МИНИМАЛЬНЫЕ ОПИСАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

А. А. Ломов

В прикладных исследованиях нередко возникает задача оценивания неизвестных параметров математической модели по набору временны́х рядов — измерений характеристик моделируемого объекта. Как правило, одна и та же модель допускает различные эквивалентные описания. Разумно выбирать описания, «минимальные» по числу параметров, подлежащих оцениванию.

Теория минимальных описаний (реализаций) берет свое начало с работы Р. Калмана [1], в которой изучено множество всех описаний с наименьшей размерностью пространства состояний для линейного объекта, представленного функцией отклика на импульсное входное воздействие. Современная теория реализаций представляет собой обширный раздел теории линейных систем и включает в себя алгоритмические и вычислительные вопросы построения описаний систем по заданным временны́м рядам, теорию канонических форм, эквивалентных преобразований и редуцирования реализаций (см. [2] и обзор [3]). К области приложений теории реализаций относятся прогнозирование временны́х рядов, теория фильтрации, задачи диагностики в технике (экономике), медицине.

Следует отметить, что в большинстве публикаций в качестве исходной характеристики для построения минимального описания линейного объекта используется его функция отклика, т. е. объект предполагается управляемым. Кроме того, временны́е зависимости определяются на полубесконечном интервале [1, 3]. Условие полубесконечности интервала оказывается принципиальным: в частности, благодаря этому условию возможно применение в стационарном случае преобразования Лапласа и использование аналитического аппарата алгебры многочленных и рациональных матриц [1–3]. Как правило, изучаются только системы в форме матричного уравнения первого порядка. Приведение к этому виду произвольного матричного линейного уравнения порядка выше первого требует умножения матриц уравнения на матрицы, зависящие от оцениваемых параметров, что вызывает дополнительные аналитические и вычислительные трудности. Кроме того, недостаточно полно изучена устойчивость описаний к возмущениям в исходных временны́х рядах.

В настоящей статье делается попытка дополнить теорию минимальной реализации: рассматривается случай конечного интервала наблюдения и снимается ограничение на управляемость. В качестве измеряемой характеристики объекта принимается не функция отклика, а некоторое множество объектных траекторий конечной длины. Основное внимание уделено описаниям в форме матричного линейного разностного уравнения произвольного заданного порядка. Известно [4, 5], что в дифференциальном случае (когда вместо оператора конечной разности стоит оператор дифференцирования) этот класс уравнений эквивалентен классу описаний в форме уравнений 1-го порядка (с переменными состояния). В работе устанавливается связь между двумя типами описаний в разностном случае с траекториями произвольной конечной длины больше некоторой данной. Описаны нестационарные добавки к множеству решений матричного линейного разностного уравнения, возникающие из-за конечности длины траекторий. Описаниям в форме матричного линейного разностного уравнения соответствуют системы в пространстве траекторий. Показано, что матрицы минимальных систем в пространстве траекторий обладают характерной структурой, которая в литературе ранее не отмечалась. Для таких матриц предложено название расширенные клеточно-тёплицевы (РКТ-матрицы). Оказывается, что анализируя структуру РКТ-матриц, можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством левых эквивалентных преобразований, сохраняющих структуру РКТ, и некоторой алгеброй многочленных матриц. Установленное соответствие позволило перейти к операторным (многочленным) описаниям стационарных систем на конечном интервале наблюдения без применения преобразования Лапласа. Для систем в форме уравнений 1-го порядка с произвольным конечным интервалом наблюдения, бо́льшим некоторого данного, показано, что теорема Р. Калмана [1] об алгебраической структуре класса эквивалентных минимальных описаний допускает прямое обобщение на случай неуправляемых систем. Ранее такое обобщение было получено для систем с бесконечным интервалом наблюдения [2].

§ 1. Основные определения

Множество решений $\mathcal{N}(G) \subset \mathbb{R}^l$ системы линейных уравнений

$$Gz = 0, \quad z \in \mathbb{R}^l, \tag{1.1}$$

с некоторой матрицей $G \in \mathbb{R}^{n\times l}$ называется *модельным многообразием* (*моделью*), а система (1.1) — *описанием модели* $\mathcal{N}(G)$.

Определим стационарные модели $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^l$. Пусть $\Sigma = (A, B, C, D)$ — четверка матриц размеров $q\times q$, $q\times m$, $r\times q$, $r\times m$ соответственно, и пусть переменные состояния $x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$ принадлежат $\mathbb{R}^q$. Рассмотрим систему уравнений

$$y_k = Cx_k + Du_k, \quad x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \qquad k \in [1, N], \tag{1.2}$$

относительно вектор-функций $u_1, \dots, u_N \in \mathbb{R}^m$ и $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}^r$.

Траекторией системы (1.2) называется объединенный вектор

$$z = (y_1; u_1; \dots; y_N; u_N) \in \mathbb{R}^l, \quad l = N(r+m),$$

который также будем записывать в виде

$$z = (z_y; z_u), \quad z_y = (y_1; \dots; y_N), \quad z_u = (u_1; \dots; u_N);$$

здесь и ниже $(*, \dots, *)$ означает вектор-строку, а $(*; \dots; *)$ — вектор-столбец. Аналогичные обозначения используются для клеточных матриц:

$$(A, B) = [A\ B], \qquad (A; B) = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

Система (1.2) (четверка матриц $\Sigma = (A, B, C, D)$) называется *стационарным калмановским описанием* (*описанием в пространстве состояний* $\mathbb{R}^q$) [1].

При каждом фиксированном значении $x^0 \in \mathbb{R}^q$ вектора начальных условий $x_1 \in \mathbb{R}^q$ описание (1.2) задает линейное многообразие траекторий

$$\mathcal{N}[x^0] = \{z \in \mathbb{R}^l: \quad \text{верна система (1.2)}, \ \ x_1 = x^0\}, \tag{1.3}$$

которое называется *стационарной моделью с фиксированными начальными условиями*, а множество всех траекторий

$$\mathcal{N} = \bigcup_{x^0 \in \mathbb{R}^q} \mathcal{N}[x^0] \tag{1.4}$$

называется *стационарной моделью со свободными начальными условиями* (или просто *стационарной моделью*).

Для модели $\mathcal{N}$ определим *подпространство траекторий однородного движения*

$$\mathcal{N}_x = \{z \in \mathcal{N}: z_u = 0\} \tag{1.5}$$

и *подпространство траекторий вынужденного движения*

$$\mathcal{N}_u = \{z \in \mathcal{N}: x^0 = 0\}, \tag{1.6}$$

т. е. $\mathcal{N}_u$ — это стационарная модель с фиксированными нулевыми начальными условиями, и *функцию отклика*

$$T = \{z \in \mathcal{N}_u: z_u = (e_i; 0; \ldots; 0), \ i \in [1, m]\}, \tag{1.7}$$

где e_i — i-й столбец единичной матрицы I_m порядка m.

Замечание 1.1. Функция отклика T играет роль полного инварианта [4] модели $\mathcal{N}_u$, а именно: для двух описаний (1.2) с четверками матриц Σ' и Σ'' стационарные модели $\mathcal{N}'_u$ и $\mathcal{N}''_u$ с нулевыми начальными условиями совпадают тогда и только тогда, когда совпадают соответствующие функции отклика $T' \subset \mathcal{N}'_u$ и $T'' \subset \mathcal{N}''_u$ (это утверждение следует из леммы 2.1, ниже). Поэтому калмановская теория минимальной реализации, в которой в качестве исходных данных принимается функция отклика, без изменений переносится на модели с фиксированными нулевыми начальными условиями.

- Для стационарного калмановского описания пространство состояний $\mathbb{R}^q$ называется
  — *наблюдаемым*, если столбцы матрицы $(C; CA; \ldots; CA^{q-1})$ линейно независимы, т. е. $\operatorname{rank}(C; CA; \ldots; CA^{q-1}) = q$;
  — *управляемым*, если строки матрицы $(B, AB, \ldots, A^{q-1}B)$ линейно независимы, т. е. $\operatorname{rank}(B, AB, \ldots, A^{q-1}B) = q$.

Мы ограничимся здесь классическими определениями наблюдаемости и управляемости [6]. Современный подход можно найти в [7].

Для краткости пишем «описание (1.2)» вместо «стационарное калмановское описание» и «описание (1.1)» вместо «описание модели $\mathcal{N}(G)$», а также «описание (1.2) наблюдаемо (управляемо)» вместо «пространство состояний описания (1.2) наблюдаемо (управляемо)». Поскольку система (1.2) полностью определяется четверкой матриц $\Sigma = (A, B, C, D)$, будем писать «описание Σ» или «описание (A, B, C, D)», имея в виду описание (систему) (1.2) с указанными матрицами.

- *Описание* (1.2) стационарной модели (1.4) *минимально*, если размерность q пространства состояний наименьшая из всех возможных.
- *Описание* (1.1) *минимально* , если матрица G содержит наименьшее возможное количество строк, $n = \operatorname{codim} \mathcal{N}(G)$, т. е. ранг матрицы G равен числу ее строк.

Подчеркнем, что понятие «минимальность» для калмановского описания (1.2), как будет видно из дальнейшего, принципиально отличается от этого понятия для описания (1.1).

Выделив конкретный базис в $\mathbb{R}^l/\mathcal{N}$, можно построить некоторое минимальное описание вида (1.1) стационарной модели $\mathcal{N}$. Такое описание естественно называть «описание без переменных состояния» или «описание в пространстве траекторий».

Два описания называются *эквивалентными описаниями*, если они задают одну и ту же модель. Преобразование описаний (1.1) (или (1.2)), сохраняющее модель, называется *эквивалентным преобразованием*.

§ 2. Минимальные описания в форме уравнения 1-го порядка

Рассмотрим калмановское описание (A, B, C, D) (в форме уравнения 1-го порядка) для стационарной модели $\mathcal{N}$ со свободными начальными условиями. Известно, что существует бесконечно много калмановских описаний (A', B', C', D') этой же модели $\mathcal{N}$. В частности, мы получим эквивалентное описанию (A, B, C, D) описание (A', B', C', D') при невырожденной замене $x' = P^{-1}x$ базиса в пространстве состояний:

$$A' = PAP^{-1},\ B' = PB,\ C' = CP^{-1},\ D' = D \tag{2.1}$$

(см. следствие 2.2, ниже). Кроме того, всегда можно построить эквивалентное описание (A', B', C', D'), увеличив размерность пространства состояний и отказавшись от условия наблюдаемости:

$$A' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ * & * \end{bmatrix}, \quad B' = (B; *), \quad C' = (C, 0), \quad D' = D;$$

здесь через $*$ обозначены некоторые произвольные подматрицы, а через 0 — нулевые подматрицы; при этом разбиение на клетки в матрицах B' и C' согласовано с разбиением в матрице A'. Ниже доказано (см. следствие 2.1) в определенном смысле обратное утверждение: если описание не наблюдаемо, то найдется эквивалентное наблюдаемое описание в пространстве состояний меньшей размерности.

