МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧИ СТАНДАРТИЗАЦИИ *)

Е. Н. Гончаров

Двухуровневая задача стандартизации, называемая также двухуровневой задачей размещения, и ее частные случаи привлекали внимание многих исследователей. Так, в [1] рассмотрена частично-целочисленная 0-1 двухуровневая задача размещения и описан метод ее решения. Такая же постановка двухуровневой задачи размещения изучалась в [2, с. 189–195], где для построения оценок метода ветвей и границ был применен принцип динамической декомпозиции. В [3] для частного случая многоуровневой частично-целочисленной 0-1 задачи размещения (все потребители и места размещения всех уровней находятся в вершинах дерева) построен полиномиальный алгоритм решения. В [4] рассматривалась частично-целочисленная 0-1 двухуровневая задача размещения с дополнительными ограничениями, а в [5] — подобная многоуровневая задача. Для решения этих задач в указанных работах были предложены метод ветвей и границ и алгоритмы вычисления оценок.

Полная 0-1 целочисленная постановка двухуровневой задачи стандартизации исследована в [6, с. 258–267] как частный случай более общей задачи минимизации полинома от булевых переменных [6, с. 222–246; 7]. В [6, с. 268–287] даны также постановки и методы решения некоторых аналогичных задач для случая, когда множество допустимых комплектов задано неявно. В [8] приведены различные математические формулировки 0-1 целочисленной двухуровневой задачи стандартизации с дополнительными ограничениями и исследовано качество полученной нижней оценки.

§ 1. Постановка задачи

Опишем математическую модель двухуровневой задачи стандартизации [6] в случае, когда каждый комплект допустимого в принципе состава неоднородных модулей задан жестко или, иначе говоря, жестко задано правило, по которому из конечного набора изделий могут быть составлены допустимые по составу комплекты.

Введем обозначения:

$X = \{1, \dots, n\}$ — совокупность видов работ, подлежащих обязательному выполнению (совокупность видов спроса);

φ_j, $j \in X$, — объем j-го вида спроса или количество работ каждого вида, подлежащих выполнению;

*) Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-012-489).

$U = \{1, \ldots, m\}$ — множество изделий, каждое из которых, в принципе, может участвовать в формировании комплектов, которые, в свою очередь, способны выполнять работы из множества X;

$W = \{1, \ldots, L\}$ — множество вышеуказанных комплектов, где L — общее число всех возможных допустимых комплектов.

Состав l-го комплекта задается набором (q_{il}), $i \in U$, где q_{il} — число изделий i-го типа в l-м комплекте, $q_{il} \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Если $q_{il} = 0$, то изделие i-го типа не входит в состав l-го комплекта; если $q_{il} = k$, $k > 0$, то изделие i-го типа входит в состав l-го комплекта в количестве k штук.

Пусть $X_l \subseteq X$, $l \in W$, — множество видов работ, которые могут выполняться l-м комплектом и $W_j \subseteq W$, $j \in X$, — множество типов комплектов, которые можно использовать для выполнения единичной работы j-го вида. Таким образом, $W_j = \{\, l \in W \mid j \in X_l\}$. Построение множеств X_l и W_j проводится на основе оценки эффективности выполнения работы j-го типа при использовании комплекта l-го типа.

Нам понадобятся также следующие обозначения:

$c_i > 0$, $i \in U$, — стоимость производства единичного изделия i-го типа;

g_i^0, $i \in U$, — величина начальных затрат, связанных с разработкой и организацией начального цикла производства изделия i-го типа (штраф за ввод изделия типа i в систему);

g_{lj}^*, $l \in W$, $j \in X$, — затраты на эксплуатацию комплекта типа l при выполнении работы типа j;

$K_i = \{l \in W \mid q_{il} > 0\}$, $i \in U$, — множество типов комплектов, содержащих i-й модуль;

$I_l = \{i \mid q_{il} > 0\}$ — множество типов изделий, входящих в состав комплекта l.

Введем некоторые переменные.

Переменная выбора $y_i \in \{0, 1\}$, $i \in U$, принимает значение 1, если i-е изделие используется хотя бы в одном комплекте $l \in W$, и 0 в противном случае.

Переменная выбора $x_l \in \{0, 1\}$, $l \in W$, принимает значение 1, если l-й комплект используется для выполнения хотя бы одной работы из множества X, и 0 в противном случае.

Переменная назначения $x_{lj} \in \{0, 1\}$, $l \in W$, $j \in X$, принимает значение 1, если l-й комплект используется (т. е. выбран) для выполнения единичной работы j-го типа, и 0 в противном случае.

