i) > 0, \quad i \in \operatorname{supp} \tau. \tag{1.7}$$

Поскольку $\overline{p} \in P_K$, справедливо равенство

$$(q, \overline{p}) = (q, q_K + \overline{p}_J) + (0, s_K),$$

где $s_K = \overline{p}_K - q_K$. Согласно определению P_K имеем $s_K \geqslant 0$ и $0 \leqslant \overline{p}_J \leqslant q_J$. Так как крайние точки множества $\{p \in \mathbb{R}^l \,|\, p_K = 0,\ 0 \leqslant p_J \leqslant q_J\}$ имеют

вид q_I $(I \subseteq J)$, найдутся коэффициенты $\lambda'_I \geqslant 0$ такие, что $\sum\limits_{I \subseteq J} \lambda_I = 1$ и при этом
$$\overline{p}_J = \sum_{I \subseteq J} \lambda_I q_I. \tag{1.8}$$

Используя представление (1.8), получаем
$$(q, \overline{p}) = \sum_{I \subseteq J} \lambda_I [(q, q_{K \cup I}) + (0, s_K)].$$

Складывая неравенства (1.7), умноженные на соответствующие компоненты τ, с учетом (1.5) находим
$$\sum_{I \subseteq J} \lambda_I \Big[q \cdot \sum_N \tau_i (-\gamma^i_K + x'^i_J - \theta^i_J) + (q_{K \cup I} + s_K) \cdot \sum_N \tau_i (x^{0i} - \widehat{w}^i)_K$$
$$+ q_{K \cup I} \cdot \sum_N \tau_i (x''^i + \theta^i - w^i)_J \Big] > 0.$$

Применяя введенные ранее сокращения $z(\tau) = \sum\limits_N \tau_i z^i$, перепишем последнее неравенство в более обозримом виде:
$$\sum_{I \subseteq J} \lambda_I [q \cdot (-\gamma_K(\tau) + x_I(\tau) + \theta_J(\tau)) + q_{K \cup I} \cdot (x^0_K(\tau) - \widehat{w}_K(\tau) + x''_J(\tau)$$
$$+ \theta_J(\tau) - w_J(\tau))] + s_K \cdot (x^0_K(\tau) - \widehat{w}_K(\tau)) > 0. \tag{1.9}$$

Учитывая, что $\widehat{w} = w - \gamma$, $x^0 = x' + x''$ и $q = q_{K \cup I} + q_{J \setminus I}$, перепишем (1.9) следующим образом:
$$\sum_{I \subseteq J} \lambda_I [q_{K \cup I} \cdot (x^0_K(\tau) - w_K(\tau)) + q_{J \setminus I} \cdot (x'_I(\tau) - \theta_J(\tau))]$$
$$+ s_K \cdot (x^0_K(\tau) - \widehat{w}_K(\tau)) > 0. \tag{1.10}$$

Но из определения нечеткого K-доминирования вытекают неравенства
$$x^0_K(\tau) \leqslant \widehat{w}_K(\tau),$$
$$q_{K \cup I} \cdot (x^0(\tau) - w(\tau)) + q_{J \setminus I} \cdot (x'(\tau) - \theta(\tau)) \leqslant 0, \quad I \subseteq J,$$

противоречащие ввиду неотрицательности λ_I и s_K соотношению (1.10). Полученное противоречие доказывает предложение 1.1.

Замечание 1.3. Нетрудно проверить, что бюджетные множества смешанной экономической системы $\mathcal{E}^0$ с нулевыми фиксированными ценами приобретают стандартный для моделей обмена вид
$$B_i(p) = \{x^i \in X_i(\beta) \mid p \cdot x^{0i} \leqslant p \cdot \widehat{w}^i\}.$$

Незначительные отличия заключаются в «составном» характере потребительских множеств $X_i(\beta) = \{(x'^i, x''^i) \in X_i \mid x'^i \leqslant \beta^i\}$ и функций полезности u_i, зависящих от $2l$ переменных. Нетрудно видеть, что нечеткое L-доминирование в $\mathcal{E}^0$ аналогично традиционному [12]: коалиция $\tau \in T$ L-доминирует распределение $\overline{x} \in X[N]$, если найдется распределение $x \in X(\beta)$ такое, что

$$u_i(x^i) > u_i(\overline{x}^i); \quad i \in \operatorname{supp} \tau,$$
$$x^0(\tau) \leqslant \widehat{w}(\tau).$$

Ясно, что это доминирование сильнее нечеткого L-доминирования в исходной экономике $\mathcal{E}^q$. Поэтому ввиду предложения 1.1 справедливо вложение

$$W_L^0 \subseteq C_{L,F}^q, \tag{1.11}$$

где, как и ранее, через W_L^0 обозначаются L-согласованные распределения модели $\mathcal{E}^0$. Поскольку фиксированные цены в этой модели равны нулю, W_L^0 совпадает с $W^0 = W(\mathcal{E}^0)$ — множеством вальрасовских распределений $\mathcal{E}^0$, а нечеткое L-ядро — с обычным нечетким ядром $\mathcal{E}^0$. Таким образом, соотношение (1.11) можно записать и в более традиционной форме: $W(\mathcal{E}^0) \subseteq C_F(E^0)$.

1.4. Для справедливости обратных вложений $C_{K,F}^q \subseteq W_K^q$ и их уточнений, влекущих эквивалентность кооперативных и равновесных механизмов согласования интересов в $\mathcal{E}^q$, необходимо выполнение некоторых дополнительных условий. Положим

$$X' = \prod_N X_i', \quad X'' = \prod_N X_i'', \quad X'[N] = \mathrm{Pr}_{X'} X[N], \quad X''[N] = \mathrm{Pr}_{X''} X[N]$$

и сформулируем эти условия:

(A1) $\qquad X_i', X_i''$ — выпуклые множества для всех $i \in N$,

(A2$'$) $\quad \forall x' \in X'[N]\, \exists \delta > 0 [(\widetilde{x}' \in (\mathbb{R}_+^l)^N, \widetilde{x}' \leqslant x', \|\widetilde{x}' - x'\| < \delta) \Rightarrow \widetilde{x}' \in X'],$

(A2$''$) $\quad \forall x'' \in X''[N] \exists \delta > 0 [(\widetilde{x}'' \in (\mathbb{R}_+^l)^N, \|\widetilde{x}'' - x''\| < \delta) \Rightarrow \widetilde{x}'' \in X''],$

(A3) $$\sum_N w^i \gg 0,$$

(A4) $\qquad u_i$ полунепрерывны снизу и вогнуты для всех $i \in N$,

(A5) $\qquad u_i$ строго возрастающие по x''^i для всех $i \in N$,

(A6) $$q \gg 0.$$

Как обычно, запись $z \gg 0$ означает, что все компоненты вектора z положительны.

Важную роль в проверке эквивалентности нечетких ядер и согласованных распределений играют двойственные характеристики выпуклых конусов Q_K, определяемых по формулам

$$Q_K = \{(z', z'') \in \mathbb{R}^{2l} \mid z_K'' \leqslant 0, q \cdot z^0 - q_{J \setminus I} \cdot z'' \leqslant 0, \quad I \subseteq J\}, \quad K \subseteq L.$$

Приведем одну из таких характеристик, дающую описание полярных конусов Q_K^0.

Предложение 1.2. *Для любого $K \subseteq L$ полярный конус*

$$Q_K^0 \stackrel{\text{df}}{=} \{\tilde{p} \in \mathbb{R}^{2l} \mid \tilde{p} \cdot z \leqslant 0,\ z \in Q_K\}$$

определяется формулой

$$Q_K^0 = \{(tq, p) \in \mathbb{R}^{2l} \mid t \geqslant 0,\ tq_K \leqslant p_K,\ 0 \leqslant p_J \leqslant tq_J\}. \tag{1.12}$$

Доказательство. Обозначим через H_K множество, стоящее в правой части равенства (1.12). Ввиду выпуклости и замкнутости конуса H_K по теореме о биполяре имеем $H_K^{00} = H_K$. Поэтому для проверки равенства $H_K = Q_K^0$ достаточно убедиться, что

$$H_K^0 = Q_K. \tag{1.13}$$

При установлении равенства (1.13) воспользуемся тем, что крайние лучи конуса H_K определяются векторами $\{(0, e^k)\}_{k \in K} \cup \{(q, q_{K \cup I})\}_{I \subseteq J}$. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что $q \gg 0$ и для каждого элемента $(tq, p) \in H_K$ справедливо представление

$$(tq, p) = t(q, q_K) + t(0, s_J) + (0, s_K), \tag{1.14}$$

где $ts_J = p_J$, $s_K = p_K - tq_K$, причем в силу определения H_K выполняются неравенства $s_K \geqslant 0$, $0 \leqslant s_J \leqslant q_J$. Как уже отмечалось при доказательстве предложения 1.1, вектор s_J можно представить в виде выпуклой комбинации

$$s_J = \sum_{I \subseteq J} \lambda_I q_I.$$

Поэтому равенство (1.14) можно переписать следующим образом:

$$(tq, p) = \sum_{I \subseteq J} t\lambda_I (q, q_{K \cup I}) + \sum_K s_k e^k,$$

что ввиду неотрицательности величины λ_I и равенства $s_k = (s_K)_k$ означает требуемое.

На основании вышесказанного равенство (1.13) вытекает из определения множеств Q_K, H_K и очевидного соотношения

$$(z', z'') \cdot (q, q_{K \cup I}) = q \cdot z^0 - q_{J \setminus I} \cdot z'', \quad z \in \mathbb{R}^{2l}.$$

Перейдем к описанию согласованных распределений в терминах нечеткого доминирования. В следующей теореме дана кооперативная характеризация множеств W_K^q.

Теорема 1.1. *Если для модели $\mathcal{E}^q$ выполнены предположения* (A1)–(A6), *то справедливы равенства*

$$C_{K,F}^q = W_K^q, \quad K \neq L,$$
$$C_{L,F}^q = W_L^q \cup W_L^0.$$

Доказательство. В силу предложения 1.2 и замечания 1.3 достаточно убедиться в справедливости вложений $C_{L,F}^q \subseteq W_L^q \cup W_L^0$, $C_{K,F}^q \subseteq W_K^q$

$(K \neq L)$. Пусть $\overline{x} \in C^q_{K,F}$. Обозначим через Γ_K линейный оператор из $\mathbb{R}^{2l}$ в $\mathbb{R}^{2l}$, действующий по правилу $\Gamma_K(z) = (z'_J, z^0 - z'_I)$, $z = (z', z'') \in \mathbb{R}^{2l}$, где, как и ранее, $z^0 = z' + z''$. Положим

$$\omega_{K,i} = (\gamma^i + \beta^i_J, \widehat{w}^i - \beta^i_J), \quad i \in N,$$
$$\mathcal{M}_{K,i}(\overline{x}) = \Gamma_K(\mathcal{P}^\beta_i(\overline{x}^i)) - \{\omega_{K,i}\}, \quad i \in N,$$
$$\mathcal{M}_K(\overline{x}) = \Big\{ z(\tau) \mid z \in \prod_N \mathcal{M}_{K,i}(\overline{x}),\ \tau \in T \Big\}.$$

Из условия $\overline{x} \in C^q_{K,F}$ и непосредственно из определения нечеткого K-доминирования имеем $\mathcal{M}_K(\overline{x}) \cap Q_K = \varnothing$. Поскольку в предположениях (A2$''$), (A5) и (A1), (A4) множество $\mathcal{M}_K(\overline{x})$ непусто и выпукло, на основании теоремы Минковского найдется ненулевой функционал $\widetilde{p} = (p', p'')$, разделяющий $\mathcal{M}_K(\overline{x})$ и Q_K:

$$\sup\{\widetilde{p}\cdot y \mid y \in Q_K\} \leqslant \inf\{\widetilde{p}\cdot y \mid y \in \mathcal{M}_K(\overline{x})\}. \tag{1.15}$$

Поскольку Q_K — конус с вершиной в нуле, получаем, что $\sup\{\widetilde{p}\cdot y \mid y \in Q_K\} = 0$. Следовательно, $\widetilde{p}$ принадлежит поляре Q^0_K конуса Q_K. В силу предложения 1.2 разделяющий функционал $\widetilde{p}$ имеет вид $(tq, \overline{p})$, где $\overline{p}$ удовлетворяет неравенствам $\overline{p}_K \geqslant tq_K$, $0 \leqslant \overline{p}_J \leqslant tq_J$. Пусть для определенности $t > 0$. Тогда, не уменьшая общности, можно считать, что $t = 1$ и $\widetilde{p} = (q, \overline{p})$. На основании (1.15) и того факта, что $\mathcal{M}_{K,i}(\overline{x}) \subseteq \mathcal{M}_K(\overline{x})$ для всех $i \in N$, имеем

$$q\cdot(-\gamma^i_K + x'^i_J - \theta^i_J) + \overline{p}\cdot((x^{0i} - \widehat{w}^i)_K + (x''^i + \theta^i - w^i)_J) \geqslant 0 \tag{1.16}$$

для всех $x^i \in \mathcal{P}^\beta_i(\overline{x}^i)$, $i \in N$. Поэтому в силу предположения (A2$''$) и строгой монотонности u_i по x''^i предельным переходом получаем

$$F^K_i(\overline{p}, \overline{x}^i) \geqslant 0, \quad i \in N, \tag{1.17}$$

где, как и ранее, $F^K_i(\overline{p}, \overline{x}^i)$ обозначает левую часть неравенства (1.16) при $x^i = \overline{x}^i$. Суммируя неравенства (1.17) и учитывая соотношения

$$\sum_N \gamma^i = \sum_N \theta^i - \sum_N \beta^i = 0, \quad \sum_N \overline{x}^{0i} = \sum_N w^i, \quad \overline{p}_J \leqslant q_J,$$

имеем

$$-q\sum_N \gamma^i + q_J\sum_N(\overline{x}'^i - \theta^i) + \overline{p}_K\sum_N(\overline{x}^{0i} - w^i) + \overline{p}_J\sum_N(\overline{x}''^i + \theta^i - w^i)$$
$$\leqslant q_J\sum_N(\overline{x}'^i - \theta^i) + q_J\sum_N(\overline{x}''^i + \theta^i - w^i) = 0.$$

Значит, каждое из неравенств (1.17) реализуется как равенство

$$q(-\gamma^i_K + \overline{x}'^i_J + \theta^i_J) + \overline{p}((\overline{x}^{0i} - \widehat{w}^i)_K + (\overline{x}''^i + \theta^i - w^i)_J) = 0, \quad i \in N. \tag{1.18}$$

Следовательно, $\overline{x}^i \in B_i(\overline{p})$ для всех $i \in N$.

Рассмотрим три случая и покажем, что в каждом из них $\mathcal{P}^\beta_i(\overline{x}^i) \cap B_i(\overline{p}) = \varnothing$ для всех $i \in N$.

Случай 1: $\overline{x} \in C^q_{K,F}$, $K \neq \varnothing, L$. Установим сначала, что цены $\overline{p}$ строго положительны. Поскольку $\overline{p}_K \geqslant q_K$, из предположения (A6) вытекает, что $\overline{p}_k > 0$ ($k \in K$). Зафиксируем $k \in K$ и допустим, что $\overline{p}_m = 0$ для какого-либо $m \in J$. Так как $\sum\limits_N \overline{x}^{0i} = \sum\limits_N w^i$ и $\sum\limits_N w^i \gg 0$ (см. предположение (A3)), найдется участник $i \in N$, для которого $\overline{x}^{0i}_k > 0$. Из (A2$''$) и (A5) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ получаем $u_i(\overline{x}^i(\varepsilon)) > u_i(\overline{x}^i)$, где $\overline{x}^i(\varepsilon) = \overline{x}^i + \varepsilon(0, e^m)$. Применяя еще раз (A2$''$) (или (A2$'$), если $\overline{x}''^i_k = 0$) и используя полунепрерывность снизу функции u_i, выберем достаточно малое $\delta > 0$ такое, что

$$u_i(\overline{x}^i(\varepsilon,\delta)) > u_i(\overline{x}^i), \tag{1.19}$$

где

$$\overline{x}^i(\varepsilon,\delta) = \begin{cases} \overline{x}^i(\varepsilon) - \delta(0, e^k), & \text{если } \overline{x}''^i_k > 0, \\ \overline{x}^i(\varepsilon) - \delta(e^k, 0), & \text{если } \overline{x}''^i_k = 0. \end{cases}$$

В обоих случаях $F^i_K(\overline{p}, \overline{x}^i(\varepsilon,\delta)) < 0$, что ввиду (1.19) противоречит (1.16).

Таким образом, $\overline{p} \gg 0$. Положим $\delta_i(\overline{p}) = q \cdot (\gamma^i + \beta^i_J) + \overline{p} \cdot (\widehat{w}^i - \beta^i_J)$ и, учитывая $\overline{p} \in P_K$, перепишем бюджетные ограничения участников в виде

$$q \cdot x'^i_J + \overline{p} \cdot (x^{0i} - x'^i_J) \leqslant \delta_i(\overline{p}), \quad i \in N.$$

Поскольку β^i, θ^i, q, $\overline{p} \in \mathbf{R}^l_+$ и $\theta^i \leqslant w^i$, очевидно неравенство $\delta_i(\overline{p}) \geqslant 0$. При этом из равенства $\delta_i(\overline{p}) = 0$ вытекает, что $B_i(\overline{p}) = \{(0,0)\}$. Поэтому проверку соотношений $\mathcal{P}^\beta_i(\overline{x}^i) \cap B_i(\overline{p}) = \varnothing$ достаточно осуществить для случая $\delta_i(\overline{p}) > 0$. Пусть $x^i \in \mathcal{P}^\beta_i(\overline{x}^i)$ и при этом

$$q \cdot x'^i_J + \overline{p} \cdot (x^{0i} - x'^i_J) = \delta_i(\overline{p}) > 0.$$

Тогда $x^i \neq (0,0)$, следовательно (в силу (A4), (A2$'$), (A2$''$) и строгой положительности $\overline{p}, q$), можно выбрать последовательность $\{x^i_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X_i(\beta)$ такую, что $\lim x^i_n = x^i$ и

$$q \cdot (x'^i_n)_J + \overline{p} \cdot (x^{0i}_n - (x'^i_n)_J) < \delta_i(\overline{p}), \quad n \geqslant 1. \tag{1.20}$$

Учитывая полунепрерывность снизу функций u_i, получаем $x^i_n \in \mathcal{P}^\beta_i(\overline{x}^i)$ для достаточно больших n. Но это вместе с (1.20) противоречит (1.16).

