УДК 512.813.52+517.548.2+517.518.23

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА И ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ*)

С. К. Водопьянов, В. М. Черников

Семёну Самсоновичу Кутателадзе
к его пятидесятилетию

В настоящей работе излагается теория пространств Соболева в геометрии векторных полей, удовлетворяющих условию гипоэллиптичности Хёрмандера, и приводятся ее применения для исследования регулярности суперрешений квазилинейных субэллиптических уравнений. Аналитические трудности в задачах этой проблематики связаны с наличием нетривиальных коммутационных соотношений, из-за которых становится невозможным в ряде случаев прямой перенос аналитической техники, развитой в евклидовом пространстве для стандартных векторных полей $\partial/\partial x_i$. Несмотря на то, что ставший классическим критерий гипоэллиптичности Хёрмандера был получен еще в 1967 г. [25], основы теории гипоэллиптических уравнений стали закладываться сравнительно недавно — лишь после того, как в работе [30] была установлена связь между характером особенности фундаментального решения и геометрией, определяемой векторными полями X_i. Напомним, что условие гипоэллиптичности Хёрмандера состоит в том, что в каждой точке области векторные поля вместе с коммутаторами конечной длины, одной и той же для всех точек рассматриваемой области, порождают касательное пространство.

Принципиальные результаты, описывающие основные свойства геометрии, ассоциированной с векторными полями, были получены в работе [28]. На этих свойствах базируется аналитическая техника, используемая многими авторами, в том числе и нами. Отметим здесь статью [26], где впервые доказывается неравенство Пуанкаре, и работу [27], в которой это неравенство обобщается на случай весовых пространств Соболева. Кроме того, в публикациях [27] и [21] получено неравенство Соболева. Эти результаты позволяют изучать свойства решений субэллиптических уравнений и их квазилинейных обобщений. Например, в работах [18] и [19] доказывается, что гельдеровость решений субэллиптических уравнений адекватно описывается метрикой, ассоциированной с векторными полями, в [27] установлены локальные свойства решений и субрешений в L_2-теории вырождающихся линейных субэллиптических уравнений, в [3] получен критерий Винера иррегулярности в граничной точке решений в L_p-теории вырождающихся квазилинейных субэллиптических уравнений.

Прототипы перечисленных выше результатов можно найти в теории эллиптических уравнений. Не претендуя на полноту, назовем здесь известные монографии [9, 12, 24], в которых приведена подробная библиография и изложена история вопроса.

Основное отличие излагаемой нами теории пространств Соболева от классической [15], состоит в том, что пополнение пространства гладких функций по

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00378) и Международного научного фонда (грант RAT 000)

норме

$$\|f|W_p^1(\Omega)\| = \left(\int\limits_\Omega |f|^p\,dx + \int\limits_\Omega \left(\sum_1^k |X_i f|^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p}$$

не имеет описания в терминах обобщенных частных производных, что, в свою очередь, тесно связано со спецификой геометрии рассматриваемых векторных полей. По этой причине доказательство даже самых простых фактов требует применения рафинированных методов, развитых в последние годы. В § 1 работы мы устанавливаем, что пространство Соболева $W_p^1(\Omega)$ образует векторную решетку, и получаем необходимые для дальнейшего изложения новые свойства этого пространства. В частности, одним из первых доказан естественный результат о том, что липшицевы в геометрии векторных полей функции принадлежат пространству $W_p^1(\Omega)$, и получена оценка для субградиента таких функций через постоянную Липшица. Справедливость этого свойства позволяет заключить, что пространство Соболева содержит богатый набор функций, зависящих непосредственно от геометрии векторных полей. В частности, этот факт неоднократно применяется в работе для построения функций-срезок с заданными характеристиками.

В § 2–5 статьи исследуются различные свойства суперрешений нелинейных субэллиптических уравнений. В § 2 установлен аналог неравенства Каччиополи (лемма 2.5). Оно является основой для получения слабых неравенств Гарнака для суперрешений, дальнейшее рассмотрение которых в § 3 приводит к их точной формулировке. В § 4 исследуется поточечное поведение суперрешений. В частности, доказан результат о том, что при довольно слабых предположениях каждое суперрешение имеет полунепрерывный представитель, для которого каждая точка из области определения есть точка Лебега. В § 5 мы приводим результаты, позволяющие изучать поведение суперрешений при их сходимости. Основные результаты этого параграфа описывают условия, при которых предел монотонно возрастающей или убывающей последовательности суперрешений есть суперрешение. В этой части работы обобщены результаты монографии [24], рассмотрения которой соответствуют набору стандартных векторных полей $\partial/\partial x_i$.

В последнем, шестом параграфе работы изучается связь между геометрией векторных полей и емкостью в пространстве $W_p^1(\Omega)$. В евклидовой геометрии эта связь, ввиду ее важности, является предметом исследования многих авторов (см. монографии [13, 14, 24] и библиографию в них). Здесь мы, в основном, следуем подходу, реализованному в [2, 4–7]. Изложение основных свойств, которые выводятся из нескольких естественных предположений, реализовано в абстрактной ситуации. Основные результаты этой части состоят в том, что введенная функция множества есть емкость Шоке, а также в изучении связи между уточненными и квазинепрерывными функциями. Далее получены важные в различных применениях оценки для емкости, причем некоторые из них точны. Затем доказываются свойства устранимых множеств для пространств Соболева. Завершает параграф раздел о соотношениях между емкостью и мерами Хаусдорфа.

§ 1. Весовые пространства Соболева

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — семейство вещественных векторных полей класса C^∞, определенных в некоторой окрестности U замыкания $\overline{\Omega}$ ограниченной области Ω из $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Под областью мы понимаем далее открытое связное множество. Для мультииндекса $\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ обозначим через X_α коммутатор

$$[X_{i_1}, [X_{i_2}, \ldots, [X_{i_{m-1}}, X_{i_m}]] \ldots]$$

длины $|\alpha| = m$. В работе мы предполагаем, что семейство векторных полей удовлетворяет в области Ω условию гипоэллиптичности Хёрмандера [25]. Это означает существование целого положительного числа s такого, что коммутаторы X_α, $|\alpha| \leqslant s$, порождают касательное пространство в каждой точке области Ω.

Введем множество векторных полей

$$X^{(1)} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\},\ X^{(2)} = \{[X_1, X_2], \ldots, [X_{k-1}, X_k]\}, \ldots$$

таким образом, чтобы компоненты набора $X^{(p)}$ были коммутаторами длины p. Обозначим через $Z_1, Z_2, \ldots, Z_q$ некоторую нумерацию векторных полей, входящих в совокупность $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(s)}$. Если Z_i — элемент $X^{(j)}$, то будем говорить, что Z_i имеет формальную степень $d(Z_i) = j$ или короче $d(Z_i) = d_i = j$.

Определим, следуя [28], метрику, ассоциированную с семейством векторных полей. Пусть $C(\delta)$ обозначает класс абсолютно непрерывных отображений $\varphi : [0,1] \to \Omega$, почти всюду удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$\dot\varphi(t) = \sum_{j=1}^{q} a_j(t) Z_j(\varphi(t)), \quad |a_j(t)| < \delta^{d_j}.$$

Тогда величина $\rho(x,y) = \inf\{\delta > 0 \mid$ существует такое отображение $\varphi \in C(\delta)$, что $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y\}$ есть метрика на Ω. Метрический шар $B(x,\delta)$ есть множество $\{y \in \Omega \mid \rho(x,y) < \delta\}$.

В работе [28] установлено, что для произвольного компактного подмножества $K \subset \Omega$ существует константа $C > 0$ такая, что если $x \in K$ и $B(x, 2\delta) \subset K$, то выполняется условие удвоения

$$|B(x,2\delta)| \leqslant C|B(x,\delta)|.$$

Здесь $|\cdot|$ обозначает меру Лебега измеримого множества из $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\Omega' \subset \Omega$ такая область, что $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Тогда для метрического пространства (Ω', ρ) выполняется условие удвоения. Следуя работе [20], такие пространства называют пространствами однородного типа. Пусть w — локально интегрируемая неотрицательная функция на области Ω. Тогда мера Радона μ, канонически ассоциируемая с весом w, определяется как $\mu(E) = \int\limits_E w(x)\,dx$. Поэтому $d\mu(x) = w(x)\,dx$, где dx — n-мерная мера Лебега. Будем говорить, что весовая функция w (или мера μ) *p-допустима*, если выполнены следующие условия (здесь и далее, кроме специально оговариваемых случаев, предполагается $1 < p < \infty$).

$\mathscr{W}1$. $0 < w < \infty$ почти всюду в Ω', и мера μ удовлетворяет условию удвоения: $\mu(2B) \leqslant C_1\mu(B)$ для любого шара $B = B(x,\delta)$ такого, что $2B = B(x,2\delta) \subset \Omega'$, с постоянной C_1, не зависящей от выбора шара.

$\mathscr{W}2$. Если D — открытое подмножество Ω', $\varphi_i \in C^\infty(D)$ — последовательность функций такая, что

$$\int\limits_D |\varphi_i|^p\,d\mu \to 0, \qquad \int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi_i - v|^p\,d\mu \to 0$$

при $i \to \infty$, где $v \in L_p(D;\mu;\mathbb{R}^k)$ вектор-функция, то $v = 0$.

$\mathscr{W}3$. Существуют числа $\varkappa > 1$, $r_0 > 0$ и C_3 такие, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(B)$ имеет место неравенство

$$\Big(\fint\limits_B |\varphi|^{\varkappa p}\,d\mu\Big)^{1/\varkappa p} \leqslant C_3 r \Big(\fint\limits_B |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi|^p\,d\mu\Big)^{1/p},$$

где $B = B(x,r) \subset \Omega$, $x \in \Omega'$ и $r < r_0$.

$\mathscr{W}4$. Существуют числа $C_4 > 0$, $r_0 > 0$ такие, что для любой функции $\varphi \in C^\infty(B)$ имеет место неравенство

$$\int_B |\varphi - \varphi_B|^p \, d\mu \leqslant C_4 r^p \int_B |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi|^p \, d\mu,$$

где $B = B(x,r) \subset \Omega$, $x \in \Omega'$ и $r < r_0$.

В этих условиях

$$\varphi_B = \fint_B \varphi \, d\mu = \mu(B)^{-1} \int_B \varphi \, d\mu,$$

а $\nabla_{\mathscr{L}}\varphi = (X_1\varphi, X_2\varphi, \dots, X_k\varphi)$ есть субградиент функции φ. Постоянные C_1, $\varkappa$, C_3 и C_4 существенно зависят от расстояния $\rho(\Omega', \partial\Omega) = \inf\{\rho(x,y) : x \in \Omega',\ y \in \partial\Omega\}$. Во всех приводимых ниже утверждениях зависимость от постоянных C_1, $\varkappa$, C_3 и C_4 обозначается символом c_μ.

Для веса w, равного 1, справедливость неравенства Соболева $\mathscr{W}3$ установлена в работах [19, 23], а неравенства Пуанкаре $\mathscr{W}4$ — в [26]. Предположим, что для произвольного метрического шара $B \subset \Omega'$, функция w удовлетворяет следующему условию:

$$\left(\fint_B w(x)\,dx\right)\left(\fint_B w(x)^{1/(1-p)}\,dx\right)^{p-1} \leqslant c_w,$$

где постоянная c_w не зависит от выбора шара B. В этом случае говорят, что весовая функция w удовлетворяет *A_p-условию Макенхаупта в области Ω'* или просто *A_p-условию*. Для $w \in A_p(\Omega')$ справедливость условий $\mathscr{W}3$ и $\mathscr{W}4$ установлена в работе [27].

Для функции $\varphi \in C^\infty(D)$, где область $D \subset \Omega'$ может совпадать с Ω', полагаем

$$\|\varphi\|_{1,p} = \left(\int_D |\varphi|^p \, d\mu + \int_D |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi|^p \, d\mu\right)^{1/p},$$

где $\nabla_{\mathscr{L}}\varphi$ — субградиент функции φ. Определим весовое пространство Соболева $W_p^1(D;\mu)$ как замыкание $\{\varphi \in C^\infty(D) : \|\varphi\|_{1,p} < \infty\}$ относительно нормы $\|\varphi\|_{1,p}$. Другими словами, функция u лежит в классе $W_p^1(D;\mu)$, если и только если $u \in L_p(D;\mu)$ и найдется векторнозначная функция $v \in L_p(D;\mu;\mathbb{R}^k)$ такая, что для некоторой последовательности $\varphi_i \in C^\infty(D)$

$$\int_D |\varphi_i - u|^p \, d\mu \to 0 \quad \text{и} \quad \int_D |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi_i - v|^p \, d\mu \to 0,$$

когда $i \to \infty$. Вектор-функцию v называют *субградиентом функции u в пространстве $W_p^1(D;\mu)$* и обозначают символом $\nabla_{\mathscr{L}} u$. Условие $\mathscr{W}2$ влечет корректность определения субградиента функции в $L_p(D;\mu)$. Пространство $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$ есть замыкание $C_0^\infty(D)$ в $W_p^1(D;\mu)$. Ясно, что $W_p^1(D;\mu)$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$ — банаховы пространства относительно нормы $\|\cdot\|_{1,p}$. Кроме того, норма $\|\cdot\|_{1,p}$ равномерно выпукла, и поэтому пространства $W_p^1(D;\mu)$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$ рефлексивны [10].

Будем говорить, что *функция лежит в классе $W_{p,\mathrm{loc}}^1(D;\mu)$*, если она лежит в классе $W_p^1(K;\mu)$ для каждой компактной подобласти K из D.

Функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется *липшицевой* на D, если существует константа $L > 0$ такая, что

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L\rho(x, y)$$

для всех x, y из D. Наименьшее число в этом соотношении называется *постоянной Липшица* функции f на D. Будем говорить, что функция f *локально липшицева*, если она липшицева на каждом компактном подмножестве области D.

Лемма 1.1. *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$ ограничена и локально липшицева. Тогда $f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D; \mu)$. Кроме того, для любой компактной области $K \Subset D$ существует постоянная C_K такая, что для почти всех точек $x \in K$ верно неравенство*

$$|\nabla_{\mathcal{L}} f| \leqslant C_K L_K,$$

где L_K — постоянная Липшица функции f на области K, а постоянная C_K не зависит от выбора функции f.

Доказательство. Достаточно установить, что для каждой точки x из D существует число $r > 0$ такое, что сужение функции f на шар $B(x, r)$ лежит в классе $W^1_p(B(x, r); \mu)$. Действительно, в случае произвольного компактного подмножества $K \Subset D$ можно воспользоваться стандартным разбиением единицы, подчиненным конечному покрытию множества K шарами $B(x_i, r_i)$, чтобы получить $f \in W^1_p(K; \mu)$ и, следовательно, $f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D; \mu)$.

Чтобы доказать лемму в том случае, когда область D есть шар достаточно малого радиуса, мы воспользуемся техникой, разработанной в работе [29], суть которой состоит в поднятии исходного метрического пространства (D, ρ) по размерности до метрического пространства, метрика которого порождается свободными векторными полями, а затем в локальном приближении вновь полученного пространства свободной нильпотентной группой Ли.

Теорема 1.1 [29]. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ суть C^∞-векторные поля на гладком многообразии D, $\dim D = n$, такие, что коммутаторы длины, не большей s, порождают касательное пространство $T_x D$ для каждой точки $x \in D$. Тогда существуют гладкие функции $\lambda_{lp}(x, t)$, $t = t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots, t_N$, определенные в окрестности $\widetilde{U}$ точки $\tilde{x} = (x, 0) \in D \times R^{N-n} = \widetilde{D}$, такие, что векторные поля*

$$\widetilde{X}_p = X_p + \sum_{n+1}^{N} \lambda_{lp}(x, t) \frac{\partial}{\partial t_l}$$

являются свободными степени s в каждой точке $\widetilde{U}$, т. е. среди векторных полей $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \ldots, \widetilde{X}_k$ и всех их коммутаторов длины, не превосходящей s, нет линейных соотношений, за исключением антикоммутативности $[\widetilde{X}_j, \widetilde{X}_i] = -[\widetilde{X}_i, \widetilde{X}_j]$ и тождества Якоби.

Теорема 1.2 [29]. *Пусть $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \ldots, \widetilde{X}_k$ суть C^∞-векторные поля на многообразии $\widetilde{D}$ и точка $\tilde{x}_0 \in \widetilde{D}$ такова, что*

(a) *коммутаторы длины, не большей s, образуют касательное пространство в точке $\tilde{x}_0 \in \widetilde{D}$;*

(b) *поля $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \ldots, \widetilde{X}_k$ свободны степени s в точке $\tilde{x}_0$.*

Тогда коммутаторы $\{\widetilde{X}_{jp}\}$ длины, не большей s, образуют систему канонических координат (u_{jp}) в окрестности точки $\tilde{x}_0$ следующим образом:

$$(u_{jp}) \to \exp\Big(\sum u_{jp} \widetilde{X}_{jp}\Big)(\tilde{x}_0).$$

Пусть $\mathbb{G}$ — свободная нильпотентная группа Ли степени s из k образующих и $\mathcal{G}$ — ее алгебра Ли. Тогда найдутся базис $\{Y_{jp}\}$ алгебры Ли $\mathcal{G}$, окрестность $\widetilde{V}$ точки $\tilde{x}_0$ и окрестность U единицы группы $\mathbb{G}$, обладающие следующими свойствами.

(*i*) *Существует отображение Θ из $\widetilde{V} \times \widetilde{V}$ в U такое, что*

$$\Theta(\tilde{x}, \tilde{y}) = \exp\Bigl(\sum u_{jp} Y_{jp}\Bigr) \in U,$$

где $\tilde{y} = \exp\bigl(\sum u_{jp} \widetilde{X}_{jp}\bigr)(\tilde{x})$.

(*ii*) *Для каждой фиксированной точки $\tilde{x}$ отображение*

$$\tilde{y} \mapsto \Theta_{\tilde{x}}(\tilde{y}) = \Theta(\tilde{x}, \tilde{y}) = (u_{jp})$$

является координатной картой для окрестности $\widetilde{V}$ с центром в точке $\tilde{x}$.

(*iii*) *Кроме того,*

$$(\Theta_{\tilde{x}})_*(\widetilde{X}_\alpha) = Y_\alpha + E_\alpha^{\tilde{x}},$$

где $E_\alpha^{\tilde{x}}$ — дифференциальный оператор на группе $\mathbb{G}$ локальной степени, не превосходящей $|\alpha| - 1$,

Напомним, что дифференциальный оператор T имеет степень k, если для любого $\varepsilon > 0$ и произвольной гладкой функции f имеет место равенство

$$T(f \circ \delta_\varepsilon(u)) = \varepsilon^k (Tf)(\delta_\varepsilon(u)).$$

Здесь δ_ε — однопараметрическая группа растяжений на $\mathbb{G}$ [25].

Заметим, что на поднятии $\widetilde{D}$ можно задать метрику $\tilde{\rho}$ с помощью семейства векторных полей $\{\widetilde{X}_j\}$ таким образом, что полученное метрическое пространство будет пространством однородного типа. Кроме того, в работе [28] показано, что метрики ρ и $\tilde{\rho}$ соотносятся следующим образом: если $x_1, x_2 \in D$ и $s_1, s_2 \in R^{N-n}$, то

$$\rho(x_1, x_2) \leqslant \tilde{\rho}((x_1, s_1), (x_2, s_2)), \quad (x_i, s_i) \in D \times \mathbb{R}^{N-n}, \quad i = 1, 2.$$

Определим функцию $\tilde{f}$ на $\widetilde{D}$ посредством соотношения $\tilde{f}(x,t) = f(x)$. Очевидно, что функция $\tilde{f} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ локально липшицева в метрике $\tilde{\rho}$. Как простое следствие теоремы 1.1 для гладкой функции имеем

$$\widetilde{X}_j \tilde{f}(x,t) = X_j f(x).$$

Из теоремы 1.2 вытекает существование числа $r_0 > 0$ такого, что $\Theta_{\tilde{x}_0}$ является диффеоморфизмом класса C^∞ шара $\widetilde{B}(\tilde{x}_0, r_0)$ на окрестность U единицы группы $\mathbb{G}$, где $\tilde{x}_0 = (x_0, 0)$. Далее, определим функцию $\check{f} : U \to \mathbb{R}$ следующим образом: $\check{f}(u) = \tilde{f} \circ \Theta_{\tilde{x}_0}^{-1}(u)$. Понятно, что функция $\check{f}$ удовлетворяет на U условию Липшица с константой $\widetilde{C}_U L_D > 0$. Продолжим $\check{f}$ на всю группу $\mathbb{G}$ с сохранением условия Липшица. Фиксируем усредняющее ядро $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{G})$, $\operatorname{supp} \Phi \subset B(0,1) \subset \mathbb{G}$, $\Phi \geqslant 0$, $\int\limits_{\mathbb{G}} \Phi = 1$, и рассмотрим усреднение

$$\check{f}_\varepsilon(u) = \varepsilon^{-Q} \int\limits_{\mathbb{G}} \check{f}(v) \Phi(\delta_{\varepsilon^{-1}}(u^{-1}v))\, dv,$$

где Q — однородная размерность группы $\mathbb{G}$. Известно [22], что $\check{f}_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{G})$. Так как функция f ограничена по условию, то $\check{f}$ также ограничена, и поэтому при $\varepsilon \to 0$ средние $\check{f}_\varepsilon$ сходятся равномерно на U к функции $\check{f}$. Кроме того,

$|\nabla_{\mathcal{L}} \check{f}_\varepsilon| \leqslant C_U L_D$ почти всюду на $\mathbb{G}$, где постоянные C_U и L_D суть упомянутые выше постоянные, а $\nabla_{\mathcal{L}} \check{f}_\varepsilon = (Y_1 \check{f}_\varepsilon, Y_2 \check{f}_\varepsilon, \dots, Y_k \check{f}_\varepsilon)$.

Рассмотрим функцию $\tilde{f}_\varepsilon : \widetilde{B}(\tilde{x}_0, r_0) \to \mathbb{R}$, положив $\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}_0) = \check{f}_\varepsilon \circ \Theta_{\tilde{x}_0}(\tilde{x})$. Так как $\Theta_{\tilde{x}_0}$ — диффеоморфизм класса C^∞ шара $\widetilde{B} = \widetilde{B}(\tilde{x}_0, r_0)$ на U, то $\tilde{f}_\varepsilon \in C^\infty(\widetilde{B})$ и функции $\tilde{f}_\varepsilon$ сходятся равномерно на шаре $\widetilde{B}$ к функции $\tilde{f}$ при $\varepsilon \to 0$.

Покажем, что субградиент $\nabla_{\mathcal{L}} \tilde{f}_\varepsilon = (\widetilde{X}_1 \tilde{f}_\varepsilon, \widetilde{X}_2 \tilde{f}_\varepsilon, \dots, \widetilde{X}_k \tilde{f}_\varepsilon)$ ограничен постоянной, не зависящей от ε. Из теоремы 1.2(iii) вытекает, что

$$\widetilde{X}_j \tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = \widetilde{X}_j(\check{f}_\varepsilon \circ \Theta_{\tilde{x}_0}(\tilde{x})) = Y_j \check{f}_\varepsilon(u) + E_j^{\tilde{x}_0} \check{f}_\varepsilon(u),$$

где $u = \Theta_{\tilde{x}_0}(\tilde{x})$, а локальная степень k дифференциального оператора $E_j^{\tilde{x}_0}$ неположительна.

Рассмотрим действие оператора $E_j^{\tilde{x}_0}$ на функцию $\check{f}_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} E_j^{\tilde{x}_0} \check{f}_\varepsilon(u) &= \varepsilon^{-Q} \int\limits_{\mathbb{G}} \check{f}(v) E_j^{\tilde{x}_0}(\Phi(\delta_{\varepsilon^{-1}}(u^{-1}v)))\, dv \\ &= \varepsilon^{-(Q+k)} \int\limits_{\mathbb{G}} \check{f}(v) \big(E_j^{\tilde{x}_0}\Phi\big)(\delta_{\varepsilon^{-1}}(u^{-1}v))\, dv \\ &= \varepsilon^{-k} \int\limits_{|v| \leqslant 1} \check{f}(u\delta_\varepsilon(v)) \big(E_j^{\tilde{x}_0}\Phi\big)(v)\, dv, \end{aligned}$$

где $k \leqslant 0$. Тогда

$$\big|E_j^{\tilde{x}_0} \check{f}_\varepsilon(u)\big| \leqslant \sup_{|v| \leqslant 1} |\check{f}(u\delta_\varepsilon(v))| \varepsilon^{-k} \int\limits_{|v| \leqslant 1} \big|(E_j^{\tilde{x}_0}\Phi)(v)\big|\, dv \leqslant C_0 M_D,$$

где $M_D = \sup\{|f(x)| : x \in D\}$, а C_0 — постоянная, не зависящая от функции f. Учитывая, что субградиенты функций f и $f + c$ совпадают, можно считать, что функция f обращается в нуль в некоторой точке множества D. При этом предположении значение M_D оценивается сверху произведением постоянной Липшица функции f на диаметр области D. Тем самым ограниченность субградиента доказана.