Во многих случаях оправдано использование вместо всего множества эквивалентных описаний модели $\mathcal{N}$ некоторого собственного подмножества наиболее экономных описаний с наименьшей возможной для данной модели $\mathcal{N}$ размерностью пространства состояний. Согласно определению, приведенному в § 1, такие описания (реализации) называются минимальными.

В данном параграфе изучается класс эквивалентных минимальных описаний в форме матричных уравнений 1-го порядка для стационарной модели $\mathcal{N}$ со свободными начальными условиями.

Известно, что для моделей $\mathcal{N}_u \subset \mathcal{N}$ (с нулевыми начальными условиями) имеет место следующая теорема Р. Калмана (см. [1], с учетом замечания 1.1).

Теорема 2.1 (о минимальной реализации). *Пусть описание (A, B, C, D) стационарной модели $\mathcal{N}_u$ (с нулевыми начальными условиями) минимально. Тогда (и только тогда) оно управляемо и наблюдаемо одновременно. При этом любое другое эквивалентное минимальное описание (A', B', C', D') данной модели $\mathcal{N}_u$ может быть получено из описания (A, B, C, D) преобразованием* (2.1).

Оказывается, что теорема 2.1 допускает в определенном смысле обобщение на рассматриваемый в статье случай стационарных моделей $\mathcal{N}$ со свободными начальными условиями. Основной результат параграфа представлен в следующей теореме.

Теорема 2.1$'$. *Пусть описание (A, B, C, D) стационарной модели $\mathcal{N}$ (со свободными начальными условиями) минимально. Тогда оно наблюдаемо (возможно, не управляемо). При этом любое другое эквивалентное минимальное описание (A', B', C', D') данной модели $\mathcal{N}$ может быть получено из описания (A, B, C, D) преобразованием* (2.1).

Заметим, что переход от моделей $\mathcal{N}_u$ (с нулевыми начальными условиями) к моделям $\mathcal{N}$ (со свободными начальными условиями) связан с отказом от условия управляемости. Эта связь, по-видимому, впервые была отмечена в работе [2]. Автором [2] был получен результат, аналогичный теореме 2.1$'$, для предельного случая бесконечного интервала наблюдения ($N \to \infty$).

Доказательство теоремы 2.1$'$ начнем с известной теоремы о декомпозиции пространства состояний [1, 8]. Приведем доказательство теоремы о декомпозиции, отличающееся от данного в [1, 8]. Введем обозначение $\operatorname{linc} F$ — линейная оболочка столбцов матрицы F. Для калмановского описания (A, B, C, D) в пространстве состояний $\mathbb{R}^q$ определим подпространство V_c управляемых состояний и подпространство $V_o{}^{\perp}$ ненаблюдаемых состояний следующим образом:

$V_c = \operatorname{linc}(B, AB, \ldots, A^{q-1}B)$,

$V_o{}^{\perp}$ — ортогональное дополнение подпространства V_o, где

$V_o = \operatorname{linc}(C^T, A^T C^T, \ldots, A^{T(q-1)} C^T)$.

Теорема 2.2 (о декомпозиции). *Для калмановского описания (A, B, C, D) в пространстве состояний $\mathbb{R}^q$ верны следующие утверждения.*

1. *Подпространства V_c и $V_o^{\perp}$ являются A-инвариантными, и пространство состояний $\mathbb{R}^q$ можно разложить в прямую сумму четырех подпространств:*

$$\mathbb{R}^q = (V_o \cap V_c) \oplus (V_o \cap V_c{}^{\perp}) \oplus (V_o{}^{\perp} \cap V_c) \oplus (V_o{}^{\perp} \cap V_c{}^{\perp}), \qquad (2.2)$$

где V_o и $V_c{}^{\perp}$ — ортогональные дополнения подпространств $V_o{}^{\perp}$ и V_c.

2. *Существует невырожденная замена переменных $x' = P^{-1}x$ такая, что матрицы $A' = PAP^{-1}$, $B' = PB$, $C' = CP^{-1}$ имеют вид*

$$A' = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C' = [0 \ * \ 0 \ *]. \qquad (2.3)$$

В (2.3) через $*$ обозначены некоторые подматрицы, через 0 — нулевые подматрицы, и матрицы A', B', C' разбиты на клетки в соответствии с размерностями слагаемых в разложении (2.2).

Доказательство. 1. В этой части теоремы существенно утверждение относительно A-инвариантности подпространств $V_o{}^{\perp}$ и V_c. Оно доказано в [9].

2. Выберем матрицу P в виде $P = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ так, чтобы столбцы P_1, P_2, P_3, P_4 составляли базисы пространств $V_o{}^{\perp} \cap V_c$, $V_o \cap V_c$, $V_o{}^{\perp} \cap V_c{}^{\perp}$, $V_o \cap V_c{}^{\perp}$ соответственно. Отметим, что если (и только если) пространство векторов вида $(0; *; 0)$ A-инвариантно, то матрица A имеет вид $\begin{bmatrix} * & 0 & * \\ * & * & * \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$. Ввиду свойств $V_o{}^{\perp}$ и V_c, подпространства $(*; *; 0; 0)$, $(*; 0; *; 0)$ A-инвариантны (в новом базисе P). Поэтому справедливы представления (2.3).

Следствие 2.1. *Если описание (A, B, C, D) не наблюдаемо, то найдется эквивалентное ему наблюдаемое описание (A', B', C', D') в пространстве состояний меньшей размерности.*

Из теорем 2.1, 2.2 следует, что для минимальных описаний модели $\mathcal{N}_u \subset \mathcal{N}$ (с нулевыми начальными условиями) разложение (2.2) пространства состояний $\mathbb{R}^q$ принимает вид

$$\mathbb{R}^q = V_o \cap V_c = V_o = V_c.$$

Опишем структуру пространства состояний $\mathbb{R}^q$ в случае минимальных описаний модели $\mathcal{N}$ со свободными начальными условиями. Справедлива

Теорема 2.3. *Пусть (A, B, C, D) — минимальное описание в пространстве состояний $\mathbb{R}^q$ стационарной модели $\mathcal{N}$ со свободными начальными условиями. Тогда*

(i) *декомпозиция (2.2) пространства состояний $\mathbb{R}^q$ принимает вид*

$$\mathbb{R}^q = (V_o \cap V_c) \oplus (V_o \cap V_c{}^{\perp}), \tag{2.4}$$

т. е. описание (A, B, C, D) наблюдаемо (возможно, не управляемо);

(ii) *представление (2.3) матриц A', B', C' принимает вид*

$$A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C' = [C_1, C_2]; \tag{2.5}$$

(iii) *описание (A_{11}, B_1, C_1, D) есть минимальное описание подпространства траекторий вынужденного движения $\mathcal{N}_u \subset \mathcal{N}$ (рассматриваемого как стационарная модель с нулевыми начальными условиями);*

(iv) *размерность первого слагаемого в разложении (2.4) равна размерности пространства состояний $\mathbb{R}^{q_u}$ для описания (A_{11}, B_1, C_1, D), т. е. $\dim V_o \cap V_c = q_u$;*

(v) *размерность пространства состояний $\mathbb{R}^q$ равна размерности подпространства траекторий однородного движения, т. е. $q = \dim \mathcal{N}_x$.*

Доказательство. Утверждения (i)–(iv) следуют из теоремы о декомпозиции. Докажем (v). Согласно (1.2), (1.5) подпространство $\mathcal{N}_x$ траекторий однородного движения есть линейная оболочка столбцов матрицы $F = (C; 0; CA; 0; CA^2; 0; \ldots; CA^{N-1}; 0)$. Ввиду наблюдаемости ранг матрицы F максимален, следовательно, равен размерности пространства состояний $\mathbb{R}^q$. Поэтому $\dim \mathcal{N}_x = \operatorname{rank} F = q$. Теорема 2.3 доказана.

Из теоремы 2.3 сразу следует первое утверждение теоремы 2.1$'$. В оставшейся части параграфа доказывается второе утверждение теоремы 2.1$'$.

Для простоты изложения иногда будем записывать вектор z следующим образом: $z = (y_1; \ldots; y_N; u_1; \ldots; u_N)$.

Непосредственно из определений, приведенных в § 1, вытекает

Лемма 2.1. *Справедливы равенства*

$$\mathcal{N} = \operatorname{linc} H, \quad \mathcal{N}_x = \operatorname{linc} H_x, \quad \mathcal{N}_u = \operatorname{linc} H_u,$$

где

$$H = (H_x \vdots H_u) = \begin{bmatrix} C & \vdots & D & & & & 0 \\ CA & \vdots & CB & D & & & \vdots \\ CA^2 & \vdots & CAB & \ddots & D & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-1} & \vdots & CA^{N-2}B & \ldots & \ldots & CB & D \\ 0 & \vdots & I_m & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & I_m \end{bmatrix}. \qquad (2.6)$$

Поскольку преобразование (2.1) не изменяет матрицы H вида (2.6), справедливо

Следствие 2.2. *Если матрицы A, B, C, D и A', B', C', D' калмановских описаний (A, B, C, D) и (A', B', C', D') связаны преобразованием (2.1), то эти описания эквивалентны.*

Лемма 2.2. *Стационарная модель $\mathcal{N}$ есть прямая сумма подпространств $\mathcal{N}_u$ и $\mathcal{N}_x$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.2 и следствия 2.1 существует наблюдаемое описание (A, B, C, D) стационарной модели $\mathcal{N}$. Столбцы матрицы H_x в этом случае линейно независимы и образуют базис пространства N_x. Столбцы матрицы H_u линейно независимы и образуют базис пространства $\mathcal{N}_u$. Учитывая структуру матрицы H вида (2.6) и теорему [10, с. 41], заключаем, что сумма $\mathcal{N} = \mathcal{N}_x + \mathcal{N}_u$ прямая. Лемма 2.2 доказана.

Согласно теореме 2.3, любое минимальное описание (A, B, C, D) стационарной модели $\mathcal{N}$ наблюдаемо, но возможно, не управляемо. При этом управляемость описания (A, B, C, D) прямо связана с равенством нулю второго слагаемого в разложении (2.4). Будем называть стационарную модель $\mathcal{N}$ *управляемой*, если для любого минимального описания модели $\mathcal{N}$ второе слагаемое в разложении (2.4) равно нулю, и *неуправляемой* в противном случае.

Следствие 2.3. *Если стационарная модель $\mathcal{N}$ управляема, то любые два эквивалентных минимальных описания (A,B,C,D) и (A',B',C',D') этой модели связаны преобразованием* (2.1).

Доказательство. По лемме 2.2 стационарная модель $\mathcal{N}$ есть прямая сумма подпространств $\mathcal{N}_u$ и $\mathcal{N}_x$, где оба слагаемых определены однозначно. По теореме 2.3 для любого минимального описания (A, B, C, D) управляемой стационарной модели $\mathcal{N}$ матрицы A, B, C с точностью до преобразования (2.1) равны матрицам A_{11}, B_1, C_1, где (A_{11}, B_1, C_1) — некоторое минимальное описание подпространства траекторий вынужденного движения $\mathcal{N}_u \subset \mathcal{N}$. Далее следует применить теорему 2.1.