Таким образом, для случая $t > 0$ справедливо включение $\overline{x} \in W^q_K$. Для завершения доказательства осталось проверить, что случай $t = 0$ реализоваться не может. С этой целью отметим, что в доказательстве соотношений (1.16) и (1.18) не использовалось условие $t \neq 0$. Поэтому при $t = 0$ также справедливы аналоги (1.16) и (1.17):

$$\overline{p} \cdot (x^{0i} - x'^i_J) \geqslant \overline{p} \cdot (\widehat{w}^i - \beta^i_J), \qquad x^i \in \mathcal{P}^\beta_i(\overline{x}^i), \quad i \in N, \tag{1.21}$$

$$\overline{p} \cdot (\overline{x}^{0i} - x'^i_J) = \overline{p} \cdot (\widehat{w}^i - \beta^i_J), \quad i \in N.$$

Поскольку $\overline{p} \neq 0$ и $\overline{p}_m = 0$ для всех $m \in J$ (по допущению $J \neq \varnothing$ и $\overline{p}_J \leqslant t q_J$), найдется $k \in K$, для которого $\overline{p}_k > 0$. Из условия (A3) вытекает, что $\sum\limits_N \overline{x}^{0i}_k > 0$. Следовательно, $\overline{x}^{0i}_k > 0$ для некоторого $i \in N$. Используя те же аргументы, что и при доказательстве строгой положительности $\overline{p}$ в случае $t > 0$, получаем, что существует вектор $x^i \in \mathcal{P}_i^\beta(\overline{x}^i)$ такой, что $\overline{p} \cdot (x^{0i} - x'^i_J) < \overline{p} \cdot (w^i - \beta^i_J)$. Но это противоречит (1.21).

Случай 2: $K = L$. При $t > 0$ положительность $\overline{p}$ гарантирована, поэтому использование тех же аргументов, что и для $K \neq \varnothing, L$, дает нужный результат: $\overline{x} \in W_L^q$. При $t = 0$ из условия $\overline{p} \neq 0$ нетрудно извлечь положительность $\overline{p}$. Затем, повторяя те же рассуждения, что и в доказательстве соотношений $\mathcal{P}_i^\beta(\overline{x}^i) \cap B_i(\overline{p}) = \varnothing$ при $K \neq \varnothing, L$, получаем $\overline{p} \cdot \overline{x}^{0i} = \overline{p} \cdot w^i$, $i \in N$, причем $\overline{p} \cdot x^{0i} > \overline{p} \cdot w^i$ для всех $x^i \in \mathcal{P}_i^\beta(\overline{x}^i)$, что означает $\overline{x} \in W_L^0$.

Случай 3: $K = \varnothing$. Проверка этого случая осуществляется по той же схеме, что и ранее. Поскольку равенство $t = 0$ здесь исключается (оно противоречит условию $\widetilde{p} \neq (0,0)$), единственное отличие от соответствующих рассуждений в случае 1 состоит в необходимости анализа ситуации, когда $t = 1$, $\overline{p} = 0$. Покажем, что в условиях теоремы функционал $\widetilde{p} = (q, 0)$ не может разделять множества $\mathcal{M}_\varnothing(\overline{x})$ и $Q_\varnothing$. Допуская противное, приходим к аналогам соотношений (1.16) и (1.18), которые при $J = L$ приобретают вид

$$q \cdot (x'^i - \theta^i) \geqslant 0, \quad x^i \in \mathcal{P}_i^\beta(\overline{x}^i), \quad i \in N, \tag{1.22}$$

$$q \cdot (\overline{x}'^i - \theta^i) = 0, \quad i \in N. \tag{1.23}$$

Учитывая, что $\sum\limits_N \theta^i = \sum\limits_N \beta^i \neq 0$ и $\overline{x}'^i \leqslant \beta^i$ для всех $i \in N$, на основании (1.23) получаем $\overline{x}'^i = \beta^i$ $(i \in N)$. Но тогда найдутся $k \in L$ и участник $i \in N$, для которого $\overline{x}'^i_k > 0$. Используя условия (A2′), (A2″), строгую монотонность по x''^i и полунепрерывность снизу функции u_i, можно выбрать достаточно малые положительные ε и δ так, чтобы выполнялось неравенство $u_i(\overline{x}^i(\varepsilon,\delta)) > u_i(\overline{x}^i)$, где, как и ранее, $\overline{x}^i(\varepsilon,\delta) = \overline{x}^i + \varepsilon(0, e^k) - \delta(e^k, 0)$. Таким образом, $\overline{x}^i(\varepsilon,\delta) \in \mathcal{P}_i^\beta(\overline{x}^i)$, но $q \cdot (\overline{x}'^i(\varepsilon,\delta) - \theta^i) < 0$, что противоречит условиям (1.22). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.1.

1.5. Используя установленную эквивалентность нечетких ядер и согласованных распределений, докажем один из основных результатов этого параграфа.

Теорема 1.2. *Если для модели $\mathcal{E}^q$ выполнены предположения* (A1)–(A6) *и $\theta^i \neq 0$ для всех $i \in N$, то справедливы равенства*

$$C^q_{K,E} = W^q_K, \quad K \neq L, \tag{1.24}$$

$$C^q_{L,E} = W^q_L \cup W^0_L. \tag{1.25}$$

Доказательство. Вложения $W^q_K \subseteq C^q_{K,E}$ $(K \neq L)$ и $W^q_L \cup W^0_L \subseteq C^q_{L,E}$ вытекают из соотношений

$$\overline{x} \in W^q_K \Rightarrow \overline{x}_{(r)} \in W_K(\mathcal{E}^q_{(r)}), \quad K \subseteq L,$$

$$\overline{x} \in W^0 \Rightarrow \overline{x}_{(r)} \in W_L(\mathcal{E}^0_{(r)}),$$

предложения 1.1 и замечания 1.3. Поэтому для доказательства равенств (1.24), (1.25) достаточно убедиться в справедливости обратных вложений $C^q_{K,E} \subseteq W^q_K$, $K \neq L$, $C_{L,E} \subseteq W^q_L \cup W^0_L$. С этой целью воспользуемся теоремой 1.1, в силу которой в наших условиях выполняются вложения $C^q_{K,F} \subseteq W^q_K$ $(K \neq L)$, $C^q_{L,F} \subseteq W^q_L \cup W^0_L$. Следовательно, для доказательства (1.24) и (1.25) достаточно показать, что

$$C^q_{K,E} \subseteq C^q_{K,F}, \quad K \subseteq L. \tag{1.26}$$

Начнем с замечания о том, что в условиях теоремы 1.2 K-доминируемость распределения $\overline{x} \in X[N]$ какой-либо нечеткой коалицией τ влечет доминируемость $\overline{x}$ некоторой рациональнозначной коалицией τ^0. Действительно, пусть $K \subseteq L$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in T$ и $x^i \in X_i(\beta)$ $(i \in \operatorname{supp} \tau)$ такие, что выполнены условия (KF1)–(KF3). Учитывая неравенства $\theta^i \leqslant w^i$ и $q \cdot \theta^i > 0$ $(i \in N)$, убеждаемся в том, что правые части последних соотношений положительны. Поэтому, уменьшая, если необходимо, положительные компоненты векторов x^i и используя предположения (A2$'$), (A2$''$) и полунепрерывность снизу функций u_i, можно считать, что все неравенства в условии (KF3) строгие. Обозначим через b_k наибольшую разность между левыми и правыми частями этих неравенств и выберем рациональные числа τ^0_i достаточно близкими к τ_i таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{gathered}
\tau_i \leqslant \tau^0_i \leqslant 1 \quad (i \in \operatorname{supp} \tau), \qquad \tau^0_i = 0 \quad (i \notin \operatorname{supp} \tau),\\
u_i(\widetilde{x}^i) > u_i(\overline{x}^i) \quad (i \in \operatorname{supp} \tau),\\
q \cdot \gamma(\tau - \tau^0) + b_K < 0,
\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}
\widetilde{x}^i = \frac{\tau_i}{\tau^0_i} x^i + \frac{\tau^0_i - \tau_i}{\tau^0_i} (\beta^i, w^i - \theta^i), \quad i \in \operatorname{supp} \tau,\\
\gamma(\tau - \tau^0) = \gamma(\tau) - \gamma(\tau^0).
\end{gathered}$$

Возможность такого выбора обеспечивается неравенствами (KF1), полунепрерывностью снизу функций u_i и отрицательностью величины b_K.

Покажем, что, как и τ, построенная коалиция τ^0 доминирует распределение $\overline{x}$. Непосредственные вычисления дают равенства

$$\begin{gathered}
\widetilde{x}^0(\tau^0) = x^0(\tau) + \widehat{w}(\tau^0 - \tau),\\
\widetilde{x}'(\tau^0) = x'(\tau) + \beta(\tau^0 - \tau),
\end{gathered}$$

где, как и ранее, $z(\tau^0 - \tau) = z(\tau^0) - z(\tau)$, $z = (z^1, \dots, z^n) \in (\mathbb{R}^l)^N$. Учитывая неравенства (KF2), получаем

$$\widetilde{x}^0_K(\tau^0) = x^0_K(\tau) - \widehat{w}_K(\tau) + \widehat{w}_K(\tau^0) \leqslant \widehat{w}_K(\tau^0). \tag{1.27}$$

Далее, фиксируя произвольное $I \subseteq J$ и полагая

$$\begin{gathered}
a_{K\cup I} = q_{K\cup I} \cdot (x^0(\tau) - w(\tau)) + q_{J\setminus I} \cdot (x'(\tau) - \theta(\tau)),\\
\widetilde{a}_{K\cup I} = q_{K\cup I} \cdot (\widetilde{x}^0(\tau^0) - w(\tau^0)) + q_{J\setminus I} \cdot (\widetilde{x}'(\tau^0) - \theta(\tau^0)),
\end{gathered}$$

на основании формул для $\widetilde{x}^0(\tau^0)$ и $\widetilde{x}'(\tau^0)$ получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{a}_{K\cup I} &= a_{K\cup I} + q_{K\cup I}\cdot\gamma(\tau-\tau^0) + q_{J\setminus I}\cdot\theta(\tau-\tau^0) + q_{J\setminus I}\cdot\beta(\tau^0-\tau)\\ &= a_{K\cup I} + q\cdot\gamma(\tau-\tau^0) \leqslant b_K + q\cdot\gamma(\tau-\tau^0) < 0. \quad (1.28)\end{aligned}$$

Поскольку $u_i(\widetilde{x}^i) > u_i(\overline{x}^i)$ $(i \in \operatorname{supp}\tau^0)$, соотношения (1.27) и (1.28) показывают, что τ^0 K-доминирует $\overline{x}$, что и требовалось установить.

Перейдем к проверке (1.26). Допустим, что $\overline{x} \in C^q_{K,E}\setminus C^q_{K,F}$. Тогда найдется нечеткая коалиция τ^0 с рациональными компонентами τ^0_i, которая K-доминирует x. Пусть m_i, r — произвольные натуральные числа, для которых выполняются соотношения $\tau^0_i = m_i/r$, $i = 1,\dots,n$. Ясно, что коалиция

$$M = \bigcup_{i|m_i>0} \{(i,m) \mid m = 1,\dots,m_i\}$$

из $N_{(r)}$ K-доминирует распределение $\overline{x}_{(r)}$. Действительно, полагая $x^{im} = x^i$ $((i,m) \in M)$, где x^i — некоторые элементы $X_i(\beta)$, удовлетворяющие соотношениям (KF1)–(KF3) при $\tau = \tau^0$, имеем

$$u_{im}(x^{im}) > u_{im}(\overline{x}^{im}), \quad (i,m) \in M, \qquad \sum_M (x'^{im} + x''^{im})_K \leqslant \sum_M \widehat{w}^{im}_K,$$

$$q_{K\cup I}\cdot\sum_M (x'^{im} + x''^{im}) + q_{J\setminus I}\cdot\sum_M x'^{im} \leqslant q_{K\cup I}\cdot\sum_M w^{im} + q_{J\setminus I}\cdot\sum_M \theta^{im},$$

где $I \subseteq J$ и $\widehat{w}^{im} = w^{im} - \theta^{im} + \beta^{im}$. Приведенные соотношения означают, что $\overline{x}_{(r)}$ не принадлежит K-ядру экономики $\mathcal{E}^q_{(r)}$. Получаем противоречие с условием $\overline{x} \in C^q_{K,E}$, что завершает доказательство теоремы 1.2.

Замечание 1.4. Нетрудно проверить что если функции u_i строго вогнуты, то множества $C_K(\mathcal{E}^q_{(r)})$ будут содержать только симметричные распределения: $C_K(\mathcal{E}^q_{(r)}) = \{x_{(r)} \mid x \in C^q_{K,r}\}$, $r \geqslant 1$. Учитывая, что семейство $\{C^q_{K,r}\}_{r=1}^{\infty}$ является монотонно убывающим, выполнение соотношений (1.24) и (1.25) можно трактовать как стягиваемость ядер $C_K(\mathcal{E}^q_{(r)})$ к соответствующим множествам K-согласованных распределений $W_K(\mathcal{E}^q_{(r)})$ (небольшая поправка требуется лишь для $K = L$).

Замечание 1.5. С помощью варианта теоремы Каратеодори для конических оболочек нетрудно убедиться, что вместо множества $\mathcal{M}(x)$ в доказательстве теоремы 1.1 можно использовать выпуклый конус

$$\mathcal{K}(\overline{x}) = \left\{ z(\tau) \mid z \in \prod_N \mathcal{M}_i(\overline{x}),\ \tau \in \mathbb{R}^N_+,\ |\operatorname{supp}\tau| \leqslant 2l \right\}.$$

Поэтому при определении нечетких ядер $C^q_{K,F}$ можно ограничиться коалициями $\tau \in T$, носители которых содержат не более $2l$ элементов. В свою очередь, для описания симметричных составляющих ядер $C_K(\mathcal{E}^q_{(r)})$

достаточно использовать лишь те коалиции $M \subseteq N_{(r)}$, которые содержат не более $2l$ различных представителей исходной экономики $\mathcal{E}^q$: распределение x из $X[N]$ принадлежит $C^q_{K,r}(\mathcal{E})$ тогда и только тогда, когда не существует K-доминирующей распределение $x_{(r)}$ коалиции $M \subseteq N_{(r)}$ такой, что $|\{i \in N \mid M_i \neq \varnothing\}| \leqslant 2l$.

Замечание 1.6. Анализируя построение рациональнозначной коалиции τ^0, фигурирующей в доказательстве теоремы 1.2, нетрудно убедиться, что условие регулярности $\theta^i \neq 0$ $(i \in N)$ является излишним и используется лишь для упрощения изложения. Действительно, рассматривая вместо конусов Q_K множества

$$\operatorname{int} Q_K = \{z \in \mathbb{R}^{2l} \mid z''_k < 0\ (k \in K),\ q \cdot z^0 - q_{J \setminus I} \cdot z'' < 0\ (I \subseteq J)\},$$

можно показать, что модификация определений 1.2 и 1.5, состоящая в замене всех нестрогих неравенств в (K2), (K3), (KF2) и (KF3) строгими, дает (по крайней мере, в предположениях (A1)–(A6)) те же нечеткие ядра и равновесия Эджворта, что и в пп. 1.2–1.5.

В заключение пункта отметим, что в условиях теоремы 1.2 множество W^q исчерпывается объединением всех K-согласованных распределений. Поэтому на основании соотношений (1.24) и (1.25) можно утверждать, что множество

$$C^q_E = \bigcup_{K \subseteq L} C^q_{K,E},$$

представляющее собой совокупность равновесий Эджворта модели $\mathcal{E}^q$, совпадает (с точностью до $W^0 = W(\mathcal{E}^0)$) с множеством согласованных распределений:

$$C^q_E = W^q \cup W^0. \tag{1.29}$$

Учитывая, что предположения (A1)–(A6) гарантируют совпадение множества W^0 с множеством C^0_E равновесий Эджворта модели $\mathcal{E}^0$, соотношение (1.29) можно переписать и в таком виде, который дает полную кооперативную характеризацию всех согласованных распределений $\mathcal{E}^q$, не являющихся вальрасовскими равновесиями модели обмена $\mathcal{E}^0$:

$$C^q_E \backslash C^0_E = W^q \backslash W^0.$$

1.6. Приведем аналоги основных результатов из п. 1.5 для модели $\widehat{\mathcal{E}}^q$ с функциями дохода $\widehat{\alpha}_i(p) = p \wedge q \cdot \theta^i$. Переходя к формальным определениям соответствующих понятий обычных и нечетких K-ядер и K-равновесий Эджворта, отметим, что для $\widehat{\mathcal{E}}^q$ бюджетные ограничения могут быть представлены в виде $\widehat{F}^K_i(p, x^i) \leqslant 0$, где $\widehat{F}^K_i(p, x^i) = F^K_i(p, x^i) + (q - p) \cdot \theta^i_J$ или, более подробно,

$$\widehat{F}^K_i(p, x^i) = q \cdot (-\gamma^i_K + x'^i_J) + p \cdot ((x^{0i} - \widehat{w}^i)_K + (x''^i - w^i)_J).$$

Поскольку в условиях (A2$''$) и (A5) для всякого элемента $x^i \in D_i(p)$ выполняются равенства $\widehat{F}^K_i(p, x^i) = 0$, вальрасовский дефект $p \cdot E(p, x)$ для каждого $p \in P_K$ и $x \in \prod_N D_i(p)$ определяется равенством

$$p \cdot E(p, x) = (q - p) \cdot \sum_N x'^i_J,$$

где
$$E(p,x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_N (x^{0i} - w^i), \quad x \in \prod_N D_i(p).$$

Следовательно, для любого K-согласованного распределения $\overline{x} \in W_K^q$ и отвечающих ему цен $\overline{p} \in P_K$ должно выполняться условие
$$\overline{p}_m < q_m \Rightarrow x_m^{\prime i} = 0 \quad \text{для всех } i \in N,\ m \in J. \tag{1.30}$$

Отметим, что вальрасовский дефект в экономике $\mathcal{E}^q$ из п. 1.5 определяется формулой
$$p \cdot E(p,x) = (q-p) \cdot \sum (\beta^i - x^{\prime i})_J,\ p \in P_K, \quad x \in \prod_N D_i(p),$$
из которой вытекает следующее свойство согласованных распределений $\overline{x}$ из п. 1.5:
$$\overline{p}_m < q_m \Rightarrow x_m^{\prime i} = \beta_m^i \quad \text{для всех } i \in N,\ m \in J. \tag{1.31}$$
Сопоставление свойств (1.30) и (1.31) показывает, что равновесное поведение участников экономических систем $\mathcal{E}^q$ и $\widehat{\mathcal{E}}^q$ на централизованных рынках с высокими фиксированными ценами характеризуется диаметрально противоположными устремлениями.