При задании системы ограничений для нашей модели необходимо учитывать следующие условия на решение:

— все работы из множества X должны быть выполнены, причем единственным комплектом, т. е.

$$\sum_{l \in W_j} x_{lj} = 1, \quad j \in X; \tag{1.1}$$

— невозможно назначить какой-либо комплект на выполнение любой из заданных работ, если он не используется (не выбран) для выполнения работ, т. е.

$$x_l \geqslant x_{lj}, \quad j \in X,\ l \in W_j; \tag{1.2}$$

— комплект не может быть использован для выполнения заданных работ, если хотя бы одно изделие, входящее в него, не используется (не выбрано) для формирования комплектов, т. е.

$$y_i \geqslant x_l \operatorname{sign}(q_{il}), \quad i \in U,\ l \in W; \tag{1.3}$$

— все переменные булевы, т. е.

$$x_{lj}, x_l, y_i \in \{0, 1\}. \tag{1.4}$$

Целевая функция задачи должна отражать тот факт, что суммарные затраты на создание и функционирование всей системы минимальны.

Пусть g_{lj} ($l \in W$, $j \in X$) — затраты, связанные с производством, комплектованием и эксплуатацией l-го комплекта для выполнения j-й работы,

$$g_{lj} = \varphi_j\Big(\sum_{i \in U} c_i q_{il} + g^*_{lj}\Big).$$

Тогда целевая функция задачи выбора оптимальной системы модулей и комплектов записывается в виде

$$\sum_{i \in U} g^0_i y_i + \sum_{j \in X} \sum_{l \in W} g_{lj} x_{lj} \longrightarrow \min_{(y_i)(x_{lj})}. \tag{1.5}$$

Задача (1.1)–(1.5) называется двухуровневой задачей стандартизации.

§ 2. Метод решения двухуровневой задачи стандартизации

Отметим, что двухуровневая задача стандартизации (1.1)–(1.5) принадлежит к классу труднорешаемых задач [9, с. 416], и потому нет оснований надеяться найти эффективный алгоритм ее решения. В данной работе для решения задачи (1.1)–(1.5) предлагается применить метод ветвей и границ [6]. При этом используется схема одновременного ветвления по частичным решениям, которые соответствуют выбору определенных значений переменных $x_1, \ldots, x_k$ ($k \leqslant m$).

Нетрудно заметить, что если получены значения $x_1, \ldots, x_m$, соответствующие оптимальному решению задачи, то по ним нетрудно восстановить значения переменных $\widetilde{x}_{lj}$, также соответствующие оптимальному решению исходной задачи. Для получения переменных $\widetilde{x}_{lj}$, отвечающих оптимальному решению, достаточно выбрать для каждого типа работ j допустимый комплект, которому соответствуют минимальные затраты, т. е.

$$\widetilde{x}_{lj} = \begin{cases} 1, & \text{если } g_{lj} = \min\limits_{k \in W}\{g_{kl} \mid i(q_{ik} > 0 \Rightarrow x_i = 1)\}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что заданные таким образом значения переменных $\widetilde{x}_{lj}$ соответствуют оптимальному решению задачи.

Очередное ветвление проводится в вершине, соответствующей частичному решению, имеющему на данном этапе наименьшую нижнюю оценку. На каждом шаге алгоритма мы отсекаем частичные решения, для которых нижняя оценка не меньше рекорда, сравниваем значение рекорда с наилучшей нижней оценкой с учетом заданной погрешности и либо принимаем данный рекорд в качестве приближенного решения с этой погрешностью, либо переходим на следующий шаг, продолжая ветвление.

Таким образом, алгоритм позволяет находить решение с любой наперед заданной точностью.

Большое значение для эффективности работы метода ветвей и границ имеет успешное вычисление нижней и верхней оценок (см. алгоритмы в пп. 2.1, 2.2).

2.1. Алгоритм вычисления нижней оценки. Наряду с задачей (1.1)–(1.5) рассмотрим задачу, в которой вместо условий (1.2) и (1.3) поставлено ограничение

$$\sum_{l\in K_i\cap W_j} x_{lj} \leqslant y_i, \quad i \in U,\ j \in X. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Задачи* (1.1)–(1.5) *и* (1.1), (1.4), (1.5), (2.1) *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть выполнена система ограничений (1.1)–(1.4). Покажем, что тогда выполнена система ограничений (1.1), (1.4), (2.1).

Для произвольного $i \in U$, учитывая (1.4), имеем либо $y_i = 0$, либо $y_i = 1$. Если $y_i = 0$, то $x_l = 0$ для всех $l \in K_i \cap W_j$ в силу (1.3) и $x_{lj} = 0$ $(j \in X, l \in K_i \cap W_j)$ в силу (1.2). Поэтому справедливо условие (2.1) и тем самым вся система ограничений (1.1), (1.4), (2.1). Если $y_i = 1$, то можно считать $l \in K_i$ (в противном случае справедливость (1.1), (1.4), (2.1) очевидна). Если существует $s \in I_l$ такой, что $y_s = 0$, то $x_l = 0$ в силу (1.3), $x_{lj} = 0$ $(j \in X)$ в силу (1.2) и система (1.1), (1.4), (2.1) выполняется. Наконец, если $y_s = 1$ для всех $s \in I_l$ и $x_l = 1$, то согласно (2.1)

$$\sum_{l\in K_i\cap W_j} x_{lj} = 1, \quad j \in X,$$

и система (1.1), (1.4), (2.1) выполняется. Таким образом, мы показали, что во всех возможных случаях система (1.1), (1.4), (2.1) является следствием задачи (1.1)–(1.5).