Следствие 2.4. *Размерность стационарной модели $\mathcal{N}$ (как подпространства $\mathbb{R}^l$, $l = N(r+m)$) равна величине $q + Nm$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $\mathcal{N} = \mathcal{N}_x + \mathcal{N}_u$ и размерность слагаемого $\mathcal{N}_u$ равна Nm — числу столбцов матрицы H_u вида (2.6), а размерность слагаемого $\mathcal{N}_x$ равна q в силу утверждения (v) теоремы 2.3.

Обозначим через M класс эквивалентных минимальных описаний стационарной модели $\mathcal{N}$. Для простоты будем отождествлять описание (A, B, C, D) стационарной модели $\mathcal{N}$ с тройкой матриц A, B, C, учитывая, что матрица D для данной модели $\mathcal{N}$ определяется однозначно. Для завершения доказательства теоремы 2.1$'$ нужно показать, что любые два описания из класса M связаны преобразованием (2.1), т. е. следствие 2.3 сохраняет силу для неуправляемых моделей.

Утверждение 2.1. *Многообразие M эквивалентных минимальных описаний стационарной модели $\mathcal{N}$ представимо в виде пересечения двух многообразий M_x и M_u, где*

$$M_x = \left\{(A,B,C) : A = Q\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}\end{bmatrix} Q^{-1},\ B \in \mathbb{R}^{q\times m},\right.$$
$$\left. C = (C_1, C_2)Q^{-1}, \det Q \neq 0\right\}, \qquad (2.7\text{а})$$

$$M_u = \left\{(A,B,C) : A = P\begin{bmatrix} A_{11} & X \\ 0 & Y\end{bmatrix} P^{-1},\ B = P\begin{bmatrix} B_1 \\ 0\end{bmatrix},\ \det P \neq 0,\right.$$
$$C = (C_1, Z)P^{-1},\ X \in \mathbb{R}^{q_u\times(q-q_u)},\ Y \in \mathbb{R}^{(q-q_u)\times(q-q_u)},$$
$$\left. Z \in \mathbb{R}^{r\times(q-q_u)}\right\}. \qquad (2.7\text{б})$$

Доказательство. Построим все эквивалентные минимальные описания стационарной модели $\mathcal{N}$ и убедимся, что они образуют множество, совпадающее с $M_u \cap M_x$. По лемме 2.2 стационарная модель $\mathcal{N}$ есть сумма подпространств $\mathcal{N}_u$ и $\mathcal{N}_x$. Поскольку сумма прямая, оба слагаемых определены однозначно и искомое множество M есть пересечение двух множеств: первое образовано описаниями моделей, у которых подпространства траекторий вынужденного движения совпадают с $\mathcal{N}_u$, а второе состоит из описаний моделей, у которых подпространства траекторий однородного движения совпадают с $\mathcal{N}_x$. Поэтому достаточно показать, что этими двумя множествами являются M_u и M_x.

Рассмотрим наблюдаемое описание (A, B, C) в пространстве состояний $\mathbb{R}^q$ такое, что $q = \dim \mathcal{N}_x$ и подпространство траекторий вынужденного движения совпадает с $\mathcal{N}_u$. Найдутся неособенная матрица P и матрицы X, Y, Z такие, что

$$A = P \begin{bmatrix} A_{11} & X \\ 0 & Y \end{bmatrix} P^{-1}, \quad B = P \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = (C_1, Z)P^{-1}. \tag{2.8}$$

Действительно, согласно теореме 2.3 найдется неособенная матрица P' такая, что

$$A = P' \begin{bmatrix} A'_{11} & X \\ 0 & Y \end{bmatrix} (P')^{-1}, \quad B = P' \begin{bmatrix} B'_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = (C'_1, Z)(P')^{-1},$$

где (A'_{11}, B'_1, C'_1) — некоторое минимальное описание подпространства траекторий вынужденного движения $\mathcal{N}_u$ модели $\mathcal{N}$. Матрицы X, Y, Z могут не совпадать с матрицами A_{12}, A_{22}, C_2, поскольку мы не требуем, чтобы тройка (A, B, C) была описанием всей модели $\mathcal{N}$. По теореме 2.1 имеем $(A'_{11}, B'_1, C'_1) = (UA_{11}U^{-1},\ UB_1,\ C_1U^{-1})$. Поэтому $P = P' \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Обратно, для любых матриц X, Y и P, $\det P \neq 0$, размеров $q_u \times (q - q_u)$, $(q - q_u) \times (q - q_u)$ и $q \times q$ соответственно матрицы A, B, C вида (2.8) дают описание некоторой модели, подпространство траекторий вынужденного движения которой совпадает с $\mathcal{N}_u$. Это утверждение следует из леммы 2.1. Таким образом, первое множество есть множество M_u вида (2.7б).

Построим второе множество. По лемме 2.1 имеем $\mathcal{N}_x = \operatorname{linc} H_x$. Ограничимся описаниями (A, B, C) в пространстве состояний $\mathbb{R}^q$ с $q = \dim \mathcal{N}_x$ (см. утверждение (v) теоремы 2.3). В этом случае столбцы матрицы H_x линейно независимы и для любых двух описаний (A, B, C), (A', B', C') с $q = \dim \mathcal{N}_x$ имеет место равенство $H_x Q = H'_x$, где Q — некоторая неособенная матрица. Следовательно, $CA^iQ = C'A'^i$ для всех $i \in [0, N-2]$. Легко видеть, что последнее равенство есть условие равенства функций отклика для описаний (A, Q, C) и (A', I, C'). Поэтому из теоремы 2.1 и замечания 1.1 следуют равенства $A = UA'U^{-1}$, $Q = U \cdot I$, $C = C'U^{-1}$, из которых получаем $A = QA'Q^{-1}$, $C = C'Q^{-1}$. Обратно, если $A = QA'Q^{-1}$, $C = C'Q^{-1}$, то тройки (A, B, C) и (A', B', C') описывают модели, у которых подпространства траекторий однородных движений совпадают с $\mathcal{N}_x$ в силу леммы 2.1. Таким образом, второе множество есть M_x. Утверждение 2.1 доказано.

Пусть (A', B', C') — калмановского описание. Определим *калмановское многообразие описаний*:

$$M_{\text{K}} = M_{\text{K}}(A', B', C') = \{(PA'P^{-1}, PB', C'P^{-1}) \colon \det P \neq 0\}.$$

Заметим, что если описание (A', B', C') управляемо (наблюдаемо), то таковым будет каждое описание из $M_{\text{K}}(A', B', C')$, поскольку свойство управляемости (наблюдаемости) инвариантно относительно преобразования (2.1).

Согласно следствию 2.2 имеем $M \supseteq M_{\text{K}}$. Наша цель показать, что $M = M_{\text{K}}$. Нетрудно установить следующее

Утверждение 2.2. *Если для многообразий M_u, M_x, определенных по формулам* (2.7а), (2.7б), *из равенств*

$$Q\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} Q^{-1} = P\begin{bmatrix} A_{11} & X \\ 0 & Y \end{bmatrix} P^{-1}, \quad (C_1, C_2)Q^{-1} = (C_1, Z)P^{-1}$$

следуют равенства $X = A_{12}$, $Y = A_{22}$, $Z = C_2$, $Q = P$, то $M_u \cap M_x = M_{\text{K}}$.

Как известно (см., например, [11]), для всякой квадратной матрицы F единственным образом определены неособенная матрица R и верхняя жорданова матрица F_J такие, что $F = RF_JR^{-1}$. Ввиду этого факта справедливо

Утверждение 2.3. *В калмановском многообразии M_{K} существует единственное описание (A_J, B_J, C_J) такое, что матрица A_J имеет верхнюю жорданову форму.*

Пусть (A_J, B_J, C_J) — описание с матрицей A_J в верхней жордановой форме. Пронумеруем столбцы A_J и строки B_J двойным индексом (i, j): $i \in [1, L]$, $j \in [1, d_i]$, где i — номер жордановой клетки, а j — номер столбца (строки) в клетке с номером i. Обозначим через $B_{J,i}$ группу строк матрицы B_J с номерами $(i, [1, d_i])$. Пусть $n_i \in [0, d_i]$ — номер последней ненулевой строки в клетке $B_{J,i}$ (случай $n_i = 0$ соответствует тому, что все строки в клетке $B_{J,i}$ нулевые).

- Строки матрицы B_J с номерами из множества $(1, [1, n_1]) \cup (2, [1, n_2]) \cup \ldots \cup (L, [1, n_L])$, где слагаемые вида $(i, [1, 0])$ считаем пустыми, называются *управляющими*.

Будем говорить, что *описание (A^Q, B^Q, C^Q) имеет квазижорданову форму*, если

$$(A^Q, B^Q, C^Q) = (WA_JW^{-1}, WB_J, C_JW^{-1}),$$

где (A_J, B_J, C_J) — верхняя жорданова форма, а W — матрица перестановки строк (столбцов), такая, что в произведении WB_J управляющие строки матрицы B_J стоят на первых местах с сохранением порядков следования строк отдельно в группе управляющих и в группе остальных строк.

Утверждение 2.4. *Квазижорданова форма определена единственным образом. Матрица A^Q клеточно-верхнетреугольная, т. е.*

$$A^Q = \begin{bmatrix} A_{11}^Q & A_{12}^Q \\ 0 & A_{22}^Q \end{bmatrix};$$

причем размер клетки A_{11}^Q совпадает с номером последней ненулевой строки в матрице $B^Q = \begin{bmatrix} B_1^Q \\ 0 \end{bmatrix}$ (т. е. с числом управляющих строк).

Доказательство. Первое предложение справедливо в силу единственности матрицы перестановки W. Для доказательства второго заметим, что в левом нижнем углу матрицы A^Q стоят элементы матрицы A_J, расположенные на пересечении строк с индексами $i \in [1, L], j \in [n_i + 1, d_i]$ (интервалы вида $[d_i + 1, d_i]$ считаем пустыми) и столбцов с индексами $i \in [1, L], j \in [1, n_i]$. Учитывая структуру верхней жордановой формы A_J, заключаем, что все такие элементы равны нулю.

Непосредственно из определения подпространства траекторий вынужденного движения (см. § 1) и леммы 2.1 вытекает

Утверждение 2.5. *Пусть (A^Q, B^Q, C^Q) — квазижорданова форма некоторого описания (A, B, C) и A^Q_{11}, B^Q_1 — клетки квазижордановой формы (A^Q, B^Q, C^Q), определенные согласно утверждению 2.4. Выделим в матрице C^Q клетку C^Q_1, соответствующую клетке A^Q_{11}. Тогда два описания (A^Q_{11}, B^Q_1, C^Q_1) и (A, B, C) имеют одно и то же подпространство траекторий вынужденного движения.*

Следствие 2.5. *В условиях теоремы 2.3 и утверждения 2.1 без ограничения общности можно считать, что тройки матриц*

$$\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, B', [C_1, C_2]\right), \quad \left(\begin{bmatrix} A_{11} & X \\ 0 & Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, [C_1, Z]\right) \tag{2.9}$$

имеют квазижорданову форму.