Наличие свойства (1.30) мотивирует введение следующего предположения:

(A7) $\qquad 0 \in X_i^\prime$ для всех $i \in N$.

Кроме того, целесообразно выделить специальное подмножество $W_{(K)}^q \subseteq W_K^q$, состоящее из так называемых строго K-согласованных распределений $W_{(K)}^q = W_K^q \cap X_K[N]$, где $X_K[N] = \{x \in X[N] \mid x_m^{\prime i} = 0, \quad i \in N,\ m \in J\}$. Приведем модификации определения доминирования применительно к рассматриваемому случаю.

Определение 1.7. *Распределение* $x \in X[N]$ *K-доминируется нечеткой коалицией* $\tau \in T$, если найдутся векторы $x^i \in X_i(\beta)$ такие, что

($\widehat{\mathrm{K}}$1) $\qquad u_i(x^i) > u_i(\overline{x}^i), \quad i \in \operatorname{supp}\tau,$

($\widehat{\mathrm{K}}$2) $\qquad x_K^0(\tau) \leqslant \widehat{w}_K(\tau),$

($\widehat{\mathrm{K}}$3) $\qquad q_{K\cup I} \cdot x^0(\tau) + q_{J\setminus I} \cdot x^\prime(\tau) \leqslant q_{K\cup I} \cdot w(\tau) \quad$ для всех $I \subseteq J$.

Нечетким K-ядром экономики $\widehat{\mathcal{E}}^q$ будем называть множество
$$\widehat{C}_{K,F}^q = \{\overline{x} \in X_K[N] \mid \text{ не существует } \tau \in T,\ K\text{-доминирующей } \overline{x}\}.$$

Обычное K-доминирование и отвечающее ему K-ядро определяются аналогично с тем различием, что элементы из T заменяются обычными коалициями $\tau \in \{0,1\}^N$. Более формально, *K-ядром экономики* $\widehat{\mathcal{E}}^q$ называется множество $\widehat{C}_K^q = C_K(\widehat{\mathcal{E}}^q)$, определяемое формулой
$$\widehat{C}_K^q = \{\overline{x} \in X_K[N] \mid \text{не существует } \tau \in \{0,1\}^N,\ K\text{-доминирующей } \overline{x}\}.$$

Вводя множество $\widehat{C}_{K,r}^q = \{x \in X_K[N] \mid x_{(r)} \in C_K(\widehat{\mathcal{E}}_{(r)}^q)\}$, представляющее совокупность всех симметричных распределений из K-ядра реплики $\widehat{\mathcal{E}}_{(r)}^q$, дадим определение K-равновесий Эджворта для экономики $\widehat{\mathcal{E}}^q$.

Определение 1.8. Распределение $\overline{x} \in X_K[N]$ называется *K-равновесием Эджворта модели $\widehat{\mathcal{E}}^q$*, если справедливо включение

$$\overline{x} \in \bigcap_{r=1}^{\infty} \widehat{C}^q_{K,r}.$$

- Совокупность K-равновесий Эджворта модели $\widehat{\mathcal{E}}^q$ обозначим $\widehat{C}^q_{K,E}$.

Сформулируем аналоги теорем 1.1 и 1.2 применительно к рассматриваемой ситуации.

Теорема 1.3. *Пусть для модели $\widehat{\mathcal{E}}^q$ выполнены предположения* (A1)–(A7). *Тогда $\widehat{C}_{L,F} = W^q_L \cup W^0_L$ и для всех $K \neq \varnothing, L$ справедливы вложения*

$$W^q_{(K)} \subseteq \widehat{C}_{K,F} \subseteq W^q_K.$$

Теорема 1.4. *Если для модели $\widehat{\mathcal{E}}^q$ выполнены предположения* (A1)–(A7), *то справедливы соотношения*

$$\widehat{C}^q_{L,E} = W^q_L \cup W^0_L, \quad W^q_{(K)} \subseteq \widehat{C}^q_{K,E} \subseteq W^q_K, \quad K \neq \varnothing, L.$$

Доказательства теорем 1.3 и 1.4 можно провести, рассуждая так же, как в пп. 1.4, 1.5. Отметим лишь, что замечание 1.6 о строгих неравенствах в определении доминирования справедливо и в рассматриваемой ситуации. Поэтому в условиях теоремы 1.4 не содержится никаких требований регулярности типа $w^i \gg 0$.

Замечание 1.7. Теоремы 1.3 и 1.4 не охватывают только класс $W^q_{(\varnothing)}$. Этот экзотический класс состоит из распределений $\overline{x} \in X_\varnothing[N]$, порождающих вальрасовские равновесия $(\overline{x}'', \overline{p})$ стандартной модели обмена

$$\mathcal{E}'' = \langle N, \{X''_i, w^i, u''_i\}_{i \in N} \rangle,$$

где $u''_i(x''^i) = u_i(0, x''^i), \quad x''^i \in X''_i$. При этом распределения $\overline{x}''$ должны подчиняться дополнительному требованию

$$u''_i(\overline{x}''^i) = \max\{u_i(x^i) \mid x^i \in X_i(\beta),\ q \cdot x'^i + \overline{p} \cdot x''^i \leqslant \overline{p} \cdot w^i\}, \quad i \in N,$$

при некоторых достаточно малых равновесных ценах $\overline{p} \ll q$. Таким образом, кооперативная характеризация $W^q_{(\varnothing)}$ может осуществляться в рамках традиционных понятий равновесного анализа. В частности, для наиболее важного в прикладном плане случая, когда $X'_i = X''_i = \mathbb{R}^l_+$ $(i \in N)$, а функции полезности зависят лишь от суммарного потребления $u_i(x'^i, x''^i) = v_i(x'^i + x''^i)$, $i \in N$, справедливо равенство $W^q_{(\varnothing)} = \{0\} \times W''$, где W'' — вальрасовские распределения модели $\mathcal{E}''$. В этих условиях кооперативная характеризация $W^q_{(\varnothing)}$ эквивалентна соответствующему описанию W'' и проводится стандартным способом (см., например, [12, 13]).

1.7. В заключение этого параграфа отметим, что в отличие от функций дохода $\widehat{\alpha}_i(p) = p \wedge q \cdot \theta^i$, рассматривавшаяся ранее модель $\alpha_i(p) = q \cdot \theta^i$ допускает и «универсальное» определение доминирования, обеспечивающее характеризацию согласованных распределений, не связанную с типом равновесных цен.

Определение 1.9. *Нечеткая коалиция* $\tau \in T$ *U-доминирует распределение* $\overline{x} \in X[N]$, если существуют $x \in X(\beta)$ и $h \in (\mathbb{R}^l)^N$ такие, что $x'^i \leqslant h^i \leqslant \beta^i$ $(i \in \operatorname{supp}\tau)$, и при этом

$$\text{(U1)} \qquad u_i(x^i) > u_i(\overline{x}^i), \quad i \in \operatorname{supp}\tau,$$

$$\text{(U2)} \qquad x^0(\tau) \leqslant \widetilde{w}(\tau),$$

$$\text{(U3)} \qquad q \cdot h(\tau) \leqslant q \cdot \theta(\tau),$$

где $\widetilde{w}^i = w^i - \theta^i + h^i$, $i \in N$.

Нечетким U-ядром модели $\mathcal{E}^q$ называется множество

$$C_{U,F} = \{\overline{x} \in X[N] \mid \text{не существует } \tau \in T,\ U\text{-доминирующей } \overline{x}\}.$$

В основу «линеаризованного» аналога равновесий Эджворта из п. 1.5 можно положить следующую теорему об эквивалентности (с точностью до вальрасовских распределений $\mathcal{E}^0$) нечетких U-ядер и согласованных распределений $\mathcal{E}^q$.

Теорема 1.5. *Пусть модель* $\mathcal{E}^q$ *удовлетворяет требованиям* (A1)–(A6). *Тогда выполняется равенство*

$$C_{U,F} = W^q \cup W^0.$$

Доказательство. Ограничимся проверкой вложения $C_{U,F} \subseteq W^q \cup W^0$. Пусть $\overline{x} \in C_{U,F}$. Обозначим через $\Gamma\colon \mathbb{R}^{3l} \to \mathbb{R}^{2l}$ линейный оператор, действующий по правилу $\Gamma(x', h, x'') = (h, x^0 - h)$, $(x', h, x'') \in \mathbb{R}^{3l}$, и для $i \in N$, $Y_i \subseteq X_i(\beta)$ положим

$$Z_i(Y_i) = \{x'^i, h^i, x''^i) \mid (x'^i, x''^i) \in Y_i,\ x'^i \leqslant h^i \leqslant \beta^i\},$$
$$\widetilde{\Gamma}(Y_i) = \{\Gamma(t) \mid t \in Z_i(Y_i)\}.$$

Далее, используя обозначения

$$\omega_i = (\theta^i, w^i - \theta^i), \quad i \in N,$$
$$\mathcal{M}_i(\overline{x}^i) = \widetilde{\Gamma}(\mathcal{P}_i^\beta(\overline{x}^i)) - \{\omega_i\}, \quad i \in N,$$
$$\mathcal{M}(\overline{x}) = \left\{ z(\tau) \mid z \in \prod_N \mathcal{M}_i(\overline{x}^i),\ \tau \in T \right\},$$

можно показать, что в условиях (A1), (A2$''$), (A4) и (A5) множество $\mathcal{M}(\overline{x})$ непустое и выпуклое. При этом в силу включения $\overline{x} \in C_{U,F}$ справедливо соотношение $\mathcal{M}(\overline{x}) \cap P_U = \varnothing$, где $P_U = \{(z', z'') \in \mathbb{R}^{2l} \mid z'' \leqslant 0\, q \cdot z' \leqslant 0\}$. На основании теоремы отделимости найдется линейный функционал $\widetilde{p} \neq (0,0)$, разделяющий $\mathcal{M}(\overline{x})$ и P_U и принадлежащий полярному конусу

$$P_U^0 = \{(tq, p) \in \mathbb{R}^{2l} \mid t \geqslant 0,\ p \geqslant 0\}.$$

Рассматривая для $\widetilde{p} = (tq, \overline{p})$ два варианта: $t = 0$ и $t = 1$, нетрудно убедиться, что в первом случае выполняется включение $\overline{x} \in W^0$. Действуя по той же схеме, что и при $K = \varnothing$ в доказательстве теоремы 1.1, можно установить, что в случае $\widetilde{p} = (q, \overline{p})$ вектор $\overline{p}$ отличен от нуля. Применяя (A2), (A4), (A5) и соотношения

$$q \cdot (h^i - \theta^i) + \overline{p} \cdot (x^{0i} - h^i + \theta^i - w^i) \geqslant 0, \quad i \in N, \tag{1.32}$$

где $(x'^i, h^i, x''^i) \in Z_i(\mathcal{P}_i^\beta(\overline{x}^i))$, предельным переходом получаем равенства

$$-q \cdot \gamma^i + \overline{p} \cdot (\overline{x}^{0i} - \widehat{w}^i) = 0, \quad i \in N. \tag{1.33}$$

Нетрудно видеть, что последние соотношения гарантируют включения $\overline{x}^i \in B_i(\overline{p})$ для всех $i \in N$.

Для завершения доказательства согласованности распределения $\overline{x}$ остается воспользоваться соотношениями (1.32), (1.33) и теми же аргументами, что и в соответствующей части доказательства теоремы 1.1. При этом следует учесть простой, но полезный факт, имеющий место при $\alpha_i(p) = q \cdot \theta^i$, а именно: $x^i \in B_i(p)$ тогда и только тогда, когда существует вектор $h^i \in \mathbb{R}^l_+$ такой, что $x'^i \leqslant h^i \leqslant \beta^i$, $q \cdot h^i + p \cdot (x^{0i} - h^i) \leqslant q \cdot \theta^i + p \cdot (w^i - \theta^i)$. Обозначая через $C_U^q = C_U(\mathcal{E}^q)$ обычное U-ядро (т. е. совокупность $\overline{x} \in X[N]$, не являющихся U-доминируемыми никакой обычной коалицией $\tau \in \{0,1\}^N$), аналогично, как в п. 1.2, определим U-равновесия Эджворта модели $\mathcal{E}^q$.

Определение 1.10. Распределение $\overline{x} \in X[N]$ называется *U-равновесием Эджворта модели $\mathcal{E}^q$*, если справедливо включение

$$\overline{x} \in \bigcap_{r=1}^{\infty} C_{U,r}^q,$$

где $C_{U,r}^q = \{x \in X[N] \mid x_{(r)} \in C_U(\mathcal{E}_{(r)}^q)\}$.

- Совокупность U-равновесий Эджворта модели $\mathcal{E}^q$ обозначим $C_{U,E}$.

Используя теорему 1.5 и те же приемы, что при доказательстве теоремы 1.2 (в частности, аппроксимацию нечетких коалиций рационально-значными), можно установить асимптотическую эквивалентность ядер и согласованных распределений и в терминах U-равновесий Эджворта.

Теорема 1.6. *Если для модели $\mathcal{E}^q$ выполняются предположения теоремы* 1.1, *то справедливо равенство*

$$C_{U,E} = W^q \cup W^0.$$

§ 2. Модели равновесия, учитывающие наличие общественных благ

В этом параграфе анализируются условия, обеспечивающие справедливость гипотезы Эджворта о стягиваемости ядер к равновесиям для моделей с общественными благами. Рассматривается случай агрегированного производства, типичный для большинства публикаций по моделям линдаловского типа (см., например, [14–23]). Поэтому излагаемые ниже результаты допускают более простое сопоставление с уже имеющимися, нежели их аналоги для моделей с индивидуализированным производством [24, 25].

Основной результат состоит в доказательстве совпадения равновесий Эджворта и линдаловских равновесий при достаточно общих предположениях относительно параметров рассматриваемой модели. Следует отметить, что известный контрпример к гипотезе Эджворта, приведенный в [15], также удовлетворяет всем этим предположениям. Кажущееся противоречие возникает в силу того, что ниже используется другое, более тонкое отношение доминирования. Именно, уровень полезности, достигаемый каждым участником блокирующей коалиции M, определяется не общей численностью идентичных ему экономических агентов (как в [15]), а лишь количеством таковых, оказавшихся его партнерами по коалиции M. Таким образом, предлагаемое ниже определение доминирования можно интерпретировать как уточнение имеющихся описаний совершенной конкуренции между однотипными участниками при наличии общественных благ. Указанное уточнение и обеспечивает асимптотическую эквивалентность ядер и линдаловских равновесий (и тем самым справедливость гипотезы Эджворта в модифицированной формулировке).

2.1. Рассматриваемая модель линдаловского типа имеет вид

$$\mathcal{E} = \langle N, L, Q, \{X_i, w^i, u_i\}_{i \in N};, Y\rangle, \tag{2.1}$$

где

$N = \{1, \dots, n\}$ — множество участников,
$L = \{1, \dots, l\}$ — номера продуктов частного пользования,
$Q = \{l+1, \dots, l+m\}$ — номера общественных благ,
$X_i \subseteq \mathbb{R}^{L \cup Q}$ — потребительское множество участника $i \in N$,
$w^i \in \mathbb{R}^L$ — начальный запас продуктов частного пользования участника $i \in N$,
$u_i \colon X_i \to \mathbb{R}$ — функция полезности участника $i \in N$,
$Y \subseteq \mathbb{R}^{L \cup Q}$ — агрегированное производственное множество.

Содержательная интерпретация моделей вида (2.1) имеется, например, в [15, 18, 21]. Принципиальный момент, отличающий эти модели от обычных (типа Эрроу — Дебре), состоит в наличии общественных благ — продуктов или услуг, предназначенных для коллективного использования. Напомним, что общественными благами в равной мере и на равных правах коллективной собственности располагает каждый из участников, в то время как потребление частных благ строго индивидуально и уменьшает на соответствующую величину их общий объем. Таким образом, наряду с проблемой уравновешивания спроса и предложения на обычном рынке, в моделях вида (2.1) возникает задача коллективного выбора единого для всех уровня потребления общественных благ. Один из вариантов решения этой задачи, предложенный Э. Линдалом [26], состоит в надлежащем распределении общественных затрат с помощью индивидуальных цен на продукты коллективного пользования.

Ниже мы формализуем соответствующие механизмы индивидуального и коллективного выборов и охарактеризуем их с точки зрения коалиционной устойчивости. Предварительно введем необходимые понятия и обозначения.

Обозначим через x_L^i и x_Q^i, y_L и y_Q, X_{Li} и X_{Qi}, Y_L и Y_Q проекции x^i, y, X_i, Y на $\mathbb{R}^L$ и $\mathbb{R}^Q$ соответственно. Ниже предполагается, что Y — конус с вершиной в нуле (другое стандартное требование, состоящее в неотрицательности векторов из Y_Q, формулируется в необходимых случаях в явном виде).

Положим $X = \prod_N X_i$ и определим распределения, удовлетворяющие в рассматриваемой ситуации условию материального баланса.

Определение 2.1. Распределение $x \in X$ называется *сбалансированным*, если найдется производственная программа $y = (y_L, y_Q) \in Y$ такая, что

$$\sum_N x_L^i = \sum_N w_L^i + y_L, \quad x_Q^i = y_Q, \quad i \in N.$$

- Совокупность сбалансированных распределений модели $\mathcal{E}$ обозначим через $X[N]$.

Как уже отмечалось, изучаемый механизм децентрализованного выбора распределений из $X[N]$ базируется на использовании индивидуальных отчислений на финансирование общественных благ, производимых по ценам $p_Q \in \mathbb{R}^Q$. Именно, при фиксированных ценах $p_L \in \mathbb{R}^L$ для продуктов частного пользования и при заданном распределении

$$p_Q = \sum_N p_Q^i \tag{2.2}$$

бюджетное множество $B_i(p)$ участника $i \in N$ имеет вид

$$B_i(p) = \{x^i \in X_i \mid p_L \cdot x_L^i + p_Q^i \cdot x_Q^i \leqslant p_L \cdot w_L^i\},$$

где $p = (p_L, p_Q^1, \dots, p_Q^n) \in \mathbb{R}^L \times (\mathbb{R}^Q)^N$.