Предположим теперь, что для произвольных i, l, j имеют место ограничения (1.1), (1.4), (2.1). Положим

$$x_l = \prod_{s\in I_l} y_s, \quad l \in W,$$

и покажем, что в этом случае выполняются (1.1)–(1.4). Пусть $j \in X$, $l \in W_j$ (если $l \notin W_j$, то x_{lj} не участвует в обеих системах ограничений) и $x_{lj} = 0$. Тогда верно (1.2). Если $y_i = 1$, то ввиду (1.4) справедливо условие (1.3). Пусть $y_i = 0$. Тогда $x_l = 0$ для всех $l \in K_i \cap W_j$ в силу (1.2), и тем самым ограничение (1.3), а вместе с ним и вся система (1.1)–(1.4) выполняются. Пусть $x_{lj} = 1$. Тогда для всех $i \in I_l$, учитывая (2.1), имеем $y_i = 1$. Следовательно, $x_l = 1$ в силу (1.2), поэтому (1.2) выполнено. Справедливость (1.3) в данном случае очевидна. Итак, мы показали, что система (1.1)–(1.4) является следствием системы (1.1), (1.4), (2.1). Лемма 2.1 доказана.

В качестве нижней оценки функционала из задачи (1.1)–(1.5) предлагается взять значение целевой функции задачи, двойственной к задаче

(1.1)–(1.3), (1.5). Двойственную задачу можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \longrightarrow \max_{j\in X}; \tag{2.2}$$

$$v_j - \sum_{i|l\in K_i\cap W_j} w_{ij} \leqslant g_{lj}, \quad j\in X, l\in W_j; \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij} \leqslant g_i^0, \quad i\in U; \tag{2.4}$$

$$w_{ij} \geqslant 0, \quad i\in U, j\in X. \tag{2.5}$$

По аналогии с одноуровневой задачей стандартизации [10] введем понятие тупикового решения задачи (2.2)–(2.5). Для $U' \subset U$ определим — множество допустимых решений

$$\mathfrak{T}(U') = \left\{ w \mid \sum_{j\in X} w_{ij} \leqslant g_i^0 \ (i\in U'), w_{ij}\geqslant 0, i\in U, j\in X \right\},$$

— множество «насыщенных» строк матрицы g_{lj}

$$W^0 = \left\{ l\in W \mid \sum_{j\in X} w_{ij} - g_i^0 = 0 \ \forall i\in I_l \right\},$$

— множество минимальных элементов j-го столбца матрицы g_{lj}

$$W_j' = \left\{ l\in W_j \mid g_{lj} + \sum_{i\in I_l} w_{ij} = \min_{s\in W_j} \left\{ g_{sj} + \sum_{i\in I_s} w_{ij} \right\} \right\}, \quad j\in X,$$

а также множество

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(U') = \{ w\in \mathfrak{T}(U') \mid & \text{(a)} \ \ (\forall j)\ W_j' \cap W^0 \neq \varnothing, \\ & \text{(б)} \ \ (\forall l\in W_j' \& \forall i\in I_l) i\in U' \Rightarrow w_{ij} = 0\}. \end{aligned}$$

Любой элемент w множества $\mathcal{T}(U')$ называется *U'-тупиковым решением задачи* (2.2)–(2.5).

Пусть на некоторой итерации метода ветвей и границ получено частичное решение $U^k = (y_1,\dots,y_k)$, $k < m$. Обозначим $U_+^k = \{y_i \mid y_i \in U^k, y_i = 1\}$. Тогда двойственная задача (2.2)–(2.5) примет вид

$$\sum_{i\in U^k} g_i^0 y_i + \sum_{j\in X} \min\left\{ \min_{l\in W_j | I_l\subseteq U_+^k} g_{lj}, v_j \right\} \longrightarrow \max_{w_{ij}}; \tag{2.6}$$

$$v_j - \sum_{i\in U\setminus U^k | l\in K_i\cap W_j} w_{ij} \leqslant g_{lj}, \quad j\in X, l\in W_j; \tag{2.7}$$

$$\sum_{j\in X} w_{ij} \leqslant g_i^0, \quad i\in U; \tag{2.8}$$

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ТУПИКОВОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (2.6)–(2.9)

Определим множество допустимых в смысле частичного решения U^k комплектов:

$$\mathcal{W}(U^k) = \{l \in W \mid i \in I_l \Rightarrow i \in U_+^k \cup (U \setminus U^k)\}$$

и положим

$$w_{ij} = 0, \quad i \in U \setminus U^k,\ j \in X;$$
$$v_j = \min_{l \in W_j \cap \mathcal{W}(U^k)} g_{lj}, \quad j \in X.$$

Далее за конечное число шагов отыскиваем тупиковое решение задачи (2.6)–(2.9), руководствуясь на каждом шаге следующими правилами.