Определим, наконец, функцию $\hat{f}_\varepsilon$ следующим образом: $\hat{f}_\varepsilon(x) = \tilde{f}_\varepsilon(x, 0)$. Если $\pi(\tilde{x}) = \pi(x, t) = x$, то $\pi : \widetilde{B}((x, s), \delta) \to B(x, \delta)$ является отображением «на» (см. [28]). Таким образом, $\hat{f}_\varepsilon \in C^\infty(B(x_0, r_0))$. Понятно, что $\hat{f}_\varepsilon$ сходятся равномерно к f в шаре $B(x_0, r_0)$ при $\varepsilon \to 0$. Кроме того, так как $\widetilde{X}_j \tilde{f}(x, t) = X_j f(x)$ и $\widetilde{X}_j \tilde{f}_\varepsilon(x, 0) = X_j \hat{f}_\varepsilon(x)$, то субградиент ограничен и по лемме Мазура можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к f в $W_p^1(B(x_0, r_0); \mu)$ (см. ниже лемму 1.6 и теорему 1.6).

Обозначим через $\mathrm{Lip}^E_{\mathrm{loc}}(D)$ множество локально липшицевых в евклидовой метрике функций на области D : $f \in \mathrm{Lip}^E_{\mathrm{loc}}(D)$, если для любого компакта $K \subset D$ существует постоянная C_K такая, что для любых точек $x, y \in K$ выполняется

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C_K |x - y|.$$

Здесь $|\cdot|$ — евклидова метрика.

Лемма 1.2. *Подпространство*

$$W^1_{p,\mathrm{lip}}(D; \mu) = W^1_p(D; \mu) \cap \mathrm{Lip}^E_{\mathrm{loc}}(D)$$

плотно в $W^1_p(D; \mu)$. В частности, $W^1_{p,\mathrm{lip}}(D; \mu)$ образует векторную решетку, и если $u \in W^1_{p,\mathrm{lip}}(D; \mu)$, то субградиент $\nabla_{\mathcal{L}} u$ почти всюду совпадает с набором $(X_1 u, X_2 u, \dots, X_k u)$ обычных производных функции u вдоль векторных полей X_j, $j = 1, \dots, k$.

Доказательство. Покажем, что $\mathrm{Lip}^E_{\mathrm{loc}}(D) \subset W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mu)$. Кроме того, если $f \in \mathrm{Lip}^E_{\mathrm{loc}}(D)$, то $X_j f$ можно понимать как обычную производную вдоль векторного поля X_j, $j = 1,\dots,k$. В работе [28] доказано, что для любого компакта $K \Subset D$ существует константа $C > 0$ такая, что

$$|x-y| \leqslant C\rho(x,y), \quad x, y \in K.$$

По лемме 1.1 имеем вложение $\mathrm{Lip}^E_{\mathrm{loc}}(D) \subset W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mu)$. Покажем, что $X_j f$ — обычная производная вдоль векторного поля X_j, $j = 1,\dots,k$. Пусть $K \Subset D$, а функция f липшицева на K. По теореме Уитни можно продолжить f на все $\mathbb{R}^n$ с сохранением константы Липшица (это продолжение мы обозначаем тем же символом). Усредним функцию f на $\mathbb{R}^n$ посредством радиального усредняющего ядра Φ: $f_\varepsilon(x) = \int\limits_{|y|\leqslant 1} f(x+\varepsilon y)\Phi(y)\,dy$. Так как X_j — вещественные векторные поля класса C^∞, то в координатном виде их можно представить следующим образом:

$$X_j|_x = \sum_{i=1}^n \xi^i_j(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \xi^i_j \in C^\infty(U),$$

где U — некоторая окрестность замыкания $\overline{\Omega}$ области Ω.

Рассмотрим действие поля X_j на f_ε. Имеем

$$\begin{aligned} X_j f_\varepsilon(x) &= \sum_{i=1}^n \int\limits_{|y|\leqslant 1} \xi^i_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\varepsilon y)\Phi(y)\,dy \\ &= \sum_{i=1}^n \int\limits_{|y|\leqslant 1} \big(\xi^i_j(x) + \xi^i_j(x+\varepsilon y) - \xi^i_j(x+\varepsilon y)\big)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\varepsilon y)\Phi(y)\,dy \\ &= \int\limits_{|y|\leqslant 1} [X_j f](x+\varepsilon y)\Phi(y)\,dy \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int\limits_{|y|\leqslant 1} \big(\xi^i_j(x) - \xi^i_j(x+\varepsilon y)\big)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\varepsilon y)\Phi(y)\,dy = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Получаем, что $|X_j f_\varepsilon(x)| \leqslant |I_1| + |I_2|$. При $\varepsilon \to 0$ имеем $I_1 \to X_j f(x)$. Поскольку $\big|\xi^i_j(x) - \xi^i_j(x+\varepsilon y)\big| \leqslant C_0\varepsilon|y|$, то $|I_2| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, $X_j f_\varepsilon \to X_j f$ почти всюду при $\varepsilon \to 0$.

Чтобы закончить доказательство заметим, что если $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mu)$ и u, $\nabla_{\mathcal{L}} u \in L_p(D;\mu)$, то $u \in W^1_p(D;\mu)$. Последнее свойство доказывается посредством стандартного рассуждения, основанного на разбиении единицы.

Предложение 1.1. *Пространство $W^1_p(D;\mu)$ есть векторная решетка. Если $u \in W^1_p(D;\mu)$, то $u^+ = \max(u,0) \in W^1_p(D;\mu)$ и имеет место соотношение*

$$\nabla_{\mathcal{L}} u^+ = \begin{cases} \nabla_{\mathcal{L}} u, & \text{если } u > 0, \\ 0, & \text{если } u \leqslant 0. \end{cases}$$

Доказательство. Напомним, что по условию область Ω ограничена. Пусть $u_n \in W^1_{p,\mathrm{lip}}(D;\mu)$ — последовательность, сходящаяся к функции $u \in W^1_p(D;\mu)$, причем последовательности u_n и $\nabla_{\mathcal{L}} u_n$ сходятся поточечно к u и $\nabla_{\mathcal{L}} u$ соответственно. Существование такой последовательности гарантируется леммой 1.2. Пусть $\chi_n(x)$ — характеристическая функция множества $\{x : u_n > 0\}$

и $\chi(x)$ — характеристическая функция множества $\{x : u > 0\}$. Тогда последовательность функций $\chi_n u_n = u_n^+$ сходится к функции $u^+ = \chi u$ почти всюду. Поэтому

$$\int\limits_D |u^+ - u_n^+|^p \, d\mu = \int\limits_D \chi\chi_n |u - u_n|^p \, d\mu$$
$$+ \int\limits_D \chi(1-\chi_n)|u|^p \, d\mu + \int\limits_D (1-\chi)\chi_n |u_n|^p \, d\mu \to 0.$$

Поскольку u_n^+ ограничена в $W_p^1(D;\mu)$, то $u^+ \in W_p^1(D;\mu)$. При этом $\nabla_{\mathcal{L}} u^+ = \nabla_{\mathcal{L}} u$ на $\{x : u > 0\}$ и $\nabla_{\mathcal{L}} u^+ = 0$ на $\{x : u < 0\}$. Рассмотрим множество $Z = \{x : u = 0\}$. Применим предыдущее рассуждение к функции $u - t$, где $t > 0$ — фиксированное число. Имеем, что $(u_n - t)^+$ сходятся к $(u-t)^+$ в $W_p^1(D;\mu)$, причем $\nabla_{\mathcal{L}}(u_n - t)^+ \to 0$ почти всюду на Z. Таким образом, $\nabla_{\mathcal{L}}(u-t)^+ = 0$ для любого $t > 0$ почти всюду на Z. Так как $(u-t)^+$ сходятся к u^+ в $W_p^1(D;\mu)$ при $t \to 0$, то предложение доказано.

Лемма 1.3. *Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$, f' ограничена и $u \in W_p^1(D;\mu)$. Тогда $f \circ u \in L_p^1(D;\mu)$ и $\nabla_{\mathcal{L}}(f \circ u) = f'(u)\nabla_{\mathcal{L}} u$. Если, кроме того, $f \circ u \in L_p(D;\mu)$, то $f \circ u \in W_p^1(D;\mu)$.*

Доказательство. Предположим, что $\varphi_i \in C^\infty(D)$ такая последовательность, что $\varphi_i \to u$ сходится в пространстве $W_p^1(D;\mu)$ и почти всюду. Тогда $f \circ \varphi_i$ локально липшицева в евклидовой метрике. Поэтому $f \circ \varphi_i \in L_p^1(D;\mu)$ и по лемме 1.2 $\nabla_{\mathcal{L}}(f \circ \varphi_i) = f'(\varphi_i)\nabla_{\mathcal{L}}\varphi_i$. Кроме того, так как $|f(t) - f(s)| \leqslant \sup|f'||t-s|$, то

$$\int\limits_D |f \circ \varphi_i - f \circ u|^p \, d\mu \to 0.$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеем

$$\Big(\int\limits_D |f'(\varphi_i)\nabla_{\mathcal{L}}\varphi_i - f'(u)\nabla_{\mathcal{L}} u|^p \, d\mu\Big)^{1/p}$$
$$\leqslant \sup|f'|\Big(\int\limits_D |\nabla_{\mathcal{L}}\varphi_i - \nabla_{\mathcal{L}} u|^p \, d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int\limits_D |\nabla_{\mathcal{L}} u||f'(\varphi_i) - f'(u)|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \to 0,$$

так как $f'(\varphi_i) \to f'(u)$ почти всюду в D.

Лемма 1.4. *Пусть последовательности $u_j, v_j \in W_p^1(D;\mu)$ сходятся в пространстве $W_p^1(D;\mu)$ при $j \to \infty$ к функциям u и v соответственно. Тогда $\min(u_j, v_j) \to \min(u, v)$ и $\max(u_j, v_j) \to \max(u, v)$ в пространстве $W_p^1(D;\mu)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если u_j сходятся к функции u в пространстве $W_p^1(D;\mu)$, то функции u_j^+ сходятся к функции u^+ в пространстве $W_p^1(D;\mu)$. Так как $|u_j^+ - u^+| \leqslant |u_j - u|$, то $u_j^+ \to u^+$ в $L_p(D;\mu)$. Покажем сходимость субградиента. Пусть χ — характеристическая функция интервала $(0, \infty)$. Имеем

$$\Big(\int\limits_D |\nabla_{\mathcal{L}} u_j^+ - \nabla_{\mathcal{L}} u^+|^p \, d\mu\Big)^{1/p} = \Big(\int\limits_D |\chi(u_j)\nabla_{\mathcal{L}} u_j - \chi(u)\nabla_{\mathcal{L}} u|^p \, d\mu\Big)^{1/p}$$
$$\leqslant \Big(\int\limits_D |\nabla_{\mathcal{L}} u_j - \nabla_{\mathcal{L}} u|^p \, d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int\limits_D |\nabla_{\mathcal{L}} u|^p|\chi(u_j) - \chi(u)|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \to 0.$$

В следующей лемме утверждается, что пространство $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$ является векторной решеткой.

Лемма 1.5. *Если $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$, то функции $\min(u,v)$ и $\max(u,v)$ лежат в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$. Кроме того, если функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$ неотрицательна, то существует последовательность неотрицательных функций $\varphi_j \in C_0^\infty(D)$, сходящихся к функции u в $W_p^1(D;\mu)$.*

Доказательство. По лемме 1.4 можно построить последовательность неотрицательных финитных функций $u_i \in \mathrm{Lip}^E_{\mathrm{loc}}(D)$. Желаемую последовательность получим посредством усреднения каждой функции u_i методом, использованным в лемме 1.2.

Теорема 1.3. *Пусть функции u и v ограничены и лежат в пространстве $W_p^1(D;\mu)$. Тогда*

(i) $uv \in W_p^1(D;\mu)$ и $\nabla_{\mathcal{L}}(uv) = v\nabla_{\mathcal{L}}u + u\nabla_{\mathcal{L}}v$,

(ii) если дополнительно $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$, то $vu \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$.

Доказательство теоремы для функций класса $W^1_{p,\mathrm{lip}}(D;\mu)$ вытекает из лемм 1.2 и 1.4. Общий случай получается предельным переходом.

Сформулируем необходимые для дальнейшего свойства о секвенциально слабой компактности пространств $W_p^1(D;\mu)$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$. Будем говорить, что *последовательность функций $u_j \in L_p(D;\mu)$ сходится слабо в $L_p(D;\mu)$ к функции $u \in L_p(D;\mu)$*, если

$$\int_D vu_j\,d\mu \to \int_D vu\,d\mu$$

для любой функции $v \in L_{p/(p-1)}(D;\mu)$. Слабая сходимость векторнозначных функций понимается как слабая сходимость координатных функций. Нам потребуется лемма Мазура.

Лемма 1.6 [11]. *Если X — нормированное пространство и последовательность x_j сходится слабо в X к x, то существует последовательность $\tilde{x}_j$ выпуклых комбинаций x_j, $\tilde{x}_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_{k,j}x_j$, $\lambda_{k,j} > 0$, $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_{k,j} = 1$, такая, что последовательность $\tilde{x}_j$ сходится к x в топологии пространства X.*

Теорема 1.4. *Предположим, что K — выпуклое и замкнутое подмножество $W_p^1(D;\mu)$. Если последовательность функций $u_j \in K$ сходится сильно к функции $u \in L_p(D;\mu)$, а последовательность субградиентов $\nabla_{\mathcal{L}}u_j$ сходится слабо к вектор-функции $v \in L_p(D;\mu;\mathbb{R}^k)$, то $u \in K$ и $v = \nabla_{\mathcal{L}}u$.*

Доказательство. Вначале покажем, что последовательность $(u_j, \nabla_{\mathcal{L}}u_j)$ сходится слабо в нормированном пространстве $L_p(D;\mu)\times L_p(D;\mu;\mathbb{R}^k)$. По лемме 1.6 имеем последовательность выпуклых комбинаций

$$\tilde{x}_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{k,j}((u_j, \nabla_{\mathcal{L}}u_j)), \quad \lambda_{k,j} > 0, \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_{k,j} = 1,$$

сходящуюся к (u, v) в пространстве $L_p(D;\mu) \times L_p(D;\mu;\mathbb{R}^k)$. В частности, по лемме 1.6 последовательность $v_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_{k,j}u_j \in K$ фундаментальна в пространстве $W_p^1(D;\mu)$, и поэтому ее предел $\lim v_k$ принадлежит K и совпадает с функцией u. Кроме того, $v = \nabla_{\mathcal{L}}u$.

Теорема 1.5. *Предположим, что u_j — ограниченная последовательность функций из пространства $W_p^1(D;\mu)$. Тогда найдутся подпоследовательность u_{j_i} и функция $u \in W_p^1(D;\mu)$ такие, что u_{j_i} сходится слабо в пространстве $L_p(D;\mu)$ к элементу u, а подпоследовательность вектор-функций $\nabla_{\mathcal{L}} u_{j_i}$ сходится слабо в пространстве $L_p(D;\mu;\mathbb{R}^k)$ к вектор-функции $\nabla_{\mathcal{L}} u$. Кроме того, если $u_j \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$, то $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$.*

Доказательство. Существование слабо сходящихся последовательностей u_{j_i} и $\nabla_{\mathcal{L}} u_{j_i}$ вытекает из известного факта функционального анализа (см. [10]). Применение теоремы 1.4 завершает доказательство.

Теорема 1.6. *Пусть u_j — ограниченная в пространстве $W_p^1(D;\mu)$ последовательность функций такая, что $u_j \to u$ почти всюду. Тогда $u \in W_p^1(D;\mu)$ и последовательность u_j $(\nabla_{\mathcal{L}} u_j)$ сходится слабо в пространстве $L_p(D;\mu)$ $(L_p(D;\mu;\mathbb{R}^k))$ к функции u (к вектор-функции $\nabla_{\mathcal{L}} u$). Если $u_j \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$, то $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$.*

Доказательство. Слабая сходимость последовательности u_j к функции u в $L_p(D;\mu)$ доказывается посредством стандартного применения теоремы Лебега. Из теорем 1.4 и 1.5 вытекает, что $u \in W_p^1(D;\mu)$ $\big(u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)\big)$ и подпоследовательность $\nabla_{\mathcal{L}} u_i$ сходится слабо к $\nabla_{\mathcal{L}} u$ в $L_p(D;\mu;\mathbb{R}^k)$. Так как слабый предел не зависит от выбора подпоследовательности, отсюда следует, что $\nabla_{\mathcal{L}} u_j \to \nabla_{\mathcal{L}} u$ сходится слабо в пространстве $L_p(D;\mu;\mathbb{R}^k)$.

Лемма 1.1 позволяет построить необходимую для дальнейшего изложения функцию-срезку.

Лемма 1.7. *Пусть $D \Subset \Omega$ — компактная подобласть. Существуют числа $C > 0$ и $r_0 > 0$ такие, что для любой точки $x_0 \in D$ и чисел $0 < r_1 < r_2 < r_0$ найдется функция $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(B(x_0,r_2);\mu)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(a) носитель η содержится в шаре $B(x_0,r_2)$;

(b) $\eta \equiv 1$ на шаре $B(x_0,r_1)$;

(c) $|\nabla_{\mathcal{L}}\eta(x)| \leqslant C/(r_2-r_1)$.

Доказательство. Рассмотрим липшицеву функцию

$$\operatorname{dist}(x, B(x_0,r_1)) = \inf_{y \in B(x_0,r_1)} \rho(x,y).$$

Положим

$$\eta(x) = \left(1 - \frac{\operatorname{dist}(x, B(x_0,r_1))}{r_2 - r_1}\right)^+.$$

Выбирая согласно лемме 1.1 число $r_0 > 0$ так, чтобы $\cup\{B(x_0,r_0),\ x_0 \in D\} \Subset \Omega$, имеем выполнение свойств (a)–(c).

§ 2. Суперрешения и задача с препятствием

Функция $u : D \to \mathbb{R}$ называется *$\mathcal{A}$-гармонической* в области $D \subset \Omega'$, $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, если она является слабым решением уравнения

$$-\operatorname{div} \mathcal{A}(x, \nabla_{\mathcal{L}} u) = 0, \tag{2.1}$$

где $\nabla_{\mathcal{L}} u = (X_1 u, X_2 u, \dots, X_k u)$. Здесь $\mathcal{A} : \Omega' \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ — отображение, удовлетворяющее для некоторых чисел $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$ следующим условиям.

($\mathcal{A}$1) Отображение $x \mapsto \mathcal{A}(x,\xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbb{R}^k$, а отображение $\xi \mapsto \mathcal{A}(x,\xi)$ непрерывно для почти всех $x \in \Omega'$.

($\mathscr{A}2$) $\mathscr{A}(x,\xi)\xi \geqslant \alpha\, w(x)|\xi|^p$.
($\mathscr{A}3$) $|\mathscr{A}(x,\xi)| \leqslant \beta\, w(x)|\xi|^{p-1}$.
($\mathscr{A}4$) $(\mathscr{A}(x,\xi) - \mathscr{A}(x,\zeta))(\xi - \zeta) > 0$ для всех $\xi,\zeta \in \mathbb{R}^k$, $\xi \neq \zeta$.
($\mathscr{A}5$) $\mathscr{A}(x,\lambda\xi) = \lambda|\lambda|^{p-2}\mathscr{A}(x,\xi)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

В условиях ($\mathscr{A}2$), ($\mathscr{A}3$) неотрицательная функция w есть некоторый p-допустимый вес в области Ω.

Определение 2.1. Функция $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mu)$ называется (*слабым*) *решением* уравнения (2.1) в области D, если для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$ имеет место соотношение

$$\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\,dx = 0. \tag{2.2}$$

Определение 2.2. Функция $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mu)$ называется *суперрешением* уравнения (2.1) в области D, если

$$\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\,dx \geqslant 0 \tag{2.3}$$

для каждой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$.

Определение 2.3. Функция $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mu)$ называется *субрешением* (2.1) в области D, если $-u$ есть суперрешение уравнения (2.1) в D.

Предложение 2.1. *Если u — решение (суперрешение) уравнения (2.1) в области D, $\lambda,\tau \in \mathbb{R}$ ($\lambda \geqslant 0$), то функция $\lambda u + \tau$ также является решением (суперрешением) уравнения (2.1) в области D.*

Доказательство. Пусть функция $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mu)$ — решение уравнения (2.1) в области D. Тогда для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$ выполняется соотношение (2.2). Рассмотрим функцию $v = \lambda u + \tau$. Свойство ($\mathscr{A}5$) влечет

$$\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}v)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\,dx = \int\limits_D \mathscr{A}(x,\lambda\nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\,dx$$
$$= \lambda|\lambda|^{p-2}\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\,dx = 0.$$

Поэтому функция v является решением уравнения (2.1) в области D. В том случае, когда u — суперрешение (т. е. выполняется соотношение (2.3)), доказательство проводится аналогично.

Как обычно, символ $L^1_p(D;\mu)$ обозначает пространство Дирихле, состоящее из локально интегрируемых в области D функций, субградиент которых суммируем в степени p.

Лемма 2.1. *Если $u \in L^1_p(D;\mu)$ — решение (суперрешение) уравнения (2.1) в области D, то*

$$\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\,dx = 0 \quad (\geqslant 0),$$

для всех функций $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$ (всех неотрицательных функций $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$).

Доказательство. Пусть $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$. Выберем последовательность функций $\varphi_i \in C_0^\infty(D)$, сходящихся к функции φ в пространстве $W^1_p(D;\mu)$. Если

φ — неотрицательная функция, то по лемме 1.5 можно выбрать последовательность неотрицательных функций из $C_0^\infty(D)$, сходящихся к функции φ в пространстве $W_p^1(D;\mu)$. Имеем

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\,dx - \int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi_i\,dx\right| \\ \leqslant \beta\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}u|^{p-1}|\nabla_{\mathscr{L}}\varphi_i - \nabla_{\mathscr{L}}\varphi|\,d\mu \\ \leqslant \beta\Big(\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}u|^p\,d\mu\Big)^{(p-1)/p}\Big(\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi_i - \nabla_{\mathscr{L}}\varphi|^p\,d\mu\Big)^{1/p} \to 0, \quad i\to\infty.\end{aligned}$$

Поэтому $\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\,dx = \lim\limits_{i\to\infty}\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi_i\,dx \geqslant 0.$

Важным свойством решений уравнения (2.1) является квазиминимизация весового p-интеграла Дирихле

$$\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}u|^p\,d\mu. \tag{2.4}$$

Пусть функция $u \in W_p^1(D;\mu)$ — решение уравнения (2.1) и $u-\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$. Тогда

$$\begin{aligned}\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}u|^p\,d\mu &\leqslant \alpha^{-1}\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}u\,dx \\ &= \alpha^{-1}\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}(u-\varphi)\,dx + \alpha^{-1}\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\,dx \\ &= \alpha^{-1}\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\,dx \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\Big(\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}u|^p\,d\mu\Big)^{(p-1)/p}\Big(\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi|^p\,d\mu\Big)^p.\end{aligned}$$

Таким образом, для интеграла (2.4) получаем оценку

$$\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}u|^p\,d\mu \leqslant (\beta/\alpha)^p\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi|^p\,d\mu, \tag{2.5}$$

где $u-\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$. Если $\mathscr{A}(x,\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$, то в формуле (2.5) $\beta/\alpha = 1$, и поэтому решение уравнения $\operatorname{div}(|\nabla_{\mathscr{L}}u|^{p-2}\nabla_{\mathscr{L}}u) = 0$ есть экстремальное значение функционала (2.4) среди всех функций, совпадающих с u на границе.