Величины $p_Q^i \in \mathbb{R}^Q$ из равенства (2.2), называются *индивидуальными ценами* (*оценками*) *общественных благ*. Их выбор осуществляется в результате некоторой процедуры согласования индивидуальных интересов, выражаемых функциями полезности u_i. Приводимое ниже определение линдаловского равновесия формализует содержательное представление о приемлемости индивидуальных оценок p_Q^i при условии, что цены (p_L, p_Q) стимулируют производство соответствующих общественных благ.

Положим

$$\mathcal{P}_i(x^i) = \{\widetilde{x}^i \in X_i \mid u_i(\widetilde{x}^i) > u_i(x^i)\}, \quad i \in N,$$
$$Y^0 = \{p \in \mathbb{R}^{L \cup Q} \mid p \cdot y \leqslant 0, \ y \in Y\}.$$

Определение 2.2. Распределение $\overline{x} \in X$ называется *линдаловским равновесием модели* (2.1), если существуют $\overline{y} = (\overline{y}_L, \overline{y}_Q) \in Y$ и $\overline{p} = (\overline{p}_L, \overline{p}_Q^1, \dots, \overline{p}_Q^n) \in \mathbb{R}^L \times (\mathbb{R}^Q)^N$ такие, что

$$\begin{array}{ll} \overline{x}^i \in B_i(\overline{p}), & i \in N, \\ B_i(\overline{p}) \cap \mathcal{P}_i(\overline{x}^i) = \varnothing, & i \in N, \\ \overline{x}_Q^i = \overline{y}_Q, & i \in N, \end{array}$$

$$\sum_N \overline{x}_L^i = \sum_N w_L^i + \overline{y}_L,$$

$$(\overline{p}_L, \overline{p}_Q) \in Y^0, \quad \overline{p}_L \cdot \overline{y}_L + \overline{p}_Q \cdot \overline{y}_Q = 0,$$

где $\overline{p}_Q \stackrel{\text{df}}{=} \sum_N \overline{p}^i_Q$. Цены $\overline{p} = (\overline{p}_L, \overline{p}^1_Q, \ldots, \overline{p}^n_Q)$ будем называть *равновесными* (отвечающими распределению $\overline{x}$).

- Множество линдаловских равновесий модели $\mathcal{E}$ обозначим $W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E})$.

Замечание 2.1. Равновесие Линдала, являясь прямым обобщением вальрасовского равновесия, обеспечивает каждому из участников $i \in N$ оптимальный выбор в рамках бюджетных множеств $B_i(\overline{p})$. Кроме того, как вытекает из определения, производственная программа $\overline{y} = (\overline{y}_L, \overline{y}_Q)$, реализующая выпуск общественных благ в объеме $\overline{x}_Q = \overline{y}_Q$, дает максимальную прибыль при ценах $\overline{p}_L$, $\overline{p}_Q$ (здесь существенно, что Y — конус). Параметрами управления, регулирующими согласование децентрализованных решений $\overline{x}^i$ и $\overline{y}$, являются цены $\overline{p}_L$, $\overline{p}_Q$ и индивидуальные оценки $\overline{p}^1_Q, \ldots, \overline{p}^n_Q$, характеризующие распределение коллективных затрат на финансирование программы $\overline{y}$:

$$\sum_N \overline{p}^i_Q \cdot \overline{x}^i_Q = \overline{p}_Q \cdot \overline{y}_Q.$$

Условия непустоты $W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E})$ подробно исследованы в [15, 18, 19]. Отметим, что существование линдаловских равновесий требует более жестких предположений, чем традиционные требования равновесного анализа. Последнее объясняется вырожденностью моделей типа Эрроу — Дебре, реализующих каноническое представление $\mathcal{E}$ в форме вальрасовской рыночной системы без общественных благ (см. [15, 18], а также [25, 27]).

Перейдем к описанию кооперативных механизмов выбора элементов из $X[N]$. Напомним, что в модели с агрегированным производством все коалиции $S \subseteq N$ имеют одинаковый доступ к технологиям из Y. Возможности получения того или иного объема общественных благ лимитируется только имеющимися у S начальными запасами $\sum_S w^i_L$. Сказанным мотивируется следующее определение (стандартного) доминирования в моделях линдаловского типа [14, 15].

Определение 2.3. *Распределение $\overline{x} \in X[N]$ доминируется коалицией $S \subseteq N$*, если найдутся $x^i \in X_i$ $(i \in S)$ и $y \in Y$ такие, что

$$u_i(x^i) > u^i(\overline{x}^i), \qquad i \in S,$$
$$\sum_S x^i_L = \sum_S w^i_L + y_L, \quad x^i_Q = y_Q, \qquad i \in S.$$

- Множество распределений $x \in X[N]$, не доминируемых никакой коалицией $S \subseteq N$, будем обозначать через $C(\mathcal{E})$ и называть *стандартным ядром модели* $\mathcal{E}$.

Согласно определению 2.3 распределения $x \in C(\mathcal{E})$ коалиционно устойчивы в том смысле, что никакая подэкономика $\mathcal{E}$ не в состоянии обеспечить своим участникам бóльшие значения функций полезности, чем в x.

Естественным обобщением стандартного доминирования является нечеткое доминирование, аналогичное предложенному в [24] для моделей с индивидуализированным производством. Напомним, что нечеткими коалициями называются ненулевые элементы $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ единичного куба $[0,1]^N$. При этом компоненты τ_i интерпретируются как степень участия соответствующих экономических агентов в коалиции $\operatorname{supp}\tau = \{i \mid \tau_i > 0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. *Распределение $\overline{x} \in X[N]$ доминируется нечеткой коалицией* $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, если найдутся $x^i \in X_i$ и $y \in Y$ такие, что

$$u_i(x^i) > u_i(\overline{x}^i), \quad i \in \operatorname{supp}\tau, \tag{F1}$$

$$\sum_N \tau_i x_L^i = \sum_N \tau_i w_L^i + y_L, \tag{F2}$$

$$x_Q^i = y_Q/\tau_i, \quad i \in \operatorname{supp}\tau. \tag{F3}$$

- Совокупность распределений из $X[N]$, не доминируемых никакой нечеткой коалицией, будем обозначать через $C_F(\mathcal{E})$ и называть *нечетким ядром модели $\mathcal{E}$.*

Как вытекает из определения, нечеткое доминирование является усилением стандартного: $C_F(\mathcal{E}) \subseteq C(\mathcal{E})$. Оказывается, что при достаточно общих условиях линдаловские равновесия не доминируются ни обычными, ни нечеткими коалициями. Более того, при формулируемых ниже естественных предположениях множество $W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E})$ допускает исчерпывающую характеризацию в терминах нечеткого доминирования: распределение $\overline{x} \in X[N]$ является линдаловским равновесием тогда и только тогда, когда оно принадлежит нечеткому ядру экономики $\mathcal{E}$.

Установим простое, но важное свойство линдаловских равновесий, вытекающее непосредственно из их определения. Напомним, что распределение $\overline{x} \in X[N]$ называется слабо эффективным, если оно не доминируется коалицией, состоящей из всех участников экономики $\mathcal{E}$. Совокупность слабо эффективных распределений из $X[N]$ обозначим через $P = P(\mathcal{E})$:

$$P = \{\overline{x} \in X[N] \mid [u_i(x^i) > u_i(\overline{x}^i),\ i \in N] \Rightarrow (x^i)_N \notin X[N]\}.$$

Предложение 2.1. *Для любой модели линдаловского типа справедливо вложение $W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}) \subseteq P(\mathcal{E})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{x} \in W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E})$. Зафиксируем равновесные цены $\overline{p} = (\overline{p}_L, \overline{p}_Q^1, \dots, \overline{p}_Q^n)$, отвечающие $\overline{x}$, и предположим, что существует распределение $x \in X[N]$, удовлетворяющее условиям $u_i(x^i) > u_i(\overline{x}^i)$, $i \in N$. По определению 2.2

$$\overline{p}_L \cdot x_L^i + \overline{p}_Q^i \cdot x_Q^i > \overline{p}_L \cdot w_L^i, \quad i \in N.$$

Суммируя эти неравенства и учитывая, что для некоторого $y \in Y$ выполняются соотношения

$$\sum_N x_L^i = \sum_N w_L^i + y_L, \quad x_Q^i = y_Q, \quad i \in N,$$

получаем

$$\overline{p}_L \cdot \left[\sum_N w_L^i + y_L\right] + \sum_N (\overline{p}_Q^i) \cdot y_Q > \overline{p}_L \cdot \sum_N w_L^i,$$

откуда $\overline{p}_L \cdot y_L + \overline{p}_Q \cdot y_Q > 0$, что противоречит условию $(\overline{p}_L, \overline{p}_Q) \in Y^0$, где $\overline{p}_Q = \sum\limits_N \overline{p}^i_Q$.

Введем обозначение $\widetilde{P} = \{[\sum\limits_N x^i_L, x_Q] \mid x = (x^i_L, x_Q)_N \in P\}$ и сформулируем условия, обеспечивающие эквивалентность равновесного и кооперативного выборов из $X[N]$.

A1. Множества X_i выпуклые, Y — выпуклый конус с вершиной в нуле, причем $Y_Q \subseteq \mathbb{R}^Q_+$ и $X_i \subseteq \mathbb{R}^{L \cup Q}_+$ для всех $i \in N$.

A2. Множество P содержится в X вместе с некоторой окрестностью из $(\mathbb{R}^{L\cup Q}_+)^N$, при этом $\widetilde{P} \subseteq \operatorname{int} \mathbb{R}^{L\cup Q}_+$.

A3. Для всех $i \in N$ начальные запасы w^i_L ненулевые и $(w^i_L, 0) \in X_i$.

A4. Функции u_i вогнутые, непрерывные, неубывающие по x^i и возрастающие по x^i_L.

Теорема 2.1. *Если для модели $\mathcal{E}$ вида* (2.1) *выполнены предположения* A1–A4, *то справедливо равенство*

$$W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}) = C_F(\mathcal{E}).$$

Доказательство. Сначала установим справедливость вложения

$$W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}) \subseteq C_F(\mathcal{E}).$$

Допустим, что существует нечеткая коалиция $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, доминирующая некоторое распределение $\overline{x} \in W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E})$. Тогда найдутся $x^i \in X_i$ и $y = (y_L, y_Q) \in Y$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_N \tau_i x^i_L = \sum_N \tau_i w^i_L + y_L, \tag{2.3}$$

$$x^i_Q = y_Q/\tau_i, \quad i \in \operatorname{supp} \tau, \tag{2.4}$$

$$u_i(x^i) > u_i(\overline{x}^i), \quad i \in \operatorname{supp} \tau. \tag{2.5}$$

Поскольку $\overline{x} \in W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E})$, на основании (2.4) и (2.5) имеем

$$\overline{p}_L \cdot x^i_L + \overline{p}^i_Q \cdot y_Q/\tau_i > \overline{p}_L \cdot w^i_L, \quad i \in \operatorname{supp} \tau, \tag{2.6}$$

где $\overline{p}_L, \overline{p}^1_Q, \dots, \overline{p}^n_Q$ — равновесные цены, отвечающие $\overline{x}$. Умножая каждое из неравенств (2.6) на соответствующую компоненту вектора τ и суммируя получающиеся в обеих частях выражения, имеем

$$\overline{p}_L \cdot \left[\sum_N \tau_i x^i_L\right] + \left[\sum_{\operatorname{supp} \tau} \overline{p}^i_Q\right] \cdot y_Q > \overline{p}_L \cdot \left[\sum_N \tau_i w^i_L\right]. \tag{2.7}$$

Учитывая (2.3), перепишем неравенство (2.7) в виде

$$\overline{p}_L \cdot y_L + \left[\sum_{\operatorname{supp} \tau} \overline{p}^i_Q\right] \cdot y_Q > 0.$$

Ввиду включений $(\bar{p}_L, \sum_N \bar{p}^i_Q) \in Y^0$, $y \in Y$, справедливо соотношение

$$\left[\sum_{i \notin \operatorname{supp} \tau} \bar{p}^i_Q\right] \cdot y_Q < 0. \tag{2.8}$$

В силу предложения 2.1 распределение $\bar{x}$ является слабо эффективным. С учетом условий А2, А4 теперь нетрудно заключить, что $\bar{p}^i_Q \geqslant 0$ для всех $i \in N$. Но тогда соотношение (2.8) противоречит неотрицательности y_Q, вытекающей из предположения А1.

Перейдем к доказательству противоположного вложения

$$C_F(\mathcal{E}) \subseteq W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}).$$

Положим $D = \prod_{i=0}^{n} D_i$, где $D_0 = \mathbb{R}^L$, $D_i = \mathbb{R}^Q$ $(i = 1, \dots, n)$, и для каждого $i \in N$ определим линейный оператор $\Gamma^1_i \colon \mathbb{R}^{l+m} \to D$, действующий по формуле

$$\Gamma^1_i(x_L, x_Q)^j = \begin{cases} x_L, & j = 0, \\ x_Q, & j = i, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Введем также линейный оператор $\Gamma\colon \mathbb{R}^{l+m} \to D$ по формуле

$$\Gamma(y_L, y_Q)^j = \begin{cases} y_L, & j = 0, \\ y_Q, & j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

и положим $\omega^i = (w^i_L, 0) \in \mathbb{R}^{L \cup Q}$. Далее, зафиксируем некоторый элемент $\bar{x}$ нечеткого ядра $C_F(\bar{x})$ и введем в рассмотрение множества

$$\mathcal{M}_i(\bar{x}) = \{\Gamma^1_i(x^i - \omega^i) \mid x^i \in \mathcal{P}_i(\bar{x}^i)\}, \quad i \in N,$$
$$\mathcal{M}(\bar{x}) = \left\{z(\tau) \mid z \in \prod_N \mathcal{M}_i(\bar{x}^i),\ \tau \in T\right\},$$

где, как и ранее, $z(\tau) = \sum_N \tau_i z^i$, $T = [0,1]^N \setminus \{0\}$. В силу предположений А2, А4 и очевидного вложения $C_F(\mathcal{E}) \subseteq P(\mathcal{E})$ множества $\mathcal{M}_i(\bar{x}^i)$ непусты и выпуклы. Следовательно, непустым и выпуклым является также множество $\mathcal{M}(\bar{x})$.

Ввиду определения C_F нулевой вектор не принадлежит множеству $\mathcal{K}(\bar{x}) = \mathcal{M}(\bar{x}) - \Gamma(Y)$. Действительно, допуская $0 \in \mathcal{K}(\bar{x})$, на основании определения $\mathcal{K}(\bar{x})$ получаем

$$\sum_N \tau_i x^i_L = \sum_N \tau_i w^i_L + y_L, \quad x^i_Q = y_Q/\tau_i, \quad i \in \operatorname{supp}\tau,$$

для некоторых $\tau \in T$, $x^i \in \mathcal{P}(\bar{x}^i)$ $(i \in \operatorname{supp}\tau)$ и $y \in Y$. Но это означает доминируемость распределения $\bar{x}$ нечеткой коалицией τ, что противоречит предположению $\bar{x} \in C_F(\mathcal{E})$.

Отметим, что из предположения A1 и линейности оператора Γ вытекает выпуклость множества $\Gamma(Y)$, следовательно, выпуклость $\mathcal{K}(\overline{x})$. Поскольку $0 \notin \mathcal{K}(\overline{x})$, по теореме отделимости существует ненулевой функционал $\overline{p} = (\overline{p}_L, \overline{p}_Q^1, \ldots, \overline{p}_Q^n)$, удовлетворяющий неравенствам

$$\overline{p} \cdot z \geqslant 0, \quad z \in \mathcal{K}(\overline{x}). \tag{2.9}$$

В силу включения $\overline{x} \in P(\mathcal{E})$ и предположений A2, A4 имеем $0 \in \mathrm{cl}\,\mathcal{M}(\overline{x})$, откуда ввиду (2.9) и определения $\Gamma(Y)$ получаем

$$\left(\overline{p}_L, \sum_N \overline{p}_Q^i\right) \in Y^0. \tag{2.10}$$

Далее, так как $0 \in Y$, справедливы вложения $\mathcal{M}_i(\overline{x}^i) \subseteq \mathcal{K}(\overline{x})$. Следовательно, для всех $i \in N$ выполняются неравенства $\overline{p} \cdot z^i \geqslant 0$ $(z^i \in \mathcal{M}_i(\overline{x}^i))$. Но ввиду определения $\mathcal{M}_i(\overline{x}^i)$ это означает, что для каждого $x^i \in \mathcal{P}_i(\overline{x}^i)$ выполняется неравенство

$$\overline{p}_L \cdot x_L^i + \overline{p}_Q^i \cdot x_Q^i \geqslant \overline{p}_L \cdot w_L^i. \tag{2.11}$$

Повторно воспользовавшись включением $\overline{x} \in P(\mathcal{E})$, строгим возрастанием u_i по x_L^i и предположением A2, приходим к неравенствам

$$\overline{p}_L \cdot \overline{x}_L^i + \overline{p}_Q^i \cdot \overline{x}_Q^i \geqslant \overline{p}_L \cdot w_L^i, \quad i \in N. \tag{2.12}$$

Суммируя эти неравенства и учитывая, что $\overline{x} \in X[N]$, имеем

$$\overline{p}_L \cdot \overline{y}_L + \sum_N \overline{p}_Q^i \cdot \overline{y}_Q \geqslant 0.$$

Последнее соотношение вместе с условием (2.10) означает, что ни одно из неравенств (2.12) не может быть строгим. Поэтому

$$\overline{x}^i \in B_i(\overline{p}), \quad i \in N. \tag{2.13}$$

Для завершения доказательства теоремы 2.1 остается проверить, что наборы $\overline{x}^i$ доставляют максимум функциям полезности u_i на бюджетных множествах $B_i(\overline{p})$. В качестве первого шага отметим, что, используя условие A2, монотонность u_i и неравенства (2.11), нетрудно доказать неравенства $\overline{p}_L \geqslant 0$ и $\overline{p}_Q^i \geqslant 0$ для всех $i \in N$. Более того, ввиду строгой монотонности u_i по x_L^i цены $\overline{p}_L$ строго положительны. Действительно, поскольку $\overline{p} \neq 0$, из предположения $\overline{p}_L = 0$ вытекает строгая положительность $\overline{p}_{Qk}^i$ для некоторого $i \in N$ и $k \in Q$. Так как $\overline{x}_Q^i \in \operatorname{int} X_{Qi}$ (ввиду $\overline{x} \in P$ и предположения A2), элемент

$$x^i(\delta) = (\overline{x}_L^i + \delta_1 e_L^1, \overline{x}_Q^i - \delta_2 e_Q^k)$$

принадлежит X_i при достаточно малых положительных δ_1, δ_2 (через e_L^1, e_Q^k обозначены единичные орты в $\mathbb{R}^L$ и $\mathbb{R}^Q$).