(а) Находим

— множество «насыщенных» изделий

$$U^0 = \left\{ i \in U \setminus U^k \mid g_i^0 - \sum_{j \in X} w_{ij} = 0 \right\},$$

— множество «насыщенных» комплектов, т. е. комплектов, каждое изделие которых является «насыщенным»,

$$W^0(U^k) = \left\{ l \in \mathcal{W}(U^k) \mid i \in I_l \Rightarrow i \in U^0 \right\},$$

— множество

$$W_j'(U^k) = \left\{ l \in W_j \cap \mathcal{W}(U^k) \mid g_{lj} + \sum_{i \in I_l} w_{ij} = v_j \right\}, \quad j \in X,$$

— столбец с минимальным количеством «насыщенных» комплектов

$$j_0 = \min\left\{ j \in X \mid |W_j'(U^k)| = \min_{t \mid W_j'(U^k) \cap W^0(U^k) = \varnothing} |W_t'(U^k)| \right\};$$

если такой столбец j_0 не найден, то работа алгоритма заканчивается выдачей решения $\Phi(U^k) = \sum_{j \in X} v_j$, в противном случае переходим к действию (б).

(б) Последовательно находим

$$\Psi = W_{j_0} \cap \mathcal{W}(U^k) \setminus W^0(U^k),$$
$$c = \min_{l \in \mathcal{W}(U^k) \setminus W_{j_0}'(U^k)} g_{lj_0} - v_{j_0},$$

$$\omega_i = \{l \in \mathcal{W}(U^k) \cap W_{j_0}'(U^k) \mid i \in I_l\}, \quad i \in \bigcup_{l \in W'{}_{j_0}(U^k)} I_l,$$

$$G_{\min} = \min_{l \in W_{j_0}'(U^k) \cap \mathcal{W}(U^k)} \left\{ \sum_{i \in I_l \setminus U^0} \left(g_i^0 - \sum_{j \in X} w_{ij} \right) / |\omega_i| \right\},$$

$$\Delta = \min\{c, G_{\min}\},$$
$$v_{j_0} := v_{j_0} + \Delta.$$

(в) Решаем задачу

$$\min_{l\in\Psi}\sum_{i\in I_l} z_i \longrightarrow \max;$$

$$\sum_{s\in\mathcal{U}} z_s \leqslant a_i, \quad i\in U\setminus U^k;$$

$$z_i \geqslant 0, \quad i\in\mathcal{U}; \qquad z_i = 0, \quad i\notin\mathcal{U};$$

где

$$\mathcal{U}=\bigcup_{l\in\Psi} I_l, \quad a_i = g_i^0 - \sum_{j\in X} w_{ij}, \quad i\in U\setminus U^k.$$

Для решения этой задачи предлагается следующий алгоритм.

($в_1$) Полагаем $z_i := 0$, $i\in\mathcal{U}$.

Для каждого комплекта l из множества Ψ проводим следующие действия:

($в_2$) Полагая $i\in I_l$, находим $b_i = \min\{a_i/|\omega_i|, \Delta - \sum_{s\in I_l} z_s\}$, $z_i := z_i + b_i$.

($в_3$) Если $\Delta - \sum\limits_{s\in I_l} z_s > 0$, то переходим к ($в_2$), взяв следующее значение i из списка I_l. Если $\Delta - \sum\limits_{s\in I_l} z_s = 0$, то берем следующий номер l из списка Ψ и продолжаем вычисления с ($в_2$); если же список Ψ исчерпан, то переходим к ($в_4$).

($в_4$) Конец.

Отметим, что трудоемкость данного алгоритма равна $O(|\mathcal{U}||\Psi|)$, что не превышает $O(mL)$.

Вернемся к описанию алгоритма решения задачи (2.6)–(2.9).

(г) Полагаем $w_{ij_0} := w_{ij_0} + z_i$, $\quad i\in\mathcal{U}$, и переходим к очередному шагу, начиная с пункта (а).

Оценим трудоемкость алгоритма. Каждый шаг алгоритма можно реализовать не более чем за $O(mL)$ действий, а верхняя оценка числа обращений к его вычислению равна $\sim Ln$. Таким образом, общая трудоемкость данного алгоритма составляет $O(mnL^2)$ действий.