Утверждение 2.6. *Если тройки матриц (2.9) квазижордановы, то из равенств*

$$Q\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} Q^{-1} = P\begin{bmatrix} A_{11} & X \\ 0 & Y \end{bmatrix} P^{-1}, \quad (C_1, C_2)Q^{-1} = (C_1, Z)P^{-1}$$

следуют равенства $X = A_{12}, Y = A_{22}, Z = C_2, Q = P$.

Доказательство следует из единственности квазижордановой формы (см. утверждение 2.4).

Из утверждений 2.1–2.6 вытекает, что $M = M_K$, т. е. многообразие M эквивалентных минимальных описаний стационарной модели $\mathcal{N}$ совпадает с определенным выше калмановским многообразием M_K.

Второе утверждение теоремы 2.1′ доказано.

§ 3. Минимальные описания в пространстве траекторий

На протяжении параграфа используются сведения из алгебры многочленных матриц, вынесенные в § 6.

Определение 3.1. *Калмановское описание (A, B, C) имеет форму восстанавливаемости*, если

$$A = \|A_{ij}\|^{i\in[1,r]}_{j\in[1,r]}, \quad B = \|B_i\|^{i\in[1,r]}, \quad C = \|C_j\|_{j\in[1,r]},$$

где матрицы A_{ij}, B_i, C_j размеров $q_i \times q_j$, $q_i \times m$, $r \times q_j$ имеют следующий вид:

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_{ii}^{(0)} \\ 1 & \dots & 0 & -a_{ii}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{ii}^{(q_i-1)} \end{bmatrix}, \tag{3.1а}$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_{ij}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{ij}^{(q_i-1)} \end{bmatrix}, \quad i \neq j, \tag{3.1б}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} b_{i1}^{(0)} & \dots & b_{im}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}^{(q_i-1)} & \dots & b_{im}^{(q_i-1)} \end{bmatrix}, \tag{3.1в}$$

$$C_j = \alpha_{[0]}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & e_j \\ 0 & \dots & 0 & \end{bmatrix}, \tag{3.1г}$$

e_j — j-й столбец единичной матрицы I_r и $q_1 + \ldots + q_r = q$, $q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_r$.

Замечание 3.1. Отличие формы восстанавливаемости (3.1) от известной канонической формы восстанавливаемости [4, 12, 13] состоит в том, что мы не накладываем ограничений на вид матрицы $\alpha_{[0]}$ в (3.1г). Отсутствие таких ограничений приводит к тому, что описание (A, B, C) в форме восстанавливаемости (3.1) в общем случае не является единственным на множестве эквивалентных преобразований (2.1).

Описание (A, B, C) в форме восстанавливаемости (3.1) всегда наблюдаемо. Действительно, преобразованием (2.1) матрицы A, C можно привести к виду $A^* = PAP^{-1} = A^T$, $C^* = CP^{-1} = \|(e_j, 0_{r\times q_j - 1})\|_{j\in[1,r]}$ (см. [12]). Несложно заметить, что из строк матрицы $H_x^* = [C^*; C^*A^*; \ldots]$ вида (2.6) можно выбрать единичную подматрицу. Следовательно, столбцы матрицы H_x^* линейно независимы, и описание (A, B, C) наблюдаемо.

Обратно, если некоторое калмановское описание (A, B, C) наблюдаемо, то преобразованием (2.1) оно может быть приведено к форме (3.1) (см. [4, 5, 12, 13]). Таким образом, имеет место

Предложение 3.1. *Для любой стационарной модели $\mathcal{N}$ существует минимальное калмановское описание в форме восстанавливаемости* (3.1).

Использование описаний в форме (3.1) позволяет достаточно просто исключать переменные состояния и переходить к системам вида (1.1) в пространстве траекторий.

Определение 3.2. *Расширенной клеточно-тёплицевой матрицей* называется матрица вида

$$G^{+} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p \\ \\ 0 & & & \delta_0 & \delta_1 & \dots & \delta_p \end{bmatrix}, \tag{3.2а}$$

где γ_j, $j \in [0,p]$, — клетки размеров $r \times (r+m)$ такие, что многочленная матрица $\gamma(s) = \gamma_0 s^0 + \ldots + \gamma_p s^p$ *строчно-минимальна* (см. определение 6.3), и «расширение» $\delta(s) = \delta_0 s^0 + \ldots + \delta_p s^p$ имеет вид

$$\delta(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s^{p_r - p_1} & 0 & \\ 0 & s & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & s^{p_r - p_2} & \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \gamma(s); \tag{3.2б}$$

здесь p_i, $i \in [1,r]$, — степени строк $\gamma(s)$, $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_r = p$. Подматрицу $\gamma = (\gamma_0\gamma_1 \ldots \gamma_p)$ назовем *образующей* для матрицы G^{+}. Заметим, что структура расширения $\delta(s)$ такова, что из РКТ-матрицы G^{+} путем удвоения некоторых строк можно получить клеточно-тёплицеву матрицу

$$G^{*} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p & 0 & \dots & 0 \\ & \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_i = \begin{bmatrix} \gamma_i \\ \delta_i \end{bmatrix}. \tag{3.2в}$$

Теорема 3.1. *Калмановское описание* (1.2) *эквивалентно системе* (1.1) *с РКТ-матрицей G^{+} вида* (3.2) *такой, что*

$$\begin{aligned} &\gamma(s) = (\alpha(s), -\beta(s)), \\ &\alpha(s) = a(s)\alpha_{[0]}, \quad \beta(s) = \alpha(s)D + b(s), \\ &a(s) = \|a_{ij}(s)\|_{j\in[1,r]}^{i\in[1,r]}, \quad b(s) = \|b_{ij}(s)\|_{j\in[1,m]}^{i\in[1,r]}, \\ &a_{ij}(s) = a_{ij}^{(0)} s^0 + \ldots + a_{ij}^{(q_i-1)} s^{q_i-1} + \delta_{ij} s^{q_i}, \\ &b_{ij}(s) = b_{ij}^{(0)} s^0 + \ldots + b_{ij}^{(q_i-1)} s^{q_i-1}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. При этом строки матрицы G^{+} линейно независимы, т. е. описание (1.1) *с матрицей G^{+} минимально в смысле определений из § 1.*

Доказательство сводится к двум утверждениям.

Утверждение 3.1. *Пусть система (1.2) имеет форму восстанавливаемости:*

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_r \end{bmatrix}(k+1) = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_r \end{bmatrix}(k) + \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_r \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(k) = \alpha_{[0]}^{-1}((x_{1,q_1}; x_{2,q_2}; \dots ; x_{r,q_r})(k) + Du(k)),$$
$$k \in [1, N], \tag{3.4}$$

где $X_i = [x_{i,1}; \dots ; x_{i,q_i}]$, $i \in [1, r]$, *и матрицы* $\alpha_{[0]}$, A_{ij}, B_i *определены в* (3.1). *Тогда решения системы* (3.4) *удовлетворяют системе уравнений* (1.1) *с матрицей*

$$G = [G_1; \dots ; G_r], \tag{3.5}$$

где $G_i \in \mathbb{R}^{(N-q_i)\times N(r+m)}$,

$$G_i = \begin{bmatrix} \gamma_0(i) & \gamma_1(i) & \dots & \gamma_{q_i}(i) & 0 & \dots & 0 \\ & \gamma_0(i) & \gamma_1(i) & \dots & \gamma_{q_i}(i) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0(i) & \gamma_1(i) & \dots & \gamma_{q_i}(i) \end{bmatrix},$$

$$\gamma_k(i) = (\alpha_{i1}^{(k)}, \dots, \alpha_{ir}^{(k)}, -\beta_{i1}^{(k)}, \dots, -\beta_{im}^{(k)}), \quad \alpha_{ij}^{(q_i)} = 1, \quad \beta_{ij}^{(q_i)} = 0,$$
$$\gamma_k(i) \in \mathbb{R}^{1\times(r+m)}, \quad k \in [0, q_i], \qquad q_1 \leqslant \dots \leqslant q_r.$$

Нумерация элементов $\alpha_{ij}^{(k)}$, $\beta_{ij}^{(k)}$ *многочленных матриц* $\alpha(s)$, $\beta(s)$, *определенных в* (3.3), *аналогична нумерации элементов* $a_{ij}^{(k)}$, $b_{ij}^{(k)}$ *в матрицах* $a(s)$, $b(s)$.

Отметим, что число строк в матрицах G_i зависит от номера i и матрица G вида (3.5) отличается от матрицы G^+ вида (3.2) только перестановкой строк.

Доказательство проведем для $\alpha_{[0]} = I$, поскольку обобщение на случай $\alpha_{[0]} \neq I$ не составляет труда. Выберем произвольное $i \in [1, r]$. Покажем, что если траектория $z = (y(1); u(1); \dots ; y(N); u(N)) \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$ удовлетворяет (3.4), то $G_i z = 0$. Выпишем i-ю группу уравнений системы (3.4):

$$X_i(k+1) = (A_{i1}, \dots, A_{ii}, \dots, A_{ir}) \cdot (X_1; \dots ; X_r)(k) + B_i u(k),$$
$$k \in [1, N]. \tag{3.6}$$

Учитывая вид матриц A_{ij}, B_i (см. (3.1)), из последней строки (3.6) получаем

$$\begin{aligned} x_{i,q_i}&(k+q_i) + x_{i,q_i-1}(k+q_i-1) \\ &+ a_{i1}^{(q_i-1)} x_{1,q_1}(k+q_i-1) + \dots + a_{ir}^{(q_i-1)} x_{r,q_r}(k+q_i-1) \\ &= b_{i1}^{(q_i-1)} u_1(k+q_i-1) + \dots + b_{im}^{(q_i-1)} u_m(k+q_i-1), \end{aligned}$$
$$k \in [1, N-q_i+1]. \tag{3.7}$$

Выразим $x_{i,q_i-1}(k+q_i-1)$ с помощью предпоследнего уравнения системы (3.6):

$$\begin{aligned} x_{i,q_i-1}&(k+q_i-1)+x_{i,q_i-2}(k+q_i-2)\\ &+a_{i1}^{(q_i-2)}x_{1,q_1}(k+q_i-2)+\ldots+a_{ir}^{(q_i-2)}x_{r,q_r}(k+q_i-2)\\ &=b_{i1}^{(q_i-2)}u_1(k+q_i-2)+\ldots+b_{im}^{(q_i-2)}u_m(k+q_i-2),\\ &\qquad k\in[1,N-q_i+1]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Используя (3.8), из (3.7) получим

$$\begin{aligned} x_{i,q_i}&(k+q_i)+x_{i,q_i-2}(k+q_i-2)\\ &+a_{i1}^{(q_i-1)}x_{1,q_1}(k+q_i-1)+\ldots+a_{ir}^{(q_i-1)}x_{r,q_r}(k+q_i-1)\\ &+a_{i1}^{(q_i-2)}x_{1,q_1}(k+q_i-2)+\ldots+a_{ir}^{(q_i-2)}x_{r,q_r}(k+q_i-2)\\ &=b_{i1}^{(q_i-1)}u_1(k+q_i-1)+\ldots+b_{im}^{(q_i-1)}u_m(k+q_i-1)\\ &+b_{i1}^{(q_i-2)}u_1(k+q_i-2)+\ldots+b_{im}^{(q_i-2)}u_m(k+q_i-2),\\ &\qquad k\in[1,N-q_i+1]. \end{aligned}$$