Ввиду непрерывности и строгой монотонности u_i по x_L^i числа δ_1, δ_2 можно выбрать так, чтобы элемент $x^i(\delta)$ принадлежал $\mathcal{P}_i(\overline{x}^i)$. Полагая

$B_i^l(p) = \{x^i \in X_i \mid \overline{p}_L \cdot x_L^i + \overline{p}_Q^i \cdot x_Q^i < \overline{p}_L \cdot w_l^i\}$, получаем, что при указанном выборе δ_1, δ_2 выполняется включение $x^i(\delta) \in B_i^l(\overline{p}) \cap \mathcal{P}_i(\overline{x}^i)$, противоречащее неравенствам (2.11). Итак, $\overline{p}_{Ls} > 0$ для некоторого $s \in L$. Допустим, что $\overline{p}_{Lr} = 0$ для каких-либо $r \in L$. Поскольку на основании A2 элемент $\sum_N \overline{x}_L^i$ принадлежит внутренности $\mathbb{R}_+^L$, существует участник $i \in N$ такой, что $\overline{x}_{Ls}^i > 0$. Еще раз привлекая условие A2, непрерывность и строгую монотонность u_i по x_L, получаем $\overline{x}^i(\delta) = (\overline{x}_L^i + \delta_1 e_L^r - \delta_2 e_L^s, \overline{x}_Q^i) \in \mathcal{P}_i(\overline{x}^i)$ при достаточно малых $\delta_1, \delta_2 > 0$. Но $\overline{x}^i(\delta) \in B_i^l(\overline{p})$ при всех $\delta_1, \delta_2 > 0$, что вместе с включением $\overline{x}^i(\delta) \in \mathcal{P}_i(\overline{x}^i)$ противоречит (2.11).

Используя строгую положительность цен $\overline{p}_L$, убеждаемся в справедливости импликаций $x^i \in \mathcal{P}_i(\overline{x}^i) \Rightarrow x^i \notin B_i(\overline{p})$, $i \in N$, означающих вместе с (2.13) равновесность распределения $\overline{x}$. Допустим, что для некоторого $i \in N$ найдется элемент $x^i \in X_i$, удовлетворяющий включению $x^i \in B_i^0(\overline{p}) \cap \mathcal{P}_i(\overline{x}^i)$, где $B_i^0(\overline{p}) = \{x^i \in X_i \mid \overline{p}_L \cdot x_L^i + \overline{p}_Q^i \cdot x_Q^i = \overline{p}_L \cdot w_L^i\}$. Поскольку $(w_L^i, 0) \in B_i^0(\overline{p})$ и $w_L^i \neq 0$, не теряя общности, можно считать, что $x_{Ls}^i > 0$ для некоторого $s \in L$ (в противном случае, учитывая непрерывность u_i, вместо x^i следует воспользоваться подходящей выпуклой комбинацией $(w_L^i, 0)$ и x^i, аппроксимирующей x^i с сохранением включения $x^i \in B_i^0(\overline{p}) \cap \mathcal{P}_i(\overline{x}^i)$). Далее, ввиду условия A2 и слабой эффективности $\overline{x}$ найдется число $\lambda \in (0,1]$ такое, что $\widetilde{x}^i = \overline{x}^i + \lambda(x^i - \overline{x}^i)$ принадлежит X_i вместе с некоторой окрестностью из $\mathbb{R}_+^{L\cup Q}$. Используя положительность $\widetilde{x}_{Ls}^i$ и непрерывность u_i, получаем

$$\widetilde{x}^i(\delta) = (\widetilde{x}_L^i - \delta e_L^s, \widetilde{x}_Q^i) \in \mathcal{P}_i(\overline{x}^i) \tag{2.14}$$

для некоторого $\delta > 0$. Но $\widetilde{x}^i \in B_i^0(\overline{p})$, что вместе с условием $\overline{p}_L \gg 0$ влечет $\widetilde{x}^i(\delta) \in B_i^l(\overline{p})$. Последнее включение вместе с (2.14) противоречит неравенствам (2.11). Таким образом, $B_i(\overline{p}) \cap \mathcal{P}_i(\overline{x}^i) = \varnothing$ для всех $i \in N$, что и завершает доказательство включения $\overline{x} \in W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E})$.

Замечание 2.2. Как видно из доказательства теоремы 2.1, для справедливости вложения $W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}) \subseteq C_F(\mathcal{E})$, а тем самым и $W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}) \subseteq C(\mathcal{E})$ достаточно выполнения следующих ослабленных аналогов предположений A1, A2, A4.

A1$'$. Имеет место вложение $Y_Q \subseteq \mathbb{R}_+^Q$.

A2$'$. Для каждого $x \in P$ существует $\delta > 0$ такое, что $x + z \in X$ для всех $z \in (\mathbb{R}_+^{L\cup Q})^N$, удовлетворяющих неравенству $\max\{z_k^i \mid i \in N, k \in L \cup Q\} < \delta$.

A4$'$. Функции u_i не убывают по x^i и возрастают по x_L^i.

Действительно, как вытекает непосредственно из определения линдаловского равновесия, условия A2$'$, A4$'$ (или A2$'$ при дополнительном требовании $z_L^i = 0$ $(i \in N)$ и требовании возрастания функций u_i по x_Q^i) гарантируют неотрицательность равновесных цен $\overline{p}_Q^i$. Но неотрицательность величин $\overline{p}^i_Q \cdot y_Q$ — единственное, что использовалось при доказательстве вложения $W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}) \subseteq C_F(\mathcal{E})$.

Что касается вложения $C_F(\mathcal{E}) \subseteq W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E})$, то здесь вместо A2 можно использовать более слабое требование, состоящее в замене $P(\mathcal{E})$ на $C(\mathcal{E})$ (или на $C_F(\mathcal{E})$).

A1″. Множество $C(\mathcal{E})$ содержится в X вместе с некоторой окрестностью из $(\mathbb{R}_+^{L\cup Q})^N$, при этом $\widetilde{C} \subseteq \operatorname{int}\mathbb{R}_+^{L\cup Q}$, где

$$\widetilde{C} = \left\{\left(\sum x^i_L, x_Q\right) \mid (x^i_L, x_Q)_N \in C(\mathcal{E})\right\}.$$

Таким образом, теорема 2.1 остается справедливой и при условиях A1, A2′, A2″, A3 и A4.

2.2. Используя теорему 2.1, построим реплики экономики с общественными благами и установим асимптотическую эквивалентность их ядер множеству линдаловских равновесий исходной модели. Как и в § 1, для корректного описания этой эквивалентности вводится адекватное рассматриваемой модели понятие равновесия Эджворта. Ключевую роль в формализации гипотезы Эджворта играет специальная конструкция доминирования, учитывающая изменение качества общественных благ при вариации численности однотипных пользователей. По аналогии с классической работой Дебре — Скарфа [3] реплики возрастающего объема и вводимое в них доминирование моделируют условия рыночной конкуренции — уменьшающееся влияние индивидуумов на процесс установления стабильных пропорций обмена (в том числе и между благами частного и коллективного пользований). Однако, в отличие от традиционной, предлагаемая ниже формализация отражает не только падение индивидуальных долей начальной собственности, но и уменьшение значимости общественных благ с ростом числа участников. Именно анализ индивидуальной значимости общественных благ при различных вариантах раздела общей экономической системы и позволяет найти условия, обеспечивающие справедливость гипотезы Эджворта для моделей линдаловского типа.

Итак, пусть $\mathcal{E}$ — произвольная модель вида (2.1), $r \geqslant 1$ — некоторое натуральное число. Положим

$$N_{(r)} = N \times \{1, \dots, r\} \tag{2.15}$$

и для каждого $(i, m) \in N_{(r)}$ определим следующие объекты:

$$X^{(r)}_{im} = \{(x^i_L, r x^i_Q) \mid (x^i_L, x^i_Q) \in X_i\}, \tag{2.16}$$

$$w^{im}_L = w^i_L. \tag{2.17}$$

Положим также

$$Y^{(r)} = Y \tag{2.18}$$

и через $u^{(r)}_{im}\colon X^{(r)}_{im} \to \mathbb{R}$ обозначим функцию, определенную по формуле

$$u^{(r)}_{im}(x^{im}_L, x^{im}_Q) = u_i(x^{im}_L, x^{im}_Q / r). \tag{2.19}$$

Определение 2.5. *Репликой объема r (r-репликой) модели $\mathcal{E}$* называется модель линдаловского типа

$$\mathcal{E}_{(r)} = \langle N_{(r)}, L, Q, \{X_{im}^{(r)}, w^{im}, u_{im}^{(r)}\}_{(i,m)\in N_{(r)}}; Y^{(r)}\rangle,$$

компоненты которой определены по формулам (2.15)–(2.19).

Как уже отмечалось, важную роль в формировании доминирования в $\mathcal{E}_{(r)}$ играет учет изменений в индивидуальной оценке общественных благ, достижимых усилиями отделяющихся коалиций. При этом материальные возможности, осуществимые в рамках соответствующих частей $\mathcal{E}_{(r)}$, определяется так же, как и в исходной экономике $\mathcal{E}_{(r)}$.

Перейдем к формальному определению доминирования в $\mathcal{E}_{(r)}$. Пусть M — произвольная коалиция из $N_{(r)}$. Введем следующие обозначения:

$$M_i = \{m \mid (i,m) \in M\}, \quad m_i = |M_i|,$$
$$X_{im}^M = \{(x_L^{im}, m_i x_Q^{im}) \mid (x_L^{im}, x_Q^{im}) \in X_i\}, \quad (i,m) \in M.$$

Определение 2.6. *Коалиция $M \subseteq N_{(r)}$ $\mathcal{L}$-доминирует распределение* $\overline{x} \in X[N_{(r)}]$, если найдутся $(x_L^{im}, x_Q^{im}) \in X_{im}^M$, $y \in Y^{(r)}$ такие, что

$$u_{im}^M(x_L^{im}, x_Q^{im}) > u_{im}^{(r)}(\overline{x}_L^{im}, \overline{x}_Q^{im}), \quad (i,m) \in M,$$
$$\sum_M x_L^{im} = \sum_M w_L^{im} + y_L, \quad x_Q^{im} = y_Q, \quad (i,m) \in M,$$

где

$$u_{im}^M(x_L^{im}, x_Q^{im}) = u_i(x_L^{im}, x_Q^{im}/m_i). \tag{2.20}$$

- Множество распределений $x \in X[N_{(r)}]$, которые не могут $\mathcal{L}$-доминироваться никакой коалицией $M \subseteq N_{(r)}$, будем обозначать $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$ и называть *$\mathcal{L}$-ядром реплики $\mathcal{E}_{(r)}$*.

Обращаясь к анализу асимптотического поведения ядер $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$, подчеркнем еще раз, что в соответствии с формулой (2.20) значимость общественных благ для участников $\mathcal{L}$-доминирующей коалиции M уменьшается пропорционально числу однотипных партнеров по этой коалиции. В содержательном плане соотношение (2.20) является формализацией одного из вариантов известного эффекта переполнения ⟨congestion effect⟩ (см. [28–31]). Специфика рассматриваемого случая состоит в том, что предпочтения участников M чувствительны не к общей совокупности идентичных им пользователей (как у Р. Аумана; см. [15]), а лишь к той их части, которая оказывается в пределах коалиции M. Как и в [3–5], два экономических агента (i,m) и (i',m') называем *идентичными* (*однотипными, подобными*), если $i = i'$. Такой локальный, определяемый только числом подобных партнеров эффект переполнения характерен для общественных благ многоцелевого назначения (экологические программы широкого профиля, многокомпонентные информационные сети, спортивные комплексы и т. п.), допускающих естественную дифференциацию участников по типу потребления этих продуктов коллективного пользования. Прямое сопоставление стандартных ядер $C(\mathcal{E}_{(r)})$ с ядрами $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$ показывает, что учет локального эффекта переполнения существенно увеличивает возможности доминирования с помощью малых коалиций. Это обстоятельство и позволяет, в отличие от всех предпринимавшихся ранее попыток, доказать асимптотическую эквивалентность недоминируемых распределений $\mathcal{E}_{(r)}$ множеству линдаловских равновесий экономики $\mathcal{E}$. Прежде чем перейти к точной формулировке этого результата, представляющего аналог классической теоремы Дебре — Скарфа для моделей линдаловского типа, введем некоторые обозначения. Для $r \geqslant 1$ и $x = (x^i)_N \in X$ через $\dot{x}_{(r)} \in X_{(r)} = \prod\limits_{N_{(r)}} X_{im}^{(r)}$ будем обозначать r-кратную реплику вектора $\dot{x} = (x_L^i, rx_Q^i)_N$. Именно, положим $(\dot{x}_{(r)} = \dot{x}, \dots, \dot{x}) \in X_{(r)}$, или, в более подробной записи,

$$(\dot{x}_{(r)})_L^{im} = x_L^i, \qquad (i,m) \in N_{(r)},$$
$$(\dot{x}_{(r)})_Q^{im} = rx_Q^i, \qquad (i,m) \in N_{(r)}.$$

Выделим «основание» симметричной составляющей ядра $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$:

$$C_r(\mathcal{E}) = \{x \in X[N] \mid \dot{x}_{(r)} \in C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})\}.$$

Определение 2.7. Распределение $\overline{x} \in X[N]$ называется ***$\mathcal{L}$-равновесием Эджворта модели** $\mathcal{E}$*, если $\overline{x} \in C_r(\mathcal{E})$ для всех $r \geqslant 1$.

- Совокупность $\mathcal{L}$-равновесий Эджворта модели $\mathcal{E}$ обозначим $C_{\mathcal{L},E}(\mathcal{E})$.

Основной результат этого параграфа — теорема о совпадении линдаловских равновесий и $\mathcal{L}$-равновесий Эджворта при достаточно общих предположениях A1–A4.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям теоремы* 2.1. *Тогда справедливо равенство*

$$W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}) = C_{\mathcal{L},E}(\mathcal{E}). \tag{2.21}$$

Доказательство. Пусть $\overline{x} \in W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E})$. Ясно, что $\dot{\overline{x}}_{(r)} \in W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$ при ценах $\overline{p}_L$, $\overline{p}_Q^{im} = \overline{p}_Q^i/r$, где $\overline{p}_L, \overline{p}_Q^1, \dots, \overline{p}_Q^n$ — равновесные цены, отвечающие $\overline{x}$. Допуская, что существует коалиция $M \subseteq N_{(r)}$, $\mathcal{L}$-доминирующая $z = \dot{\overline{x}}_{(r)} \in$, получаем

$$\sum_M x_L^{im} = \sum_M w_L^{im} + y_L,$$
$$x_Q^{im} = y_Q, \quad u_{im}^M(x^{im}) > u_{im}^{(r)}(z^{im}), \quad (i,m) \in M, \tag{2.22}$$

для некоторых $x^{im} \in X_{im}^M$ и $(y_L, y_Q) \in Y^{(r)}$. Соотношения (2.22) можно переписать в виде

$$u_{im}^{(r)}(x_L^{im}, rx_Q^{im}/m_i) > u_{im}^{(r)}(z_L^{im}, z_Q^{im}), \quad (i,m) \in M.$$

Поэтому, учитывая равновесность распределения z, получаем

$$\overline{p}_L \cdot \Delta_L^{im} + \overline{p}_Q^{im} \cdot ry_Q/m_i > 0, \quad (i,m) \in M,$$

где $\Delta_L^{im} = x_L^{im} - w_L^{im}$. Суммируя эти неравенства и используя тот факт, что $\overline{p}_Q^{im} = \overline{p}_Q^i/r$ $(i \in N,\ m = 1, \ldots, r)$, имеем

$$\overline{p}_L \cdot \sum_M \Delta_L^{im} + \sum_{i|m_i>0} \overline{p}_Q^i \cdot y_Q > 0.$$

Следовательно, учитывая равенство $\sum\limits_M \Delta_L^{im} = y_L$ и неотрицательность y_Q и $\overline{p}_Q^i$ (см. замечание 2.2), приходим к неравенству $\overline{p}_L \cdot y_L + \sum\limits_N \overline{p}_Q^i \cdot y_Q > 0$, которое противоречит включению $(\overline{p}_L, \sum\limits_N \overline{p}_Q^i) \in Y^0$. Таким образом, $\overline{x}_{(r)}$ принадлежит $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$, следовательно, справедливо включение $\overline{x} \in C_r(\mathcal{E})$.

Для доказательства вложения $C_{\mathcal{L},E}(\mathcal{E}) \subseteq W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E})$ воспользуемся теоремой 2.1, в силу которой в наших условиях выполняется равенство $W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}) = C_F(\mathcal{E})$. Покажем, что из соотношений $\overline{x} \in C_r(\mathcal{E})$ $(r \geqslant 1)$ вытекает включение $\overline{x} \in C_F(\mathcal{E})$. С этой целью отметим, что в предположениях теоремы 2.1 доминируемость распределения $\overline{x}$ какой-либо нечеткой коалицией τ влечет доминируемость $\overline{x}$ некоторой рациональнозначной коалицией τ^0. Действительно, пусть $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in T$, $(y_L, y_Q) \in Y$ и $(x_L^i, x_Q^i) \in X_i$ таковы, что

$$\sum_N \tau_i x_L^i = \sum_N \tau_i w_L^i + y_L, \tag{2.23}$$

$$x_Q^i = y_Q/\tau_i,\ u_i(x_L^i, x_Q^i) > u_i(\overline{x}_L^i, \overline{x}_Q^i), \quad i \in \operatorname{supp} \tau. \tag{2.24}$$

Выбирая рациональные числа $\tau_i^0 \in [\tau_i, 1]$, $i \in \operatorname{supp} \tau$, $\tau_i^0 = 0$ $(i \notin \operatorname{supp} \tau)$ достаточно близкими к τ_i таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$u_i(\widetilde{x}^i) > u_i(x^i), \quad i \in \operatorname{supp} \tau, \tag{2.25}$$

где

$$\widetilde{x}^i = \frac{\tau_i}{\tau_i^0} x^i + \frac{\tau_i^0 - \tau_i}{\tau_i^0} \omega^i, \quad \omega^i = (w^i, 0),$$

получаем ввиду (2.23)

$$\sum_N \tau_i^0 \widetilde{x}_L^i = \sum_N \tau_i^0 w_L^i + y_L. \tag{2.26}$$

С другой стороны, на основании (2.24) справедливы равенства $\tau_i^0 \widetilde{x}_Q^i = \tau_i x_Q^i$, из которых находим

$$\widetilde{x}_Q^i = y_Q/\tau_i^0, \quad i \in \operatorname{supp} \tau^0. \tag{2.27}$$

Поскольку $\operatorname{supp} \tau = \operatorname{supp} \tau^0$, в силу (2.25)–(2.27) получаем требуемое: τ^0 доминирует $\overline{x}$.