Лемма 2.2. *Пусть функция $u \in W_p^1(D;\mu)$ — суперрешение, а функция $v \in W_p^1(D;\mu)$ — субрешение уравнения (2.1) в области D. Если $\eta = \min(u-v,0) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$, то $u \geqslant v$ почти всюду в области D.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}0 \leqslant \int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}v)\nabla_{\mathscr{L}}\eta\,dx - \int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}\eta\,dx \\ = -\int\limits_{u<v} (\mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}v) - \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u))(\nabla_{\mathscr{L}}v - \nabla_{\mathscr{L}}u)\,dx \leqslant 0.\end{aligned}$$

Тогда по свойству ($\mathscr{A}4$) получаем, что $\nabla_{\mathscr{L}}\eta = 0$ почти всюду в области D. Так как функция η лежит в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$, то, применяя неравенство Пуанкаре ($\mathscr{W}4$) на шарах достаточно малого радиуса (область D покрывается конечным числом таких шаров), получаем, что на каждом из них функция η равна некоторой константе. Поскольку на шарах, пересекающихся с дополнением области D, функция η очевидно равна нулю, отсюда легко заключить, что $\eta = 0$ почти всюду в D.

Пусть ψ — произвольная функция, принимающая значения на расширенной вещественной прямой $[-\infty, \infty]$, и пусть $\nu \in W^1_p(D;\mu)$. Зададим класс функций

$$\mathscr{K}_{\psi,\nu} = \mathscr{K}_{\psi,\nu}(D) = \big\{v \in W^1_p(D;\mu) : v \geqslant \psi \text{ почти всюду в } D,\quad v - \nu \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)\big\}.$$

Если $\psi = \nu$, мы пишем $\mathscr{K}_{\psi,\psi}(D) = \mathscr{K}_{\psi}(D)$. Задача заключается в отыскании функции u из $\mathscr{K}_{\psi,\nu}(D)$ такой, что

$$\int\limits_D \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}(v-u)\,dx \geqslant 0, \tag{2.6}$$

где $v \in \mathscr{K}_{\psi,\nu}(D)$. Функция ψ называется *препятствием*.

Определение 2.4. Функция u из $\mathscr{K}_{\psi,\nu}(D)$, удовлетворяющая неравенству (2.6) для всех функций $v \in \mathscr{K}_{\psi,\nu}(D)$, называется *решением задачи с препятствием ψ и граничным значением ν* или просто *решением задачи с препятствием* в $\mathscr{K}_{\psi,\nu}(D)$.

Лемма 2.3. *Предположим, что функция u является решением задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{\psi,\nu}(D)$. Если функция $v \in W^1_p(D;\mu)$ — суперрешение уравнения (2.1) в области D такое, что $\min(u,v) \in \mathscr{K}_{\psi,\nu}(D)$, то $v \geqslant u$ почти всюду в D.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $u - \min(u,v)$. Она лежит в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$ и, кроме того, неотрицательна. Так как u — решение задачи с препятствием, а v — суперрешение, то по лемме 2.1

$$\int\limits_D (\mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}v) - \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u))\nabla_{\mathscr{L}}(u - \min(u,v))\,dx$$
$$= \int\limits_D (\mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}\min(u,v)) - \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u))\nabla_{\mathscr{L}}(u - \min(u,v))\,dx \leqslant 0.$$

Из соотношения ($\mathscr{A}4$) получаем, что $u = \min(u,v)$.

Из этой леммы вытекает, что решение задачи с препятствием есть наименьшее суперрешение уравнения (2.1) в классе $K_{\psi,\nu}(D)$ и, следовательно, единственно. Существование решения задачи с препятствием в случае непустого класса $K_{\psi,\nu}(D)$ может быть доказано аналогично рассуждениям работы [24, с. 332].

Предложение 2.2. *Если u и v — два суперрешения уравнения (2.1) в области D, то $\min(u,v)$ — суперрешение уравнения (2.1) в области D.*

Доказательство. Зафиксируем открытое множество $G \Subset D$ и рассмотрим функцию $f = \min(u,v)$. Достаточно показать, что f является суперрешением в G. Если f_0 является решением задачи с препятствием в $\mathscr{K}_f(G)$, то $f_0 \geqslant f$ почти всюду в G. Кроме того, так как $\min(u,f_0)$ и $\min(v,f_0)$ лежат в $\mathscr{K}_f(G)$, то лемма 2.3 влечет выполнение условий $u \geqslant f_0$ и $v \geqslant f_0$ почти всюду в G. Поэтому $f = f_0$ является суперрешением в G.

Предложение 2.3. *Если функция u — решение задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{\psi,\nu}(D)$, где ψ и ν существенно ограничены сверху постоянной M, то u существенно ограничена сверху константой M. В частности, если u — решение уравнения (2.1) в области D с граничным значением ν, то почти всюду в D*

$$\operatorname*{ess\,inf}_D \nu \leqslant u \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_D \nu.$$

Доказательство. Так как функция $\min(u, M)$ — суперрешение из класса $\mathscr{K}_{\psi,\nu}(D)$, то первая часть утверждения теоремы следует из леммы 2.3. Чтобы доказать вторую часть утверждения заметим, что u является решением задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{-\infty,\nu}(D)$, а $-u$ — в $\mathscr{K}_{-\infty,-\nu}(D)$. Требуемое свойство вытекает из первого утверждения.

Лемма 2.4. *Предположим, что функция u — решение задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{\psi,u}(D)$ и $G \subset D$ — открытое множество. Если найдется субрешение v уравнения (2.1) в области G такое, что $\psi \leqslant v \leqslant u$ почти всюду в G, то функция u является решением уравнения (2.1) в области G.*

Доказательство. Пусть $G' \Subset G$ — открытое множество и h — решение уравнения (2.1) в G' такое, что $h - u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(G';\mu)$. Мы покажем, что $u = h$ в G', откуда и вытекает требуемое. Заметим, что из леммы 2.2 следует, что $h \leqslant u$ в G'. С другой стороны,

$$\min(h - v, 0) = \min(u - v, u - h) + (h - u) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(G';\mu),$$

и применяя снова лемму 2.2, получаем, что $h \geqslant v$ в G'. Следовательно, $h \in \mathscr{K}_{\psi,u}(G')$. Так как функция u — решение задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{\psi,u}(G')$, то она является наименьшим суперрешеним в $\mathscr{K}_{\psi,u}(G')$, и поэтому $u \leqslant h$ в области G'. Следовательно, $u = h$.

Из леммы 2.4, в частности, следует, что если u — решение задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{\psi,\nu}(D)$ и найдется постоянная C такая, что $\psi \leqslant C \leqslant u$ в открытом множестве G, то функция u есть решение уравнения (2.1) в области G.

В следующей лемме доказывается оценка типа Каччиополи, существенно используемая при доказательстве регулярности решений рассматриваемого класса уравнений.

Лемма 2.5. *Предположим, что функция $\eta \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$ неотрицательна, ее носитель компактен в D и число q не меньше нуля.*

(i) Если функция u — решение задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{\psi,u}(D)$ с неположительным препятствием ψ, то

$$\int_D |u^+|^q |\nabla_{\mathscr{L}} u^+|^p \eta^p \, d\mu \leqslant c \int_D |u^+|^{q+p} |\nabla_{\mathscr{L}} \eta|^p \, d\mu. \tag{2.7}$$

(ii) Если функция u — суперрешение уравнения (2.1) в области D, то

$$\int_D |u^-|^q |\nabla_{\mathscr{L}} u^-|^p \eta^p \, d\mu \leqslant c \int_D |u^-|^{q+p} |\nabla_{\mathscr{L}} \eta|^p \, d\mu. \tag{2.8}$$

Здесь $c = p^p(\beta/\alpha)^p$.

Доказательство. Мы докажем лишь первое утверждение, доказательство оценки (2.8) проводится аналогично. Без умаления общности можно считать, что $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Пусть $\varphi = -u^+\eta^p$. Тогда φ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$ и имеет компактный носитель в области D. Так как $u+\varphi \in \mathscr{K}_{\psi,u}(D)$, то

$$0 \leqslant \int_D \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u) \nabla_{\mathscr{L}} \varphi \, dx = \int_D \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)(-\eta^p \nabla_{\mathscr{L}} u^+ - p u^+ \eta^{p-1} \nabla_{\mathscr{L}} \eta) \, dx$$
$$\leqslant -\alpha \int_D |\nabla_{\mathscr{L}} u^+|^p \eta^p \, d\mu + p\beta \int_D |\nabla_{\mathscr{L}} u^+|^{p-1} |u^+| |\nabla_{\mathscr{L}} \eta| \eta^{p-1} \, d\mu$$

и, следовательно,

$$\int_D |\nabla_{\mathscr{L}} u^+|^p \eta^p \, d\mu \leqslant \frac{p\beta}{\alpha} \int_D |\nabla_{\mathscr{L}} u^+|^{p-1} |u^+| |\nabla_{\mathscr{L}} \eta| \eta^{p-1} \, d\mu$$
$$\leqslant \frac{p\beta}{\alpha} \Big(\int_D |\nabla_{\mathscr{L}} u^+|^p \eta^p \, d\mu \Big)^{(p-1)/p} \Big(\int_D |\nabla_{\mathscr{L}} \eta|^p |u^+|^p \, d\mu \Big)^{1/p}.$$

Отсюда и из того, что $\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}} u^+|^p \eta^p \, d\mu < \infty$, получаем

$$\int_D |\nabla_{\mathscr{L}} u^+|^p \eta^p \, d\mu \leqslant c \int_D |\nabla_{\mathscr{L}} \eta|^p |u^+|^p \, d\mu,$$

где $c = p^p(\beta/\alpha)^p$. Это есть в точности неравенство (2.7) для $q = 0$. Далее мы воспользуемся тем фактом, что функция $u - t$, где $t \in \mathbb{R}$, является решением задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{\psi-t,u-t}$. Поэтому для $t > 0$ имеет место оценка

$$\int_D |\nabla_{\mathscr{L}} (u-t)^+|^p \eta^p \, d\mu \leqslant c \int_D |\nabla_{\mathscr{L}} \eta|^p |(u-t)^+|^p \, d\mu. \tag{2.9}$$

Чтобы завершить доказательство достаточно применить следующую формулу: если f — неотрицательная ν-измеримая функция в пространстве X с мерой ν, то для $0 < q < \infty$ имеет место формула Кавальери

$$\int_X f^q \, d\nu = q \int_0^\infty t^{q-1} \nu([x : f(x) > t]) \, dt.$$

Используя далее эту формулу и оценку (2.9), получаем

$$\int_D |u^+|^q |\nabla_{\mathscr{L}} u^+|^p \eta^p \, d\mu = q \int_0^\infty t^{q-1} \int_{u>t} |\nabla_{\mathscr{L}} u^+|^p \eta^p \, d\mu \, dt$$
$$= q \int_0^\infty t^{q-1} \int_{u>t} |\nabla_{\mathscr{L}} (u-t)^+|^p \eta^p \, d\mu \, dt \leqslant cq \int_0^\infty t^{q-1} \int_{u>t} |(u-t)^+|^p |\nabla_{\mathscr{L}} \eta|^p \, d\mu \, dt$$
$$\leqslant cq \int_0^\infty t^{q-1} \int_{u>t} |u^+|^p |\nabla_{\mathscr{L}} \eta|^p \, d\mu \, dt = c \int_D |u^+|^{q+p} |\nabla_{\mathscr{L}} \eta|^p \, d\mu.$$

Для решений уравнения (2.1) из леммы 2.5 получаем следующую оценку.

Лемма 2.6. *Если функция u является решением уравнения (2.1) в области D, то*

$$\int_D |u|^q |\nabla_{\mathscr{L}} u|^p \eta^p \, d\mu \leqslant c \int_D |u|^{q+p} |\nabla_{\mathscr{L}} \eta|^p \, d\mu,$$

где $\eta \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$ — неотрицательная функция с компактным носителем в области D и число q не меньше нуля. Здесь $c = p^p(\beta/\alpha)^p$.

Мы применяем далее итерационную технику Мозера для получения двух основных оценок для суперрешений уравнения (2.1).

Теорема 2.1. *Для произвольного множества $E \Subset \Omega'$ существует число $r_0 > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in E$ и произвольного числа $0 < r < r_0$ в шаре $B = B(x_0, r)$ выполняются следующие оценки.*

(i) Если функция u — решение задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{\psi,u}(B)$ с неположительным препятствием ψ, то

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\lambda B} u^+ \leqslant c(1-\lambda)^{-\xi} \left(\fint_B |u^+|^q \, d\mu \right)^{1/q}. \tag{2.10}$$

(ii) Если функция u — суперрешение уравнения (2.1) в шаре B, то

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\lambda B} |u^-| \leqslant c(1-\lambda)^{-\xi} \fint_B |u^-|^q \, d\mu)^{1/q}. \tag{2.11}$$

Здесь $\xi = \max(p\varkappa/q(\varkappa-1), \varkappa/(\varkappa-1))$, $\varkappa$ — число в неравенстве Соболева $\mathscr{W}3$, $0 < \lambda < 1$ и $0 < q < \infty$ — произвольные числа и $c = c(p, q, \beta/\alpha, c_\mu, r_0) > 0$.

Доказательство. Мы докажем оценку (2.10), оценка (2.11) доказывается аналогично. Пусть

$$r_l = \lambda + (1-\lambda)2^{-l}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots.$$

Фиксируем неотрицательрую функцию $\eta_l \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(r_l B;\mu)$ с компактным носителем такую, что $\eta_l \equiv 1$ на шаре $r_{l+1}B = B(x_0, r_{l+1}r)$ и выполнено соотношение $|\nabla_{\mathscr{L}} \eta_l| \leqslant C_0(1-\lambda)^{-1}2^l r^{-1}$. Существование такой функции гарантируется леммой 1.7. Зафиксируем число $t \geqslant 0$ и положим $w_l = |u^+|^{1+t/p}\eta_l$. Тогда из оценки (2.7) выводим

$$\begin{aligned}
\left(\int_{r_l B} |\nabla_{\mathscr{L}} w_l|^p \, d\mu \right)^{1/p} &\leqslant (p+t)/p \left(\int_{r_l B} |u^+|^t |\nabla_{\mathscr{L}} u^+|^p \eta_l^p \, d\mu \right)^{1/p} \\
&+ \left(\int_{r_l B} |u^+|^{p+t} |\nabla_{\mathscr{L}} \eta_l|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leqslant c(p+t) \left(\int_{r_l B} |u^+|^{p+t} |\nabla_{\mathscr{L}} \eta_l|^p \, d\mu \right)^{1/p} \\
&\leqslant c(1-\lambda)^{-1} 2^l C_0 r^{-1}(p+t) \left(\int_{r_l B} |u^+|^{p+t} \, d\mu \right)^{1/p},
\end{aligned}$$

Применяя весовое неравенство Соболева $\mathscr{W}3$, получаем

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{r_l B} |w_l|^{p\varkappa} \, d\mu \right)^{1/(p\varkappa)} &\leqslant c r r_l \left(\fint_{r_l B} |\nabla_{\mathscr{L}} w_l|^p \, d\mu \right)^{1/p} \\
&\leqslant \tilde{c}(1-\lambda)^{-1} r_l 2^l (p+t) \left(\fint_{r_l B} |u^+|^{t+p} \, d\mu \right)^{1/p},
\end{aligned}$$

где $\tilde{c}$ зависит только от чисел $p, \beta/\alpha, c_\mu, r_0$ и $\varkappa > 1$ из $\mathscr{W}3$. Затем полагая $h = p + t$ и используя свойство удвоения $\mathscr{W}1$ меры μ, имеем

$$\Big(\fint_{r_{l+1}B} |u^+|^{h\varkappa}\, d\mu\Big)^{1/(h\varkappa)} \leqslant c_1^{1/h}(1-\lambda)^{-p/h} 2^{pl/h} h^{p/h} \Big(\fint_{r_l B} |u^+|^h\, d\mu\Big)^{1/h},$$

где c_1 зависит от $p, \beta/\alpha, c_\mu, r_0$. Так как эта оценка выполняется для всех $h > p$, мы можем применить ее для $h = h_l = p\varkappa^l$ при всех $l = 0, 1, 2, \ldots$. Применяя итерации для $q = p$, получим оценки

$$\begin{aligned}\operatorname*{ess\,sup}_{\lambda B} u^+ &\leqslant \lim_{l\to\infty} \Big(\fint_{r_l B} |u^+|^{h_l\varkappa}\, d\mu\Big)^{1/(h_l\varkappa)} \\ &\leqslant c(1-\lambda)^{-\sum\limits_{l=0}^{\infty}\varkappa^{-l}} \prod_{l=0}^{\infty} 2^{l\varkappa^{-l}} \prod_{l=0}^{\infty} (p\varkappa^l)^{\varkappa^{-l}} \Big(\fint_B |u^+|^p\, d\mu\Big)^{1/p} \\ &\leqslant c(1-\lambda)^{-\varkappa/(\varkappa-1)} \Big(\fint_B |u^+|^p\, d\mu\Big)^{1/p}. \qquad (2.12)\end{aligned}$$

Отметим здесь тот важный факт, что оценка (2.12) имеет место не только для шара $B = B(x_0, r)$, но и для каждого шара, лежащего внутри B, поскольку константы c и $\varkappa$ не зависят от точки x_0 и числа r.

Далее мы покажем, что показатель p можно заменить произвольным положительным числом q. Полагаем $\big(\fint_E v^s\, d\mu\big)^{1/s} = \operatorname*{ess\,sup}_E v$ для $s = \infty$.

Лемма 2.7. *Пусть $0 < q < p < \infty$, $\xi \in \mathbb{R}$ и шар $B = B(x_0, r)$ выбран так же, как и в теореме 2.1. Если неотрицательная функция $v \in L_p(B;\mu)$ удовлетворяет неравенству*

$$\Big(\fint_{\lambda B'} v^s\, d\mu\Big)^{1/s} \leqslant c_1(1-\lambda)^{\xi} \Big(\fint_{\lambda B'} v^s\, d\mu\Big)^{1/s}, \qquad (2.13)$$

для каждого шара $B' = B'(x_0, r')$, где $r' \leqslant r$, и для всех чисел $0 < \lambda < 1$, то

$$\Big(\fint_{\lambda B} v^s\, d\mu\Big)^{1/s} \leqslant c(1-\lambda)^{\xi/\theta} \Big(\fint_B v^q\, d\mu\Big)^{1/q},$$

для всех чисел $0 < \lambda < 1$. Здесь $c = c(p, q, \xi, c_1, c_\mu) > 0$, а число $\theta \in (0,1)$ таково, что $1/p = \theta/q + (1-\theta)/s$.

Доказательство. Так как $\big(\fint_{\lambda B} v^s\, d\mu\big)^{1/s}$ сходится к $\operatorname*{ess\,sup}_{\lambda B} v$, когда $s \to \infty$, то, не умаляя общности, можно считать, что $s < \infty$. Пусть

$$\Phi(q) = \sup_{1/2<\lambda<1} (1-\lambda)^{\hat{q}} \Big(\fint_{\lambda B} v^p\, d\mu\Big)^{1/p},$$

где $\hat{q} = \xi(\theta - 1)/\theta$. Обозначим $\lambda' = 1/2(1+\lambda)$. Применяя (2.13), для каждого $\lambda \in (0,1)$ получаем неравенство

$$(1-\lambda)^{\hat{q}/(1-\theta)} \Big(\fint_{\lambda B} v^s\, d\mu\Big)^{1/s} \leqslant (1-\lambda')^{\hat{q}} \Big(\fint_{\lambda' B} v^p\, d\mu\Big)^{1/p} \leqslant c\Phi(q), \qquad (2.14)$$

где $c = c(c_1, \xi, \theta) > 0$. Зафиксируем число $\delta > 0$ и выберем $\lambda' \in (1/2, 1)$ таким образом, чтобы

$$\Phi(q) \leqslant (1-\lambda')^{\hat{q}} \Big(\fint_{\lambda' B} v^p \, d\mu \Big)^{1/p} + \delta.$$

Далее, применяем неравенство Юнга

$$ab \leqslant \varepsilon a^r + \varepsilon^{-1/(r-1)} b^{r/(r-1)}, \quad \varepsilon > 0, \quad r > 1.$$

Так как $1 = \theta p/q + (1-\theta)p/s$, то

$$\begin{aligned}
\Phi(q) &\leqslant (1-\lambda')^{\hat{q}} \Big(\fint_{\lambda' B} v^p \, d\mu \Big)^{1/p} = (1-\lambda')^{\hat{q}} \Big(\fint_{\lambda' B} v^{p\theta} v^{p(1-\theta)} \, d\mu \Big)^{1/p} + \delta \\
&\leqslant (1-\lambda')^{\hat{q}} \Big(\fint_{\lambda' B} v^q \, d\mu \Big)^{\theta/p} \Big(\fint_{\lambda' B} v^s \, d\mu \Big)^{(1-\theta)/p} + \delta \\
&\leqslant c(\theta, \varepsilon) \Big(\fint_{\lambda' B} v^q \, d\mu \Big)^{1/q} + \varepsilon (1-\lambda')^{\hat{q}/(1-\theta)} \Big(\fint_{\lambda' B} v^s \, d\mu \Big)^{1/s} + \delta \\
&\leqslant c(\theta, q, \varepsilon, c_\mu) \Big(\fint_{B} v^q \, d\mu \Big)^{1/q} + \varepsilon C_0 \Phi(q) + \delta,
\end{aligned}$$

где последние два неравенства следуют из свойства удвоения меры $\mathscr{W}1$ и неравенства (2.14). Выбирая $\varepsilon = (2C_0)^{-1}$ и устремляя δ к нулю, получаем, что $\Phi(q) \leqslant c \Big(\fint_B v^q \, d\mu \Big)^{1/q}$. Поэтому из неравенства (2.14) вытекает оценка

$$(1-\lambda')^{\hat{q}/(1-\theta)} \Big(\fint_{\lambda' B} v^s \, d\mu \Big)^{1/s} \leqslant c \Big(\fint_{B} v^q \, d\mu \Big)^{1/q},$$

где $c = c(c_1, \xi, \theta, q, c_\mu) > 0$.

Следующая теорема является следствием теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *(i) Каждое суперрешение уравнения (2.1) в области D локально ограничено снизу.*

(ii) Каждое решение уравнения (2.1) в области D локально ограничено.

(iii) Решение задачи с препятствием в области D локально ограничено сверху при условии, что препятствие локально ограничено сверху.

Из теоремы 2.1 следует, что если функция v — неотрицательное субрешение в шаре B, то

$$\operatorname*{ess\,sup}_{1/2 B} v \leqslant c \Big(\fint_{B} v^q \, d\mu \Big)^{1/q}$$

для всех $q > 0$, где c зависит от $p, q, \beta/\alpha, c_\mu, r_0$.

Лемма 2.8. *Если функция u — суперрешение уравнения (2.1) в области D и $u \geqslant \varepsilon > 0$, то $v = -1/u$ также является суперрешением в области D.*

Доказательство. Для числа $q < 0$ рассмотрим функцию u^{-q}. В силу леммы 1.3 $u^{-q} \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D; \mu)$ и $\nabla_{\mathscr{X}} u^{-q} = -q u^{-q-1} \nabla_{\mathscr{X}} u$. Пусть функция $\varphi \in$

$C_0^\infty(D)$ неотрицательна и $\psi = u^{2(1-p)}\varphi$. Тогда носитель функции $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$ компактен, и так как $\psi \geqslant 0$, то по свойству $(\mathscr{A}5)$ получаем

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \int\limits_D \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}\psi\, dx \\ &= 2(1-p)\int\limits_D u^{1-2p}\varphi \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}} u\, dx + \int\limits_D u^{2(1-p)}\mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\, dx \\ &\leqslant \int\limits_D \mathscr{A}(x, u^{-2}\nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\, dx = \int\limits_D \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} v)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\, dx.\end{aligned}$$

Лемма 2.9. *Предположим, что функция u — неотрицательное суперрешение уравнения (2.1) в шаре B, выбранном так же, как в теореме 2.1. Тогда*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\lambda B} u \geqslant c(1-\lambda)^\xi \Big(\fint\limits_B u^{-q}\, d\mu\Big)^{-1/q},$$

где $0 < \lambda < 1$, $0 < q < \infty$ и число $\xi > 0$ выбрано, как в теореме 2.1.

Доказательство. Пусть $u_\varepsilon = u+\varepsilon$ для $\varepsilon > 0$. Тогда по лемме 2.8 функция $-1/u_\varepsilon$ есть суперрешение. Утверждение леммы для функции u_ε вытекает из теоремы 2.1. Действительно,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\lambda B} u_\varepsilon^{-1} \leqslant c(1-\lambda)^{-\xi}\Big(\int\limits_B |u_\varepsilon^{-q}|\, d\mu\Big)^{1/q},$$

$$\big(\operatorname*{ess\,inf}_{\lambda B} u_\varepsilon\big)^{-1} \leqslant c(1-\lambda)^{-\xi}\Big(\int\limits_B |u_\varepsilon^{-q}|\, d\mu\Big)^{1/q},$$

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\lambda B} u_\varepsilon \geqslant c^{-1}(1-\lambda)^{\xi}\Big(\int\limits_B |u_\varepsilon^{-q}|\, d\mu\Big)^{-1/q}.$$

Требуемое утверждение вытекает из этих неравенств при $\varepsilon \to 0$.