Затем таким же образом заменим переменную $x_{i,q_i-2}(k+q_i-2)$ ее выражением из третьего снизу уравнения системы (3.6), и т. д. Нетрудно заметить, что, проделав q_i-1 подстановок, придем к уравнению

$$\begin{aligned} x_{i,q_i}&(k+q_i)+a_{i1}^{(0)}x_{1,q_1}(k)+\ldots+a_{ir}^{(0)}x_{r,q_r}(k)\\ &+a_{i1}^{(1)}x_{1,q_1}(k+1)+\ldots+a_{ir}^{(1)}x_{r,q_r}(k+1)\\ &+\ldots+a_{i1}^{(q_i-1)}x_{1,q_1}(k+q_i-1)+\ldots+a_{ir}^{(q_i-1)}x_{r,q_r}(k+q_i-1)\\ &=b_{i1}^{(0)}u_1(k)+\ldots+b_{im}^{(0)}u_m(k)+b_{i1}^{(1)}u_1(k+1)+\ldots+b_{im}^{(1)}u_m(k+1)\\ &+\ldots+b_{i1}^{(q_i-1)}u_1(k+q_i-1)+\ldots+b_{im}^{(q_i-1)}u_m(k+q_i-1),\\ &\qquad k\in[1,N-q_i+1]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Из (3.4) следует, что уравнение для $y(k)$ имеет вид

$$y_j(k)=x_{j,q_j}(k)+d_ju(k),\qquad j\in[1,r],\ k\in[1,N],$$

где d_j — j-я строка матрицы D и $\alpha_{[0]}=I$. Из уравнения (3.9) получим

$$\begin{aligned} y_i&(k+q_i)+a_{i1}^{(0)}y_1(k)+\ldots+a_{ir}^{(0)}y_r(k)\\ &+\ldots+a_{i1}^{(q_i-1)}y_1(k+q_i-1)+\ldots+a_{ir}^{(q_i-1)}y_r(k+q_i-1)\\ &=b_{i1}^{(0)}u_1(k)+\ldots+b_{im}^{(0)}u_m(k)\\ &+\ldots+b_{i1}^{(q_i-1)}u_1(k+q_i-1)+\ldots+b_{im}^{(q_i-1)}u_m(k+q_i-1)\\ &+d_iu(k+q_i)+a_{i1}^{(0)}d_1u(k)+\ldots+a_{ir}^{(0)}d_ru(k)\\ &+\ldots+a_{i1}^{(q_i-1)}d_1u(k+q_i-1)+\ldots+a_{ir}^{(q_i-1)}d_ru(k+q_i-1),\\ &\qquad k\in[1,N-q_i]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Запишем равенство (3.10) через строки $a_i(s)$ и $b_i(s)$ матриц $a(s)$ и $b(s)$ вида (3.3) (s понимается как оператор сдвига). Окончательно получим

$$a_i(s)y(k) = (b_i(s) + a_i(s)D)u(k), \quad k \in [1, N - q_i].$$

Следовательно, $G_i z = 0$.

Утверждение 3.2. *Строки матрицы G^+ линейно независимы и размерность правого нуль-пространства $\mathcal{N}(G^+)$ равна $q + Nm$, где $q = q_1 + \ldots + q_r$.*

Доказательство. Согласно определению матрица $\gamma(s)$ (см. (3.3)) является строчно-минимальной и не имеет нулевых строк; ее ранг максимален (см. предложения 6.7 и 6.8, ниже). Поэтому матрица G^+ не имеет нулевых строк. Несложно убедиться, что перестановкой строк матрицу G^+ можно привести к некоторому клеточному нижнетреугольному виду G^+_*. В силу строчной минимальности матрицы $\gamma(s)$ клетки на диагонали матрицы G^+_* имеют линейно независимые строки. Отсюда следует линейная независимость строк G^+. Затем простым подсчетом числа строк и столбцов определяется размерность правого нуль-пространства $\mathcal{N}(G^+)$ матрицы G^+.

Доказательство теоремы 3.1. Ввиду предложения 3.1 для (1.2) существует эквивалентная система (3.4). По утверждению 3.1 многообразие траекторий системы (3.4) вложено в правое нуль-пространство $\mathcal{N}(G)$ матрицы G вида (3.5), которая отличается от G^+ (см. (3.2), (3.3)) только перестановкой строк. Из утверждения 3.2 и следствия 2.4 вытекает равенство $\mathcal{N} = \mathcal{N}(G^+)$.

Замечание 3.2. Для перехода от наблюдаемого калмановского описания (1.2) к описанию без переменных состояния (1.1), (3.3) достаточно привести систему (1.2) в эквивалентную форму восстанавливаемости (3.1). Обратный переход — от (3.3) к (1.2), (3.1) — можно осуществить на основании алгоритма Воловича [5] (для дискретного случая см. [14, 15]). Алгоритмы перехода от систем (1.1), (3.3) к калмановским системам (1.2) в форме, отличной от (3.1), можно построить, следуя работе [16].

Предложение 3.2 [4]. *Для матриц A вида (3.1) и $\alpha(s)$ вида (3.3) имеет место равенство* $\det(sI - A) = \mathrm{const} \cdot \det \alpha(s)$.

Следствие 3.1. *Для стационарных моделей $\mathcal{N}$ со свободными начальными условиями минимальными описаниями в пространстве траекторий являются те (и только те) системы (1.1), у которых матрицу G путем умножения слева на некоторую неособенную матрицу можно привести к виду (3.2).*

Доказательство. Пусть G — матрица с линейно независимыми строками, правое нуль-пространство которой совпадает с некоторой стационарной моделью $\mathcal{N}$. Тогда (и только тогда) система (1.1) с матрицей G является минимальным описанием стационарной модели $\mathcal{N}$ в пространстве траекторий. Согласно предложению 3.1 для $\mathcal{N}$ существует калмановское описание (1.2) в форме (3.1). По теореме 3.1 соответствующая этому описанию РКТ-матрица G^+ (см. (3.2), (3.3)) имеет линейно независимые строки и ее правое нуль-пространство совпадает с $\mathcal{N}$. Тогда матрицы G и G^+ связаны между собой левым умножением на некоторую неособенную матрицу. Следствие 3.1 доказано.

Среди всех минимальных описаний данной стационарной модели $\mathcal{N}$ можно выделить подкласс описаний с РКТ-матрицами. Согласно теореме 3.1 и следствию 3.1 этот подкласс не пуст и все его элементы связаны между собой левыми умножениями на неособенные матрицы. В § 5 описано множество таких умножений (сохраняющих структуру РКТ-матриц) и установлено его соответствие некоторой алгебре многочленных матриц.

Наличие в классе эквивалентных РКТ-матриц более одного элемента обусловлено неединственностью формы (3.1) на множестве преобразований вида (2.1) (см. замечание 3.1) и неединственностью строчно-минимальной формы матрицы $\gamma(s)$ на множестве левых унимодулярных преобразований.

Следствие 3.2. *Два* РКТ-*описания с образующими подматрицами* γ *и* γ' *эквивалентны тогда (и только тогда), когда множества строчно-минимальных форм многочленных матриц* $\gamma(s)$, $\gamma'(s)$ (*см.* (3.2)) *имеют непустое пересечение.*

§ 4. Системы уравнений «авторегрессия — скользящее среднее». Многочленное (операторное) представление

Определение 4.1. Матричное линейное разностное уравнение

$$\alpha_0 y_k + \ldots + \alpha_p y_{k+p} = \beta_0 u_k + \ldots + \beta_p u_{k+p}, \quad k \in [1, N-p], \tag{4.1}$$

относительно вектор-функций $y_k \in \mathbb{R}^r$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ с постоянными матричными коэффициентами $\alpha_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\beta_i \in \mathbb{R}^{r\times m}$ называется [3, с. 29] *системой уравнений «авторегрессия — скользящее среднее»* (АРСС). Многочленные матрицы

$$\beta(s) = \beta_p s^p + \beta_{p-1}s^{p-1} + \ldots + \beta_0, \quad \alpha(s) = \alpha_p s^p + \alpha_{p-1}s^{p-1} + \ldots + \alpha_0$$

называются [4, п. 6.2.3; 17, с. 62] соответственно *числителем* и *знаменателем* матричного уравнения (4.1). Предполагается, что матрица знаменателя неособенная, т. е. определитель $\det \alpha(s)$ обращается в нуль не более чем в конечном числе точек $s \in \mathbb{C}$ или (эквивалентно) $s \in \mathbb{R}$.

Системы вида (4.1) возникают, в частности, при описании электрических цепей и механических систем как результат дискретизации уравнений Кирхгофа и Лагранжа [18, с. 376]. Матричное уравнение (4.1) допускает эквивалентную форму записи

$$\begin{gathered} \gamma_0 w_k + \ldots + \gamma_p w_{k+p} = 0, \quad k \in [1, N-p], \\ \gamma_i = (\alpha_i, -\beta_i), \quad w_j = (y_j; u_j), \\ \gamma(s) = (\alpha(s), -\beta(s)) = \gamma_0 s^0 + \ldots + \gamma_p s^p, \end{gathered} \tag{4.2}$$

которая соответствует системе (1.1) с клеточно-тёплицевой матрицей размеров $(N-p)r \times N(r+m)$:

$$G = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p & 0 & \cdots & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

В этом параграфе показано, что множество решений системы (4.1)–(4.3) в общем случае не сводится к стационарной модели $\mathcal{N}$ вида (1.4).

В предположении, что длина N интервала наблюдения конечна, мы построим класс описаний вида (4.1), в определенном смысле эквивалентных матричному уравнению (4.1), и покажем, что связь с аналогичным результатом для случая $N = \infty$ опирается на введенное в § 3 понятие PKT-матрицы.

Определение 4.2. *Описание* (4.1) *минимально*, если строки матрицы G линейно независимы.

Сформулируем и докажем простой критерий минимальности описания (4.1). Напомним, при $r \leqslant t$ ранг $(r \times t)$-матрицы $\gamma(s)$ равен наибольшему возможному значению r тогда (и только тогда), когда для любой ненулевой r-строки $\eta(s)$ произведение $\eta(s)\gamma(s)$ не равно нулю хотя бы в одной точке $s \in \mathbb{C}$ или (эквивалентно) $s \in \mathbb{R}$.