Завершая доказательство теоремы 2.2, допустим, что $\overline{x} \in C_{\mathcal{L},E} \backslash C_F$. Тогда, как отмечалось выше, существует рациональнозначная коалиция

$\tau^0 = (\tau_1^0, \dots, \tau_n^0)$, доминирующая распределение $\overline{x}$. Пусть m_i, r — некоторые натуральные числа, для которых выполняются соотношения $\tau_i^0 = m_i/r$ $(i = 1, \dots, n)$. Ясно, что коалиция

$$M = \bigcup_{i|m_i>0} \{(i,m) \mid m = 1, \dots, m_i\}$$

$\mathcal{L}$-доминирует распределение $z = \dot{\overline{x}}_{(r)}$. Действительно, полагая $\widetilde{x}_L^{im} = \widetilde{x}_L^i$, $\widetilde{x}_Q^{im} = m_i \widetilde{x}_Q^i$, $y^{(r)} = (ry_L, ry_Q)$, где $\widetilde{x}^i$, y — некоторые элементы, удовлетворяющие соотношениям (2.25)–(2.27), имеем

$$u_{im}^M(\widetilde{x}^{im}) > u_{im}^{(r)}(z^{im}), \quad \widetilde{x}_Q^{im} = y_Q^{(r)}, \quad (i,m) \in M,$$
$$\sum_M \widetilde{x}_L^{im} = \sum_M w_L^{im} + y_L^{(r)}.$$

Но это означает, что $z = \dot{\overline{x}}_{(r)}$ не принадлежит $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$. Приходим к противоречию с предположением $\overline{x} \in \bigcap_{r=1}^{\infty} C_r(\mathcal{E})$, что и завершает доказательство теоремы 2.2.

Для того чтобы прояснить интерпретацию соотношений типа (2.21), традиционно понимаемых как констатация стягиваемости ядер реплик к их равновесиям, отметим, что в условиях теоремы 2.2 все распределения из $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$ слабо симметричны. Под слабой симметричностью $z \in X[N_{(r)}]$ понимаем равенство уровней полезности, доставляемых распределением z всем однотипным участникам экономики $\mathcal{E}_{(r)}$:

$$u_{im}^{(r)}(z^{im}) = u_{im'}^{(r)}(z^{im'}), \quad i \in N, \quad m, m' = 1, \dots, r,$$

(симметричность требует бóльшего: $z^{im} = z^{im'}$ для всех $i \in N$, $m, m' = 1, \dots, r$). Нетрудно проверить, что в условиях вогнутости функций $u_{im}^{(r)}$ всякое слабо симметричное распределение $z \in C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$ порождает по формуле

$$\widetilde{z}^{im} = \frac{1}{r} \sum_{m'=1}^{r} z^{im'}, \quad (i,m) \in N_{(r)},$$

симметричное распределение, также принадлежащее ядру $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$. Таким образом, вогнутость функций $u_{im}^{(r)}$ гарантирует непустоту симметричной составляющей $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$ при $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)}) \neq \varnothing$.

Если несколько усилить требование вогнутости функций полезности, то множества $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$ будут состоять только из симметричных распределений. В указанной ситуации ядра $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$ полностью исчерпываются множествами $C_r(\mathcal{E})$ в том смысле, что

$$C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)}) = \{\dot{x}_{(r)} \mid x \in C_r(\mathcal{E})\}. \tag{2.28}$$

Действительно, повторяя практически без изменений доказательство предложения 2 [24], нетрудно установить следующее

Предложение 2.2. *Если модель $\mathcal{E}$ удовлетворяет предположениям* A1, A2, A4 *и все функции u_i строго вогнуты, то для любого $r \geqslant 1$ имеют место равенства* (2.28).

Так как семейство $\{C_r(\mathcal{E})\}_{r=1}^{\infty}$ образует монотонно убывающую подпоследовательность, выполнение соотношения (2.21) в условиях предложения 2.2 можно трактовать как стягиваемость ядер $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$ к множествам равновесных распределений $W^*_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$, где

$$W^*_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)}) = \{\dot{x}_{(r)} \mid x \in W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E})\}.$$

Подчеркнем, что, как и в случае моделей без общественных благ, равновесные распределения реплик $\mathcal{E}_{(r)}$, вообще говоря, не являются симметричными. При этом в отличие от стандартных моделей симметричность линдаловских равновесий не гарантируется даже при строгой вогнутости функций полезности (см., например, [19]). В связи с этим представляет интерес выделение $(*)$-симметричных равновесных распределений моделей $\mathcal{E}_{(r)}$. По аналогии с [24] последние определяются как элементы $z \in W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$, для которых существуют цены $\overline{p}_L$, $\overline{p}^{im}_Q$, обеспечивающие равенство расходов на общественные блага для однотипных участников:

$$\overline{p}^{im}_Q \cdot z^{im}_Q = \overline{p}^{i1}_Q \cdot z^{i1}_Q, \quad i \in N, \ m = 2, \dots, r.$$

Нетрудно проверить, что при вогнутости функций полезности $(*)$-симметричные линдаловские равновесия являются и слабо симметричными распределениями. В этой же ситуации, как и в случае с ядрами $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$, каждое $(*)$-симметричное распределение из $W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$ порождает симметричное равновесное распределение модели $\mathcal{E}_{(r)}$. Интересно, что эта аналогия продолжается вплоть до следующего факта, доказываемого по той же схеме, что и в [24].

Предложение 2.3. *Если функции полезности модели $\mathcal{E}$ строго вогнуты, то множество*

$$W^{\mathrm{sim}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$$

$(*)$*-симметричных линдаловских равновесий модели $\mathcal{E}_{(r)}$ исчерпывается множеством $W^*_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$, т. е. $W^{\mathrm{sim}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)}) = W^*_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$.*

Резюмируя сказанное и учитывая установленное в процессе доказательства теоремы 2.2 вложение $W^*_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)}) \subseteq C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$, получаем, что в случае строго вогнутых функций полезности соотношение (2.21) можно интерпретировать и как стягиваемость $\mathcal{L}$-ядер реплик $\mathcal{E}_{(r)}$ к множеству их $(*)$-симметричных линдаловских равновесий.

2.3. В заключение параграфа проанализируем с позиции теоремы 2.2 известный контрпример Ж. Миллерона [15] и рассмотрим один вариант усиления доминирования по Р. Ауману, предложенный Г. Висметом [32].

Напомним, что в контрпримере Миллерона исходная экономика $\mathcal{E}$ содержит единственного участника, характеризующегося следующими параметрами:

$$X_1 = \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1_+, \quad u_1(x_L, x_Q) = \ln x_L + \ln x_Q,$$
$$Y = \{(y_L, y_Q) \in \mathbb{R}^2 \mid y_L + y_Q = 0, \ y_L \leqslant 0\}.$$

Предполагается также, что начальный запас частных благ w_L — произвольное положительное число.

Линдаловские равновесия в любой реплике $\mathcal{E}_{(r)}$ этой модели существуют, единственны и имеют вид $\dot{\widetilde{x}}_{(r)}$, где $\widetilde{x} = (w_L/2, w_L/2)$. Как установлено в [15], распределения $x_r(\lambda) = (x_{Ls}(\lambda), x_Q)_{s=1}^r$, построенные по формулам

$$x_{Ls}(\lambda) = w_L\left(1 - \lambda\frac{r+1-2s}{r-1}\right)/2,$$
$$x_Q = rw_L/2,$$

принадлежат ядрам $C(\mathcal{E}_{(r)})$ реплик $\mathcal{E}_{(r)}$ при $r > 1$, $\lambda \in (0, (r-1)/r)$, что на основании определений $\mathcal{E}_{(r)}$ и $C(\mathcal{E}_{(r)})$ означает, что указанные распределения $x_r(\lambda)$ не доминируются в смысле Р. Аумана (см. [15, с. 459–463]).

Как справедливо отмечено в [15], сопоставление приведенных выше множеств $W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)}) = \{(w_L/2, rw_L/2), \ldots, (w_L/2, rw_L/2)\}$ и $C(\mathcal{E}_{(r)})$ не позволяет сделать вывод об их стягиваемости друг к другу в каком-либо разумном смысле. В то же время легко проверяется, что для модели $\mathcal{E}$ выполняются все условия теоремы 2.2 (требование конечности значений функций полезности несущественно, поскольку в ходе доказательства теорем 2.1, 2.2 используются лишь порядковые свойства функций u_i). Таким образом, для ядер $C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$, конструируемых в соответствии с определением 2.5, реализуется искомая стягиваемость к множеству линдаловских равновесий. Более того, непосредственная проверка показывает, что для всех $r \geqslant 1$ имеют место равенства $W_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)}) = C_{\mathcal{L}}(\mathcal{E}_{(r)})$. Приведенные рассуждения проясняют один из главных дефектов стандартного доминирования в $\mathcal{E}_{(r)}$: ядра $C(\mathcal{E}_{(r)})$ не являются даже слабо симметричными. Среди вариантов, устраняющих этот дефект, наиболее сильный был предложен Г. Висметом [32]. Его поправка состоит в том, что функции полезности участников доминирующей коалиции M определяются по формуле

$$\widetilde{u}_{im}^M(x_L^{im}, x_Q^{im}) = u_i(x_L^{im}, x_Q^{im}/r(M)),$$

где $r(M) = \max\{m_i \mid i = 1, \ldots, n\}$. Ясно, что в итоге получается отношение доминирования, занимающее промежуточное положение между стандартным и используемым в настоящей статье.

Ниже демонстрируется несколько модифицированный пример из [32], показывающий, что и такого усиления стандартного доминирования в репликах $\mathcal{E}_{(r)}$ недостаточно для стягиваемости ядер к множеству линдаловских равновесий в смысле формулы (2.21). Отметим, что контрпример Миллерона не противоречит соотношению (2.21), поскольку в первой части формулы (2.21) используются лишь симметричные распределения.

По сравнению с $\mathcal{E}$ в предлагаемой модели $\widehat{\mathcal{E}}$ имеется еще один участник с функцией полезности $u_2(x_L, x_Q) = x_L + x_Q$, и, кроме того, начальные запасы частных благ имеют следующий вид: $w_L^1 = 0.6$, $w_L^2 = 0.4$. Все остальные параметры те же, что и в предыдущем примере: $X_1 = X_2 = \mathbb{R}_+^2$, $u_1(x_L, x_Q) = \ln x_L + \ln x_Q$, $Y = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_L + y_Q = 0, y_L \leqslant 0\}$. Нетрудно проверить, что в модели $\widehat{\mathcal{E}}$ имеется единственное линдаловское равновесие $\widehat{x}$, определяемое формулами

$$\widehat{x}^1 = (0.3, 0.7), \quad \widehat{x}^2 = (0, 0.7), \quad \widehat{y} = (-0.7, 0.7),$$
$$\widehat{p}_L = 1, \quad \widehat{p}_Q^1 = 3/7, \quad \widehat{p}_Q^2 = 4/7.$$

Модифицируя определение 2.4, будем говорить, что нечеткая коалиция $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ W-доминирует распределение $\overline{x} \in X[N]$, если существуют $x^i \in X_i$ и $y \in Y$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $u_i(x^i_L, y_Q/r(\tau)) > u_i(\overline{x}^i_L, \overline{x}^i_Q), \quad i \in \operatorname{supp}\tau,$

2) $\sum\limits_N \tau_i x^i_L = \sum\limits_N \tau_i w^i_L + y_L$, где $r(\tau) = \max\{\tau_i \mid i \in N\}$.

Ясно, что для нашей цели достаточно показать, что среди сбалансированных распределений модели $\widehat{\mathcal{E}}$ найдется $\overline{x} \neq \widehat{x}$, для которого ни одна нечеткая коалиция τ не является W-доминирующей. Докажем, что сформулированному требованию удовлетворяет следующее распределение: $\overline{x}^1 = (0.35, 0.65)$, $\overline{x}^2 = (0, 0.65)$. Допуская противное, зафиксируем $x^i = (x^i_L, x^i_Q) \in X_i$, $y = (y_L, y_Q) \in Y$ и $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, удовлетворяющие указанным выше условиям, и рассмотрим два возможных случая. (Допущение, что $\overline{x}$ W-доминируется нечеткой коалицией τ, для которой $|\operatorname{supp}\tau| = 1$, противоречит неравенствам $x^1_L(0.6 - x^1_L) \leqslant 0.09$, $x^2_L + y/r(\tau) \leqslant 0.4$.)

Случай 1: $0 < \tau_1 \leqslant \tau_2$. Полагая $\lambda_1 = \tau_1/\tau_2$, получаем следующие соотношения:

$$\lambda_1(0.6 - x^1_L) + (0.4 - x^2_L) = y,$$
$$\lambda_1(0.6 - x^1_L)\cdot x^1_L + (0.4 - x^2_L)\cdot x^1_L > 0.2275,$$
$$\lambda_1(0.6 - x^1_L) + 0.4 > 0.65,$$

где $y = y_Q/\tau_2$. Очевидно, что последнее неравенство только усиливается при $\lambda_1 = 1$. Поэтому $x^1_L < 0.35$. Но тогда предпоследнее неравенство тоже только усиливается при $\lambda_1 = 1$:

$$x^1_L(1 - x^1_L - x^2_L) > 0.2275. \tag{2.29}$$

Однако $x^1_L(1 - x^1_L - x^2_L) \leqslant x^1_L(1 - x^1_L)$. Поэтому, используя неравенство $x^1_L < 0.35$ и монотонность функции $x(1-x)$ на интервале $[0, 0.5]$, получаем противоречие с неравенством (2.29).

Случай 2: $0 < \tau_2 < \tau_1$. Положим $\lambda_2 = \tau_2/\tau_1$, $y = y_Q/\tau_1$ и перепишем условия 1, 2 в следующем виде:

$$(0.6 - x^1_L) + \lambda_2(0.4 - x^2_L) = y,$$
$$(0.6 - x^1_L)\cdot x^1_L + \lambda_2(0.4 - x^2_L)\cdot x^1_L > 0.2275, \tag{2.30}$$
$$(0.6 - x^1_L) + \lambda_2(0.4 - x^2_L) + x^2_L > 0.65. \tag{2.31}$$

Допуская, что $x^2_L \geqslant 0.4$, из неравенства (2.30) получаем заведомо неверное соотношение $(0.6 - x^1_L)\cdot x^1_L > 0.2275$. Поэтому $x^2_L < 0.4$, откуда при $\lambda_2 = 1$ из неравенства (2.31) получаем оценку $x_L^1 < 0.35$. Но тогда неравенство (2.30) справедливо и при $\lambda_2 = 1$, что возвращает нас к соотношению (2.29), несовместимость которого с оценкой $x_L^1 < 0.35$ уже установлена.

Таким образом, $\dot{\overline{x}}_{(r)}$ не доминируется в смысле определения Г. Висмета ни в какой реплике $\widehat{\mathcal{E}}_{(r)}$ модели $\widehat{\mathcal{E}}$. Следовательно, в рассматриваемой ситуации гипотеза Эджворта для ядер, определенных с помощью функций $\widetilde{u}_{im}^M$ не выполняется (в частности, соотношение типа (2.21) не выполняется в модели $\widehat{\mathcal{E}}$ и для доминирования по Р. Ауману). В то же время нетрудно убедиться, что $\widehat{\mathcal{E}}$ удовлетворяет модифицированным в соответствии с замечанием 2.2 условиям теоремы 2.1 и тем самым равенству (2.21).

§ 3. Модели экономического обмена с неавтономными предпочтениями

Известно [3], что эффективность вальрасовских равновесий в моделях экономического обмена гарантируется лишь в случае автономных предпочтений, когда функция полезности каждого участника зависит только от его собственного уровня потребления. В то же время многие важные задачи равновесного анализа не укладываются в рамки классического требования автономности. Один из наиболее характерных примеров — рассмотренная в § 2 проблема выбора единого для всей экономической системы уровня производства общественных благ и различные ее модификации [15, 20–23]. Возможные способы устранения неэффективности стандартного механизма равновесных цен в моделях с неавтономными предпочтениями могут состоять в том или ином расширении исходного рынка. Такое расширение обеспечивается, например, за счет введения дополнительных продуктов, предназначенных для обмена информацией о приемлемой для участников структуре потребления экономической системы в целом [33, 34].

В настоящем параграфе изучаются равновесия Эджворта, отвечающие наиболее экономной (в смысле размерности) реализации упомянутого информационного расширения, предложенной в [33, 35]. Основной результат состоит в доказательстве совпадения равновесий Эджворта и так называемых информационных равновесий, балансирующих спрос и предложение в расширенной модели обмена. Как и в предыдущих параграфах, теорема эквивалентности базируется на характеризации равновесных распределений в терминах надлежащего отношения нечеткого доминирования. Подчеркнем, что подобно линдаловским информационные равновесия требуют для своего описания более тонкого конструирования нечетких ядер, нежели прямая модификация стандартных понятий, применимых в рамках информационного расширения исходной модели. Сказанное в еще бóльшей степени справедливо по отношению к вводимым ниже понятиям реплик и блокирования в них. В частности, как и в § 2, существенной чертой доминирования в репликах является зависимость уровней полезности, достигаемых участниками блокирующей коалиции M, от ее структуры: оценивая полезность распределения, предлагаемого этой коалицией, каждый экономический агент принимает во внимание как среднее потребление своих партнеров, так и количество однотипных ему участников M.

3.1. *Моделью экономического обмена с неавтономными предпочтениями* будем называть экономику вида

$$\mathcal{E} = \langle N, \{X_i, w^i, u_i\}_{i\in N}\rangle,$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ — множество участников, а $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$, $w^i \in \mathbb{R}^l$ и $u_i \colon \prod\limits_N X_j \to \mathbb{R}$ — потребительское множество, начальные запасы и функция полезности участника $i \in N$ соответственно.