2.2. Алгоритм вычисления верхней оценки. Пусть U^0— множество «насыщенных» изделий и W^0 — множество «насыщенных» комплектов, т. е. комплектов, каждое изделие которых является «насыщенным». Оба множества получены в результате нахождения нижней оценки (см. § 1).

Шаг 1. Положим $z=(z_1,\dots,z_L)$, где

$$z_l = \begin{cases} 1, & \text{если } l\in W^0,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Шаг 2. Положим $y=(y_1,\dots,y_m)$, где

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\in \bigcup\limits_{l\in W^0} I_l,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Шаг 3. Отыскиваем подмножество $W^i(z) \subseteq W^0$ множества «насыщенных» строк матрицы (g_{kj}) такое, что соответствующие этим строкам комплекты содержат изделие i:

$$W^i(z) = \{l \in W \mid z_l = 1 \,\&\, i \in I_l\} \quad \forall i \in U \mid y_i = 1,$$

и подмножество $\widehat{W}^i(z) \subseteq W^0$ такое, что соответствующие комплекты не содержат изделие i:

$$\widehat{W}^i(z) = \{l \in W \mid z_l = 1 \,\&\, l \notin W^i(z)\} \quad \forall i \in U \mid y_i = 1,$$

вычисляем вектор $y^i = (y^i_1, \dots, y^i_m)$, где

$$y^i_s = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in \bigcup\limits_{l \in \widehat{W}^i(z)} I_l, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

а также величину

$$\Delta_i = \sum_{s \in U} g^0_s y_s + \sum_{j \in X} \min_{l \in W^0} g_{lj} - \sum_{s \in U} g^0_s y^i_s - \sum_{j \in X} \min_{l \in \widehat{W}^i(z)} g_{lj}.$$

Шаг 4. Находим $h = \max\limits_{i \mid y_i = 1} \Delta_i$ и номер i_0, на котором этот максимум достигается: $i_0 = \{i \mid h = \Delta_{i_0}\}$.

Шаг 5. Если $h \geqslant 0$, то полагаем

$$z_l = \begin{cases} 1, & \text{если } l \in \widehat{W}^{i_0}(z), \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \qquad y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \bigcup\limits_{l \in \widehat{W}^{i_0}(z)} I_l, \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases}$$

в качестве множества W^0 возьмем $W^i(z)$ и перейдем к шагу 3. Если $h < 0$, то алгоритм нахождения верхней оценки заканчивает свою работу выдачей решения

$$F(U^k) = \sum_{i \in U} g^0_i y_i + \sum_{j \in X} \min_{l \in W^0} g_{lj}.$$

Оценим трудоемкость алгоритма отыскания верхней оценки для частичного решения в методе ветвей и границ. Трудоемкость одного шага алгоритма составляет $O(mnL)$ операций, таких шагов не более чем m. Таким образом, общая трудоемкость алгоритма вычисления верхней оценки составляет $O(m^2nL)$.

§ 3. Результаты численного эксперимента

Качество нижней и верхней оценок, получаемых при помощи описанного выше алгоритма, а также качество метода ветвей и границ было исследовано методами математической статистики. Ниже приводятся результаты исследования качества алгоритма, полученные для серии данных, генерируемых с помощью датчика псевдослучайных чисел и включающих в себя среднее выборочное значение точности достигнутого решения, среднее квадратичное отклонение, величину доверительного интервала. Численный эксперимент проводился на IBM PC 386SX, 40 МГц.

Рассмотрим класс задач $\mathcal{K}(m, L, n, q^{cp}, q_{\min}, Q_{\max}, p_{нк}, k^*)$, где m, L, n — размерность задачи, т. е. число изделий, комплектов и работ; q^{cp} — процент «средней заполненности» матрицы q_{il}, т. е. средняя величина доли изделий различных типов, используемых в каждом из комплектов; $q_{\min}$ — минимальное число различных типов изделий в одном комплекте; $Q_{\max}$ — максимальное число изделий одного типа в комплекте; $p_{нк}$ — доля бесконечно больших элементов матрицы g_{lj} (если $g_{lj} = \infty$, то l-й комплект в принципе не подходит для выполнения j-й работы); k^* — коэффициент для определения эксплуатационных затрат в сравнении со стоимостью производства комплекта.