Нам потребуется весовой аналог леммы Джона — Ниренберга (см. [31]).

Лемма 2.10 [31, с. 33, теорема 2]. *Предположим, что локально μ-интегрируемая функция v в области $D \Subset \Omega'$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{B \Subset D} \fint\limits_B |v - v_B|\, d\mu \leqslant c_0,$$

где $v_B = \fint\limits_B v\, d\mu$. Тогда найдутся положительные числа c_1 и c_2, зависящие от c_0 и c_μ, такие, что

$$\sup_{B \Subset D} \fint\limits_B \exp(c_1|v - v_B|)\, d\mu \leqslant c_2.$$

Далее, мы покажем, что если функция u является положительным суперрешением, то $v = \ln u$ удовлетворяет предположению леммы 2.10. Определение емкости, фигурирующее в следующей лемме, см. в § 6.

Лемма 2.11. *Пусть $u \geqslant \varepsilon > 0$ — суперрешение уравнения (2.1) в области D. Тогда $\ln u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mu)$ и $\nabla_{\mathcal{L}} \ln u = \nabla_{\mathcal{L}} u/u$. Кроме того, если $E \subset D$ — измеримое множество, то*

$$\int_E |\nabla_{\mathcal{L}} \ln u|^p \, d\mu \leqslant \operatorname{cap}\big(E; \overset{\circ}{L}{}^1_p(D;\mu)\big),$$

где $c = (p\beta/(p-1)\alpha)^p$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.8. Покажем выполнение второго утверждения для компактного множества $E \subset D$. Пусть функция $\varphi \in C_0^\infty(D)$ неотрицательна, $\varphi \equiv 1$ на E. Тогда функция $\eta = \varphi^p u^{1-p}$ лежит в классе $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$. Так как функция η неотрицательна и имеет компактный носитель, то

$$0 \leqslant \int_D \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathcal{L}} u) \nabla_{\mathcal{L}} \varphi \, dx$$
$$= \int_D \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathcal{L}} u)(p\varphi^{p-1} u^{1-p} \nabla_{\mathcal{L}} \varphi - (p-1) u^{-p} \varphi^p \nabla_{\mathcal{L}} u) \, dx,$$

и поэтому

$$\int_{\operatorname{supp}\varphi} |\nabla_{\mathcal{L}} u|^p u^{-p} \varphi^p \, d\mu \leqslant c \int_{\operatorname{supp}\varphi} |\nabla_{\mathcal{L}} u|^{p-1} u^{1-p} |\nabla_{\mathcal{L}} \varphi| \varphi^{p-1} \, d\mu$$
$$\leqslant c \Big(\int_{\operatorname{supp}\varphi} |\nabla_{\mathcal{L}} u|^p u^{-p} \varphi^p \, d\mu \Big)^{(p-1)/p} \Big(\int_D |\nabla_{\mathcal{L}} \varphi|^p \, d\mu \Big)^{1/p},$$

где $c = p\beta/(p-1)\alpha$. Так как функция φ выбиралась специальным образом, то утверждение леммы доказано.

Из последнего утверждения и правой части неравенств леммы 6.6 вытекает

Предложение 2.4. *Пусть $u \geqslant \varepsilon > 0$ — суперрешение уравнения (2.1) в области D. Тогда*

$$\int_B |\nabla_{\mathcal{L}} \ln u|^p \, d\mu \leqslant c\mu(B) r^{-p},$$

где шар $B = B(x,r)$ выбран так же, как в теореме 2.1, и удовлетворяет условию $2B \subset D$, $c = c(p, \beta/\alpha, c_\mu, r_0)$.

Теорема 2.3. *Пусть функция u — неотрицательное суперрешение уравнения (2.1) в области D. Тогда найдется константа $s_0 = s_0(p, \beta/\alpha, c_\mu) > 0$ такая, что для всех $0 < s < s_0$ выполнено неравенство*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\lambda B} u \geqslant c(1-\lambda)^\xi \Big(\fint_B u^s \, d\mu \Big)^{1/s},$$

где шар B выбран так же, как в теореме 2.1, и удовлетворяет условию $2B \subset D$, $0 < \lambda < 1$. Здесь $c = c(p, \beta/\alpha, c_\mu, r_0)$ и $\xi = \max(p\varkappa/s(\varkappa-1), \varkappa/(\varkappa-1))$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $v = \ln(u+\varepsilon)$. Из неравенства Пуанкаре и предложения 2.4 вытекает, что

$$\fint_B |v - v_B|^p \, d\mu \leqslant c r^p \fint_B |\nabla_{\mathcal{L}} v|^p \, d\mu \leqslant c,$$

здесь r — радиус шара B. Из леммы 2.10 следует существование констант c_1 и c_2 таких, что

$$\begin{aligned}
&\fint_B \exp(c_1 v)\,d\mu \fint_B \exp(-c_1 v)\,d\mu \\
&\qquad = \Big(\fint_B \exp(-c_1(v - v_B))\,d\mu\Big)\Big(\fint_B \exp(-c_1(v_B - v))\,d\mu\Big) \\
&\qquad\qquad \leqslant \Big(\fint_B \exp(-c_1|v_B - v|)\,d\mu\Big)^2 \leqslant c_2^2.
\end{aligned}$$

При $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\Big(\fint_B u^{c_1}\,d\mu\Big)^{1/c_1} \leqslant \Big(\fint_B u^{-c_1}\,d\mu\Big)^{-1/c_1}.$$

Таким образом, используя лемму 2.9, для всех $0 < s < c_1$ получаем

$$\Big(\fint_B u^{s}\,d\mu\Big)^{1/s} \leqslant c\Big(\fint_B u^{-s}\,d\mu\Big)^{-1/s} \leqslant c(1-\lambda)^{-\xi}\operatorname*{ess\,inf}_{\lambda B} u.$$

Теорема 2.4. *Пусть функция u — положительное суперрешение уравнения (2.1) в области D. Тогда $\ln u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mu)$ и $\nabla_{\mathcal{L}} \ln u = \nabla_{\mathcal{L}} u/u$. Кроме того, если E — измеримое множество, то*

$$\int_E |\nabla_{\mathcal{L}} \ln u|^p\,d\mu \leqslant c\operatorname{cap}\big(E; \overset{\circ}{L}{}^1_p(D;\mu)\big),$$

где $c = (p\beta/(p-1)\alpha)^p$. В частности,

$$\int_E |\nabla_{\mathcal{L}} \ln u|^p\,d\mu \leqslant c\mu(B)r^{-p},$$

где шар $B = B(x,r)$ выбран так же, как и в теореме 2.1, и удовлетворяет условию $2B \subset D$, $c = c(p, \beta/\alpha, c_\mu, r_0)$.

Доказательство. Как и в лемме 2.11, предполагаем, что множество E компактно. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем открытое множество $D' \Subset D$ таким, чтобы $E \subset D'$ и

$$\operatorname{cap}\big(E; \overset{\circ}{L}{}^1_p(D';\mu)\big) \leqslant \operatorname{cap}\big(E; \overset{\circ}{L}{}^1_p(D;\mu)\big) + \varepsilon.$$

Для некоторого $\delta > 0$ по теореме 2.3 имеем $u \geqslant \delta > 0$ в D'. По лемме 2.11 получаем, что $\ln u \in W^1_p(D';\mu)$, $\nabla_{\mathcal{L}} \ln u = \nabla_{\mathcal{L}} u/u$ и

$$\int_E |\nabla_{\mathcal{L}} \ln u|^p\,d\mu \leqslant c\operatorname{cap}\big(E; \overset{\circ}{L}{}^1_p(D';\mu)\big) \leqslant c\operatorname{cap}\big(E; \overset{\circ}{L}{}^1_p(D;\mu)\big) + c\varepsilon.$$

§ 3. Точная форма слабого неравенства Гарнака

Лемма 3.1. *Предположим, что функция u — положительное суперрешение уравнения (2.1) в области D. Если $\eta \in C_0^\infty(D)$ и $\varepsilon > 0$, то*

$$\int_D |\nabla_{\mathcal{L}} u|^p u^{-1-\varepsilon}|\eta|^p\,d\mu \leqslant c\int_D |\nabla_{\mathcal{L}}\eta|^p u^{p-1-\varepsilon}\,d\mu,$$

где $c = c(p\beta/\varepsilon\alpha)^p$.

Доказательство. Можно предполагать, что функция η неотрицательна. Для положительного целого числа j положим $u_j = u + j$. Тогда $v = u_j^{-\varepsilon}\nu^p$ — неотрицательная функция с компактным носителем из класса $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu)$. Поэтому

$$0 \leqslant \int\limits_D \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}} v\, dx$$
$$= -\varepsilon \int\limits_D \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\eta^p u_j^{-1-\varepsilon}\nabla_{\mathscr{L}} u_j\, dx + p\int\limits_D \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\eta^{p-1}u_j^{-\varepsilon}\nabla_{\mathscr{L}}\eta\, dx.$$

Применяя свойства функции $\mathscr{A}(x,\xi)$ и неравенство Гёльдера, получаем

$$\alpha\varepsilon \int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}} u|^p \eta^p u_j^{-1-\varepsilon}\, d\mu \leqslant p\beta \int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}} u|^{p-1}\eta^{p-1}u_j^{-\varepsilon}|\nabla_{\mathscr{L}}\eta|\, d\mu$$
$$\leqslant p\beta\Big(\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}} u|^p\eta^p u_j^{-1-\varepsilon}\, d\mu\Big)^{(p-1)/p}\Big(\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}\eta|^p u_j^{p-1-\varepsilon}\, d\mu\Big)^{1/p}.$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}} u|^p\eta^p u_j^{-1-\varepsilon}\, d\mu \leqslant \int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}\eta|^p u_j^{p-1-\varepsilon}\, d\mu.$$

Теорема 3.1. *Пусть функция u — положительное суперрешение в шаре $2B$, где шар B выбран так же, как и в теореме 2.1. Если $0 < q \leqslant s < \varkappa(p-1)$, то*

$$\Big(\fint\limits_B u^s\, d\mu\Big)^{1/s} \leqslant c\Big(\fint\limits_{2B} u^q\, d\mu\Big)^{1/q},$$

где $c = c(p, \beta/\alpha, q, s, c_\mu, r_0) > 0$.

Доказательство. Предположим, что в шаре $2B$ выполнено неравенство $u \geqslant \varepsilon > 0$. Пусть $B = B(x_0, r)$ и $h \geqslant 1$ — целое число такое, что имеет место неравенство $\varkappa^{-h}s \leqslant q$. Для $j = 1, \ldots, h$ рассмотрим шары $B_j = (1 + j/h)B$, и пусть функция $\eta_j \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(B_j)$ удовлетворяет условиям леммы 1.7, т. е. $0 \leqslant \eta_j \leqslant 1$, $\eta_j \equiv 1$ на шаре $\overline{B}_{j-1}$ и $|\nabla_{\mathscr{L}}\eta_j| \leqslant ch/r$, где $B_0 = B$. Пусть $\varepsilon_j = p - 1 - \varkappa^{-j}s > 0$ и $v_j = \eta_j u^{1-(1+\varepsilon_j)p^{-1}}$. Из неравенства Соболева $\mathscr{W}3$ и леммы 3.1 получаем

$$\Big(\fint\limits_{B_j} v_j^{p\varkappa}\, d\mu\Big)^{1/(p\varkappa)} \leqslant cr\Big(\fint\limits_{B_j} |\nabla_{\mathscr{L}} v_j|^p\, d\mu\Big)^{1/p} \leqslant cr\Big(\fint\limits_{B_j} u^{p-1-\varepsilon_j}|\nabla_{\mathscr{L}}\eta|^p\, d\mu\Big)^{1/p}$$
$$\leqslant c\Big(\fint\limits_{B_j} u^{\varkappa^{-j}s}\, d\mu\Big)^{1/p} = c\Big(\fint\limits_{B_j} v_{j+1}^{p\varkappa}\, d\mu\Big)^{1/p} \leqslant c\Big(\fint\limits_{B_{1+j}} v_{j+1}^{p\varkappa}\, d\mu\Big)^{1/p}.$$

Так как $B_h = 2B$ и $\varkappa^{-h}s \leqslant q$, то

$$\Big(\fint\limits_B u^s\, d\mu\Big)^{1/s} \leqslant c\Big(\fint\limits_{B_1} v_1^{p\varkappa}\, d\mu\Big)^{1/s} \leqslant c\Big(\fint\limits_{B_h} u^{\varkappa^{-h}p}\, d\mu\Big)^{(\varkappa^h)/s} \leqslant c\Big(\fint\limits_{2B} u^q\, d\mu\Big)^{1/q},$$

где $c = c(p, \beta/\alpha, q, s, c_\mu, r_0) > 0$.

Комбинируя слабое неравенство Гарнака (теорема 2.3) и теорему 3.1, получаем точную форму утверждения теоремы 2.3.

Теорема 3.2. *Предположим, что функция u — неотрицательное суперрешение уравнения* (2.1) *в области D. Если $0 < s < \varkappa(p-1)$, то*

$$\left(\fint_B u^s\, d\mu\right)^{1/s} \leqslant c \operatorname{ess\,inf}_B u,$$

где шар B выбран так же, как и в теореме 2.1, *и удовлетворяет условию $4B \subset D$. Здесь $c = c(p, \beta/\alpha, s, c_\mu, r_0) > 0$.*

§ 4. Поточечное поведение решений

В этой части мы покажем, что в каждом суперрешении есть полунепрерывный снизу представитель. Кроме того, решение задачи с непрерывным препятствием также имеет непрерывный представитель.

Приведем необходимые для дальнейшего изложения сведения о полунепрерывных снизу функциях. Функция $u : A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, определенная на множестве $A \subset \Omega'$, называется *полунепрерывной снизу*, если для произвольного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in A : u(x) > \lambda\}$ открыто в A. Эквивалентно функция u полунепрерывна снизу на A, если для произвольной точки $x \in A$ имеет место неравенство $\varliminf_{y\to x} u(y) \leqslant u(x)$, где $\varliminf_{y\to x} u(y) = \lim_{r\to 0} \inf\{u(y) : y \in B(x,r) \cap (A\setminus\{x\})\}$. Функция $u : A \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ называется *полунепрерывной сверху*, если функция $-u$ полунепрерывна снизу.

Ясно, что вещественнозначная функция u непрерывна в A тогда и только тогда, когда функция u одновременно полунепрерывна сверху и снизу. Если $u_i, i \in I$, — полунепрерывные функции в A, то функция $u = \sup_{i\in I} u_i$ полунепрерывна снизу, так как $\{u > \lambda\} = \bigcup_{i\in I}\{u_i > \lambda\}$. В частности, если $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \dots$ — монотонная последовательность полунепрерывных снизу функций, то предел $u = \lim u_j$ полунепрерывен снизу.

Если функция u полунепрерывна снизу в D, то существует возрастающая последовательность непрерывных функций f_j в D такая, что $u = \lim_{j\to\infty} f_j$ в D. Чтобы это доказать, рассмотрим множество $\mathscr{F} = \{f \in C(D) : f \leqslant u\}$. Выберем компактные подмножества, исчерпывающие D, т. е. $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset D$, $\cup K_j = D$. Так как функция u ограничена снизу на K_j, то легко видеть, что $\mathscr{F} \neq \varnothing$ и, кроме того, $u = \sup \mathscr{F}$. Пусть $\{B_k : k = 1, 2, \dots\}$ — нумерация всех шаров $B \Subset D$ с рациональными координатами центров и рациональными радиусами шаров. Для каждого $i = 1, 2, \dots$ и $k = 1, 2, \dots$ выберем функции $f_{i,k} \in \mathscr{F}$ такие, что $f_{i,k} = \inf_{B_k} u - 1/i$, если $\inf_{B_k} u < \infty$, и $f_{i,k} = i$, если $\inf_{B_k} u = \infty$ в шаре $2^{-1}B_k$. Так как функция u полунепрерывна снизу, то легко видеть, что $u = \sup_{i,k} f_{i,k}$ в D. Поэтому $f_j = \max\{f_{i,k} : 1 \leqslant i, k \leqslant j\}$ — искомая последовательность функций.

Используя известный метод сглаживания (см., например, лемму 1.2), можно доказать, что функции f_j в предыдущем рассуждении могут быть выбраны гладкими.

Для функции u, определенной в D, полагаем

$$\operatorname{ess}\varliminf_{y\to x} u(y) = \lim_{r\to 0} \operatorname{ess\,inf}\{u(y) : y \in B(x,r\}.$$

Тогда для полунепрерывной снизу функции верны неравенства

$$u(x) \leqslant \varliminf_{y\to x} u(y) \leqslant \operatorname{ess}\varliminf_{y\to x} u(y).$$

Поэтому, если функция $u : D \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ удовлетворяет условию

$$u(x) = \operatorname{ess}\varliminf_{y\to x} u(y)$$

для всех точек $x \in D$, то функция u полунепрерывна снизу в D.

Теорема 4.1. *Пусть функция u — суперрешение уравнения (2.1) в области D. Тогда функция u существенно локально ограничена снизу и имеет полунепрерывный представитель u такой, что для каждой точки $x \in D$ выполняется равенство*

$$u(x) = \operatorname{ess} \varliminf_{y \to x} u(y). \tag{4.1}$$

Доказательство. Так как по теореме 2.2 функция u локально ограничена снизу, то можно считать, что функция u локально неотрицательна. Пусть $M = \sup\limits_D u < \infty$. Фиксируем точку $x \in D$. Положим $B_r = B(x,r)$ и $m_r = \operatorname{ess}\inf\{u(y) : y \in B_r\}$ для таких малых r, что $2B_r \subset D$. Для некоторого числа $0 < s \leqslant 1$ из слабого неравенства Гарнака вытекают оценки

$$m_{r/2} - m_r \geqslant c\Big(\fint_{B_r} (u - m_r)^s \, d\mu\Big)^{1/s} \geqslant c(M - m_r)^{(s-1)/s}\Big(\fint_{B_r} (u - m_r)\, d\mu\Big)^{1/s}$$

или

$$0 \leqslant \fint_{B_r} u \, d\mu - m_r \leqslant c(M - m_r)^{1-s}(m_{r/2} - m_r)^s \leqslant cM^{1-s}(m_{r/2} - m_r)^s.$$

Так как правая часть стремится к нулю при $r \to 0$, то для каждой точки $x \in D$ имеем

$$\operatorname{ess} \varliminf_{y \to x} u(y) = \lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} u \, d\mu. \tag{4.2}$$

По теореме Лебега [31] о дифференцируемости правая часть равенства (4.2) почти всюду совпадает с функцией $u(x)$, что и завершает доказательство в этом случае.

Общий случай следует из рассмотренного, так как для любого $k \in \mathbb{N}$ функция $u_k = \min(u,k)$ есть суперрешение уравнения (2.1) и локально μ-интегрируемую полунепрерывную функцию можно переопределить на множестве меры нуль, чтобы получить (4.1). В самом деле, так как $u = \lim\limits_{k \to \infty} \min(u,k)$, мы можем предположить, что функция u полунепрерывна снизу, и, полагая $\hat{u}(x) = \operatorname{ess} \varliminf\limits_{y \to x} u(y)$, для почти всех точек x имеем

$$u(x) \leqslant \varliminf_{y \to x} u(y) \leqslant \hat{u}(x) \leqslant \lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} u(y)\, d\mu(y) = u(x),$$

где последнее равенство следует из теоремы Лебега о дифференцируемости. Поэтому $\hat{u} = u$ почти всюду и $\hat{u}(x) = \operatorname{ess} \varliminf\limits_{y \to x} \hat{u}(y)$.

Теорема 4.2. *Пусть $p > 1 + 1/\varkappa$, где $\varkappa > 1$ — число из неравенства Соболева $\mathscr{W}3$. Тогда каждое суперрешение u уравнения (2.1) имеет полунепрерывный снизу представитель, для почти всех точек $x \in D$ удовлетворяющий равенствам*

$$u(x) = \operatorname{ess} \varliminf_{y \to x} u(y) = \lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} u \, d\mu.$$

Доказательство. Используем схему доказательства теоремы 4.1. Фиксируем точку $x \in D$ и положим $m_r = \operatorname{ess}\inf\{u(y) : y \in B(x,r)\}$ для таких малых r, что $B(x,4r) \subset D$. По теореме 4.1 можно считать, что $m_r \leqslant M \leqslant \infty$. Так как $\varkappa(p-1) > 1$, то, применяя слабое неравенство Гарнака с показателем $s = 1$, получаем

$$\fint_{B(x,r)} (u - m_{4r})\, d\mu \leqslant c(m_r - m_{4r}).$$

Так как правая часть последнего выражения стремится к нулю при $r \to 0$, то для каждой точки $x \in D$ имеем

$$\operatorname{ess}\varliminf_{y\to x} u(y) = \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} u\, d\mu.$$

Остается применить теорему Лебега о дифференцируемости.

В задаче с препятствием множество $\{x \in D : u(x) = \psi(x)\}$ называется *коинсиденциальным*. Последняя теорема демонстрирует, что свойство решения задачи с препятствием зависит от природы этого множества.

Теорема 4.3. *Пусть $D \subset \Omega'$ и функция $\psi : D \to [-\infty, \infty]$ непрерывна. Если функция $\nu \in W_p^1(D;\mu)$ такова, что $\nu \geqslant \psi$ почти всюду в D, то найдется единственное непрерывное решение u задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{\psi,\nu}(D)$. Кроме того, функция u является решением уравнения (2.1) в открытом множестве $\{x \in D : u(x) > \psi(x)\}$.*

Доказательство. Существование и единственность вытекают из вышеприведенной теоремы 4.1. Возьмем полунепрерывное снизу решение u такое, что

$$u(x) = \operatorname{ess}\varliminf_{y\to x} u(y)$$

для всех точек $x \in D$. Мы хотим показать, что

$$\operatorname{ess}\varlimsup_{y\to x} u(y) \leqslant u(x),$$

где $x \in D$. Так как функция u локально ограничена, то u вещественнозначна и непрерывна в D. Фиксируем точку $x \in D$ и число $\varepsilon > 0$. Так как функция ψ непрерывна, для всех точек $x \in D$

$$u(x) = \operatorname{ess}\varliminf_{y\to x} u(y) \geqslant \operatorname{ess}\varliminf_{y\to x} \psi(y) = \psi(x).$$

Выберем шар $B = B(x,r) \Subset D$ такой, что $\sup_B \psi \leqslant u(x) + \varepsilon = \gamma_0$ и $\inf_B \psi > u(x) - \varepsilon = \gamma_1$. Поэтому функция u полунепрерывна снизу. Из оценки теоремы 2.1(i) вытекает, что

$$\operatorname{ess}\sup_{1/2B}(u - \gamma_0) \leqslant c\fint_B (u - \gamma_0)^+\, d\mu,$$

где c не зависит от r (здесь r — радиус шара B). С другой стороны,

$$\fint_B (u-\gamma_0)^+\, d\mu = \fint_B (u - \min(u,\gamma_0))\, d\mu \leqslant \fint_B (u - \gamma_1)\, d\mu = \fint_B u\, d\mu - u(x) + \varepsilon.$$

Так как функция u локально ограничена, по теореме 4.2 имеем

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} u\, d\mu = u(x).$$

Тогда из вышеприведенного неравенства вытекает, что

$$\operatorname{ess}\varlimsup_{y\to x} u(y) \leqslant \gamma_0 + c\varepsilon = u(x) + c\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получим требуемое. Поэтому функция u непрерывна в D.

Приведем доказательство второй части теоремы в точке x_0 такой, что $u(x_0) > \psi(x_0)$. Найдутся константа λ и открытая окрестность U точки x_0 такие, что

$$u \leqslant \lambda \leqslant \psi$$

в U. По лемме 2.4 функция $v \equiv \lambda$ есть субрешение, а функция u — решение уравнения (2.1) в открытом множестве $\{x \in D : u(x) > \psi(x)\}$, что и требовалось доказать.

Так как каждое решение u уравнения (2.1) является решением задачи с непрерывным препятствием $-\infty$, то в силу теоремы 4.3 функция u может быть переопределена на множестве нулевой меры так, что станет непрерывной.