Отличие рассматриваемой модели $\mathcal{E}$ от стандартной модели обмена состоит в том, что в первом случае значения функций полезности участников определяются не только величиной их индивидуального потребления, но и объемами потребления остальных экономических агентов (т. е. состоянием системы в целом).

Как известно [33], традиционные вальрасовские равновесия в условиях внешних влияний (externalities) не являются парето-оптимальными. Изучаемое далее информационное равновесие не только сохраняет важнейшие черты классического равновесия, но, как будет установлено ниже, локализуется в некоторой довольной узкой части границы Парето модели $\mathcal{E}$ (см. [36]).

Пусть

$$X = \prod_{i\in N} X_i, \qquad X[N] = \left\{x \in X \mid \sum_N x^i = \sum_N w^i\right\}.$$

Определение 3.1. Распределение $\overline{x} \in X[N]$ называется *информационным равновесием модели* $\mathcal{E}$, если существуют $\overline{p}^0 \in \mathbb{R}^l$, $\overline{p}^i = (\overline{p}^{i1}, \dots, \overline{p}^{in}) \in (\mathbb{R}^l)^N$ такие, что

(i) $\overline{x} \in \operatorname{Arg\,max}\{u_i(x) \mid x \in B_i(\overline{p})\}, \quad i \in N,$

(ii) $\sum\limits_N \overline{p}^{ij} = \overline{p}^0,\ j \in N,$

где $B_i(\overline{p}) = \{x \in X \mid \overline{p}^i \cdot x \leqslant \overline{p}^0 \cdot w^i\}$.

Напомним [33, 35], что $B_i(\overline{p})$ называется бюджетным множеством участника $i \in N$ при индивидуальных ценах $\overline{p}^i$, а элементы $x \in X[N]$ — сбалансированными распределениями модели $\mathcal{E}$.

- Множество информационных равновесий модели $\mathcal{E}$ обозначим $W_I(\mathcal{E})$.

Компоненты $\overline{p}^{ij}$ вектора $\overline{p}^i$ интерпретируются как цены продуктов, представляющих для участника i информацию о потреблении участника j [13, 27, 33].

Замечание 3.1. Если $\mathcal{E}$ — стандартная модель чистого обмена, то $W(\mathcal{E}) \subseteq W_I(\mathcal{E})$, где через $W(\mathcal{E})$ обозначено множество вальрасовских равновесий системы $\mathcal{E}$. Более того, $W_I(\mathcal{E}) = W(\mathcal{E})$, если функции полезности строго возрастают.

Интересно отметить, что основное предположение, обеспечивающее существование информационных равновесий, формулируется в терминах нечетких коалиций и состоит в так называемой коалиционной ненасыщаемости (аналоге B-нередуцируемости в стандартных моделях обмена [37]).

Определение 3.2 [27]. Модель $\mathcal{E}$ называется *коалиционно ненасыщаемой*, если для каждых непустой коалиции $S \neq N$ и распределения $x \in X[N]$ существуют $z \in (\mathbb{R}^l)^N$ и $\tau \in (0,1]^N$ такие, что

$$u_i(z/\tau_i) > u_i(x), \quad i \in S, \tag{3.1}$$

$$\sum_N z^i = \sum_N \tau_i w^i. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1 [27]. *Если модель $\mathcal{E}$ удовлетворяет предположениям:*

(A1) $X_i = \mathbb{R}^l_+$, $w^i \in \mathbb{R}^l_+$, $w^i \neq 0$ $(i \in N)$, $\sum_N w^i \gg 0$,

(A2) u_i *непрерывные квазивогнутые не убывающие по $x \in X$ и строго возрастающие по x^i,*

то $W_I(\mathcal{E}) \neq \varnothing$.

Подробное доказательство теоремы 3.1 содержится в [27]. Здесь мы лишь отметим, что при условиях (A1) и (A2) модель $\mathcal{E}$ является коалиционно ненасыщаемой. Действительно, для каждого $x \in X[N]$ и непустой коалиции $S \neq N$ существует $a \in (\mathbb{R}^l_+)^N$ такой, что z и τ, определенные по формулам $z^i = (x^i + a^i)/2$ $(i \in N)$ и $\tau_i = 1/2$ $(i \in S)$, $\tau_i = 1$ $(i \in N \backslash S)$, удовлетворяют соотношениям (3.1), (3.2). Единственное требование, которому должен удовлетворять вектор a (помимо условия $a^i \neq 0$ для $i \in S$) состоит в следующем:

$$\sum_N a^i = \sum_{N \backslash S} w^j.$$

Переходя к характеризации $W_I(\mathcal{E})$ в терминах нечеткого доминирования, введем отношение блокирования, аналогичное тому, что традиционно используется для моделей с общественными благами [15]. Пусть

$$\sigma_0 = 2^N \backslash \{\varnothing\},$$

$$\sigma_{\mathcal{E}} = \{S \in \sigma_o \mid \forall j \in N \backslash S \; \forall i \in S \; (u_j \text{ не убывает по } x^i)\}.$$

Определение 3.3. *Распределение $x \in X$ доминирует $\overline{x} \in X[N]$*, если существует коалиция $S \in \sigma_{\mathcal{E}}$ такая, что

(C1) $$u_i(x) > u_i(\overline{x}), \quad i \in S,$$

(C2) $$x^j = 0, \quad j \in N \backslash S,$$

(C3) $$\sum_S x^i = \sum_S w^i.$$

- Множество распределений $\overline{x} \in X[N]$ модели $\mathcal{E}$, которые не доминируются никаким распределением $x \in X$, обозначим $C(\mathcal{E})$.

Ясно, что $W_I(\mathcal{E})$, как правило, составляет лишь собственную часть $C(\mathcal{E})$. Поэтому для характеризации $W_I(\mathcal{E})$ необходимо более сильное доминирование. Это новое понятие основано на использовании нечетких коалиций, под которыми, как и ранее, понимаются элементы множества $T = [0,1]^N \backslash \{0\}$. Значение j-й компоненты $\tau \in T$ интерпретируется как степень участия j в коалиции $\operatorname{supp} \tau = \{i \mid \tau_i > 0\}$. Положим $T_{\mathcal{E}} = \{\tau \in T \mid \operatorname{supp} \tau \in \sigma_{\mathcal{E}}\}$.

Определение 3.4. *Нечеткая коалиция* $\tau \in T_{\mathcal{E}}$ *доминирует* (*блокирует*) $\overline{x} \in X[N]$, если найдутся $z_i \in X$ ($i \in \operatorname{supp} \tau$), $x^i \in X_i$ ($i \in N$) такие, что

$$\text{(F1)} \qquad u_i(z_i) > u_i(\overline{x}), \quad i \in \operatorname{supp} \tau,$$

$$\text{(F2)} \qquad \tau_i z_i = (\tau_1 x^1, \dots, \tau_n x^n), \quad i \in \operatorname{supp} \tau,$$

$$\text{(F3)} \qquad \sum_N \tau_i x^i = \sum_N \tau_i w^i.$$

- Множество распределений $x \in X[N]$, не блокируемых никакой нечеткой коалицией $\tau \in T_{\mathcal{E}}$, будем обозначать $C_{IF}(\mathcal{E})$ и называть *нечетким ядром модели* $\mathcal{E}$.

Предложение 3.1. *Если* $X_i = \mathbb{R}^l_+$ *и функции* u_i *строго возрастают по* x^i, *то справедливо вложение*

$$W_I(\mathcal{E}) \subseteq C_{IF}(C\mathcal{E}).$$

Доказательство. Пусть $\overline{x} \in W_I(\mathcal{E})$, $\overline{p}^0$, $\overline{p}^i$ — отвечающая $\overline{x}$ система равновесных цен. Допустим, что найдутся нечеткая коалиция $\tau \in T_{\mathcal{E}}$ и распределения $z_i \in X$ ($i \in \operatorname{supp} \tau$) и $x^i \in X_i$ ($i \in N$) такие, что $\tau_i z_i = (\tau_1 x^1, \dots, \tau_n x^n)$ и $u_i(z_i) > u_i(\overline{x})$ для всех $i \in \operatorname{supp} \tau$. Поскольку $\operatorname{supp} \tau \in T_{\mathcal{E}}$, выполняются неравенства $\overline{p}^{ji} \geqslant 0$ для всех $i \in \operatorname{supp} \tau$, $j \notin \operatorname{supp} \tau$. Полагая $\widetilde{z} = (\tau_1 x^1, \dots, \tau_n x^n)$, имеем

$$\overline{p}^0 \cdot \sum_{\operatorname{supp} \tau} \widetilde{z}^i = \sum_N \overline{p}^i \cdot \widetilde{z} \geqslant \sum_{\operatorname{supp} \tau} \overline{p}^i \cdot \widetilde{z}. \tag{3.3}$$

Так как $\overline{x} \in W_I(\mathcal{E})$ и $u_i(\widetilde{z}/\tau_i) > (\overline{x})$ для всех $i \in \operatorname{supp} \tau$, справедливы соотношения

$$\overline{p}^i \cdot \widetilde{z} > \tau_i \overline{p}^0 \cdot w^i, \quad i \in \operatorname{supp} \tau.$$

Суммируя эти неравенства и используя (3.3), находим

$$\overline{p}^0 \cdot \sum_{\operatorname{supp} \tau} \widetilde{z}^i > \overline{p}^0 \cdot \sum_{\operatorname{supp} \tau} \tau_i w^i.$$

Но полученное неравенство противоречит соотношению

$$\sum_{\operatorname{supp} \tau} \widetilde{z}_i = \sum_N \tau_i w^i,$$

требующемуся для доминирования $\overline{x}$ в соответствии с условием (F3). Итак, $\overline{x} \in C_{IF}(\mathcal{E})$, что и требовалось установить.

Один из главных результатов этого параграфа состоит в том, что при некотором усилении требований, предъявляемых к компонентам $\mathcal{E}$, справедливо и обратное утверждение: всякое распределение $\overline{x} \in X[N]$, не блокируемое никакой нечеткой коалицией из $T_{\mathcal{E}}$, является информационным равновесием модели $\mathcal{E}$.

Теорема 3.2. *Если модель $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям* (A1) *и* (A2) *из теоремы* 3.1, *то справедливо равенство* $W_I(\mathcal{E}) = C_{IF}(\mathcal{E})$.

Для доказательства теоремы 3.2 нам потребуется одна техническая лемма. Положим

$$D = \{(i,j) \mid i,j \in N,\ i \neq j\}, \quad D_0 = D \cup \{0\}$$

и определим линейные операторы $\Gamma_i \colon (\mathbb{R}^l)^N \to (\mathbb{R}^l)^{D_0}$, действующие по формулам

$$\Gamma_i(x^1, \dots, x^n)^d = \begin{cases} x^i & d = 0, \\ -x^i, & d = (j,i), \\ x^j, & d = (i,j), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Далее, для каждого $i \in N$ через $\widetilde{w}^i$ обозначим вектор из $(\mathbb{R}^l)^{D_0}$ с компонентами

$$(\widetilde{w}^i)^d = \begin{cases} w^i, & d = 0, \\ 0, & d \in D. \end{cases}$$

Лемма 3.1. *Пусть* $\overline{x} \in X$ *и*

$$\mathcal{M}_i(\overline{x}) = \{\Gamma_i(x) \mid u_i(x) > u_i(\overline{x})\} - \{\widetilde{w}^i\}, \quad i \in N,$$

$$\mathcal{M}(\overline{x}) = \Big\{\sum_N \tau_i z_{(i)} \mid \tau \in T_{\mathcal{E}},\ z_{(i)} \in \mathcal{M}_i(\overline{x}), \quad i \in N\Big\}.$$

Если $\overline{x} \in C_{IF}(\mathcal{E})$, *то* $0 \notin \mathcal{M}(\overline{x})$.

Доказательство. Допустим, что $0 \in \mathcal{M}(\overline{x})$. Согласно определению этого множества найдутся $\tau \in T_{\mathcal{E}}$, $z_{(i)} \in \Gamma_i(X)$ такие, что

$$\sum_N \tau_i z_{(i)} = \sum_N \tau_i \widetilde{w}^i, \tag{3.4}$$

причем $u_i(z_i) > u_i(\overline{x})$ для всех $i \in \operatorname{supp} \tau$ (здесь z_i определяется из равенств $z_{(i)} = \Gamma_i(z_i)$). Из соотношения (3.4) получаем

$$\sum_N \tau_i z_i^i = \sum_N \tau_i w^i,$$

$$\tau_i z_i^i = \tau_j z_j^i, \quad i,j \in \operatorname{supp} \tau.$$

Таким образом, полагая $x^i = z_i^i$, находим

$$\tau_i z_i = (\tau_1 x^1, \dots, \tau_n x^n), \quad i \in \operatorname{supp} \tau,$$

$$\sum_N \tau_i x^i = \sum_N \tau_i w^i,$$

что наряду с неравенствами $u_i(z_i) > u_i(\overline{x})$, $i \in \operatorname{supp} \tau$, и означает, что коалиция $\tau \in T_{\mathcal{E}}$ блокирует распределение $\overline{x} \in X[N]$. Но это противоречит предположению $\overline{x} \in C_{IF}(\mathcal{E})$. Итак, $0 \notin \mathcal{M}(\overline{x})$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3.2. На основании предложения 3.1 достаточно установить вложение $C_{IF}(\mathcal{E}) \subseteq W_I(\mathcal{E})$. Пусть $\overline{x} \in C_{IF}(\mathcal{E})$. Рассмотрим множество $\mathcal{M}(\overline{x})$, фигурирующее в формулировке леммы 3.1. Ясно, что в условиях теоремы 3.2 это множество непустое и выпуклое. Далее, поскольку по лемме 3.1 $0 \notin \mathcal{M}(\overline{x})$, существует гиперплоскость, разделяющая 0 и $\mathcal{M}(\overline{x})$. Пусть $\widetilde{p} = (\widetilde{p}^d)_{D_0}$ — линейный функционал, определяющий эту гиперплоскость. Положим $\overline{p} = (\overline{p}^0, \overline{p}^1, \dots, \overline{p}^n)$, где векторы $\overline{p}^0$ и $\overline{p}^i$ $(i \in N)$ определяются в соответствии с формулами

$$\overline{p}^0 = \widetilde{p}^0,$$

$$\overline{p}^{ij} = \begin{cases} \widetilde{p}^{(i,j)}, & i \neq j, \\ \widetilde{p}^0 - \sum\limits_{N\setminus\{i\}} \widetilde{p}^{(s,j)}, & i = j. \end{cases}$$

Пусть для определенности $\widetilde{p} \cdot \widetilde{z} \geqslant 0$ для всех $\widetilde{z} \in \mathcal{M}(\overline{x})$. Тогда

$$\overline{p}^i \cdot x \geqslant \overline{p}^0 \cdot w^i \tag{3.5}$$

для всех $x \in X$, $i \in N$ таких, что $u_i(x) > u_i(\overline{x})$. Учитывая монотонность u_i и неравенства (3.5), получаем $\overline{p}^i \cdot \overline{x} \geqslant \overline{p}^0 \cdot w^i$ $(i \in N)$. Следовательно, ввиду соотношений $\overline{x} \in X[N]$ и

$$\sum_N \overline{p}^{ij} = \overline{p}^0, \quad j \in N, \tag{3.6}$$

справедливы равенства

$$\overline{p}^i \cdot \overline{x} = \overline{p}^0 \cdot w^i, \quad i \in N. \tag{3.7}$$

Далее, так как u_i не убывает по x, верно неравенство $\overline{p}^i \geqslant 0$ для всех $i \in N$. Поскольку $\widetilde{p} \neq 0$, на основании (3.6) имеем $\overline{p}^0 \geqslant 0$, причем $\overline{p}^0 \neq 0$. Ввиду $\sum\limits_N w^i \gg 0$ найдется $i \in N$, для которого $\overline{p}^i \cdot x = \overline{p}^0 \cdot w^i > 0$. Значит, существуют $j \in N$, $k \in \{1, \dots, l\}$ такие, что $\overline{p}^{ij}_k > 0$, $\overline{x}^j_k > 0$. Допустим, что $\overline{p}^{ii}_r = 0$ для некоторого $r \in \{1, \dots, l\}$. Ввиду строгой монотонности функции u_i по x^i и ее непрерывности, найдутся положительные числа δ_1, δ_2, для которых вектор $\widetilde{x} \in X$ с компонентами

$$\widetilde{x}^m_s = \begin{cases} \overline{x}^i_r + \delta_1, & m = i,\ s = r, \\ \overline{x}^j_k - \delta_2, & m = j,\ s = k, \\ \overline{x}^m_s & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

удовлетворяет неравенствам $u_i(\widetilde{x}) > u_i(\overline{x})$ и $\overline{p}^i \cdot \widetilde{x} < \overline{p}^0 \cdot w^i$. Но это противоречит (3.5). Таким образом, вектор $\overline{p}^{ii}$ строго положителен, а значит, ввиду (3.6) строго положителен и вектор $\overline{p}^0$.

Пусть теперь $u_i(x) > u_i(\overline{x})$ для некоторых $i \in N$ и $x \in N$. Покажем, что $\overline{p} \cdot x > \overline{p}^0 \cdot w^i$. Отметим, что $\overline{p}^i \cdot x > 0$ в силу неравенств $\overline{p}^0 > 0$ и $w^i > 0$. Рассуждая так же, как при построении вектора $\widetilde{x}$, найдем $z \in X$, удовлетворяющий условиям $u_i(z) > u_i(\overline{x})$ и $\overline{p}^i \cdot z < \overline{p}^i \cdot x$. Ввиду соотношений (3.5) и (3.7) это возможно лишь при $\overline{p}^i \cdot x > \overline{p}^0 \cdot w^i$. Итак, пара $(\overline{p}, \overline{x})$ удовлетворяет условиям (i), (ii) определения 3.1, что и завершает доказательство теоремы 3.2.

3.2. Теорему 3.2 можно положить в основу нетривиальной формализации понятия «асимптотически пренебрежимо малого» участника экономики с внешними влияниями. С этой целью сформулируем определение реплики для экономических моделей рассматриваемого типа и приведем надлежащую модификацию стандартного понятия блокирования, обеспечивающую стягиваемость ядер реплик к множеству информационных равновесий.