Класс задач понимается здесь как совокупность конкретных задач с числовыми данными, определяемыми по следующим правилам:

— стоимость производства каждого изделия есть случайная величина, равномерно распределенная в интервале $0 \div 1$ (р. р. $0 \div 1$) и полученная с помощью датчика псевдослучайных чисел;

— список состава допустимых комплектов q_{il} строится при помощи датчика псевдослучайных чисел следующим образом:

$$q_{il} = \begin{cases} \lfloor 1 + r' Q_{\max} \rfloor, & \text{если } r < q^{cp}, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

где r, r' — независимые друг от друга случайные числа, р. р. $0 \div 1$;

— матрица g_{lj} строится следующим образом:

$$g_{lj} = \begin{cases} \varphi_j \sum\limits_{i \in U} c_i q_{il} (1 + k^*) r', & \text{если } r < p_{нк}, \\ \infty & \text{иначе}, \end{cases} \tag{3.1}$$

где φ_j — случайные числа, р. р. $1 \div 10$, r, r' — независимые друг от друга случайные числа, р. р. $0 \div 1$;

— вектор начальных затрат g_i^0 строится следующим образом:

$$g_i^0 = r \left[\sum_{j \in X} \sum_{l \in W_j} (c_i q_{il} / \vartheta_l) g_{lj} \right] / L \overline{Q} p_{нк},$$

где r — случайная величина, р. р. $0.8 \div 1.2$, $\vartheta_l = \sum\limits_{i \in U} c_i q_{il}$, $\overline{Q}$ — математическое ожидание числа изделий одного вида в том комплекте, где оно присутствует (такой способ задания вектора начальных затрат на производство нужен для того, чтобы суммарная доля начальных затрат на производство всех выбранных типов изделий была сравнима с суммарной стоимостью на производство всех требуемых изделий и эксплуатацию комплектов, из них составленных).

Была проведена серия численных экспериментов, дающая оценки качества получаемых нижней и верхней оценок. Вычисления проводились для задач класса $\mathcal{K}(m, L, n, 25, 3, 4, 15, 15)$, где параметры m, L, n характеризуют размерность задачи. Для каждого из шести классов, представленных в табл. 3.1, вычисления проводились 36 раз (объем выборки N=36). В таблице приведены следующие статистические величины, характеризующие качество алгоритмов вычисления нижней и верхней оценок: ε_{cp} — выборочное среднее отклонение; σ_{cp} — среднее квадратичное отклонение; $\mathcal{D}(\mathrm{P} = 0.95)$ — доверительный интервал для $\mathrm{P} = 0.95$ в предположении, что выборочные значения отклонений полученных решений имеют нормальное распределение; $\rho_{\text{ср}}$ — среднее значение доли начальных затрат в полученном решении; $t_{\text{ср}}$ — среднее время решения единичной задачи каждого класса.

Таблица 3.1

Размерность задачи			Показатель качества оценки				
m	L	n	$\varepsilon_{\text{ср}}$, %	$\sigma_{\text{ср}}$, %	$\mathcal{D}$(P = 0.95), %	$\rho_{\text{ср}}$, %	$t_{\text{ср}}$, с
25	100	100	9.71	4.93	8.10–11.32	37.13	2.20
30	100	100	9.51	4.28	8.11–10.91	36.28	3.3
50	100	100	11.30	4.57	9.81–12.80	35.16	10.14
50	125	125	10.26	5.37	8.51–12.02	34.78	12.23
100	125	125	11.91	3.26	10.85–12.98	32.75	53.5
100	200	200	14.95	3.62	13.77–16.14	30.77	231.58

Эмпирические функции распределений наблюдений апостериорных оценок точности для классов

$$\mathcal{K}(30,100,100,25,3,4,15,15), \qquad \mathcal{K}(100,200,200,25,3,4,15,15)$$

изображены на рис. 3.1, 3.2 соответственно. Отмечены выборочное среднее значение и доверительный интервал при P=0.95. Данные функции позволяют охарактеризовать качество получаемых решений.