Теорема 4.4. *Если функция u — решение уравнения* (2.1) *в области D, то найдется непрерывная функция v, определенная в области D, такая, что $u = v$ почти всюду.*

Следующая теорема характеризует решение задачи с непрерывным препятствием в $\mathscr{K}_{\psi,\nu}$ с помощью всех суперрешений в $\mathscr{K}_{\psi,\nu}$.

Теорема 4.5. *Предположим, что функция $\psi : D \to \mathbb{R}$ непрерывна, $\nu \in W^1_p(D;\mu)$ и $u \in \mathscr{K}_{\psi,\nu}$ — непрерывное суперрешение в D. Функция u — решение задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{\psi,\nu}$ тогда и только тогда, когда u есть решение уравнения* (2.1) *на открытом множестве $\{u > \psi\}$.*

Доказательство. Необходимость доказана в теореме 4.3. Обратно, пусть v — непрерывное решение задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{\psi,\nu}$. Так как $\min(u,v) \in \mathscr{K}_{\psi,\nu}$, то мы имеем соотношение $u \geqslant v$ в области D (лемма 2.3). С другой стороны, нетрудно видеть, что $u - v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\{u > \psi\};\mu)$. Сравнивая это условие с леммой 2.2, получаем, что $u \leqslant v$, откуда $u = v$ есть решение задачи с препятствием.

§ 5. Свойства решений при сходимости

Лемма 5.1. *Предположим, что векторнозначные функции u и u_i лежат в $L_p(D;\mu)$, $D \subset \Omega'$. Если*

$$\lim_{i\to\infty}\int_D (\mathscr{A}(x,u(x)) - \mathscr{A}(x,u_i(x)))(u(x) - u_i(x))\,dx = 0,$$

то последовательность $\{u_i\}$ ($\{\mathscr{A}(\cdot,u_i)w^{-1/p}\}$) слабо сходится к функции u ($\mathscr{A}(\cdot,u)w^{-1/p}$) в пространстве $L_p(D;\mu)$ ($L_{p/(p-1)}(D;dx)$).

Доказательство. Запишем

$$I_i = \int_D (\mathscr{A}(x,u(x)) - \mathscr{A}(x,u_i(x)))(u(x) - u_i(x))\,dx$$

для $i = 1, 2, \ldots$, и выберем подпоследовательность v_i последовательности u_i так, чтобы для почти всех x из D

$$(\mathscr{A}(x,v_i(x)) - \mathscr{A}(x,u(x)))(v_i(x) - u(x)) \to 0. \tag{5.1}$$

Заметим, что по свойству ($\mathscr{A}$4) этот интеграл неотрицателен. Пусть $x \in D$ — точка такая, что справедливы (5.1) и свойства ($\mathscr{A}$1)–($\mathscr{A}$5), $0 < w(x) < \infty$ и

$|u(x)| < \infty$. Пусть u_{i_j} — произвольная подпоследовательность последовательности v_i такая, что u_{i_j} сходится к ξ в пространстве $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Тогда $|\xi| < \infty$, так как условие $|\xi| = \infty$ противоречит (5.1) ввиду неравенств

$$(\mathscr{A}(x, u_{i_j}(x)) - \mathscr{A}(x, u(x)))(u_{i_j}(x) - u(x))$$
$$\geqslant w(x)(\alpha|u_{i_j}(x)|^p - \beta(|u(x)||u_{i_j}(x)|^{p-1} + |u(x)|^{p-1}|u_{i_j}(x)|))$$
$$\geqslant w(x)\alpha(|u_{i_j}(x)|^p - c(|u_{i_j}(x)|^{p-1} + u_{i_j}(x)|)),$$

где $c = \max(|u(x)|, |u(x)|^{p-1})\beta/\alpha$. Отсюда заключаем, что

$$\alpha\|u_{i_j}\| \leqslant I_{i_j} + c(\|u_{i_j}\|^{p-1} + \|u_{i_j}\|),$$

где $\|f\| = \Big(\int\limits_D |f|^p\,d\mu\Big)^{1/p}$ и $c = \max(\|u\|, \|u\|^{p-1})$. Последнее неравенство показывает, что $\|u_{i_j}\| \leqslant M < \infty$, где M не зависит от индекса i_j.

Далее, отображение $\xi \mapsto \mathscr{A}(x, \xi)$ непрерывно, откуда по ($\mathscr{A}$5)

$$(\mathscr{A}(x, \xi) - \mathscr{A}(x, u(x)))(\xi - u(x)) = 0,$$

и поэтому $u(x) = \xi$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{j\to\infty} u_{i_j}(x) = u(x)$ и

$$\lim_{j\to\infty} \mathscr{A}(x, u_{i_j}(x))w^{-1/p}(x) = \mathscr{A}(x, u(x))w^{-1/p}(x)$$

для почти всех x из D. Так как $L_p(D;\mu)$-нормы функции u_{i_j} равномерно ограничены, то $L_{p/(p-1)}(D; dx)$-нормы выражений $\mathscr{A}(x, u_{ij})w^{-1/p}$ также равномерно ограничены. Поэтому u_{i_j} сходятся слабо к u в пространстве $L_p(D;\mu)$, а $\mathscr{A}(x, u_{ij})w^{-1/p}$ сходятся слабо к $\mathscr{A}(x, u)w^{-1/p}$ в пространстве $L_{p/(p-1)}(D; dx)$. Заметим, что слабые пределы не зависят от выбора подпоследовательностей u_{i_j}, v_i и последовательность u_i ограничена в $L_p(D;\mu)$. Следовательно, u_i сходятся слабо к u в пространстве $L_p(D;\mu)$, а $\mathscr{A}(x, u_i)w^{-1/p}$ сходятся слабо к $\mathscr{A}(x, u)w^{-1/p}$ в пространстве $L_{p/(p-1)}(D; dx)$.

Теорема 5.1. *Предположим, что $\{u_i\}$ — возрастающая и локально ограниченная последовательность суперрешений в области D. Тогда функция $u = \lim u_i$ есть суперрешение уравнения* (2.1) *в области D.*

Доказательство. Мы можем предположить, что каждая функция полунепрерывна снизу и удовлетворяет свойству $\operatorname{ess\,lim}$ (см. (4.1)). Фиксируем открытое множество $D' \Subset G \Subset D$. Так как u — локально ограниченная функция, то можно предполагать, что $u < 0$ в G, и тем самым последовательность $\nabla_{\mathscr{L}} u_i$ равномерно ограничена в $L_p(G;\mu)$. Отсюда и из теоремы 1.5 вытекает, что $u \in W_p^1(G;\mu)$ и $\nabla_{\mathscr{L}} u_i$ сходятся слабо к $\nabla_{\mathscr{L}} u$ в пространстве $L_p(G;\mu)$. Выберем функцию $\eta \in C_0^\infty(G)$ такую, что $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ и $\eta \equiv 1$ в D'. Далее, пусть $\psi = \eta(u - u_i)$ и

$$I_i = \int\limits_{D'} (\mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u(x)) - \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u_i(x)))(\nabla_{\mathscr{L}} u(x) - \nabla_{\mathscr{L}} u_i(x))\,dx.$$

Выбрав ψ как тестовую функцию для суперрешений u_i и применив неравенство Гёльдера, получаем

$$-\int\limits_{D'} \eta\mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u_i(x))(\nabla_{\mathscr{L}} u(x) - \nabla_{\mathscr{L}} u_i(x))\,dx \leqslant \int\limits_{D'} (u-u_i)\nabla_{\mathscr{L}}\eta\mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u_i(x))\,dx$$
$$\leqslant \beta\Big(\int\limits_G |u-u_i|^p|\nabla_{\mathscr{L}}\eta|^p\,d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_G |\nabla_{\mathscr{L}} u_i|^p\,d\mu\Big)^{(p-1)/p}$$
$$\leqslant c\Big(\int\limits_G |u-u_i|^p\,d\mu\Big)^{1/p} \to 0.$$

Кроме того, так как $\eta\mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)w^{-1} \in L_{p/(p-1)}(G;\mu)$, то слабая сходимость влечет сходимость

$$\int\limits_G \eta\mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u(x))(\nabla_{\mathscr{L}} u(x) - \nabla_{\mathscr{L}} u_i(x))\, dx \to 0.$$

Поэтому из справедливости соотношения

$$\eta(\mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u) - \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u_i))(\nabla_{\mathscr{L}} u - \nabla_{\mathscr{L}} u_i) \geqslant 0$$

почти всюду в G следует, что

$$\lim_{i\to\infty} I_i = 0.$$

Из леммы 5.1 вытекает, что функции $\mathscr{A}(\cdot, \nabla_{\mathscr{L}} u_i)w^{-1/p}$ слабо сходятся к функции $\mathscr{A}(\cdot, \nabla_{\mathscr{L}} u)w^{-1/p}$ в пространстве $L_{p/(p-1)}(D'; dx)$. Теперь осталось показать, что функция u — суперрешение уравнения (2.1). Действительно, пусть функция $\varphi \in C_0^\infty(D)$, $\varphi \geqslant 0$, такова, что $\operatorname{supp}\varphi \subset D'$. Тогда $\nabla_{\mathscr{L}}\varphi \in L_p(D';\mu)$, $\nabla_{\mathscr{L}}\varphi w^{1/p} \in L_p(D'; dx)$, и поэтому при $i \to \infty$ имеем

$$0 \leqslant \int\limits_{D'} \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u_i)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\, dx = \int\limits_{D'} \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u_i)w^{-1/p}\nabla_{\mathscr{L}}\varphi w^{1/p}\, dx$$
$$\to \int\limits_{D'} \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)w^{-1/p}\nabla_{\mathscr{L}}\varphi w^{1/p}\, dx = \int\limits_{D'} \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\, dx.$$

Приведем простой результат для убывающих последовательностей.

Теорема 5.2. *Предположим, что $\{u_i\}$ — убывающая и локально ограниченная последовательность суперрешений в области D. Тогда функция $u = \lim\limits_{i\to\infty} u_i$ есть суперрешение.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 5.1, утверждение следует из оценки леммы 2.5. Выберем открытое множество $G \subset D$, и пусть v — решение задачи с препятствием в $\mathscr{K}_u(G)$. Тогда $v \geqslant u$ и лемма 2.3 для всех i влечет условие $v \leqslant u$. Поэтому $v = u$ почти всюду в G и, следовательно, u есть суперрешение.

Из теорем 5.1 и 5.2 вытекает

Теорема 5.3. *Пусть $u_i \in C(D)$ такая последовательность решений уравнения (2.1) в области D, что u_i сходятся к u локально равномерно в области D. Тогда функция u есть решение уравнения (2.1) в области D.*

Эта часть завершается двумя важными теоремами о сходимости для задачи с препятствием.

Теорема 5.4. *Пусть $D \subset \Omega'$ и $\psi_i \in W_p^1(D;\mu)$ — убывающая последовательность функций такая, что функции ψ_i сходятся к ψ в $W_p^1(D;\mu)$. Пусть функция u_i — решение задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{\psi_i}$. Тогда последовательность u_i убывает и предельная функция u есть решение задачи с препятствием в $\mathscr{K}_\psi$.*

Доказательство. Непосредственно из леммы 2.3 вытекает, что последовательность u_i убывает. Следовательно, по теореме Лебега $u_i \to u$ в $L_p(D;\mu)$. Далее, поскольку каждое u_i есть решение задачи с препятствием, из свойства квазиминимизации (2.5) получаем

$$\sup_i \int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}} u_i|^p\, d\mu \leqslant \sup_i c \int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}} \psi_i|^p\, d\mu < \infty.$$

Следовательно, $\nabla_{\mathcal{L}} u_i$ сходятся слабо к $\nabla_{\mathcal{L}} u$ в пространстве $L_p(D;\mu)$ и $u-\psi\in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$ (теоремы 1.4 и 1.5). В силу условия $u\geqslant\psi$ почти всюду в D достаточно проверить, что

$$\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u)\nabla_{\mathcal{L}}\varphi\,dx\geqslant 0 \tag{5.2}$$

для каждой функции $\varphi\in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$ такой, что $\varphi\geqslant\psi-u$ почти всюду в D. Вначале рассмотрим функцию $v_i=\psi_i-\psi$. Поскольку $u+v_i-\psi_i\in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$ и $u+v_i\geqslant\psi_i$ почти всюду, получаем

$$\begin{aligned}
0&\geqslant\int\limits_D(\mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u_i)-\mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u))(\nabla_{\mathcal{L}} u-\nabla_{\mathcal{L}} u_i)\,dx\\
&=\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u_i)\nabla_{\mathcal{L}}(u+v_i-u_i)\,dx-\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u_i)\nabla_{\mathcal{L}} v_i\,dx\\
&\qquad-\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u)\nabla_{\mathcal{L}}(u-u_i)\,dx\\
&\geqslant-\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u_i)\nabla_{\mathcal{L}} v_i\,dx-\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u)\nabla_{\mathcal{L}}(u-u_i)\,dx.
\end{aligned}$$

Так как $\nabla_{\mathcal{L}} v_i$ сходится к нулю в $L_p(D;\mu)$ и $\nabla_{\mathcal{L}} u_i$ сходится слабо к $\nabla_{\mathcal{L}} u$ в $L_p(D;\mu)$, то два интеграла стремятся к нулю при $j\to\infty$. Следовательно,

$$\int\limits_D(\mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u_i)-\mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u))\nabla_{\mathcal{L}}(u-u_i)\,dx\to 0,$$

и поэтому

$$\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u_i)\nabla_{\mathcal{L}}(u-u_i)\,dx\to 0.$$

Кроме того, из леммы 5.1 следует, что функции $\mathscr{A}(\cdot,\nabla_{\mathcal{L}} u_i)w^{-1/p}$ сходятся слабо к $\mathscr{A}(\cdot,\nabla_{\mathcal{L}} u)w^{-1/p}$ в $L_{p/(p-1)}(D;dx)$. Чтобы доказать (5.2), зафиксируем функцию $\varphi\in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$, почти всюду удовлетворяющую условию $\varphi\geqslant\psi-u$, и положим $\varphi_i=\varphi+u+v_i-u_i$. Тогда $\varphi_i\in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$ и $\varphi_i\geqslant\varphi_i+u-u_i$ почти всюду в D. Следовательно, $\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u_i)\nabla_{\mathcal{L}}\varphi_i\,dx\geqslant 0$, откуда получаем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u_i)\nabla_{\mathcal{L}}\varphi\,dx\\
&\qquad=\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u_i)\nabla_{\mathcal{L}}\varphi_i\,dx+\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u_i)(\nabla_{\mathcal{L}}\varphi-\nabla_{\mathcal{L}}\varphi_i)\,dx\\
&\qquad\geqslant\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u_i)(\nabla_{\mathcal{L}} u_i-\nabla_{\mathcal{L}} u)\,dx-\int\limits_D \mathscr{A}(x,\nabla_{\mathcal{L}} u_i)\nabla_{\mathcal{L}} v_i\,dx.
\end{aligned}$$

Так как два последних интеграла стремятся к нулю при $i \to \infty$, то

$$\int\limits_D \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\,dx = \int\limits_D w^{-1/p}\mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi w^{1/p}\,dx$$

$$= \lim_{i\to\infty}\int\limits_D w^{-1/p}\mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u_i)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi w^{1/p}\,dx = \lim_{i\to\infty}\int\limits_D \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\,dx \geqslant 0.$$

Доказательство полностью завершено.

Теорема 5.5. *Пусть $D \subset \Omega'$, а ψ_i и u_i — возрастающие последовательности функций в D такие, что $\psi_i \to \psi$ и u_i — решение задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{\psi_i,u_i}$. Тогда предельная функция $u = \lim u_i$ является решением задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{\psi,u}$ при условии $u \in W^1_p(D;\mu)$.*

Доказательство. Если v — решение задачи с препятствием в $\mathscr{K}_{\psi,u}$, то, имея в виду, что u — суперрешение, из леммы 2.3 получаем $u \geqslant v$. С другой стороны, в силу этой же леммы $v \geqslant u_i$. Следовательно, $v \geqslant u$, откуда вытекает равенство $v = u$.

§ 6. Геометрия векторных пространств и емкость в пространствах Соболева

6.1. Емкость в функциональных пространствах. Пусть $\mathbb{X}$ — топологическое хаусдорфово пространство. Обозначим символом $F(\mathbb{X})$ нормированное пространство, элементы которого суть непрерывные функции, определенные на $\mathbb{X}$. Алгебраические операции в $F(\mathbb{X})$ определяются стандартным образом.

Предположим, что вместе с каждой функцией $u \in F(\mathbb{X})$ пространство $F(\mathbb{X})$ содержит ее модуль $|u|$. Таким образом, относительно поточечного отношения порядка между функциями пространство $F(\mathbb{X})$ образует векторную решетку. Пусть, кроме того, норма и порядок связаны между собой следующим образом: существует непрерывная монотонно возрастающая функция $\alpha : [0,\infty) \to [0,\infty)$, удовлетворяющая условям $\alpha(0) = 0$, $\alpha(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, и

$$\alpha(\|\max(u,v)\|) + \alpha(\|\min(u,v)\|) \leqslant \alpha(\|u\|) + \alpha(\|v\|), \tag{6.1}$$

где $u, v \in F(\mathbb{X})$ — произвольные функции.

Полагая в этом свойстве $v = -u$, получаем, что норма модуля функции u не превосходит нормы исходной функции.

Пример 6.1. В обозначениях § 1 рассмотрим область $\Omega' \Subset \Omega$. В качестве нормированного пространства $F_p(\Omega')$ возьмем множество всех функций φ, определенных на Ω', принадлежащих пересечению $C(\Omega') \cap W^1_p(\Omega';\mu)$, с нормой

$$\|\varphi\| = \Bigl(\int\limits_{\Omega'} |\varphi|^p\,d\mu + \int\limits_{\Omega'} |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi|^p\,d\mu\Bigr)^{1/p}.$$

Функцию α положим равной $\alpha(t) = t^p$.

Пример 6.2. Если в предыдущем примере вместо пространства $C(\Omega') \cap W^1_p(\Omega';\mu)$ рассмотреть пространство $C_0(\Omega') \cap \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega';\mu)$ с нормой

$$\|\varphi\| = \Bigl(\int\limits_{\Omega'} |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi|^p\,d\mu\Bigr)^{1/p}$$

и ту же функцию α, то мы получим другой пример нормированного пространства, обладающего вышеописанными свойствами. В дальнейшем это пространство обозначается символом $\overset{\circ}{F}_p(\Omega')$.

Пример 6.3. Фиксируем компактное множество $K_0 \subset \Omega'$, содержащее внутренние точки. В пространстве $F_p(\Omega')$ примера 6.1 рассмотрим подпространство $F_p(K_0; \Omega')$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на множестве K_0 с нормой

$$\|\varphi\| = \Bigl(\int\limits_{\Omega'} |\nabla_{\mathcal{L}}\varphi|^p \, d\mu\Bigr)^{1/p}$$

и той же функцией α.

Определение 6.1. Пусть K — компактное подмножество в $\mathbb{X}$. Множество

$$A(K; F(\mathbb{X})) = \{u \in F(\mathbb{X}) : u \geqslant 1 \text{ на } K\}$$

называется множеством *F-допустимых* функций для компакта $K \subset \mathbb{X}$.

Определение 6.2. Величина

$$\operatorname{cap}(K; F(\mathbb{X})) = \inf\{\alpha(\|u\|) : u \in A(K; F(\mathbb{X}))\} \tag{6.2}$$

называется *емкостью* компакта K в пространстве $F(\mathbb{X})$. Если множество допустимых функций для компакта K пусто, то полагаем $\operatorname{cap}(K; F(\mathbb{X})) = \infty$. Стандартным образом емкость, определенная на компактных множествах, распространяется на произвольные множества: если $E \subset \mathbb{X}$ — произвольное множество, то его *внутренняя* емкость есть величина

$$\underline{\operatorname{cap}}(E; F(\mathbb{X})) = \sup\{\operatorname{cap}(K; F(\mathbb{X})) : K \subset E, \ K \text{ компактно}\}, \tag{6.3}$$

а его *внешняя* емкость — величина

$$\overline{\operatorname{cap}}(E; F(\mathbb{X}) = \inf\{\underline{\operatorname{cap}}(U; F(\mathbb{X})) : E \subset U \subset \mathbb{X}, \ U \text{ открыто}\}. \tag{6.4}$$

Множество E называется *измеримым* относительно емкости, если

$$\underline{\operatorname{cap}}(E; F(\mathbb{X})) = \overline{\operatorname{cap}}(E; F(\mathbb{X})).$$

Для емкости измеримого множества мы используем обозначение $\operatorname{cap}(\cdot; F(\mathbb{X}))$, что очевидно не может привести к недоразумению, поскольку в этом случае величины (6.3) и (6.4) совпадают.

Теорема 6.1. *Функция множества $E \mapsto \operatorname{cap}(E; F(\mathbb{X}))$ обладает следующими свойствами.*

(i) Если множество $K \subset \mathbb{X}$ компактно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U_\varepsilon \subset \mathbb{X}$ такое, что $K \subset U_\varepsilon$ и для всякого компакта $K' \subset U_\varepsilon$ имеем

$$\operatorname{cap}(K'; F(\mathbb{X})) \leqslant \operatorname{cap}(K; F(\mathbb{X})) + \varepsilon.$$

(ii) Если $E_1 \subset E_2$, то

$$\underline{\operatorname{cap}}(E_1; F(\mathbb{X})) \leqslant \underline{\operatorname{cap}}(E_2; F(\mathbb{X})), \overline{\operatorname{cap}}(E_1; F(\mathbb{X})) \leqslant \overline{\operatorname{cap}}(E_2; F(\mathbb{X})).$$

(iii) Открытые и компактные множества измеримы относительно емкости.

(iv) Если K_1 и K_2 — компактные подмножества $\mathbb{X}$, то

$$\operatorname{cap}(K_1 \cup K_2; F(\mathbb{X})) + \operatorname{cap}(K_1 \cap K_2; F(\mathbb{X})) \leqslant \operatorname{cap}(K_1; F(\mathbb{X})) + \operatorname{cap}(K_2; F(\mathbb{X})).$$

(v) Если K_i — убывающая последовательность вложенных компактных подмножеств в $\mathbb{X}$ и $K = \bigcap\limits_i K_i$, то

$$\operatorname{cap}(K; F(\mathbb{X})) = \lim_{i\to\infty} \operatorname{cap}(K_i; F(\mathbb{X})).$$

(vi) *Если* $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset \bigcup_i E_i = E \subset \mathbb{X}$, *то*

$$\overline{\operatorname{cap}}(E; F(\mathbb{X})) = \lim_{i\to\infty} \overline{\operatorname{cap}}(E_i; F(\mathbb{X})).$$

(vii) *Если* $E = \bigcup_i E_i \subset \mathbb{X}$, *то*

$$\overline{\operatorname{cap}}(E; F(\mathbb{X})) \leqslant \sum_i \overline{\operatorname{cap}}(E_i; F(\mathbb{X})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Поскольку функции класса $A(K; F(\mathbb{X}))$ непрерывны и не меньше единицы на компакте K, то значение емкости (6.2) компакта K не изменится, если вместо класса $A(K; F(\mathbb{X}))$ мы возьмем подкласс, состоящий из функций, значения которых в точках компакта K строго больше единицы. Пусть $u \in A(K; F(\mathbb{X}))$ — функция такая, что $u > 1$ на K и $\alpha(\|u\|) \leqslant \operatorname{cap}(K; F(\mathbb{X})) + \varepsilon$. Возьмем в качестве U_ε множество $\{x \in \mathbb{X} : u(x) > 1\}$. Тогда множество U_ε открыто, $K \subset U_\varepsilon$ и для любого компакта $K' \subset U_\varepsilon$ функция u принадлежит классу $A(K'; F(\mathbb{X}))$. Отсюда получаем

$$\operatorname{cap}(K'; F(\mathbb{X})) \leqslant \alpha(\|u\|) \leqslant \operatorname{cap}(K; F(\mathbb{X})) + \varepsilon.$$

(ii) В случае компактных множеств E_1 и E_2 это свойство вытекает из соотношения $A(E_2; F(\mathbb{X})) \subset A(E_1; F(\mathbb{X}))$ и монотонности функции α. На произвольные множества оно распространяется предельным переходом.

(iii) Следует из определения емкостей.