Пусть $\mathcal{E} = \langle N, \{X_i, w^i, u_i\}_{i \in N} \rangle$ — произвольная модель обмена с неавтономными предпочтениями. Для фиксированного натурального $r \geqslant 1$ через $N_{(r)}$ обозначим r-кратную реплику участников модели $\mathcal{E}$:

$$N_{(r)} = \{(i, m) \mid i \in N,\ m = 1, \dots, r\}.$$

Для каждого элемента $(i, m) \in N_{(r)}$ положим

$$X_{im} = X_i, \quad w^{im} = w^i. \tag{3.8}$$

Далее, положим $X_{(r)} = \prod\limits_{N_{(r)}} X_{im}$ и для $(i, m) \in N_{(r)}$, $x = (x^{js})_{N_{(r)}} \in X_{(r)}$ введем обозначения

$$x^r_{im} = (x^{r,1}_{im}, \dots, x^{r,n}_{im}), \tag{3.9}$$

$$u^{(r)}_{im}(x) = u_i(x^r_{im}), \tag{3.10}$$

где

$$x^{r,j}_{im} = \begin{cases} x^{im}, & j = i, \\ \sum\limits_{s=1}^{r} x^{js}/r, & j \neq i. \end{cases} \tag{3.11}$$

Замечание 3.2. Как видно из (3.9)–(3.11), уровень полезности распределения $x = (x^{js})_{N_{(r)}}$ для участника $(i, m) \in N_{(r)}$ определяется объемом «собственного» потребления x^{im} и усредненными объемами потребления участников другого типа.

Определение 3.5. *Репликой объема r модели $\mathcal{E}$* называется экономика

$$\mathcal{E}_{(r)} = \langle N_{(r)}, \{X_{im}, w^{im}, u_{im}\}_{(i,m) \in N_{(r)}} \rangle,$$

компоненты которой определены по формулам (3.8)–(3.11).

Ключевую роль в приводимом ниже определении доминирования в $\mathcal{E}_{(r)}$ играет учет «статуса» участника $\mathcal{E}_{(r)}$, зависящего от структуры блокирующей коалиции, в которую он входит. Дадим формальное определение. Пусть $M \subseteq N_{(r)}$. Положим, как и в § 1, 2,

$$M_i = \{m \mid (i, m) \in M\}, \quad m_i = |M_i|$$

и для $(i,m) \in M$, $x = (x^{js})_{N_{(r)}} \in X_{(r)}$ через $x_{im}^M = (x_{im}^{M,1}, \dots, x_{im}^{M,n})$ обозначим распределение из X, компоненты которого определяются по формуле

$$x_{im}^{M,j} = \begin{cases} x^{im}, & j = i, \\ \sum\limits_{M_j} x^{js}/m_i, & j \neq i. \end{cases}$$

Далее, через u_{im}^M обозначим вещественнозначную функцию, определенную на $X_{(r)}$ формулой

$$u_{im}^M(x) = u_i(x_{im}^M), \quad x \in X_{(r)}. \tag{3.12}$$

Определение 3.6. *Распределение $x \in X_{(r)}$ I-доминирует $\overline{x} \in X_{(r)}$*, если найдется коалиция $M \subseteq N_{(r)}$ такая, что

$$u_{im}^M(x) > u_{im}^{(r)}(\overline{x}), \quad (i,m) \in M, \tag{3.13}$$

$$\sum_M x^{im} = \sum_M w^{im}, \quad x^{js} = 0, \quad (j,s) \notin M. \tag{3.14}$$

Отметим, что введенное отношение I-доминирования предполагает изменение индивидуальных предпочтений в зависимости от участия в той или иной блокирующей коалиции из $N_{(r)}$. Действительно, уровень полезности, достижимый участником коалиции M, определяется на основании (3.12) его собственной компонентой в новом распределении x и усредненными (по числу однотипных ему партнеров по коалиции M) значениями компонент других участников. В частности, если функция u_i неубывающая, то при прочих равных условиях увеличение числа участников типа i уменьшает значение величины $u_{im}^M(x)$.

Перефразируя определение 3.6, будем говорить что коалиция $M \subseteq N_{(r)}$ I-доминирует (I-блокирует) распределение $\overline{x} \in X_{(r)}$, если найдется распределение $x \in X_{(r)}$ такое, что M и x удовлетворяют условиям (3.13), (3.14).

Определение 3.7. Множество всех сбалансированных распределений $x \in X[N_{(r)}]$, не I-блокируемых никакой коалицией $M \subseteq N_{(r)}$, будем обозначать $C_I(\mathcal{E}_{(r)})$ и называть *I-ядром реплики $\mathcal{E}_{(r)}$*.

Покажем, что с возрастанием объема реплик введенный механизм I-блокирования «отбраковывает» все неравновесные распределения модели $\mathcal{E}$. Тем самым будет установлена справедливость гипотезы Эджворта для рассматриваемых моделей с неавтономными предпочтениями: множество неблокируемых распределений $\mathcal{E}_{(r)}$ асимптотически эквивалентно $W_I(\mathcal{E})$.

Переходя к точным формулировкам, приведем необходимые обозначения. Для числа $r \geqslant 1$ и распределения $x \in X$ через $x_{(r)}$ будем обозначать r-реплику x, т. е. $x_{(r)} = (x, \dots, x) \in X_{(r)}$. Далее, положим

$$C_r(\mathcal{E}) = \{x \in X[N] \mid x_{(r)} \in C_I(\mathcal{E}_{(r)})\}.$$

Определение 3.8. Распределение $\overline{x} \in X[N]$ называется *I-равновесием Эджворта модели $\mathcal{E}$*, если $\overline{x} \in C_r(\mathcal{E})$ для всех $r \geqslant 1$.

- Совокупность I-равновесий Эджворта модели экономического обмена с неавтономными предпочтениями обозначим $C_{IE} = C_{IE}(\mathcal{E})$.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям теоремы* 3.1. *Тогда имеет место равенство*

$$W_I(\mathcal{E}) = C_{IE}(\mathcal{E}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{x}$ — произвольный элемент из $W_I(\mathcal{E})$, а $\overline{p}^0$, $\overline{p}^i$ — отвечающие ему равновесные цены. Зафиксируем $r \geqslant 1$ и покажем, что $\overline{x}_{(r)} \in C_I(\mathcal{E}_{(r)})$. Заметим, что $\overline{x}_{(r)}$ принадлежит $W_I(\mathcal{E}_{(r)})$, причем в качестве соответствующих равновесных цен можно взять векторы $\overline{p}^{(i,m)} \in (\mathbb{R}^l)^{N(r)}$, определяемые по формулам

$$\overline{p}^{(i,m)(j,s)} = \begin{cases} \overline{p}^{ii}, & i = j,\ m = s, \\ 0, & i = j,\ m \neq s, \\ (1/r)\overline{p}^{ij}, & i \neq j. \end{cases} \tag{3.15}$$

Допустим, что некоторая коалиция $M \subseteq N_{(r)}$ I-блокирует распределение $\overline{x}_{(r)}$. В этом случае найдется распределение $x \in X_{(r)}$ такое, что

$$\sum_M x^{im} = \sum_M w^{im}, \quad x^{js} = 0, \qquad (j,s) \notin M,$$

и при этом $u^M_{im}(x) > u^{(r)}_{im}(\overline{x}_{(r)})$ при всех $(i,m) \in M$. Непосредственно из определения функций $u^{(r)}_{im}$ и u^M_{im} вытекают равенства

$$u^M_{im}(x) = u^{(r)}_{im}(x^{(M)}_{im}), \quad (i,m) \in M,$$

где

$$(x^{(M)}_{im})^{js} = \begin{cases} x^{js}, & j = i, \\ rx^{js}/m_i, & j \neq i. \end{cases}$$

Ввиду равновесности $\overline{x}_{(r)}$ и строгой монотонности $u^{(r)}_{im}$ по x^{im} имеем

$$\overline{p}^{(i,m)} \cdot x^{(M)}_{im} > \overline{p}^0 \cdot w^{im}, \quad (i,m) \in M.$$

Суммируя эти группы неравенств по $m \in M_i$ и используя формулы (3.15), получаем

$$\overline{p}^i \cdot (z^1, \dots, z^n) > m_i \overline{p}^0 \cdot w^i \quad (m_i \neq 0), \tag{3.16}$$

где $z^j = \sum_{M_j} x^{jm}$ $(m_j \neq 0)$, $z^j = 0$ $(m_j = 0)$. Наконец, учитывая неотрицательность векторов $\overline{p}^i$ и равенство $\sum_N \overline{p}^{ij} = \overline{p}^0$ $(j \in N)$, из (3.16) получаем

$$\overline{p}^0 \cdot \sum_N z^i > \overline{p}^0 \cdot \sum_M w^{im},$$

что ввиду равенства $\sum_N z^i = \sum_M x^{im}$ противоречит исходному предположению $\sum_M x^{im} = \sum_M w^{im}$.

Итак, $W_I(\mathcal{E}) \subseteq C_{IE}(\mathcal{E})$. Для проверки обратного вложения на основании теоремы 3.2 достаточно убедиться, что общая часть множеств $C_r(\mathcal{E})$

содержится в нечетком ядре модели $\mathcal{E}$. Нетривиальной частью проверки этого вложения является установление следующего факта: в условиях теоремы 3.3 из блокируемости распределения $\overline{x} \in X[N]$ нечеткой коалицией τ вытекает блокируемость $\overline{x}$ некоторой рациональнозначной коалицией τ^0. Действительно, пусть для $\tau \in T_\varepsilon$ существуют $z_i \in X$ ($i \in \operatorname{supp} \tau$) и $x^i \in X_i$ ($i \in N$) такие, что $u_i(z_i) > u_i(\overline{x})$ ($i \in \operatorname{supp} \tau$), и при этом выполняются соотношения

$$\tau_i z_i = (\tau_1 x^1, \ldots, \tau_n x^n), \quad i \in \operatorname{supp} \tau, \tag{3.17}$$

$$\sum_N \tau_i x^i = \sum_N \tau_i w^i. \tag{3.18}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $\tau_i < 1$ для всех $i \in N$. Положим $\tau_j^0 = 0$ ($j \notin \operatorname{supp} \tau$) и, используя непрерывность функций u_i, выберем рациональные числа $\tau_i^0 > \tau_i$ ($i \in \operatorname{supp} \tau$) таким образом, чтобы они не превосходили единицы и при этом выполнялись неравенства

$$u_i(\widetilde{z}_i) > u_i(\overline{x}), \quad i \in \operatorname{supp} \tau, \tag{3.19}$$

где

$$\widetilde{z}^i = \frac{\tau_i}{\tau_i^0} z_i + \frac{\tau_i^0 - \tau_i}{\tau_i^0} w_i^\tau,$$

$$w_i^\tau = \frac{1}{\tau_i^0 - \tau_i}[(\tau_1^0 - \tau_1)w^1, \ldots, (\tau_n^0 - \tau_n)w^n].$$

Положим $x^{i0} = \frac{\tau_i}{\tau_i^0} x^i + \frac{\tau_i^0 - \tau_i}{\tau_i^0} w^i$ ($i \in \operatorname{supp} \tau$). Непосредственно из определения векторов $\widetilde{z}_i$ и соотношений (3.17), (3.18) вытекают равенства

$$\tau_i^0 \widetilde{z}_i = (\tau_1^0 x^{10}, \ldots, \tau_n^0 x^{n0}), \quad i \in \operatorname{supp} \tau, \tag{3.20}$$

$$\sum_N \tau_i^0 x^{i0} = \sum_N \tau_i^0 w^i. \tag{3.21}$$

Ввиду выпуклости X_i имеем $x^{i0} \in X_i$ для всех $i \in N$. Поэтому на основании (3.19)–(3.21) получаем требуемое утверждение: рациональнозначная коалиция τ^0 блокирует распределение $\overline{x}$.

Заключительные аргументы, необходимые для установления вложения

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} C_r(\mathcal{E}) \subseteq C_{IF}(\mathcal{E}),$$

стандартны (см. § 1, 2) и могут быть опущены.

Нетрудно построить простую модель $\mathcal{E}$, которая удовлетворяет всем предположениям теоремы 3.3, но не обладает тем свойством, что $W_I(\mathcal{E}) = \bigcap_{r=1}^{\infty} \widetilde{C}_r(\mathcal{E})$, где

$$\widetilde{C}_r(\mathcal{E}) = \{x \in X[N] \mid x_{(r)} \in C(\mathcal{E}_{(r)})\};$$

здесь $C(\mathcal{E}_{(r)})$ — стандартное ядро $\mathcal{E}_{(r)}$, понимаемое в соответствии с определением 3.3.

Пример: $\mathcal{E} = \langle\{1,2\},\{X_i,w^i,u_i\}_1^2\rangle$, где $X_1 = X_2 = \mathbb{R}_+$, $w^1 = 0.6$, $w^2 = 0.4$, $u_1(x^1,x^2) = x^1 \cdot x^2$, $u_2(x^1,x^2) = x^2$; здесь $W_I(\mathcal{E}) = \{(0.3),(0.7)\}$ при равновесных ценах $\bar{p}^1 = (1,3/7)$, $\bar{p}^2 = (0,4/7)$. В то же время, как нетрудно проверить, $(0.5,0.5) \in C_r(\mathcal{E})$ для всех $r \geqslant 1$.

Отметим, что некоторые предположения в теоремах 3.1–3.3 могут быть ослаблены (см., например, [24, 27], а также замечание 2.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Edgeworth F. Y.** Mathematical psychics. London: Paul Kegan, 1881.
2. **Гильденбранд В.** Ядро и равновесие в большой экономике. М.: Наука, 1986.
3. **Debreu G., Scarf H.** A limit theorem on the core of an economy // Internat. Econom. Rev. 1963. V. 4. P. 235–246.
4. **Aliprantis C. D., Brown D. J., Burkinshaw O.** Edgeworth equilibria in production economies // J. Econom. Theory. 1987. V. 43. P. 252–291.
5. **Florenzano M.** Edgeworth equilibria, fuzzy core, and equilibria of a production economy without ordered preferences // J. Math. Anal. Appl. 1990. V. 153, N 1. P. 18–36.
6. **Макаров В. Л., Васильев В. А., Козырев А. Н., Маракулин В. М.** О некоторых проблемах и результатах современной математической экономики // Оптимизация. 1982. Вып. 30. С. 5–86.
7. **Васильев В. А., Сидоров А. В.** Существование согласованных состояний при неограниченности гибких цен // Оптимизация. 1991. Вып. 49. С. 5–22.
8. **Васильев В. А., Маракулин В. М.** Неклассические рынки, механизмы группового выбора и смежные вопросы // Оптимизация. 1990. Вып. 47. С. 5–109.
9. **Васильев В. А.** О согласованных распределениях в экономических моделях с двумя видами цен // Оптимизация. 1988. Вып. 42. С. 23–41.
10. **Vasil'ev V. A.** Ratoning schemes and markets // Optimal decisions in markets and planned economies / Eds. R. E. Quandt, D. Triska. Boulder; San Francisko; London: Westview Press, 1990. P. 283–295.
11. **Vasil'ev V. A.** On the core equivalence theorem in mixed economy // European Meeting of the Econometric Society: Abstracts. Brussels: ULB Press, 1992. P. 80.
12. **Экланд И.** Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983.
13. **Васильев В. А.** Модели экономического обмена и кооперативные игры. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1984.
14. **Foley D.** Lindahl's solution and the core of an economy with public goods // Econometrica. 1970. V. 38. P. 66–72.
15. **Milleron J.** Theory of value with public goods: a survey article // J. Econom. Theory. 1972. V. 5. P. 419–477.
16. **Muench T.** The core and the Lindahl equilibrium of an economy with a public good: An example // J. Econom. Theory. 1972. V. 4. P. 241–255.
17. **Roberts D.** The Lindahl solution for economies with public goods // J. Public Econom. 1974. V. 3. P. 23–42.
18. **Ruys P. H. M.** Public goods and decentralization. Tilburg: Tilburg Univ. Press, 1974.
19. **Champsaur P.** Symmetry and continuity properties of Lindahl equilibria // J. Math. Econom. 1976. V. 3. P. 19–36.
20. **Wooders M. H.** Equilibria, the core, and jurisdiction structures in economies with local public goods // J. Econom. Theory. 1978. V. 18. P. 328–348.
21. **Маленво Э.** Лекции по микроэкономическому анализу. М.: Наука, 1985.
22. **McColell A., Silvestre J.** Cost share equilibria: A Lindahlian approach // J. Econom. Theory. 1989. V. 47. P. 239–256.
23. **Weber S., Wiesmeth H.** The equivalence of the core and cost share equilibria in an economy with a public good // J. Econom. Theory. 1991. V. 54. P. 180–197.
24. **Васильев В. А.** Асимптотика ядер в моделях линдаловского типа // Оптимизация. 1987. Вып. 41. С. 15–35.
25. **Makarov V. L., Vasil'ev V. A. et al.** Equilibria, rationing, and stability: A summary of proceedings of second Novosibirsk school of mathematical economics // Matecon. 1989. V. 25, N 4. P. 4–95.

26. **Lindahl E.** Just taxation: a positive solution // Classics in the theory of public finance / Eds. R. A. Musgrave, A. T. Peacock. London: McMillan, 1967.
27. **Васильев В. А.** Существование информационного равновесия в экономике чистого обмена // Оптимизация. 1983. Вып. 32. С. 1–14.
28. **Buchanan J.** An economic theory of clubs // Econometrica. 1965. V. 32. P. 1–14.
29. **Bergstrom T. E., Goodman R. P.** Private demands for public goods // Amer. Econom. Rev. 1973. V. 63. P. 280–296.
30. **Oakland W. H.** Congestion, public goods, and welfare // J. Public Econom. 1972. V. 1. P. 339–357.
31. **Brueckner J. K.** Congested public goods: the case of fire protection // J. Public Econom. 1981. V. 15. P. 45–58.
32. **Vasil'ev V. A., Weber S., Wiesmeth H.** Core equivalence with congested public goods // Econom. Theory. 1994. To appear.
33. **Макаров В. Л.** Экономическое равновесие: существование и экстремальное свойство // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 19. С. 23–59.
34. **Laffont J. J.** Effets externes et théorie économique. Paris: Éditions du CNRS, 1977.
35. **Васильев В. А., Макаров В. Л.** Информационное равновесие и ядро в обобщенных моделях обмена // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 3. С. 549–553.
36. **Васильев В. А.** Об условиях конечности информационных равновесий // Оптимизация. 1987. Вып. 40. С. 89–105.
37. **Florenzano M.** L' équilibre économique général transitif et intransitif: problèmes d'existence. Paris: Éditions du CNRS, 1981.