Предложение 4.1. *При условии $N \geqslant 2(p+1)$ описание* (4.1) *минимально, если* (*и только если*) *ранг многочленной матрицы $\gamma(s)$ равен наибольшему возможному значению r.*

Доказательство. Пусть описание (4.1) не минимально, т. е. строки матрицы G линейно зависимы. Тогда существует строка $\eta \neq 0$ такая, что $\eta G = 0$. Пронумеруем элементы η двойным индексом (j,k) так, что $j \in [1,r]$, $k \in [1, N-p]$, где k соответствует номеру клеточной строки

$$G_k = (\underbrace{0,\dots,0}_{k-1}, \gamma_0, \dots, \gamma_p, 0, \dots, 0),$$

а j — номеру строки внутри G_k. Тогда для многочленной строки

$$\eta(s) = \|\eta_j(s)\|_{j\in[1,r]}, \quad \eta_j(s) = \sum_{k=1}^{N-p} \eta_{(j,k)} s^{k-1},$$

имеет место тождество $\eta(s)\gamma(s) \equiv 0$. Обратно, пусть существует многочленная строка $\eta(s) \not\equiv 0$ такая, что $\eta(s)\gamma(s) \equiv 0$. Представим $\eta(s)$ и $\gamma(s)$ в виде $\eta(s) = \eta_0 s^0 + \ldots + \eta_d s^d$ и $\gamma(s) = \gamma_0 s^0 + \ldots + \gamma_p s^p$. Тогда из тождества $\eta(s)\gamma(s) \equiv 0$ следует

$$\begin{aligned}
&\eta_0\gamma_0 = 0,\\
&\eta_1\gamma_0 + \eta_0\gamma_1 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\eta_{d-1}\gamma_p + \eta_d\gamma_{p-1} = 0,\\
&\eta_d\gamma_p = 0,
\end{aligned}$$

т. е. $\overline{\eta}\overline{G} = 0$, где $\overline{\eta} = (\eta_0, \dots, \eta_d)$ и $\overline{G} \in \mathbb{R}^{(d+1)r\times N(r+m)}$ — подматрица матрицы G вида

$$\overline{G} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p & & \cdots & 0 & & \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p & \cdots & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & & & 0 \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p & & \end{bmatrix}.$$

Следовательно, существует многочленная строка $\eta = (\overline{\eta}, 0) \neq 0$ такая, что $\eta G = 0$. В рассуждениях неявно предполагалось, что размеры матрицы G позволяют выбрать в ней подматрицу $\overline{G}$. Матрица G содержит подматрицу $\overline{G}$, если $N \geqslant 2(p+1)$, так как число d всегда можно выбрать меньшим $p+1$. Предложение 4.1 доказано.

Ввиду неособенности знаменателя $\alpha(s)$ системы АРСС вида (4.1) имеем равенство $\operatorname{rank} \gamma(s) = r$, т. е. все системы АРСС минимальны в смысле определения 4.2. Обратно, если $\operatorname{rank} \gamma(s) = r$, то можно выбрать неособенную подматрицу из столбцов матрицы $\gamma(s)$, что следует из структуры канонической диагональной формы Смита многочленной матрицы [11]. Эту подматрицу можно принять в качестве знаменателя $\alpha(s)$ и поставить матрице $\gamma(s)$ в соответствие некоторую систему АРСС вида (4.1).

На основе вышесказанного можно ввести следующее

Определение 4.3. Многочленная матрица $\gamma(s)$ (см. (4.2)) называется *многочленным* (*операторным*) *представлением* системы (4.1), (4.2).

Опишем структуру множества решений системы (4.1).

Лемма 4.1. *Пусть $\gamma^*(s) = \gamma_0^* s^0 + \ldots + \gamma_p^* s^p$ — строчно-минимальная форма матрицы $\gamma(s)$ (см. определение 6.3), и пусть G^{*+} — РКТ-матрица вида (3.2) с образующей подматрицей $\gamma^* = (\gamma_0^*, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_p^*)$ и числом клеточных столбцов $N \geqslant 2(p+1)$. Тогда ненулевые строки матрицы G^{*+} линейно независимы. Матрица G^{*+} не имеет нулевых строк, если (и только если) линейно независимы строки многочленной матрицы $\gamma(s)$.*

Доказательство следует из предложений 6.7, 6.8 (см. ниже) и утверждения 3.2.

Следствие 4.1. *Описание (1.1) с РКТ-матрицей G^+ вида (3.2) минимально, если (и только если) матрица G^+ не имеет нулевых строк.*

Теорема 4.1. *Линейное многообразие $\mathcal{N}$ всех решений*

$$z = (y_1; u_1; \ldots; y_N; u_N) \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$$

системы (4.1) уравнений АРСС представимо в виде суммы подпространства стационарных решений $\mathcal{N}'$ и подпространства нестационарных решений $\mathcal{N}''$:

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}' + \mathcal{N}''.$$

Для первого слагаемого $\mathcal{N}'$ существует калмановское описание (1.2). Второе слагаемое $\mathcal{N}''$ не вложено в $\mathcal{N}'$, т. е. $\mathcal{N}'' \not\subseteq \mathcal{N}'$, и образовано траекториями $z'' = (0; \ldots; 0; *; \ldots; *)$ с нулевым начальным отрезком и ненулевым окончанием $(*; \ldots; *)$, длина которого не превосходит величины $d = (p - q_1)(r-1)(r+m)$, где q_1 — наименьший строчный индекс (см. ниже определение 6.3) многочленной матрицы $\gamma(s)$.

Заметим, что с ростом длины N интервала наблюдения относительная длина ненулевых участков траекторий $z'' \in \mathcal{N}''$ стремится к нулю.

Числовая матрица $\gamma = (\gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_p)$ называется *строчно-минимальной*, если строчно-минимальна соответствующая многочленная матрица $\gamma(s)$.

Доказательство теоремы 4.1. Умножая слева на некоторую неособенную матрицу P, можно привести матрицу G (см. (4.3)) к виду

$$G^* = PG = \left[\begin{array}{c:c} \overline{G}^+ & 0 \\ \hdashline 0 & \Delta G \end{array}\right], \quad d = (p - q_1)(r - 1)(r + m),$$

где $\overline{G}^+$ — РКТ-матрица вида (3.2), образующей подматрицей которой является строчно-минимальная форма γ^* матрицы $\gamma = (\gamma_0\gamma_1 \dots \gamma_p)$ вида (4.2), и ΔG — некоторый «остаток». Действительно, пусть $\gamma^*(s)$ — строчно-минимальная форма $\gamma(s)$. Тогда $\gamma^*(s)$ и $\gamma(s)$ связаны левым унимодулярным преобразованием $u(s)$: $\gamma(s) = u(s)\gamma^*(s)$ (см. § 6). Пользуясь линейной независимостью строк матрицы ${\gamma^*}_{[0]}$ (см. определение 6.3), несложно получить неравенство $\deg u_{ij}(s) \leqslant |p_i - q_j|$, где p_i — степень i-й строки $\gamma(s)$ и q_j — степень j-й строки $\gamma^*(s)$ (без ограничения общности считаем, что $p_1 \leqslant \dots \leqslant p_r = p$, $q_1 \leqslant \dots \leqslant q_r$). Ясно, что $\gamma^*(s) = u(s)^{-1}\gamma(s)$, и степени элементов $u(s)^{-1}$ ограничены сверху числом $(p_r - q_1)(r-1) = (p - q_1)(r-1)$, так как элементы $u(s)^{-1}$ суть $(r-1)$-миноры матрицы $u(s)$ с точностью до умножения на константу $\det u(s)$. После этого несложно по аналогии с доказательством предложения 4.1 построить из коэффициентов многочленов обратной матрицы $u(s)^{-1}$ числовую матрицу P, связывающую матрицы G^* и G по формуле $G^* = PG$. В силу унимодулярности $u(s)^{-1}$ матрица P оказывается произведением матриц элементарных преобразований [11], и потому она неособенная. Пусть G^+ — РКТ-матрица, построенная по строчно-минимальной форме γ^* матрицы γ и имеющая то же число столбцов, что и матрица G^*. По построению матрицы G^+ и $\overline{G}^+$ имеют одну и ту же образующую подматрицу γ^*. Из соотношения $\gamma(s) = u(s)\gamma^*(s)$ следует, что все строки матрицы G вложены в линейную оболочку строк матрицы G^+. Поэтому $\mathcal{N}(G^*) = \mathcal{N}(G) \supseteq \mathcal{N}(G^+)$. Согласно предложению 4.1 и лемме 4.1 строки матриц G и G^+ линейно независимы. Следовательно, размерности подпространств $\mathcal{N}(G)$ и $\mathcal{N}(G^+)$ определяются простым подсчетом числа строк:

$$\dim \mathcal{N}(G) = N(r+m) - (N-p)r = Nm + pr,$$
$$\dim \mathcal{N}(G^+) = Nm + q = Nm + q_1 + \dots + q_r \leqslant Nm + pr.$$

Заметим, что $\dim \mathcal{N}(G^+) = \dim \mathcal{N}(G)$ тогда (и только тогда), когда $q_1 = q_2 = \dots = q_r = p$. Это эквивалентно линейной независимости строк числовой матрицы γ_p из (4.2).

Обозначим $\mathcal{N}' = \mathcal{N}(G^+)$, и пусть $\mathcal{N}''$ — ортогональное дополнение $\mathcal{N}'$ до $\mathcal{N}(G)$. Всякий вектор $z \in \mathcal{N}(G)$ представим в виде суммы ортогональных слагаемых $z = z' + z''$, где $z' \in \mathcal{N}'$, $z'' \in \mathcal{N}''$. Обозначим через $\overline{z}$ вектор из первых $N(r+m) - d$ элементов z. Аналогично определим векторы $\overline{z}'$ и $\overline{z}''$ так, что $\overline{z} = \overline{z}' + \overline{z}''$. Из равенства $\mathcal{N}(G^*) = \mathcal{N}(G)$ следует равенство $G^* z = 0$, откуда $\overline{G}^+\overline{z} = \overline{G}^+(\overline{z}' + \overline{z}'') = 0$. Поскольку $\overline{G}^+\overline{z}' = 0$ (ввиду включения $z' \in \mathcal{N}'$ и структуры матрицы G^+), имеем $\overline{G}^+\overline{z}'' = 0$. Покажем, что

$\overline{z}'' = 0$. Действительно, в противном случае вектор $(\overline{z}''; 0)$ принадлежит $\mathcal{N}'$, и траекторию $z'' = (\overline{z}''; *) \in \mathcal{N}''$ можно представить в виде суммы ортогональных слагаемых $(\overline{z}''; 0)$ и $(0; *)$, первое из которых принадлежит $\mathcal{N}'$. Это противоречит взаимной ортогональности подпространств $\mathcal{N}'$ и $\mathcal{N}''$. Следовательно, всякий вектор $z'' \in \mathcal{N}''$ имеет вид $(0; *)$, и при этом длина ненулевого отрезка $*$ не превосходит $d = (p - q_1)(r-1)(r+m)$. Теорема 4.1 доказана.

Следствие 4.2. *Система* (4.1) *эквивалентна некоторому калмановскому описанию* (1.2) *тогда* (*и только тогда*), *когда строки матричного коэффициента* γ_p *в* (4.2) *линейно независимы, т. е.* $p = q_1$.

Обозначим $\overline{\mathcal{N}}' = \mathcal{N}(\overline{G}^+) \subset \mathbb{R}^{l-d}$, где $\mathbb{R}^{l-d}$ — линейная оболочка первых $l-d$ ортов пространства $\mathbb{R}^l$ и $l = N(r+m)$.

Предложение 4.2. *Имеет место следующее соотношение*:

$$\overline{z} \in \overline{\mathcal{N}}' \iff \exists \Delta z \in \mathbb{R}^d \colon z = (\overline{z}; \Delta z) \in \mathcal{N}' \subset \mathbb{R}^l. \tag{4.4}$$

Доказательство. Достаточность очевидна. Необходимость легко показать с помощью калмановского описания множества траекторий $\overline{\mathcal{N}}'$ (окончание Δz однозначно задается произвольным доопределением траектории входа).