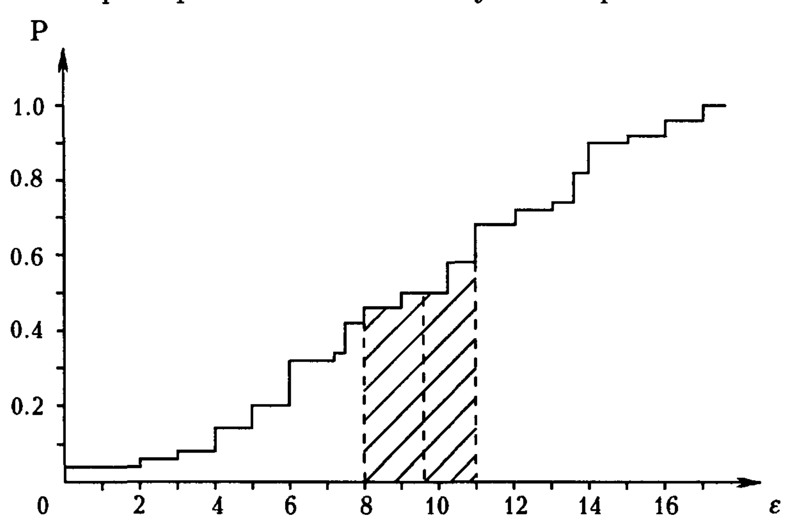

Рис. 3.1

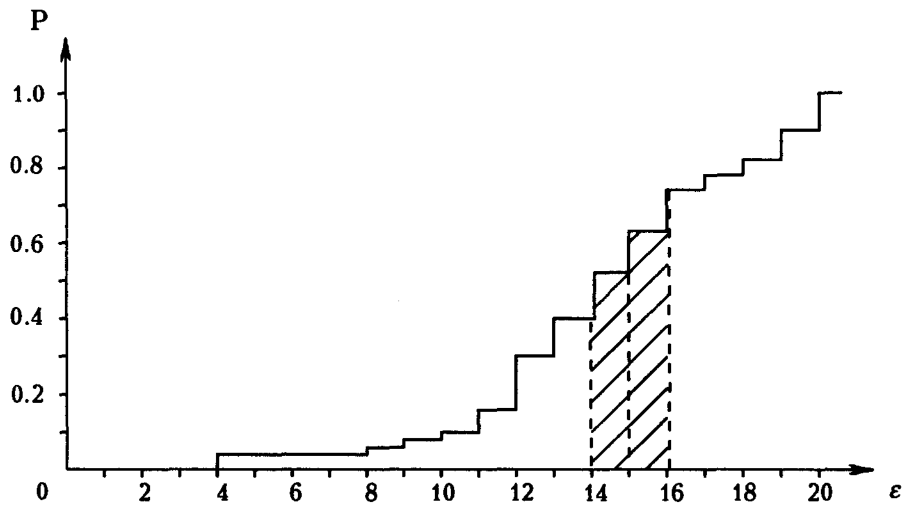

Рис. 3.2

В табл. 3.2, 3.3 исследуется качество получаемых верхней и нижней оценок в зависимости от разреженности матрицы g_{lj}: в табл. 3.2 — для малоразреженной матрицы g_{ij}, в табл. 3.3 — для сильноразреженной матрицы g_{ij}.

В табл. 3.2 приведены результаты серии расчетов для класса задач $\mathcal{K}(50, 100, 100, 25, 3, 4, p_{\text{нк}}, 15)$ со значениями $p_{\text{нк}}$ в интервале от 15% до 45%. Величина выборки N=36.

Таблица 3.2

$p_{\text{нк}}$, %	$\varepsilon_{\text{ср}}$, %	$\sigma_{\text{ср}}$, %	Доверительный интервал при P=0.95, %	Среднее количество выбранных комплектов	Среднее количество выбранных изделий	$t_{\text{ср}}$, с
15	11.3	4.57	9.81 – 12.8	2.72	16.4	10.1
20	9.87	3.03	8.88 – 10.86	3.2	19.2	8.42
25	9.54	3.31	8.45 – 10.62	3.3	20.0	8.64
30	10.6	3.37	9.51 – 11.72	3.78	22.0	8.3
35	10.15	3.01	9.17 – 11.13	4.25	23.9	7.8
40	9.8	2.59	8.96 – 10.65	4.58	24.72	7.89
45	9.46	2.96	8.49 – 10.43	5.2	27.3	7.19

В реальной практике довольно часто встречаются задачи, в которых каждый отдельный комплект изначально задуман и спроектирован для выполнения некоторого относительно небольшого количества работ из общего их набора. Иначе говоря, область применения комплектов в значительной степени специализирована, а не универсальна. В табл. 3.3 приведены статистические результаты именно для такого случая: рассматривается класс $\mathcal{K}(100, 200, 200, 25, 3, 4, p_{\text{нк}}, 15)$ для значений $p_{\text{нк}}$ в интервале от 70% до 90%. Величина выборки N=36.

Таблица 3.3

$p_{\text{нк}}$, %	$\varepsilon_{\text{ср}}$, %	$\sigma_{\text{ср}}$, %	Доверительный интервал при P=0.95, %	Среднее количество выбранных комплектов	Среднее количество выбранных изделий	$t_{\text{ср}}$, с
70	12.65	2.10	11.97 – 13.34	8.8	74.5	142.70
75	10.86	1.95	10.23 – 11.5	14.6	86.2	102.6
80	7.83	1.68	7.28 – 8.38	21.2	92.2	77.0
85	4.48	1.50	3.98 – 4.97	30.0	96.3	53.7
90	3.93	1.62	2.09 – 5.77	42.3	99.2	34.57

Интересен также вопрос о зависимости качества полученного решения от величины параметра $\rho_{\text{ср}}$ — отношения величины начальных затрат на производство изделий и затрат на их производство и эксплуатацию. Повышая средний уровень начальных затрат, мы тем самым повышаем (хотя и не так значительно) и общий процент $\rho_{\text{ср}}$ начальных затрат в полученном в результате счета решении.

В табл. 3.4 приведены характеристики качества полученных решений для класса $\mathcal{K}(100, 300, 200, 25, 3, 4, 85, 15)$ при различных значениях $\rho_{\text{ср}}$, определяемых апостериорно. Различные значения параметра $\rho_{\text{ср}}$ достигаются путем варьирования интервала, из которого берется случайная величина r в (3.1). Объем выборки для каждого класса N=36.