(iv) Пусть $u_1 \in A(K_1; F(\mathbb{X}))$ и $u_2 \in A(K_2; F(\mathbb{X}))$. Тогда по свойству (6.1) имеем

$$\alpha(\|\max(u_1, u_2)\|) + \alpha(\|\min(u_1, u_2)\|) \leqslant \alpha(\|u_1\|) + \alpha(\|u_2\|).$$

Так как $F(\mathbb{X})$ образует векторную решетку, то $\max(u_1, u_2) \in F(\mathbb{X})$ и $\min(u_1, u_2) \in F(\mathbb{X})$. Следовательно, эти функции допустимы для компактов $K_1 \cup K_2$ и $K_1 \cap K_2$ соответственно. Отсюда вытекает

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}(K_1 \cup K_2; F(\mathbb{X})) &+ \operatorname{cap}(K_1 \cap K_2; F(\mathbb{X}))\\ &\leqslant \alpha(\|\max(u_1, u_2)\|) + \alpha(\|\min(u_1, u_2)\|) \leqslant \alpha(\|u_1\|) + \alpha(\|u_2\|).\end{aligned}$$

Далее, переходя в последнем неравенстве к нижней грани по всем допустимым функциям u_1 и u_2, получаем требуемое.

(v) Положим $b = \lim_{i\to\infty} \operatorname{cap}(K_i; F(\mathbb{X}))$. Так как $K \subset K_i$ для всех i, то $\operatorname{cap}(K; F(\mathbb{X})) \leqslant b$. Для получения обратного неравенства зафиксируем положительное число $\varepsilon > 0$ и выберем такое открытое множество $U \supset K$, что

$$\operatorname{cap}(U; F(\mathbb{X})) \leqslant \operatorname{cap}(K; F(\mathbb{X})) + \varepsilon$$

(возможность такого выбора гарантируется свойством (i)). Поскольку начиная с некоторого номера i_0 открытое множество U содержит в себе все K_i, то для всех номеров $i > i_0$ имеем

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{cap}(K_i; F(\mathbb{X})) \leqslant \operatorname{cap}(K_{i_0}; F(\mathbb{X})) \leqslant \operatorname{cap}(U; F(\mathbb{X})) \leqslant \operatorname{cap}(K; F(\mathbb{X})) + \varepsilon.$$

Значит, $b \leqslant \operatorname{cap}(K; F(\mathbb{X})) + \varepsilon$. Устремляя ε к нулю, получаем необходимое свойство.

Для доказательства свойств (vi) и (vii) нам потребуется вспомогательное утверждение

Лемма 6.1. *Предположим, что* $E_1,\dots,E_k \subset \mathbb{X}$, $F_i \subset E_i$, $i = 1,2,\dots,k$, *и* $\overline{\operatorname{cap}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^k F_i; F(\mathbb{X})\right) < \infty$. *Тогда*

$$\overline{\operatorname{cap}}\left(\bigcup_{i=1}^k E_i; F(\mathbb{X})\right) - \overline{\operatorname{cap}}\left(\bigcup_{i=1}^k F_i; F(\mathbb{X})\right) \leqslant \sum_{i=1}^k (\overline{\operatorname{cap}}\,(E_i; F(\mathbb{X})) - \overline{\operatorname{cap}}\,(F_i; F(\mathbb{X}))). \quad (6.5)$$

Доказательство. Приведем схему доказательства, опуская детали. Вначале соотношение (6.5) доказывается по индукции для компактных множеств. База индукции основывается на свойстве (*iv*). Чтобы доказать (6.5) для открытых множеств, мы применяем тот факт, что если $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^k E_i$ и $C_i \subset F_i$ — компактные подмножества, $\bigcup\limits_{i=1}^k C_i \subset K$, то компактное множество $K_i = K \setminus \bigcup\limits_{j=1, j\neq i}^k E_j$ есть подмножество E_i и содержит C_i. Кроме того, $K = \bigcup\limits_{i=1}^k K_i$. Имея свойство (6.5) для компактных и открытых множеств, мы можем получить его для произвольных.

(*vi*) Используя свойство (*ii*), имеем неравенство

$$\overline{\operatorname{cap}}\,(E; F(\mathbb{X})) \geqslant \lim_{i\to\infty} \overline{\operatorname{cap}}\,(E_i; F(\mathbb{X})).$$

Обратное неравенство доказываем в предположении, что значение $\overline{\operatorname{cap}}\,(E_i; F(\mathbb{X}))$ конечно для каждого номера i. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое открытое множество U_i, что $E_i \subset U_i \subset \mathbb{X}$ и

$$\operatorname{cap}\,(U_i; F(\mathbb{X})) \leqslant \overline{\operatorname{cap}}\,(E_i; F(\mathbb{X})) + 2^{-i}\varepsilon.$$

Так как $\operatorname{cap}\left(\bigcup\limits_{i=1}^k E_i; F(\mathbb{X})\right) = \operatorname{cap}\,(E_k; F(\mathbb{X})) < \infty$ для каждого номера k, то по лемме 6.1

$$\operatorname{cap}\left(\bigcup_{i=1}^k U_i; F(\mathbb{X})\right) - \overline{\operatorname{cap}}\left(\bigcup_{i=1}^k E_i; F(\mathbb{X})\right) \leqslant \sum_{i=1}^k 2^{-i}\varepsilon < \varepsilon.$$

Поэтому если $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^\infty U_i$ — компакт, то для некоторого номера k имеем $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^k U_i$, откуда получаем

$$\operatorname{cap}\,(K; F(\mathbb{X})) \leqslant \operatorname{cap}\left(\bigcup_{i=1}^k U_i; F(\mathbb{X})\right) \leqslant \overline{\operatorname{cap}}\left(\bigcup_{i=1}^k E_i; F(\mathbb{X})\right) + \varepsilon \leqslant \lim_{k\to\infty} \overline{\operatorname{cap}}\,(E_k; F(\mathbb{X})) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\overline{\operatorname{cap}}\,(E; F(\mathbb{X})) \leqslant \overline{\operatorname{cap}}\left(\bigcup_{i=1}^k U_i; F(\mathbb{X})\right) \leqslant \sup_K \overline{\operatorname{cap}}\,(K; F(\mathbb{X})) \leqslant \lim_{k\to\infty} \overline{\operatorname{cap}}\,(E_k; F(\mathbb{X})) + \varepsilon,$$

где верхняя грань берется по всем компактным множествам $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Таким образом, свойство (vi) получено.

(vii) Следует из свойства (vi). Заметим, что для конечного набора множеств свойство (vii) вытекает из леммы 6.1:

$$\overline{\operatorname{cap}}\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i; F(\mathbb{X})\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \overline{\operatorname{cap}}\,(E_i; F(\mathbb{X})).$$

Так как совокупность $\bigcup_{i=1}^{k} E_i$ образует возрастающую последовательность множеств, то, применяя свойство (vi), получаем (vii). Теорема 6.1 доказана.

Произвольная функция множеств, определенная на семействе всех подмножеств из $\mathbb{X}$ и удовлетворяющая свойствам (ii), (v) и (vi) теоремы 6.1, называется *обобщенной емкостью Шоке*. Напомним, что *множеством типа* K_σ называется любое счетное объединение компактных множеств.

Теорема 6.2 [1]. *Функция множества $E \mapsto \overline{\operatorname{cap}}\,(E; F(\mathbb{X}))$ есть обобщенная емкость Шоке. Всякое аналитическое множество E, содержащееся в некотором множестве типа K_σ из $\mathbb{X}$, измеримо, т. е.*

$$\operatorname{cap}(E; F(\mathbb{X})) = \sup\{\operatorname{cap}(K; F(\mathbb{X})) : K \subset E \textit{ компактно}\}.$$

Напомним, что в полном метрическом пространстве со счетным базисом всякое борелевское множество является аналитическим.

Пример 6.4. Емкость множества $E \subset \Omega'$ в пространстве $\overset{\circ}{F}_p(\Omega')$ иногда называют вариационной емкостью конденсатора (E, Ω'). Класс допустимых функций конденсатора (K, Ω'), K — компакт, есть

$$A\big(K; \overset{\circ}{F}_p(\Omega')\big) = \big\{u \in C_0(\Omega') \cap \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega'; \mu) : u \geqslant 1 \text{ на } K\big\}.$$

Пример 6.5. Фиксируем компактное множество $K_0 \subset \Omega'$, содержащее внутренние точки. Емкость множества $E \subset \Omega' \setminus K_0$ в пространстве $F_p(K_0; \Omega')$ (см. пример 6.3) называют емкостью конденсатора $(K_0, E; \Omega')$. Класс допустимых функций конденсатора $(K_0, K; \Omega')$, K — компакт, есть

$$A(K; F_p(K_0; \Omega')) = \big\{u \in C(\Omega') \cap \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega'; \mu) : u \geqslant 1 \text{ на } K,\ u = 0 \text{ на } K_0\big\}.$$

6.2. Множества емкости нуль. Будем говорить, что множество $E \subset \mathbb{X}$ имеет емкость нуль или просто E — множество нулевой емкости, если

$$\operatorname{cap}(E; F(\mathbb{X})) = 0.$$

В этом случае пишем $\operatorname{cap}(E; F(\mathbb{X})) = 0$. Если множество E не является множеством емкости нуль, пишем $\operatorname{cap}(E; F(\mathbb{X})) > 0$. Заметим, что произвольное множество емкости нуль содержится в борелевском множестве емкости нуль. В качестве такого множества можно взять G_δ-множество, т. е. множество, являющееся счетным пересечением открытых множеств.

Мы говорим, что некоторое свойство выполняется *квазивсюду* на $\mathbb{X}$, если оно выполняется всюду, за исключением множества, имеющего нулевую емкость. В теории потенциала множествами нулевой емкости можно зачастую пренебрегать. Поэтому полезно знать, имеет или нет данное множество E нулевую емкость. Следующая лемма является прямым следствием теоремы 6.1(vii).

Лемма 6.2. *Счетное объединение множеств емкости нуль имеет емкость нуль.*

Лемма 6.3. *Если* $\operatorname{cap}(E;\overset{\circ}{F}_p(\Omega'))=0$ $(\operatorname{cap}(E;F_p(\Omega'))=0$ *или* $\operatorname{cap}(E;F_p(K_0;\Omega'))=0)$, *то* $\mu(E)=0$ *и, следовательно,* $|E|=0$.

Доказательство. Рассмотрим случай пространства $\overset{\circ}{F}_p(\Omega')$. Случай второго и третьего пространств с учетом теоремы 6.10 вытекает из первого. Так как множество E имеет емкость нуль по условию, то конденсатор (E,Ω') имеет емкость нуль и мы можем выбрать последовательность допустимых для кондесатора (E,Ω') функций ν_i таких, что $\|\nabla_{\mathcal{L}}\nu_i|L_p(\Omega';\mu)\|\to 0$. Множество Ω' ограничено. Поэтому замыкание множества Ω' можно покрыть конечным набором метрических шаров, для каждого из которых выполняется неравенство $\mathscr{W}4$. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, получим, что последовательность функций ν_i сходится к некоторому постоянному значению в каждом шаре. Заметим, что на шарах, пересекающих дополнение к множеству Ω', эти постоянные в точности равны нулю. Тем самым последовательность функций сходится к нулю почти всюду в области Ω'. Так как функции ν_i допустимы для конденсатора (E,Ω'), то $\nu_i\geqslant 1$ на множестве E. Отсюда вытекает, что мера множества E с необходимостью равна нулю, что и требовалось доказать.

6.3. Уточненные и квазинепрерывные функции. Понятие емкости является удобным инструментом для описания особенностей элементов пополнения пространства $F(\mathbb{X})$.

Теорема 6.3. *Всякая фундаментальная в* $F(\mathbb{X})$ *последовательность функций* $\{f_n\}$, $f_n\in F(\mathbb{X})$, $n\in\mathbb{N}$, *содержит подпоследовательность, сходящуюся всюду, за исключением множества нулевой емкости, причем для произвольного* $\varepsilon>0$ *существует открытое множество* U_ε *такое, что* $\overline{\operatorname{cap}}(U_\varepsilon;F(\mathbb{X}))<\varepsilon$ *и на множестве* $\mathbb{X}\setminus U_\varepsilon$ *подпоследовательность сходится равномерно.*

Доказательство. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\alpha(2^n\|f_n-f_{n+1}\|)<1/2^n$. Полагаем $A_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}U_k$, где

$$U_k=\{x\in\mathbb{R}^n:|f_k(x)-f_{k+1}(x)|>1/2^k\},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Для точек множества $\mathbb{X}\setminus A_m$, $m\in\mathbb{N}$ фиксировано, при $n>m$ имеем

$$|f_n(x)-f_{n+l}(x)|\leqslant\sum_{k=n}^{n+l-1}|f_k(x)-f_{k+1}(x)|\leqslant\sum_{k=n}^{n+l-1}\frac{1}{2^k}\leqslant\frac{1}{2^{m-1}}.$$

Таким образом, на множестве $\mathbb{X}\setminus A_m$ последовательность $\{f_n\}$, $n\in\mathbb{N}$, сходится равномерно. С другой стороны, из теоремы 6.1 вытекает, что

$$\overline{\operatorname{cap}}(A_m;F(\mathbb{X}))\leqslant\sum_{k=m}^{\infty}\overline{\operatorname{cap}}(U_k;F(\mathbb{X}))\leqslant\sum_{k=m}^{\infty}\alpha(2^k\|f_k-f_{k+1}\|)\leqslant\frac{1}{2^{m-1}}.$$

Доказательство закончено.

По теореме Хаусдорфа пространство $F(\mathbb{X})$ можно пополнить до пространства $\widetilde{F}$, элементами которого являются классы эквивалентных фундаментальных последовательностей. *Чтобы реализовать пополнение* $\widetilde{F}$ *как классы эквивалентных на* $\mathbb{X}$ *функций, определенных квазивсюду, необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности Коши, сходящейся квазивсюду, условия* $f_n(x)\to 0$ *квазивсюду и* $\|f_n\|\to 0$ *были эквивалентны* [17]. В дальнейшем мы всюду предполагаем выполнение этого свойтва для абстрактного пространства $F(\mathbb{X})$. Нетрудно проверить выполнение сформулированного свойства для пространств примеров 6.1–6.3.

Определение 6.3. Функция f, принадлежащая пространству $\widetilde{F}$, называется *уточненной*, если существует последовательность f_s, $s \in \mathbb{N}$, функций из $F(\mathbb{X})$ таких, что

1) $\lim\limits_{s\to\infty} \|f - f_s|\widetilde{F}\| = 0$;

2) для любого положительного ε существует такое открытое множество U_ε, что $\operatorname{cap}(U_\varepsilon; F(\mathbb{X})) < \varepsilon$ и $f_s \to f$ равномерно в $\mathbb{X} \setminus U_\varepsilon$ при $s \to \infty$.

Из теоремы 6.3 вытекает

Следствие 6.1. *Всякий элемент пространства $\widetilde{F}$ содержит уточненную функцию.*

Следующий результат дает возможность оценивать емкость множеств Лебега уточненных функций.

Лемма 6.4. *Пусть $E \subset \mathbb{X}$ — произвольное множесто и $f \in \widetilde{F}$ — уточненная функция такая, что квазивсюду на E выполняется $|f(x)| \geqslant \beta > 0$. Тогда $\overline{\operatorname{cap}}(E; F(\mathbb{X})) \leqslant \alpha(\|f|\widetilde{F}\|/\beta)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\beta = 1$. По определению уточненности существуют последовательность функций $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ из $F(\mathbb{X})$, для которой $\|f - f_k\| \to 0$ при $k \to \infty$, и для $\varepsilon \in (0,1)$ открытое множество U_ε, $\overline{\operatorname{cap}}(U_\varepsilon; F(\mathbb{X})) < \varepsilon$, такие, что на дополнении $\mathbb{X} \setminus U_\varepsilon$ последовательность $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится равномерно к функции f. Пусть $E_1 = \{x \in \mathbb{X} : |f(x)| \geqslant 1\}$. Тогда $\overline{\operatorname{cap}}(E_1; F(\mathbb{X})) = \overline{\operatorname{cap}}(E; F(\mathbb{X}))$. Начиная с некоторого номера, множества $E_{k,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{X} : |f_k(x)| > 1 - \varepsilon\}$ содержат множество $E_1 \setminus U_\varepsilon$. Поэтому для больших номеров имеем $\overline{\operatorname{cap}}(E_1 \setminus U_\varepsilon; F(\mathbb{X})) \leqslant \overline{\operatorname{cap}}(E_{k,\varepsilon}; F(\mathbb{X}))$, откуда

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{cap}}(E; F(\mathbb{X})) &= \overline{\operatorname{cap}}(E_1; F(\mathbb{X})) \\ &\leqslant \overline{\operatorname{cap}}(E_1 \setminus U_\varepsilon; F(\mathbb{X})) + \overline{\operatorname{cap}}(U_\varepsilon; F(\mathbb{X})) \leqslant \overline{\operatorname{cap}}(E_{k,\varepsilon}; F(\mathbb{X})) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Заметим, что по теореме 6.1 $\overline{\operatorname{cap}}(E_{k,\varepsilon}; F(\mathbb{X})) \leqslant \alpha(\|f_k\|/(1-\varepsilon))$. Принимая во внимание равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k\| = \|f\|$, окончательно получаем

$$\overline{\operatorname{cap}}(E; F(\mathbb{X})) \leqslant \alpha\left(\frac{\|f\|}{1-\varepsilon}\right) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon \in (0,1)$ произвольно, то лемма доказана.

Следствие 6.2. *Две уточненные функции, принадлежащие одному элементу пространства $\widetilde{F}$, совпадают квазивсюду.*

Доказательство. Если f и g — две уточненные функции, принадлежащие одному элементу пространства $\widetilde{F}$, то

$$\{x \in \mathbb{X} : f(x) \neq g(x)\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{X} : |f(x) - g(x)| > 2^{-k}\}.$$

По лемме 6.4 для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $\overline{\operatorname{cap}}(\{x \in \mathbb{X} : |f(x) - g(x)| > 2^{-k}\}; F(\mathbb{X})) = 0$, поэтому в силу счетной полуаддитивности внешней емкости получаем

$$\overline{\operatorname{cap}}(\{x \in \mathbb{X} : f(x) \neq g(x)\}; F(\mathbb{X})) = 0.$$

Следствие 6.3. *Всякая последовательность $\{f_n\}$ уточненных функций $f_n \in F(\mathbb{X})$, $n \in \mathbb{N}$, сходящаяся в $F(\mathbb{X})$, содержит подпоследовательность, сходящуюся всюду, за исключением множества нулевой емкости, к функции $f \in F(\mathbb{X})$, причем для произвольного $\varepsilon > 0$ существует открытое множество U_ε такое, что $\overline{\operatorname{cap}}(U_\varepsilon; F(\mathbb{X})) < \varepsilon$ и на множестве $\mathbb{X} \setminus U_\varepsilon$ подпоследовательность сходится равномерно. При этом предел $f \in F(\mathbb{X})$ является уточненной функцией.*

Доказательство следствия аналогично доказательству теоремы 6.3, где для оценки емкостей множеств Лебега необходимо использовать лемму 6.4.

Определение 6.4. Пусть E — произвольное подмножество в $\mathbb{X}$. Множество $A(E;\widetilde{F})$, состоящее из элементов $u \in \widetilde{F}(\mathbb{X})$, для каждого из которых существует уточненная функция $\bar{u} \in u$ такая, что $\bar{u}(x)$ не меньше единицы для квазивсех $x \in E$, называется *множеством F-уточненных допустимых функций* для $E \subset \mathbb{X}$.

Лемма 6.5. *Множество $A(E;\widetilde{F})$ уточненных допустимых функций для произвольного множества $E \subset \mathbb{X}$ слабо замкнуто и выпукло в пространстве $\widetilde{F}$.*

Доказательство. Выпуклость множества $A(E;\widetilde{F})$ вытекает из полуаддитивности емкости. Проверим его замкнутость. Пусть последовательность $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ элементов множества $A(E;\widetilde{F})$ слабо сходится к элементу $f \in \widetilde{F}$. По лемме 1.6 некоторая выпуклая комбинация $g_k \in A(E;\widetilde{F})$ элементов $f_1,\dots,f_k$ сходится по норме к элементу f при $k\to\infty$. При каждом $k\in\mathbb{N}$ существует уточненная функция $\bar{g}_k \in f$ такая, что $\overline{\operatorname{cap}}(\{x\in E : \bar{g}_k < 1\}; F(\mathbb{X})) = 0$. Если $\bar{f} \in f$ — уточненная функция, то при каждом $k\in\mathbb{N}$ разности $\bar{g}_k - \bar{f}$ суть уточненные функции. Для любого $\varepsilon \in (0,1)$ справедливо включение

$$\{x\in E : \bar{f}(x) \leqslant 1-\varepsilon\} \subset \{x\in\mathbb{X} : |\bar{g}_k(x) - \bar{f}(x)| \geqslant \varepsilon\} \cup \bigcup_{l=1}^{\infty}\{x\in E : \bar{g}_l(x) < 1\}.$$

Отсюда по лемме 6.4 и теореме 6.1 получаем неравенство

$$\overline{\operatorname{cap}}(\{x\in E : \bar{f} \leqslant 1-\varepsilon\}; F(\mathbb{X})) \leqslant \alpha(\|g_k - f\|/\varepsilon), \quad k\in\mathbb{N},$$

из которого при переходе к пределу при $k\to\infty$ вытекает, что

$$\overline{\operatorname{cap}}(\{x\in E : \bar{f} \leqslant 1-\varepsilon\}; F(\mathbb{X})) = 0.$$

Остается заметить, что

$$\{x\in E : \bar{f}(x) < 1\} = \bigcup_{l=1}^{\infty}\{x\in E : \bar{f}(x) < 1 - l^{-1}\}$$

и еще раз применить теорему 6.1. Лемма доказана.

Следствие 6.4. *Пусть пространство $\widetilde{F}$ рефлексивно (равномерно выпукло). Если $E \subset \mathbb{X}$ и $A(E;\widetilde{F}) \neq \varnothing$, то существует (единственный) элемент f_E такой, что*

$$\|f_E|\widetilde{F}\| = \inf\{\|f|\widetilde{F}\| : f \in A(E;\widetilde{F})\}.$$

Доказательство. Обозначим правую часть равенства следствия символом I. Пусть $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность элементов из $A(E;\widetilde{F})$ такая, что $I = \lim\limits_{k\to\infty}\|f_k|\widetilde{F}\|$. Поскольку ограниченное слабо замкнутое множество рефлексивного пространства $\widetilde{F}$ слабо бикомпактно, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что исходная последовательность слабо сходится к пределу f_E. По лемме 6.5 имеем $f_E \in A(E;\widetilde{F})$ и, кроме того, $\|f_E|\widetilde{F}\| \leqslant \varliminf\limits_{k\to\infty}\|f_k|\widetilde{F}\|$. Единственность элемента f_E следует из равномерной выпуклости пространства $\widetilde{F}$. Следствие доказано.

Следствие 6.5. *Предположим, что пространство $\widetilde{F}$ рефлексивно. Пусть $\{E_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, — возрастающая последовательность множеств в $\mathbb{X}$, $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$, $A(E_m;\widetilde{F}) \neq \varnothing$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$A(E;\widetilde{F}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} A(E_m;\widetilde{F}) \quad \text{и} \quad \lim_{m\to\infty} \|f_{E_m}|\widetilde{F}\| = \inf\{\|f|\widetilde{F}\| : f \in A(E;\widetilde{F})\}.$$

Доказательство. Заметим, что $A(E_m;\widetilde{F}) \supset A(E_{m+1};\widetilde{F}) \supset A(E;\widetilde{F})$, $m \in \mathbb{N}$, и потому $\|f_{E_m}|\widetilde{F}\| \leqslant \|f_{E_{m+1}}|\widetilde{F}\|$, $m \in \mathbb{N}$. Кроме того, $A(E;\widetilde{F}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} A(E_m;\widetilde{F})$.

Если $A(E;\widetilde{F}) = \varnothing$, то $\inf\{\|f|\widetilde{F}\| : f \in A(E;\widetilde{F})\} = +\infty$. Одновременно и $\lim_{m\to\infty} \|f_{E_m}|\widetilde{F}\| = +\infty$. В противном случае из последовательности $\{f_{E_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ можно было бы извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу f_0, принадлежащему $A(E;\widetilde{F})$ в силу слабой замкнутости всех $A(E_m;\widetilde{F})$, что противоречит пустоте множества $A(E;\widetilde{F})$.

Если $A(E;\widetilde{F}) \neq \varnothing$, то $\|f_{E_m}\| \leqslant \|f_E\|$, $m \in \mathbb{N}$, и $\lim_{m\to\infty} \|f_{E_m}|\widetilde{F}\| \leqslant \|f_E|\widetilde{F}\|$. Допустим, что $\lim_{m\to\infty} \|f_{E_m}|\widetilde{F}\| < \|f_E|\widetilde{F}\|$. Извлекая из $\{f_{E_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу $f_0 \in A(E;\widetilde{F})$, имеем $\|f_0\| \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \|f_{E_k}|\widetilde{F}\| \leqslant \|f_E|\widetilde{F}\|$, что противоречит выбору элемента f_E.