Предложение 4.2 утверждает, что подпространство $\overline{\mathcal{N}}'$ стационарных решений в $\mathbb{R}^{l-d}$ можно эквивалентным образом определить через условие продолжимости (4.4).

Опишем класс всех систем АРСС, в определенном смысле эквивалентных матричному уравнению (4.1). Начнем с рассмотрения предельного случая $N = \infty$.

Теорема 4.2. *При* $N = \infty$ *множество всех систем* АРСС, *эквивалентных системе* (4.1), *описывается левыми умножениями многочленного представления* $\gamma(s)$ (*см.* (4.2)) *на унимодулярные матрицы.*

Доказательство. Несложно показать, что левое умножение $\gamma(s)$ на унимодулярную матрицу не изменяет множества решений системы (4.1). Для этого следует учесть, что унимодулярная матрица является произведением матриц элементарных преобразований [11], каждое из которых не сужает множества решений, и что матрица, обратная к унимодулярной, также унимодулярная. Остается доказать, что умножение на любую матрицу, отличную от унимодулярной, изменяет множество решений. Действительно, пусть $\det u(s) \neq \text{const}$. Тогда $\det u(s)\alpha(s) \neq \det \alpha(s)$. Обозначим через (A, B, C) и (A_u, B_u, C_u) минимальные описания вида (1.2) подмножеств стационарных решений систем $\gamma(s)$ и $u(s)\gamma(s)$. Без ограничения общности можно считать, что матрицы $\gamma(s)$ и $u(s)\gamma(s)$ строчно-минимальны. Согласно предложению 3.2 $\det(sI - A) \neq \det(sI - A_u)$, т. е. матрицы A и A_u имеют различные жордановы формы. В силу теоремы 2.1$'$ описания (A, B, C), (A_u, B_u, C_u) не эквивалентны. Следовательно, среди решений системы $u(s)\gamma(s)$ существует траектория, отличающаяся начальным отрезком от любой траектории системы $\gamma(s)$. Теорема 4.2 доказана.

Обозначим $d_N = d/(r+m)$, где d определено в теореме 4.1.

Определение 4.4. Две системы АРСС вида (4.1) с конечными $N \geqslant p+1+d_N$ называются *квазиэквивалентными*, если существует число $N' \in [p+1, N-d_N]$ такое, что все траектории длины N' первой системы являются траекториями второй системы, и наоборот.

Следствие 4.3. *Две системы* АРСС *вида* (4.1) *квазиэквивалентны тогда* (*и только тогда*), *когда множества строчно-минимальных форм их многочленных представлений имеют непустое пересечение.*

Из следствия 4.3 и определения 6.3 (см. ниже) строчно-минимальной формы вытекает

Теорема 4.3. *Множество всех систем* АРСС, *квазиэквивалентных данной системе* (4.1), *описывается левыми умножениями многочленного представления* $\gamma(s)$ (*см.* (4.2)) *на унимодулярные матрицы.*

§ 5. Эквивалентные преобразования, сохраняющие структуру РКТ-матриц

Ограничимся рассмотрением матриц без нулевых строк. Ясно, что множество эквивалентных преобразований РКТ-матрицы исчерпывается левыми умножениями на некоторые неособенные матрицы. Выделим среди этих умножений преобразование, которое сохраняет структуру РКТ. Пусть G и G' — РКТ-матрицы. Обозначим через $\gamma = (\gamma_0\gamma_1\dots\gamma_p)$ и $\delta = (\delta_0\delta_1\dots\delta_p)$ образующую подматрицу и подматрицу расширения (см. (3.2)). Введем многочленную матрицу $\gamma(s) = \gamma_0 s^0 + \dots \gamma_p s^p$ (по определению $\gamma(s)$ строчно-минимальна) и матрицу $\varepsilon = (\varepsilon_0\varepsilon_1\dots\varepsilon_p)$, $\varepsilon_i = \begin{bmatrix}\gamma_i\\ \delta_i\end{bmatrix}$. Число строк матрицы ε обозначим через σ. Аналогично определим величины γ', $\gamma'(s)$, ε', δ' σ' для G'.

Теорема 5.1. *Пусть* РКТ-*матрицы* G *и* G' *связаны эквивалентным преобразованием*

$$\exists P\colon \det P \neq 0, \quad PG = G'. \tag{5.1}$$

Тогда (*и только тогда*) *существует многочленная матрица* $\rho(s)$ *такая, что*

$$\det\rho(s) = \mathrm{const} \neq 0, \quad \rho(s)\gamma(s) = \gamma'(s), \tag{5.2}$$

и одновременно выполняются равенство $\sigma = \sigma'$ *и соотношение*

$$\exists \pi \in \mathbb{R}^{\sigma\times\sigma}\colon \quad \pi\varepsilon = \varepsilon'. \tag{5.3}$$

Доказательство. Предположим, что существует матрица P такая, что $PG = G'$. Пронумеруем строки матрицы G двойными индексами (j,k) так, что $j \in [1,r]$, $k \in [1, N-q_r]$, где j соответствует номеру подматрицы G_j в (3.5), а k — номеру строки внутри G_j (отметим, что при доказательстве предложения 4.1 использовалась аналогичная нумерация). Таким же образом пронумеруем столбцы матрицы P:

$$P = (\rho_{(1,1)},\dots,\rho_{(1,N-q_1)},\dots,\rho_{(r,1)},\dots,\rho_{(r,N-q_r)}).$$

Элемент с номером (i,l) в столбце $\rho_{(j,k)}$ обозначим через $\rho_{(i,l),(j,k)}$. Установим соответствие между матрицей P и некоторой многочленной матрицей $\rho(s)$ размеров $r \times r$ по формуле

$$\rho_{ij}(s) = \sum_{k=1}^{N-q_j} \rho_{(i,1),(j,k)} s^{k-1}. \tag{5.4}$$

Заметим, что в формуле (5.4) степени строк матрицы $\rho(s)$ ограничены сверху некоторыми числами, определяемыми через степени строк матрицы $\gamma(s)$. Действительно, согласно следствию 3.2 и предложению 6.9 (см. ниже) матрицы $\gamma(s)$ и $\gamma'(s)$ имеют одни и те же степени строк:

$$\deg \rho_i(s)\gamma(s) = \deg \gamma_i'(s) = \deg \gamma_i(s), \quad i \in [1,r],$$

где $\gamma_i(s)$ обозначает i-ю строку матрицы $\gamma(s)$. Отсюда получаем равенство $\sigma = \sigma'$ и унимодулярность матрицы $\rho(s)$, определенной по формуле (5.4). Таким образом, верна импликация (5.1)$\Rightarrow$(5.2). Кроме того, справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\deg \rho_{ij}(s) \in [0, \deg \gamma_i(s) - \deg \gamma_j(s)], \quad \text{если } \deg \gamma_i(s) \geqslant \deg \gamma_j(s),\\ \deg \rho_{ij}(s) = 0, \quad \text{если } \deg \gamma_i(s) < \deg \gamma_j(s).\end{gathered} \tag{5.5}$$

Действительно, в противном случае матрица $\gamma(s)$ не может быть строчно-минимальной. В силу (5.4), (5.5) условие (5.2) эквивалентно равенству

$$\varphi\varepsilon = \gamma' \tag{5.6}$$

с некоторой числовой матрицей $\varphi \in \mathbb{R}^{r\times\sigma}$, составленной из коэффициентов многочленов $\rho_{ij}(s)$ (см. (5.4)). Остается дополнить матрицу φ до искомой матрицы $\pi \in \mathbb{R}^{\sigma\times\sigma}$, а уравнение (5.6) — до уравнения $\pi\varepsilon = \varepsilon'$. Это легко сделать, используя ограничение (5.5): достаточно заметить, что строки дополняющей подматрицы $\Delta\pi = \pi\backslash\varphi$ состоят из нулей и элементов некоторых строк матрицы φ, сдвинутых на несколько клеток вправо. Таким образом, (5.2) $\Leftrightarrow$ (5.6) $\Rightarrow$ (5.3). Очевидна импликация (5.3) $\Leftrightarrow$ (5.1). Действительно, из равенства $\pi\varepsilon = \varepsilon'$ следует уравнение

$$\begin{bmatrix} \pi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi \end{bmatrix} G^* = G^{*\prime}$$

для клеточно-тёплицевых матриц G^*, $G^{*\prime}$ вида (3.2в). Отсюда легко получить уравнение $PG = G'$, удалив повторяющиеся строки матриц G^*, $G^{*\prime}$ и соответствующие им строки и столбцы матрицы $\begin{bmatrix} \pi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi \end{bmatrix}$. В итоге получаем импликацию (5.1) $\Rightarrow$ (5.2) $\Rightarrow$ (5.3) $\Rightarrow$ (5.1), которая означает эквивалентность утверждений (5.1), (5.2), (5.3). Теорема 5.1 доказана.

Следствие 5.1. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством эквивалентных преобразований* РКТ-*матрицы* G^+ *вида* (3.2) *и алгеброй левых умножений многочленной матрицы* $\gamma(s)$ *вида* (3.2) *на унимодулярные матрицы, сохраняющие свойство строчной минимальности.*

§ 6. Строчно-минимальная форма многочленных матриц

В этом параграфе обобщено понятие строчно-минимальной формы многочленной матрицы [4, 5] на случай матриц неполного ранга. Простые выкладки, а также рассуждения в доказательствах, аналогичные приведенным в монографиях [4, 5], опущены.

Степенью многочленной строки $\alpha_i(s)$ размеров $1 \times r$ называется наибольшая из степеней образующих ее элементов:

$$\deg \alpha_i(s) = \max\{\deg \alpha_{ij}(s),\ j \in [1, r]\}.$$

Пусть $\alpha(s)$ — неособенная многочленная матрица размеров $r \times r$. Обозначим через $\{p_1, \dots, p_r\}$ множество степеней строк матрицы $\alpha(s)$. Имеет место представление

$$\alpha(s) = \begin{bmatrix} s^{p_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^{p_r} \end{bmatrix} \{\alpha_{[0]} + s^{-1}\alpha_{[-1]} + \dots + s^{-p_0}\alpha_{[-p_0]}\}, \tag{6.1}$$

где $p_0 = \max\{p_1, \dots, p_r\}$ и $\alpha_{[-i]}$, $i \in [0, p_0]$, — числовые $r \times r$-матрицы.

Лемма 6.1. *Имеет место равенство* $\det \alpha(s) = s^p \det \alpha_{[0]} + d(s)$, *где* $d(s)$ *— многочлен степени меньше* $p = p_1 + \dots + p_r$.