Таблица 3.4

$p_{\text{нк}}$, %	$\varepsilon_{\text{ср}}$, %	$\sigma_{\text{ср}}$, %	$\mathcal{D}$(P = 0.95), %	$t_{\text{ср}}$, с
21.8	5.95	1.63	5.42 – 6.48	63.8
32.8	16.17	1.50	15.68 – 16.66	106.8
39.8	24.43	1.62	23.90 – 24.95	137.9
42.0	30.42	1.65	29.88 – 30.96	176.2
46.6	38.83	1.69	38.27 – 39.38	205.9
60.2	56.82	1.63	56.28 – 57.35	193.3

Как видно из табл. 3.4, с возрастанием значения $\rho_{\text{ср}}$ разрыв между нижней и верхней оценками заметно увеличивается. Поэтому для исследования качества алгоритма метода ветвей и границ целесообразно использовать новый класс задач с предельно наихудшими оценками, а именно, когда суммарные затраты на 100% состоят из начальных затрат. Для практических целей такой класс несколько искусствен, однако он наилучшим образом характеризует метод ветвей и границ.

Итак, введем в рассмотрение класс задач

$$\mathcal{K}_1(m, L, n, q^{\text{ср}}, q_{\min}, p_{\text{нк}}),$$

где параметры определены так же, как для класса $\mathcal{K}$. В отличие от последнего, для данного класса вектор начальных затрат g_i^0 имеет вид $g_i^0 = 1,\ i \in U$;

$$g_{lj} = \begin{cases} 0, & \text{если } r < p_{\text{нк}}, \\ \infty & \text{иначе,} \end{cases}$$

где r — случайная величина, р. р. $0 \div 1$; параметр $Q_{\max}$ для класса $\mathcal{K}_1$ теряет смысл, а матрица q_{il} строится следующим образом:

$$q_{il} = \begin{cases} 1, & \text{если } r < q^{\text{ср}}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где r — случайная величина, р. р. $0 \div 1$.

Исследуемый метод ветвей и границ использует двустороннюю схему ветвления. В табл. 3.5 приведены результаты работы метода на классе задач $\mathcal{K}_1(m, L, n, 25, 3, 80)$.

Таблица 3.5

m	L	n	ε, %	δ, %	Δ	P	Q	K^0	K	H	W	t, с
20	30	30	0.01	32.1	0	14	9	0	33	3	0	4.9
20	40	40	0.01	56.8	14.2	14	12	21	87	16	2	22
40	40	40	0.87	63.3	10.3	29	6	29	698	77	3	410
30	50	50	0.83	71.8	8.7	23	10	5	884	84	3	734
30	60	80	5.00	83.4	15.0	20	15	2	1511	124	2	1764
50	50	50	5.00	69.0	16.6	36	9	33	3097	391	4	3845

Здесь используются следующие обозначения: m, L, n — размерность решаемой задачи; ε — точность решения; $\delta(\Delta)$ — относительное отклонение начальной нижней (верхней) оценки от оптимума; $P(Q)$ — число изделий (комплектов), выбранных в оптимальном решении; K^0 — номер итерации, на которой найдено оптимальное решение; K — общее число итераций; H — максимальное число неотсеченных частичных решений на одной итерации; W — число улучшений рекорда в методе ветвей и границ; t — общее время решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kaufman L., Eede M. V., Haunsen P.** A plant and warehouse location problem // Oper. Res. Quart. 28(3), 1977. P. 547–554.
2. **Михалевич В. С., Трубин В. А., Шор Н. З.** Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. М.: Наука, 1986.
3. **Трубин В. А., Шарифов Ф. А.** Простейшая многоэтапная задача размещения на древовидной сети // Кибернетика и системный анализ. 1992. № 6. С. 128–135.
4. **Ro H., Tcha D.** A branch and bound algorithm for the two-level uncapacitated facility location problem with some side constrains // European J. Oper. Res. 1984. V. 18, N 3. P. 343–358.
5. **Tcha D., Lee B.** A branch-and-bound algorithm for the multi-level uncapacitated facility location problem // European J. Oper. Res. 1984. V. 18, N 1. P. 35–43.
6. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
7. **Береснев В. Л.** Алгоритмы минимизации полиномов от булевых переменных // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1979. Вып. 36. С. 225–246.
8. **Кочетов Ю. А.** Задачи оптимального выбора состава систем технических средств при многоэтапном процессе выполнения работ. Новосибирск, 1987. С. 48–58. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 12).
9. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
10. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Дементьев В. Т.** Об одном методе построения нижней оценки и приближенного решения с апостериорной оценкой точности для задачи стандартизации // Управляемые системы. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1974. Вып. 13. С. 26-31.