Теорема 6.4. *Пусть $\mathbb{X}$ — локально компактное пространство со счетной базой, а функциональное пространство $\widetilde{F}$ рефлексивно. Тогда*

$$\overline{\operatorname{cap}}(E;F) = \inf\{\alpha(\|f|\widetilde{F}\|) : f \in A(E;\widetilde{F})\}.$$

Если $A(E_m;\widetilde{F}) \neq \varnothing$, то $\overline{\operatorname{cap}}(E;F) = \alpha(\|f_E|\widetilde{F}\|)$.

Доказательство. Если $f \in A(E;\widetilde{F})$, то по лемме 6.4 справедливо неравенство $\overline{\operatorname{cap}}(E;F) \leqslant \alpha(\|f|\widetilde{F}\|)$. Поэтому

$$\overline{\operatorname{cap}}(E;F) \leqslant \inf\{\alpha(\|f|\widetilde{F}\|) : f \in A(E;\widetilde{F})\},$$

каково бы ни было множество E. Если $e \subset \mathbb{X}$ — компакт, то из соотношения $A(e;F) \subset A(e;\widetilde{F})$ имеем

$$\begin{aligned}\alpha(\|f_e|\widetilde{F}\|) &= \inf\{\alpha(\|f|\widetilde{F}\|) : f \in A(e;\widetilde{F})\}\\ &\leqslant \inf\{\alpha(\|f|\widetilde{F}\|) : f \in A(e;F)\} = \overline{\operatorname{cap}}(e;F) = \operatorname{cap}(e;F).\end{aligned}$$

Пусть E — открытое множество и $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность компактных частей множества E такая, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} e_k = E$ и $\lim_{k\to\infty} \operatorname{cap}(e_k;F) = \overline{\operatorname{cap}}(E;F)$. Тогда из равенства $\operatorname{cap}(e_k;F) = \alpha(\|f_{e_k}|\widetilde{F}|)$ и следствия 6.5 вытекает, что

$$\overline{\operatorname{cap}}(E;F) = \lim_{k\to\infty} \alpha(\|f_{e_k}|\widetilde{F}\|) = \inf\{\alpha(\|f|\widetilde{F}\|) : f \in A(E;\widetilde{F})\}.$$

Пусть теперь $E \subset \mathbb{X}$ — произвольное множество, а U — открытое множество, содержащее E. Тогда очевидно, что $A(U;\widetilde{F}) \subset A(E;\widetilde{F})$ и $\inf\{\alpha(\|f|\widetilde{F}\|) : f \in A(E;\widetilde{F})\} \leqslant \inf\{\alpha(\|f|\widetilde{F}\|) : f \in A(U;\widetilde{F})\} = \overline{\operatorname{cap}}(U;F)$. Отсюда $\inf\{\alpha(\|f|\widetilde{F}\|) : f \in A(E;\widetilde{F})\} \leqslant \overline{\operatorname{cap}}(E;F)$, что в сочетании с полученным в начале доказательства обратным неравенством составляет первое утверждение теоремы. Второе утверждение вытекает из первого и из следствия 6.4. Теорема доказана.

Функция f_E из теоремы 6.4 называется в дальнейшем *емкостной функцией* для множества E. В силу свойства «норма модуля не превосходит нормы исходной функции» (см. начало этого параграфа) среди экстремальных функций имеются неотрицательные.

Пример 6.6. Условиям теорем этого раздела удовлетворяют пространства $F_p(\Omega')$, $\overset{\circ}{F}_p(\Omega')$, $F_p(K_0;\Omega')$ примеров 6.1–6.3 соответственно. Отметим, что пополнение пространства $F_p(\Omega')$ есть пространство Соболева $W_p^1(\Omega';\mu)$, введенное в § 1, а пополнение пространства $\overset{\circ}{F}_p(\Omega')$ есть пространство Дирихле $\overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega';\mu)$. В силу последней теоремы для данных двух примеров в обозначении емкости $\operatorname{cap}(\cdot, F_p)$ $(\operatorname{cap}(\cdot, \overset{\circ}{F}_p))$ вместо пространства F_p $(\overset{\circ}{F}_p)$ пишем $W_p^1(\Omega';\mu)$ $\big(\overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega';\mu)\big)$. Емкость конденсатора $(K_0, E;\Omega')$ в пространстве $F_p(K_0;\Omega')$ обозначаем далее символом $\operatorname{cap}\big(K_0, E; L_p^1(\Omega')\big)$. Заметим, что последняя емкость может быть определена для произвольных компактных множеств K_0, K_1, содержащихся в области Ω', следующим образом:

$$\operatorname{cap}\big(K_0, K_1; L_p^1(\Omega')\big) = \inf\{\|\nabla_{\mathcal{L}} u | L_p(\Omega')\|^p\},$$

где инфимум берется по всем функциям $u \in C(\Omega') \cap W_p^1(\Omega';\mu)$ таким, что $u \leqslant 0$ на K_0, $u \geqslant 1$ на K_1.

Требование примера 6.3 к компакту K_0 иметь внутренние точки приводит к тому, что теория емкости для этих пространств при фиксированном множестве K_0 вкладывается в изложенную здесь общую схему. На самом деле, эта схема применима для любого множества $K_0 \subset \Omega'$, «массивного» в следующем смысле: *если* $\|\nabla_{\mathcal{L}} u_n | L_p(\Omega')\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, *где* $u_n \equiv 0$ *на* K_0, $n \in \mathbb{N}$, *то* $u_n \to 0$ *в* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega';\mu)$.

Переходя к конкретным пространствам, можно специализировать свойства экстремальных функций. Рассмотрим, например, в качестве $\widetilde{F}$ пространство Соболева $L_p^1(\Omega';\mu)$.

Предложение 6.1. *Пусть емкость* $\mathscr{C} = \operatorname{cap}\big(E; \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega';\mu)\big)$ *множества* E *конечна. Тогда экстремальная функция* f_E *из теоремы 6.4 неотрицательна и является суперрешением уравнения*

$$-\operatorname{div}\big(w(x)|\nabla_{\mathcal{L}} u|^{p-2}\nabla_{\mathcal{L}} u\big) = 0.$$

Кроме того, если $E = U$ *— открытое множество, то для всех* $x \in \Omega'$ *экстремальная функция* f_U *удовлетворяет условию*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} f_U(y), d\mu = f_U(x).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную неотрицательную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$. Тогда $f_E + t\varphi \in A\big(E; \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega';\mu)\big)$ при любом $t \geqslant 0$. Поэтому $\mathscr{C} \leqslant \eta(t)$, где функция $\eta(t)$ равна $\big\|f_E + t\varphi | \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega';\mu)\big\|^p$. Следовательно, правая производная функции $\eta(t)$ в 0 неотрицательна. Отсюда вытекает соотношение

$$\eta'(+0) = \int_{\Omega'} |\nabla_{\mathcal{L}} f_E|^{p-2}\nabla_{\mathcal{L}} f_E \nabla_{\mathcal{L}}\varphi w(x)\, dx \geqslant 0.$$

Последнее в силу (2.2) означает, что f_E — суперрешение уравнения $-\operatorname{div}\mathscr{A}(x, \nabla_{\mathcal{L}} u) = 0$, где $\mathscr{A}(x,\xi) = w(x)|\xi|^{p-2}\xi$.

Согласно теореме 4.1 существует полунепрерывный снизу представитель суперрешения f_U, во всех точках $x \in \Omega'$ удовлетворяющий условию (4.2). По этой причине во всех точках $x \in U$ функция f_U не меньше единицы. Остается доказать, что неотрицательная полунепрерывная снизу функция f_U является уточненной. Выберем для этого возрастающую последовательность неотрицательных непрерывных функций $\psi_k \in C_0(\Omega')$, поточечно сходящихся к функции f_U. По теореме 4.3 существует непрерывное решение g_k задачи с препятствием в $K_{\psi_k}(\Omega')$. Так как $\psi_k \leqslant g_k \leqslant f_U$ во всех точках области Ω', то мы очевидно имеем поточечную сходимость последовательности g_k к функции f_U. Кроме того, ввиду $f_U \in K_{\psi_k}(\Omega')$, для всех k имеем неравенство

$$\int\limits_{\Omega'} |g_k|^p \, d\mu \leqslant \int\limits_{\Omega'} |f_U|^p \, d\mu < \infty.$$

Тем самым последовательность $\{g_k\}$ ограничена в $W_p^1(\Omega'; \mu)$, и по теореме 1.6 последовательность $\{\nabla_{\mathcal{L}} g_k\}$ сходится слабо в $L_p(\Omega'; \mu)$ к функции $\nabla_{\mathcal{L}} f_U$. По лемме 1.6 некоторая выпуклая комбинация $\{\bar{g}_k\}$ функций $\{g_k\}$ сходится как поточечно, так и в $W_p^1(\Omega'; \mu)$ к функции f_U. Таким образом, в силу следствия 6.3 функция f_U является уточненной. Предложение доказано.

Определение 6.5. Пусть $\widetilde{F}$ — рассмотренное выше пополнение. Функция, определенная F-квазивсюду на $\mathbb{X}$, называется *F-квазинепрерывной* (или просто *квазинепрерывной*, когда это не приводит к недоразумениям), если для всякого ε можно найти такое открытое множество U_ε, что $\operatorname{cap}(U_\varepsilon; F) < \varepsilon$ и сужение функции f на множество $\mathbb{X} \setminus U_\varepsilon$ непрерывно.

Непосредственно из определения 6.3 вытекает, что каждая уточненная функция пространства $\widetilde{F}$ квазинепрерывна. Обратное свойство можно доказать, налагая некоторые дополнительные свойства на пространство $\widetilde{F}$ (см. ниже теорему 6.5 и следствие 6.12). Мы используем здесь вариант таких условий, сформулированных в [2, 4].

Для формулировки приводимого ниже утверждения нам понадобится еще одно понятие. Пусть E — измеримое множество в Ω'. Точка $x \in \Omega'$ называется *точкой ненулевой плотности множества* E, если

$$\varlimsup_{\delta \to 0} \frac{\mu(B(x,\delta) \cap E)}{\mu(B(x,\delta))} > 0.$$

Совокупность всех точек ненулевой плотности множества E обозначается символом $\widetilde{E}$.

Теорема 6.5. *Пусть $\mathbb{X} = \Omega'$, а функциональное пространство $\widetilde{F} = \widetilde{F}(\Omega')$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *пространство $\widetilde{F}$ рефлексивно;*
2) *из $\overline{\operatorname{cap}}(E; F) = 0$ вытекает, что $|E| = 0$;*
3) *для любого открытого множества $U \subset \Omega'$ значения некоторой неотрицательной экстремальной функции f_U квазивсюду совпадают с пределом*

$$\lim_{\delta \to 0} \;⨍\limits_{B(x,\delta)} f(y) \, d\mu.$$

Если функция $f \in \widetilde{F}$, определенная квазивсюду на Ω', квазинепрерывна и для почти всех точек $x \in E$ некоторого измеримого множества $E \subset \Omega'$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$, где $g : E \cup \widetilde{E} \to \mathbb{R}$ — полунепрерывная снизу функция, то для квазивсех $x \in \widetilde{E}$

$$f(x) \geqslant g(x).$$

Доказательство. Поскольку функция f квазинепрерывна, то для всякого ε можно указать открытое множество U_ε такое, что $\operatorname{cap}(U_\varepsilon; F) < \varepsilon$ и сужение f на $\Omega' \setminus U_\varepsilon$ непрерывно. Пусть φ_m — неотрицательная емкостная функция из условия теоремы для открытого множества $U_{1/m}$. Так как $\|\varphi_m|\widetilde{F}\| \to 0$ при $m \to \infty$, то, переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(x) = 0$ при квазивсех $x \in \Omega'$ (следствие 6.3). Кроме того, для любой функции φ_m, $m \in \mathbb{N}$, квазивсюду выполняется условие 3 теоремы. Поэтому эти предельные соотношения выполняются при квазивсех $x \in \widetilde{E}$ одновременно. Рассмотрим такую точку $x \in \widetilde{E}$. По определению множества $\widetilde{E}$ существует последовательность δ_s, $\delta_s \to 0$ при $s \to \infty$, для которой $\mu(B(x,\delta_s) \cap E)/\mu(B(x,\delta_s)) \to \Delta > 0$ при $s \to \infty$. Докажем, что при $m > m(x)$ выполняется неравенство

$$|U_{1/m} \cap E \cap B(x,\delta_s)| < |E \cap B(x,\delta_s)|$$

при достаточно малых δ_s.

Действительно, так как $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(x) = 0$, то $\varphi_m(x) < \Delta$ при достаточно больших m. Далее,

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{|U_{1/m} \cap E \cap B(x,\delta_s)|}{|E \cap B(x,\delta_s)|} \\
&\qquad \leqslant \lim_{s\to\infty} \frac{|B(x,\delta_s)|}{|E \cap B(x,\delta_s)|} \; \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{|B(x,\delta_s)|} \int\limits_{U_{1/m}\cap E\cap B(x,\delta_s)} \varphi_m(y)\,dy \\
&\qquad \leqslant \Delta^{-1} \lim_{s\to\infty} \frac{1}{|B(x,\delta_s)|} \int\limits_{B(x,\delta_s)} \varphi_m(y)\,dy = \Delta^{-1}\varphi_m(x) < 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, при $m > m(x)$ и каждом $s > s(x)$ мера множества $T_s = (E \cap B(x,\delta_s)) \setminus U_{1/m}$ положительна. Учитывая непрерывность функции $f|_{\Omega' \setminus U_{1/m}}$ и тот факт, что $f(y) \geqslant g(y)$ при почти всех $y \in E$, получим

$$f(x) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{T_s} \int\limits_{T_s} f(y)\,dy \geqslant \underline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{T_s} \int\limits_{T_s} g(y)\,dy \geqslant g(x).$$

Следствие 6.6. *Пусть выполнены условия теоремы 6.5. Если $f(x) = g(x)$ почти всюду на множестве E, $E \subset \Omega'$, где f — F-квазинепрерывная на Ω', а g — непрерывная на $E \cup \widetilde{E}$ функции, то $f(x) = g(x)$ для квазивсех точек $x \in \widetilde{E}$.*

Следствие 6.7. *Пусть выполнены условия теоремы 6.5. Если две F-квазинепрерывные функции f_1, f_2, определенные квазивсюду на Ω', совпадают почти всюду на множестве $E \subset \Omega'$, то f_1 и f_2 совпадают квазивсюду на $\widetilde{E}$.*

Следствие 6.8. *Пусть выполнены условия теоремы 6.5. Тогда для функций $f \in \widetilde{F}$ понятия уточненности и квазинепрерывности совпадают.*

Доказательство. Пусть функция $f \in \widetilde{F}$ квазинепрерывна. В силу следствия 6.1 существует уточненная функция $\tilde{f}$, совпадающая почти всюду с функцией f. По предыдущему следствию квазинепрерывные функции f и $\tilde{f}$ совпадают квазивсюду. Остается заметить, что функция, квазивсюду совпадающая с уточненной, сама является уточненной.

Следствие 6.9. *Пусть выполнены условия теоремы 6.5. Тогда для любого множества $E \subset \Omega'$ имеет место равенство*

$$\overline{\operatorname{cap}}(E \cup \widetilde{E}; F) = \overline{\operatorname{cap}}(E; F).$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай конечной емкости $\overline{\mathrm{cap}}\,(E;F)$. Согласно теореме 6.4 существует уточненная функция f_E такая, что $\overline{\mathrm{cap}}\,(E;\widetilde{F}) = \alpha(\|f_E|\widetilde{F}\|)$ и $f_E \geqslant 1$ квазивсюду на E. Поскольку по теореме 6.5 $f_E \geqslant 1$ квазивсюду на $\widetilde{E}$, то $f \in A(E \cup \widetilde{E})$, откуда и вытекает требуемое равенство.

Следствие 6.10. *Пусть выполнены условия теоремы 6.5. Тогда для любого множества $E \subset \Omega'$, граничные точки которого относительно Ω' имеют ненулевую плотность, имеет место равенство*

$$\overline{\mathrm{cap}}\,(\overline{E};F) = \overline{\mathrm{cap}}\,(E;F).$$

В частности, для любого шара $B \subset \Omega'$ выполняется равенство $\mathrm{cap}\,(\overline{B};F) = \mathrm{cap}\,(B;F)$.

Доказательство вытекает из следствия 6.9 ввиду соотношения $E \cup \widetilde{E} = \overline{E}$.

Пример 6.7. Условиям теоремы 6.5 и ее следствиям удовлетворяет пространство $\overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega';\mu)$. Действительно, его рефлексивность есть следствие равномерной выпуклости нормы [15], условие 2 для этого пространства вытекает из леммы 6.3, а условие 3 — из предложения 6.1. Поскольку результаты теоремы 6.5 и ее следствий имеют локальный характер, то с учетом доказываемой ниже теоремы 6.10 они верны также и для пространства $W^1_p(\Omega';\mu)$. В частности, емкость открытого шара в этих пространствах совпадает с емкостью замкнутого.

6.4. Оценки емкостей некоторых конденсаторов. В дальнейшем нам потребуются оценки емкости некоторых конденсаторов специального вида. Основной спецификой этой части является то обстоятельство, что срезка применяется лишь на шарах достаточно малого радиуса. Точнее, лишь на тех шарах, где применимы основные неравенства $\mathscr{W}3$ и $\mathscr{W}4$.

Лемма 6.6. *Для произвольного множества $D \Subset \Omega$ существует число $r_0 > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in D$ и произвольного числа r такого, что $0 < 2r \leqslant r_0$, выполняется оценка*

$$c^{-1}\mu(B(x_0,r))r^{-p} \leqslant \mathrm{cap}\,\big(B(x_0,r);\overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2r);\mu)\big) \leqslant c\mu(B(x_0,r))r^{-p},$$

где c — положительная константа, зависящая только от p, r_0 и c_μ.

Доказательство. Пусть функция $u \in C_0 \cap \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2r))$ такова, что $u \equiv 1$ на шаре $B(x_0,r)$ и $|\nabla_{\mathscr{L}} u| \leqslant cr^{-1}$; существование такой функции гарантируется леммой 1.7. Тогда

$$\mathrm{cap}\,\big(B(x_0,r);\overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2r);\mu)\big) \leqslant \int\limits_{B(x_0,2r)} |\nabla_{\mathscr{L}} u|^p\,d\mu$$
$$\leqslant c\mu(B(x_0,2r))r^{-p} \leqslant c\mu(B(x_0,r))r^{-p}.$$

Последний шаг основан на свойстве удвоения $\mathscr{W}1$ меры μ. С другой стороны, если $0 < r' < r$ и функция u допустима для конденсатора $(B(x_0,r),B(x_0,2r))$, то, применяя неравенство Пуанкаре, получаем

$$\mu(B(x_0,r')) \leqslant \int\limits_{B(x_0,2r)} |u|^p\,d\mu \leqslant cr^{-p} \int\limits_{B(x_0,2r)} |\nabla_{\mathscr{L}} u|^p\,d\mu.$$

Переходя к нижней грани по всем таким допустимым функциям и устремляя r' к r, получаем неравенство из леммы 6.6.

Лемма 6.7. *Пусть $E \subset B(x_0, r)$ и $0 < r \leqslant s \leqslant 2r$, где $4r \leqslant r_0$, а r_0 — число из леммы* 6.6. *Тогда*

$$c^{-1}\operatorname{cap}\big(E; \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2r);\mu)\big)$$
$$\leqslant \operatorname{cap}\big(E; \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2s);\mu)\big) \leqslant c\operatorname{cap}\big(E; \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2r);\mu)\big), \qquad (6.6)$$

константа c зависит лишь только от n, p, r_0 и c_μ.

Доказательство. Второе неравенство очевидно вытекает из определения емкости, так как $2r \leqslant 2s$. Левую часть неравенства (6.6) достаточно проверить для случая, когда $s = 2r$. Как и ранее, мы можем предположить, что E — компакт. Выберем срезку ψ такую, что $\psi = 1$ (0) на шаре $B(x_0, r)$ (вне шара $B(x_0, 2r)$) и $|\nabla_{\mathscr{L}}\psi| \leqslant cr^{-1}$. Если u — функция, допустимая для конденсатора $(E, B(x_0, 4r))$, то функция $u\psi$ допустима для конденсатора $(E, B(x_0, 2r))$. Имеем следующие соотношения:

$$\operatorname{cap}\big(E; \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2r);\mu)\big) \leqslant \int\limits_{B(x_0,2r)} |\nabla_{\mathscr{L}}(u\psi)|^p\,d\mu$$
$$\leqslant 2^p \int\limits_{B(x_0,2r)} |\nabla_{\mathscr{L}}u|^p|\psi|^p\,d\mu + 2^p \int\limits_{B(x_0,2r)} |\nabla_{\mathscr{L}}\psi|^p|u|^p\,d\mu$$
$$\leqslant 2^p \int\limits_{B(x_0,4r)} |\nabla_{\mathscr{L}}u|^p\,d\mu + cr^{-p} \int\limits_{B(x_0,4r)} |u|^p\,d\mu \leqslant c \int\limits_{B(x_0,4r)} |\nabla_{\mathscr{L}}u|^p\,d\mu,$$

где последний переход основан на неравенстве Пуанкаре. Утверждение леммы следует из полученной оценки.

Теорема 6.6. *Для каждой компактной подобласти $D \subset \Omega$ существует число $r_0 > 0$ такое, что для произвольной точки $x_0 \in D$ при условии $0 < r < R \leqslant r_0$ имеет место неравенство*

$$\operatorname{cap}\big(B(x_0,r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,R);\mu)\big)$$
$$\geqslant C\Bigg(\int\limits_{A(x_0;r;R)} \bigg(\frac{\rho(x_0,x)}{|B(x_0,\rho(x_0,x))|}\bigg)^{p/(p-1)} w(x)^{1/(1-p)}\,dx\Bigg)^{1-p}.$$

Здесь $A(x_0; r; R) = B(x_0, R) \setminus B(x_0, r)$ есть кольцо.

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{L}$ дифференциальный оператор следующего вида:

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{k} X_i^* X_i,$$

где векторное поле X_i понимается как дифференциальный оператор первого порядка с гладкими коэффициентами, а X_i^* есть формально сопряженный к нему. Тогда оператор $\mathscr{L}$ представим в виде

$$\mathscr{L} = \operatorname{div}(A\nabla u), \quad u \in C^\infty(\Omega),$$

где $A(x)$ — положительно определенная симметрическая матрица порядка $n \times n$ в каждой точки $x \in \Omega$ (см. [21]). Имеет место тождество

$$|\nabla_{\mathscr{L}}u|^2 = (A\nabla u, \nabla u),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — обычное скалярное произведение двух векторов из $\mathbb{R}^n$.

В работе [30] было показано существование единственного положительного фундаментального решения G оператора $\mathscr{L}$ класса C^∞ вне диагонали $\Omega \times \Omega$, которое обладает следующим свойством.

Теорема 6.7 [30]. *Для каждой компактной подобласти $D \Subset \Omega$ существуют константы C_1, C_2, $r_0 > 0$ такие, что для каждой из точек $x_0 \in D$ и $x \in D \setminus \{x_0\}$, $\rho(x_0, x) \leqslant r_0$, выполнены неравенства*

$$C_1 \frac{\rho(x_0,x)^2}{|B(x_0,\rho(x_0,x))|} \leqslant G(x_0,x) \leqslant C_2 \frac{\rho(x_0,x)^2}{|B(x_0,\rho(x_0,x))|},$$
$$|\nabla_{\mathcal{L}} G(x_0,x)| \leqslant C_2 \frac{\rho(x_0,x)}{|B(x_0,\rho(x_0,x))|}.$$

Кроме того, в следующей теореме формулируется используемый ниже результат об интегральном представлении.