Следствие 6.1. *Степень определителя матрицы* $\alpha(s)$ *равна сумме степеней строк матрицы* $\alpha(s)$ *тогда (и только тогда), когда числовая матрица* $\alpha_{[0]}$ *в разложении* (6.1) *неособенная*:

$$\deg \det \alpha(s) = p_1 + \dots + p_r \Leftrightarrow \det \alpha_{[0]} \neq 0.$$

Предложение 6.1. *Для любой неособенной многочленной матрицы* $\alpha(s)$ *размеров* $r \times r$ *можно указать унимодулярную матрицу* $u(s)$ *такую, что сумма степеней строк произведения* $u(s)\alpha(s)$ *принимает наименьшее значение, равное степени определителя матрицы* $\alpha(s)$.

Определение 6.1. В условиях предложения 6.1 матрица $\alpha^*(s) = u(s)\alpha(s)$ называется *строчно-минимальной формой* (в оригинале: ⟨row reduced⟩ в [4] и ⟨row proper⟩ в [5]) *матрицы* $\alpha(s)$. Степени строк матрицы $\alpha^*(s)$ — $\{q_1, \dots, q_r\}$ — называются (*строчными*) *индексами матрицы* $\alpha(s)$. Без ограничения общности можно считать, что строки матрицы $\alpha^*(s)$ упорядочены по неубыванию степеней: $q_1 \leqslant \dots \leqslant q_r$.

Предложение 6.2. *Индексы неособенной многочленной* $(r \times r)$*-матрицы* $\alpha(s)$ *определены единственным образом.*

Пусть $\gamma(s)$ — многочленная $(r \times t)$-матрица, $r \leqslant t$, полного ранга r, т. е. строки матрицы $\gamma(s)$ линейно зависимы не более чем в конечном числе точек $s \in \mathbb{C}$ или (эквивалентно) $s \in \mathbb{R}$. Пусть $\{p_1, \dots, p_r\}$ — множество степеней строк матрицы $\gamma(s)$. Тогда $\gamma(s)$ допускает представление

$$\gamma(s) = \begin{bmatrix} s^{p_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^{p_r} \end{bmatrix} \{\gamma_{[0]} + s^{-1}\gamma_{[-1]} + \dots + s^{-p_0}\gamma_{[-p_0]}\}, \tag{6.2}$$

где $p_0 = \max\{p_1, \dots, p_r\}$ и $\gamma_{[-i]}$, $i \in [0, p_0]$, — числовые $(r \times t)$-матрицы.

Предложение 6.3. *Для произвольной $(r \times t)$-матрицы $\gamma(s)$ полного ранга r можно указать унимодулярную матрицу $u(s)$ такую, что сумма степеней строк произведения $u(s)\gamma(s)$ принимает наименьшее значение, равное максимальной степени среди всех r-миноров матрицы $\gamma(s)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что левое умножение матрицы $\gamma(s)$ на унимодулярную матрицу $u(s)$ не изменяет значений r-миноров матрицы $\gamma(s)$. Каждому r-минору можно сопоставить квадратную подматрицу матрицы $\gamma(s)$. Далее следует применить предложение 6.1.

Предложение 6.4. *Сумма степеней строк произведения $u(s)\gamma(s)$ принимает наименьшее значение тогда (и только тогда), когда у числовой матрицы ${\gamma^*}_{[0]}$ в разложении (6.2) произведения $u(s)\gamma(s) = \gamma^*(s)$ строки линейно независимы.*

Определение 6.2. В условиях предложения 6.4 матрица $\gamma^*(s)$ называется *строчно-минимальной формой матрицы* $\gamma(s)$. Степени строк матрицы $\gamma^*(s)$ — $\{q_1, \dots, q_r\}$ — называются (*строчными*) *индексами матрицы* $\gamma(s)$. Без ограничения общности можно считать, что строки матрицы $\gamma^*(s)$ упорядочены по неубыванию степеней: $q_1 \leqslant \dots \leqslant q_r$.

Предложение 6.5. *Индексы многочленной $(r \times t)$-матрицы $\gamma(s)$ полного ранга r определены единственным образом.*

Пусть $\gamma(s)$ — многочленная $(r \times t)$-матрица, $r \leqslant t$, ранга $\tau \leqslant r$, и пусть $\{p_1, \dots, p_r\}$ — множество степеней строк матрицы $\gamma(s)$. Тогда для $\gamma(s)$ имеет место представление (6.2).

Левым умножением на некоторую унимодулярную матрицу $w(s)$ приведем $\gamma(s)$ к виду $w(s)\gamma(s) = (\overline{\gamma}(s); 0) = \gamma'(s)$, где $\overline{\gamma}(s)$ — подматрица размеров $\tau \times t$ с линейно независимыми строками. В качестве $\gamma'(s)$ можно взять, например, каноническую форму на множестве левых элементарных преобразований [11].

Несложно показать, что подматрица $\overline{\gamma}(s)$ определена с точностью до левых элементарных преобразований. Для этого достаточно рассмотреть равенства $w_1(s)\gamma(s) = (\overline{\gamma}_1(s); 0)$, $w_2(s)\gamma(s) = (\overline{\gamma}_2(s); 0)$, из которых следует $(\overline{\gamma}_1(s); 0) = v(s)(\overline{\gamma}_2(s); 0)$, где $v(s)$ — унимодулярная матрица. Разбив $v(s)$ на клетки, $v(s) = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$, получим $\overline{\gamma}_1(s) = v_{11}(s)\overline{\gamma}_2(s)$, $0 = v_{21}(s)\overline{\gamma}_2(s)$. Из последнего равенства в силу линейной независимости строк матрицы $\overline{\gamma}_2(s)$ вытекает $v_{21}(s) = 0$. Следовательно, $\det v(s) = \det v_{11}(s) \det v_{22}(s)$. Поэтому матрица $v_{11}(s)$ унимодулярная вместе с $v(s)$, т. е. $\overline{\gamma}_1(s)$ и $\overline{\gamma}_2(s)$ связаны левыми элементарными преобразованиями.

Пусть q^* — максимальная степень миноров матрицы $\overline{\gamma}(s)$:

$$q^* = \max_{i \in [1,r]} \max_{M_i} \deg M_i = \max_{M_\tau} \deg M_\tau,$$

где M_i обозначает произвольный i-минор матрицы $\overline{\gamma}(s)$. Ввиду вышесказанного заключаем, что число q^* для матрицы $\gamma(s)$ определено единственным образом, поскольку левые элементарные преобразования матрицы $\overline{\gamma}(s)$ полного ранга τ не изменяют τ-миноров.

Предложение 6.6. *Для произвольной $(r \times t)$-матрицы $\gamma(s)$, $r \leqslant t$, можно указать унимодулярную матрицу $u(s)$ такую, что сумма степеней строк произведения $u(s)\gamma(s)$ принимает наименьшее значение, равное q^*.*

Доказательство. Заметим, что произведение $u(s)\gamma(s)$ представимо в виде $u'(s)(\overline{\gamma}(s);0)$, где $u'(s)$ — унимодулярная матрица. Нетрудно показать, что сумма степеней строк матрицы $u'(s)(\overline{\gamma}(s);0)$ не может быть меньше q^* и нижняя граница достигается, например, для $u'(s) = \begin{bmatrix} u_r(s) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, где $u_r(s)$ — унимодулярная $(r \times r)$-матрица из предложения 6.3 для $\overline{\gamma}(s)$.

Предложение 6.7. *Сумма степеней строк произведения $u(s)\gamma(s)$ имеет наименьшее значение q^*, если у числовой матрицы ${\gamma^*}_{[0]}$ в разложении (6.2) произведения $u(s)\gamma(s) = \gamma^*(s)$ ненулевые строки линейно независимы и на местах нулевых строк матрицы ${\gamma^*}_{[0]}$ во всех остальных матрицах ${\gamma^*}_{[-i]}$, $i \in [1,p_0]$, стоят также нулевые строки.*

Предложение 6.8. *Число ненулевых строк матрицы $\gamma^*(s)$ равно рангам матриц $\gamma(s)$ и $\gamma^*(s)$.*

Определение 6.3. В условиях предложения 6.7 матрица $\gamma^*(s)$ называется *строчно-минимальной формой матрицы* $\gamma(s)$. Степени ненулевых строк матрицы $\gamma^*(s)$ — $\{q_1,\dots,q_r\}$ — называются (*строчными*) *индексами матрицы* $\gamma(s)$. Без ограничения общности можно считать, что ненулевые строки матрицы $\gamma^*(s)$ упорядочены по неубыванию степеней: $q_1 \leqslant \dots \leqslant q_r$.

Предложение 6.9. *Индексы многочленной $(r\times t)$-матрицы $\gamma(s)$, $r \leqslant t$, определены единственным образом.*

Замечание 6.1. Для унификации изложения можно обобщить понятие определителя на случай прямоугольных матриц следующим образом. Обозначим через $w(s)$ унимодулярную матрицу такую, что верно равенство $w(s)\gamma(s) = (\overline{\gamma}(s);0)$, где $\overline{\gamma}(s)$ — подматрица с линейно независимыми строками. Тогда $\det\gamma(s)$ — первый (в лексикографическом порядке) минор из всех миноров $\overline{\gamma}(s)$ наибольшей степени и $\deg\det\gamma(s)$ — сумма индексов матрицы $\gamma(s)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kalman R. E.** Mathematical description of linear dinamical systems // SIAM J. Control. 1963. V. 1, N 2. P. 152–192.
2. **Виллемс Я.** От временнóго ряда к линейной системе // Теория систем. Математические методы и моделирование. М.: Мир, 1989. С. 8–191. (Новое в зарубежной науке. Сер. Математика; Т. 44).
3. **Ванечек А.** Модели: эквивалентность, применения, обобщение // Современные методы идентификации систем. М.: Мир, 1983.
4. **Kailath T.** Linear systems. New York: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1980.
5. **Wolovich W. A.** Linear multivariable systems. New York; Berlin: Springer-Verl., 1974.
6. **Ли Р.** Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М.: Наука, 1966.
7. **Годунов С. К.** Нормы решений матричных уравнений Лурье — Риккати как критерий качества стабилизируемости и детектируемости // Вычислительные проблемы в задачах математической физики. Новосибирск: Наука, 1992. С. 3–22. (Тр. РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 22).
8. **Параев Ю. И.** Алгебраические методы в теории линейных систем управления. Томск: Томск. ун-т, 1980.
9. **Уонэм М.** Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980.

10. **Кострикин А. И., Манин Ю. И.** Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.
11. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1988.
12. **Смирнов Е. Я.** Некоторые задачи математической теории управления. Л.: ЛГУ, 1981.
13. **Стрейц В.** Метод пространства состояний в теории дискретных систем управления. М.: Наука, 1985.
14. **Ломов А. А.** Условия корректности линейных параметрических моделей (стационарный динамический случай). Новосибирск, 1992. 50 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 27).
15. **Ломов А. А.** Управляемость векторных систем авторегрессия — скользящее среднее. Новосибирск, 1993. 22 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 1).
16. **Dickinson B.W., Kailath T., Morf M.** Canonical matrix fraction and state-space descriptions for deterministic and stochastic linear systems // IEEE Trans. on Automat. Control. 1974. V. AC-19. P. 656–667.
17. **Ройтенберг Я. Н.** Автоматическое управление. М.: Наука, 1978.
18. **Заде Л., Дезоер Ч.** Теория линейных систем. М.: Наука, 1970.