Теорема 6.8 [21]. *Пусть D — область класса C^1. Тогда для функции $u \in C^\infty(\overline{D})$ и точки $x \in D$ выполнено равенство*

$$u(x) = \int\limits_D (A(y)\nabla G(x,y), \nabla u(y))\, dy - \int\limits_{\partial D} (u(y)A(y)\nabla G(x,y), \eta)\, dH_{n-1}.$$

Пусть допустимая функция $u \in A\big(B(x_0,r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,R);\mu)\big)$ такова, что u равна единице на шаре $B(x_0,r)$. Тогда, используя теоремы 6.7 и 6.8, получаем

$$\begin{aligned}
1 = u(x_0) &= \int\limits_{B(x_0,R)} (A(x)\nabla G(x_0,x), \nabla u(x))\, dx \\
&\leqslant \int\limits_{B(x_0,R)} |(A(x)\nabla G(x_0,x), \nabla u(x))|\, dx \\
&\leqslant \int\limits_{B(x_0,R)} |(A(x)\nabla G(x_0,x), \nabla G(x_0,x))|\, |(A(x)\nabla u(x), \nabla u(x))|\, dx \\
&= \int\limits_{B(x_0,R)\setminus B(x_0,r)} |\nabla_{\mathcal{L}} G(x_0,x)|\, |\nabla_{\mathcal{L}} u(x)|\, dx \\
&\leqslant C_2 \int\limits_{B(x_0,R)\setminus B(x_0,r)} \frac{\rho(x_0,x)}{|B(x_0,\rho(x_0,x))|} |\nabla_{\mathcal{L}} u(x)|\, dx \\
&\leqslant C\Bigg(\int\limits_{B(x_0,R)\setminus B(x_0,r)} w(x)^{-1/p} \frac{\rho(x_0,x)}{|B(x_0,\rho(x_0,x))|} |\nabla_{\mathcal{L}} u(x)| w(x)^{1/p}\, dx \Bigg)^p. \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

Отсюда, применяя неравенство Гёльдера, окончательно имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{B(x_0,R)} |\nabla_{\mathcal{L}} u(x)|^p\, d\mu \\
&\qquad \geqslant C^{-1} \Bigg(\int\limits_{A(x_0;r,R)} \left(\frac{\rho(x_0,x)}{|B(x_0,\rho(x_0,x))|} \right)^{1/(p-1)} w(x)^{1/(1-p)}\, dx \Bigg)^{1-p},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6.9. *Для каждой компактной подобласти $D \Subset \Omega$ существует число $r_0 > 0$ такое, что для произвольной точки $x_0 \in D$ при условиях $0 < 2r \leqslant R \leqslant r_0$ и $w \in A_p$ верна оценка сверху на емкость сферического кольца:*

$$\operatorname{cap}\big(B(x_0,r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,R);\mu)\big) \leqslant c\bigg(\int\limits_{A(x_0;r;R)} \bigg(\frac{\rho(x_0,x)}{|B(x_0,\rho(x_0,x))|}\bigg)^{p/(p-1)} w(x)^{1/(1-p)}\,dx\bigg)^{1-p},$$

где $c = c(p, c_\mu, c_{p,w})$ — некоторая постоянная. Обратно, если приведенная оценка имеет место для всех точек $x_0 \in D$ и чисел $R = 2r$, то $w \in A_p$.

Замечание 6.1. Константа $c_{p,w}$ есть наименьшая постоянная в A_p-условии Макенхаупта на вес w (см. § 1).

Доказательство. Пусть $w \in A_p$. Тогда по лемме 6.6 имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}\big(B(x_0,r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2r);\mu)\big) &\leqslant c|B(x_0,r)|r^{-p} \fint\limits_{B(x_0,2r)} w(x)\,dx \\ &\leqslant c|B(x_0,r)|r^{-p}\bigg(\fint\limits_{B(x_0,2r)} w(x)^{1/(1-p)}\,dx\bigg)^{1-p} \\ &\leqslant c|B(x_0,r)|r^{-p}\bigg(\int\limits_{A(x_0;r,2r)} w(x)^{1/(1-p)}\,dx\bigg)^{1-p} \\ &\leqslant c\bigg(\int\limits_{A(x_0;r,2r)} \bigg(\frac{\rho(x_0,x)}{|B(x_0,\rho(x_0,x))|}\bigg)^{p/(p-1)} w(x)^{1/(1-p)}\,dx\bigg)^{1-p}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Для доказательства нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 6.8. *Имеет место соотношение*

$$\operatorname{cap}\big(\overline{B}(x_0,r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2^j r);\mu)\big) \leqslant \bigg(\sum_{i=1}^{j} \operatorname{cap}\big(\overline{B}(x_0,2^{i-1}r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2^i r);\mu)\big)^{1/(1-p)}\bigg)^{1-p}.$$

Доказательство. Зафиксируем положительное число ε. Рассмотрим допустимую функцию $u_i \in A\big(\overline{B}(x_0,2^{i-1}r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2^i r);\mu)\big)$, $u_i = 1$ на шаре $\overline{B}(x_0,2^{i-1}r)$, $i = 1,\dots,j$, такую, что

$$\int\limits_{B(x_0,2^i r)} |\nabla_{\mathcal{L}} u_i|^p\,d\mu \leqslant \operatorname{cap}\big(\overline{B}(x_0,2^{i-1}r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2^i r);\mu)\big) + \varepsilon.$$

Пусть a_i — последовательность неотрицательных чисел, $\sum\limits_{i=1}^{j} a_i = 1$. Положим

$v = \sum\limits_{i=1}^{j} a_i u_i$. Понятно, что $v \in A\big(\overline{B}(x_0, r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0, 2^j r); \mu)\big)$. Поэтому

$$\operatorname{cap}\big(\overline{B}(x_0, r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0, 2^j r); \mu)\big) \leqslant \int\limits_{B(x_0, 2^j r)} |\nabla_{\mathcal{L}} v|^p \, d\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{j} a_i^p \int\limits_{B(x_0, 2^i r)} |\nabla_{\mathcal{L}} u_i|^p \, d\mu.$$

Последний переход возможен ввиду того, что субградиент $\nabla_{\mathcal{L}} u_i = 0$ равен почти всюду нулю на дополнении $B(x_0, 2^k r) \setminus \overline{B}(x_0, 2^{k-1} r)$ для всех $i \neq k$, $k = 2, \dots, j$. Окончательно получаем

$$\operatorname{cap}\big(\overline{B}(x_0, r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0, 2^j r); \mu)\big)$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{j} a_i^p \operatorname{cap}\big(\overline{B}(x_0, 2^{i-1} r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0, 2^i r); \mu)\big) + 2^{-1}\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\operatorname{cap}\big(\overline{B}(x_0, r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0, 2^j r); \mu)\big) \leqslant \sum_{i=1}^{j} a_i^p \operatorname{cap}\big(\overline{B}(x_0, 2^{i-1} r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0, 2^i r); \mu)\big).$$

Выбирая в качестве a_i последовательность чисел:

$$a_i = \frac{\operatorname{cap}\big(\overline{B}(x_0, 2^{i-1} r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0, 2^i r); \mu)\big)^{1/(1-p)}}{\sum\limits_{l=1}^{j} \operatorname{cap}\big(\overline{B}(x_0, 2^{l-1} r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0, 2^l r); \mu)\big)},$$

придем к необходимому неравенству. Лемма доказана.

Таким образом, применяя полученную оценку и неравенство (6.8), имеем

$$\operatorname{cap}\big(B(x_0, r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0, 2^j r); \mu)\big)$$
$$\leqslant c\Bigg(\sum_{i=1}^{j} \int\limits_{A(x_0; 2^{i-1} r, 2^i r)} \bigg(\frac{\rho(x_0, x)}{|B(x_0, \rho(x_0, x))|}\bigg)^{p/(p-1)} w(x)^{1/(1-p)} \, dx\Bigg)^{1-p}$$
$$= c\Bigg(\int\limits_{A(x_0; r, 2^j r)} \bigg(\frac{\rho(x_0, x)}{|B(x_0, \rho(x_0, x))|}\bigg)^{p/(p-1)} w(x)^{1/(1-p)} \, dx\Bigg)^{1-p}$$
$$\leqslant c\Bigg(\int\limits_{A(x_0; r, R)} \bigg(\frac{\rho(x_0, x)}{|B(x_0, \rho(x_0, x))|}\bigg)^{p/(p-1)} w(x)^{1/(1-p)} \, dx\Bigg)^{1-p},$$

где целое число $j \geqslant 2$ таково, что $R < 2^j r$. Заметим, что найдется целое число $j \geqslant 2$ такое, что $2^{j-1} r \leqslant R < 2^j r$. Таким образом, из леммы 6.7 вытекает

$$\operatorname{cap}\big(B(x_0, r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0, R); \mu)\big) \leqslant c \operatorname{cap}\big(B(x_0, r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0, 2^j); \mu)\big).$$

Докажем вторую часть утверждения теоремы. Предположим, что основная оценка выполняется для всех $0 < 2r \leqslant r_0$ и $R = 2r$. Пусть $B = B(y, 2^{-1} r)$ — шар и точка $x_0 \in D$ такова, что $\operatorname{dist}(x_0, B) = r$. Тогда кольцо $A(x_0; r, 2r)$ содержит шар B. Следовательно, применяя оценки теоремы 6.8 и леммы 6.6, получаем

$$\frac{\mu(B(x_0,r))}{|B|} \leqslant \frac{cr^p}{|B|}\operatorname{cap}\big(B(x_0,r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2r);\mu)\big)$$
$$\leqslant \frac{cr^p}{|B|}\biggl(\int\limits_{A(x_0;r,2r)} (|B(x_0,\rho(x_0,x))|^{-1}\rho(x_0,x))^{p/(p-1)} w(x)^{1/(1-p)}\,dx\biggr)^{1-p}$$
$$\leqslant c|B|^{-1}\biggl(\int\limits_{A(x_0;r,2r)} |B(x_0,\rho(x_0,x))|^{-p/(p-1)} w(x)^{1/(1-p)}\,dx\biggr)^{1-p}$$
$$\leqslant c\biggl(|B|^{-1}\int\limits_B w(x)^{1/(1-p)}\,dx\biggr)^{1-p}.$$

Применяя свойство $\mathscr{W}1$ удвоения меры μ, имеем

$$\fint\limits_B w(x)\,dx \leqslant \frac{\mu(B(x_0,2r))}{|B|} \leqslant \frac{c\mu(B(x_0,2))}{|B|} \leqslant c\biggl(\fint\limits_B w(x)^{1/(1-p)}\,dx\biggr)^{1-p},$$

откуда $w \in \mathscr{A}_p$.

6.5. Устранимые множества в пространствах Соболева. Прежде всего, мы докажем, что емкости в пространствах Соболева $W^1_p(D;\mu)$ и $\overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2r);\mu)$, по существу, эквивалентны.

Теорема 6.10. *Для каждой компактной подобласти $D \subset \Omega$ существует число $r_0 > 0$ такое, что для множества $E \subset B(x_0,r)$, где $x_0 \in D$ — произвольная точка, а $0 < r \leqslant r_0$, имеет место неравенство*

$$(1+Cr^p)^{-1}\operatorname{cap}\big(E; W^1_p(D;\mu)\big)$$
$$\leqslant \operatorname{cap}\big(E; \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2r);\mu)\big) \leqslant c(1+r^{-p})\operatorname{cap}\big(E; W^1_p(D;\mu)\big),$$

где постоянные c и C зависят от области D, p, c_μ.

Доказательство. Пусть η — срезка в шаре $B(x_0,2r)$ такая, что $\eta = 1$ на $B(x_0,r)$ и $|\nabla_{\mathscr{L}}\eta| \leqslant c/r$. Пусть K — компактное подмножество, лежащее в E. Если $u \in A\big(K; W^1_p(D;\mu)\big)$, то очевидно, что

$$\operatorname{cap}\big(K; \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2r);\mu)\big) \leqslant \int\limits_{B(x_0,2r)} |\nabla_{\mathscr{L}}(u\eta)|^p\,d\mu$$
$$\leqslant c(1+r^{-p})\int\limits_{\mathbb{R}^n}(|u|^p + |\nabla_{\mathscr{L}}u|^p)\,d\mu.$$

С другой стороны, если $u \in C_0^\infty(B(x_0,2r))$ такая функция, что $u = 1$ в окрестности компакта K, то, применяя неравенство Пуанкаре, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(|u|^p + |\nabla_{\mathscr{L}}u|^p)\,d\mu \leqslant (1+Cr^p)\int\limits_{B(x_0,2r)} |\nabla_{\mathscr{L}}u|^p\,d\mu.$$

Таким образом, комбинируя полученные неравенства, имеем

$$(1+Cr^p)^{-1}\operatorname{cap}\big(K; W^1_p(D;\mu)\big)$$
$$\leqslant \operatorname{cap}\big(K; \overset{\circ}{L}{}^1_p(B(x_0,2r);\mu)\big) \leqslant c(1+r^{-p})\operatorname{cap}\big(K; W^1_p(D;\mu)\big).$$

Так как cap $\left(\cdot, W_p^1(D;\mu)\right)$ и cap $\left(\cdot, \overset{\circ}{L}{}_p^1(B(x_0,2r);\mu)\right)$ являются емкостями в смысле Шоке, теорема доказана.

Из теоремы 6.10 непосредственно получаем

Предложение 6.2. *Если D — компактная подобласть в Ω, то емкости* cap $\left(\cdot, W_p^1(D;\mu)\right)$ *и* cap $\left(\cdot, \overset{\circ}{L}{}_p^1(D;\mu)\right)$ *либо одновременно равны нулю, либо одновременно отличны от нуля.*

В теории дифференциальных уравнений с частными производными важно уметь различать множества, устранимые для пространств Соболева. В дальнейшем мы получим результаты, описывающие такие множества для различных типов пространств Соболева.

Определение 6.6. Два нормированных пространства функций $F(\mathbb{X})$ и $F'(\mathbb{X}')$, имеющие области определения $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}'$ соответственно, $\mathbb{X}' \subset \mathbb{X}$, называются *изоморфными*, если оператор ограничения

$$\operatorname{tr} f = f|_{\mathbb{X}'}, \quad f \in F(\mathbb{X}),$$

есть изоморфизм $\operatorname{tr} : F(\mathbb{X}) \to F'(\mathbb{X}')$ функциональных пространств. Для изоморфных пространств применяем обозначение $F(\mathbb{X}) = F(\mathbb{X}')$.

Теорема 6.11. *Предположим, что E — замкнутое подмножество Ω'. Равенство*

$$\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega';\mu) = \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega' \setminus E;\mu)$$

выполняется тогда и только тогда, когда емкость cap $\left(E; W_p^1(\Omega';\mu)\right)$ *нулевая.*

Доказательство. Пусть cap $\left(E; W_p^1(\Omega';\mu)\right) = 0$. Существует последовательность функций $u_j \in W_p^1(\Omega';\mu)$, $0 \leqslant u_j \leqslant 1$, таких, что $u_j = 1$ в некоторой окрестности множества E и $u_j \to 0$ в $W_p^1(\Omega';\mu)$. Рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$. Произведение $(1-u_j)\varphi$ имеет компактный носитель в $\Omega' \setminus E$ и поэтому лежит в классе $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega' \setminus E;\mu)$. Кроме того, последовательность функций $(1-u_j)\varphi$ сходится к функции φ в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega' \setminus E;\mu)$. Поэтому $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega' \setminus E;\mu)$. Таким образом, доказано включение

$$\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega';\mu) \subset \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega' \setminus E;\mu).$$

Справедливость обратного включения очевидна.

Пусть теперь $K \subset E$ — компакт. Достаточно показать, что

$$\operatorname{cap}\left(K; W_p^1(\Omega';\mu)\right) = 0.$$

Рассмотрим функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$, $\varphi = 1$ в некоторой окрестности компакта K. Так как $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega';\mu) = \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega' \setminus E;\mu)$, то можно выбрать последовательность функций $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega' \setminus E)$ с условием, что $\varphi_i \to \varphi$ в классе $W_p^1(\Omega';\mu)$. Так как разности $\varphi - \varphi_i$ суть допустимые функции, то

$$\operatorname{cap}\left(K; W_p^1(\Omega';\mu)\right) \leqslant \lim_{i\to\infty} \int_{\Omega'} \left(|\varphi - \varphi_i|^p + |\nabla_{\mathcal{L}}\varphi - \nabla_{\mathcal{L}}\varphi_i|^p\right) d\mu,$$

и теорема полностью доказана.

Рассмотрим вопрос об изоморфности пространств Соболева $W_p^1(\Omega';\mu)$ и $W_p^1(\omega;\mu)$, где $\omega \subset \Omega'$.

Предложение 6.3. *Пусть E — замкнутое подмножество в области Ω'. Если множество E имеет емкость нуль, то*

$$W_p^1(\Omega';\mu) = W_p^1(\Omega' \setminus E;\mu).$$

Предложение 6.3 вытекает из формулируемой ниже теоремы, поскольку множество меры нуль принадлежит классу определяемых ниже множеств в области Ω'.

Определение 6.7. Замкнутое множество $E \subset \Omega'$ называется *$NC_{p,w}$-множеством в области* Ω', если для любых континуумов F_0 и F_1, содержащихся в области $\omega = \Omega' \setminus E$, причем F_0 имеет внутренние точки, верно равенство

$$\operatorname{cap}\left(F_0, F_1; L_p^1(\omega;\mu)\right) = \operatorname{cap}\left(F_0, F_1; L_p^1(\Omega';\mu)\right).$$

Теорема 6.12. *Пусть область ω содержится в Ω'. Пространства $W_p^1(\omega;\mu)$ и $W_p^1(\Omega';\mu)$ изоморфны тогда и только тогда, когда множество $\Omega' \setminus \omega$ является $NC_{p,w}$-множеством в области Ω'.*

Теорема 6.12 в случае стандартных векторных полей $X_i = \partial/\partial x_i$ и весовой функции w, тождественно равной 1, установлена в [8]. Ее доказательство в общем случае можно провести по схеме оригинального прототипа.

Приведем несколько свойств $NC_{p,w}$-множеств. Их доказательство почти дословно повторяет доказательство аналогичных утверждений работы [8].

Лемма 6.9 (принцип локализации). *Множество $E \subset \Omega'$ тогда и только тогда является $NC_{p,w}$-множеством, когда для любого открытого шара $B \subset \Omega'$ пересечение $E \cap B$ есть $NC_{p,w}$-множество в шаре B.*

Из принципа локализации вытекают следующие утверждения.

Предложение 6.4. *Если существует последовательность $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, покрывающая множество $E \subset \Omega'$, и для любого $n \in \mathbb{N}$ пересечение $E \cap B_n$ есть $NC_{p,w}$-множество в шаре B_n, то E является $NC_{p,w}$-множеством в шаре Ω'.*

Предложение 6.5. *Любое замкнутое подмножество $NC_{p,w}$-множества является $NC_{p,w}$-множеством.*

Предложение 6.6. *Пересечение любого числа $NC_{p,w}$-множеств является $NC_{p,w}$-множеством.*

Предложение 6.7. *Объединение конечного числа $NC_{p,w}$-множеств является $NC_{p,w}$-множеством.*

Предложение 6.8. *Пусть $D \subset \Omega'$ — область в Ω' и E есть $NC_{p,w}$-множество в Ω'. Тогда пересечение $E \cap D$ является $NC_{p,w}$-множеством в D.*

Предложение 6.9. *Всякая компактная часть $NC_{p,w}$-множества в области Ω' есть $NC_{p,w}$-множество в любой области.*

Предложение 6.10. *Если $E \subset \Omega'$ есть $NC_{p,w}$-множество, то*
1) *$|E| = 0$;*
2) *дополнение $\Omega' \setminus E$ связно.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. дополнение $\Omega' \setminus E$ является объединением двух открытых непустых множеств U и V. Тогда $U \cap \overline{V} = \varnothing$ и $\overline{U} \cap V = \varnothing$. Поскольку E есть $NC_{p,w}$-множество, то $|E| = 0$ и, следовательно, множество E не имеет внутренних точек. По этой причине дополнения к замыканиям $\overline{U}$ и $\overline{V}$ не пересекаются. Фиксируем шар $B \subset \Omega'$ достаточно малого радиуса (чтобы выполнялось неравенство Пуанкаре) такой, чтобы он пересекался как с множеством $\Omega' \setminus \overline{U}$, так и с множеством $\Omega' \setminus \overline{V}$. Определим функцию u на множестве $\Omega' \setminus E$, полагая

$$u(x) = \begin{cases} \mu(B \setminus \overline{U})^{-1}, & \text{если} \quad x \in \Omega' \setminus \overline{U}, \\ \mu(B \setminus \overline{V})^{-1}, & \text{если} \quad x \in \Omega' \setminus \overline{V}. \end{cases}$$

Заметим, что $u \in W_p^1(B \setminus E; \mu)$. Так как множество E есть $NC_{p,w}$-множество в шаре B (принцип локализации), то по теореме 6.12 $u \in W_p^1(B; \mu)$. Кроме того, ввиду $\mu(E) = 0$ имеем

$$u_B = \mu(B)\Big(\int\limits_{B\setminus\overline{U}} u\,d\mu + \int\limits_{B\setminus\overline{V}} u\,d\mu\Big).$$

Отсюда по неравенству Пуанкаре получаем

$$\int\limits_B |u|^p\,d\mu \leqslant c \int\limits_B |\nabla_{\mathscr{L}} u|^p\,d\mu = 0.$$

Поэтому $u = 0$ почти всюду в B, что противоречит построению функции u.

6.6. Емкость и меры Хаусдорфа. Фиксируем компактную область Ω'. В этом пункте мы изучаем связь между мерами Хаусдорфа и емкостью в пространствах Соболева. Пусть $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — непрерывная возрастающая функция, $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = h(0) = 0$, а w — весовая функция, удовлетворяющая условиям $\mathscr{W}1$–$\mathscr{W}4$ (см. § 1). Для любого борелевского множества $E \subset \Omega'$ определим величину

$$\Lambda^{\delta}_{h;w}(E) = \inf\left(\sum_{i=1}^{\infty} h(t_i) \fint\limits_{B_i} w\,dz : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,\ \operatorname{rad} B_i \leqslant \delta\right),$$

где $0 < \delta \leqslant \infty$ и нижняя грань берется по всем покрытиям множества E шарами $B_i = B(x_i, t_i)$ с радиусами $t_i \leqslant \delta$. Ясно, что $\Lambda^{\delta_1}_{h;w}(E) \leqslant \Lambda^{\delta_2}_{h;w}(E)$, если $\delta_2 \leqslant \delta_1$. Поэтому существует предел

$$\lim_{\delta\to 0} \Lambda^{\delta}_{h;w}(E) = H_{h;w}(E).$$

Величина $H_{h;w}(E)$ называется *весовой мерой Хаусдорфа* множества E по отношению к калибровочной функции h и весу w, а $\Lambda^{\infty}_{h;w}(E)$ — *весовой вместимостью Хаусдорфа* или просто *$(h;w)$-вместимостью*. Согласно критерию Каратеодори [16] все борелевские множества $H_{h;w}$-измеримы и мера $H_{h;w}$ регулярна. При $w = 1$ символ w в обозначении этих величин мы опускаем. Если $h(t) = t^{\alpha}$ — степенная функция, то вместо символа $H_{h;w}$ пишем просто $H_{\alpha;w}$.

Очевидно, что соотношение $\Lambda^{\infty}_{h;w}(E) \leqslant H_{h;w}(E)$ верно для любого $H_{h;w}$-измеримого множества. Поэтому множество нулевой $H_{h;w}$-меры Хаусдорфа имеет нулевую $(h;w)$-вместимость.

Предложение 6.11. *Пусть $E \subset \Omega'$ есть $H_{h;w}$-измеримое множество. Если $H_{h;w}(E) = 0$, то и $\Lambda^{\infty}_{h;w}(E) = 0$.*

Доказательство. В силу счетной полуаддитивности $(h;w)$-вместимости можно считать, что $\overline{E} \subset \Omega'$ и $\operatorname{diam} E < \operatorname{dist}(E, \partial\Omega')$. Для $k \in \mathbb{N}$ выберем покрытие $\mathscr{P}_k$ множества E шарами $B(x_i, t_i)$ такое, что

$$\sum_i h(t_i) \fint\limits_{B_i} w\,dz < 2^{-k},$$

и положим $d_k = \sup\{t_i : B_i = B(x_i, t_i) \in \mathscr{P}_k\}$, где верхняя грань берется по всем радиусам шаров покрытия $\mathscr{P}_k$. Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = 0$. Если это не так, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется шар $B(x_k, t_k) \in \mathscr{P}_k$ такой, что $0 < \delta \leqslant t_k \leqslant \operatorname{diam} E$, где δ —

фиксированное положительное число. Таким образом, для всех номеров k вышеприведенная сумма содержит слагаемое, не меньшее $h(\delta/2)w_B$, $B = B(x_0, \delta/2)$, которое, в свою очередь, не превосходит 2^{-k}. Отсюда $w(B) = 0$, что противоречит свойству $\mathscr{W}1$. Предложение доказано.

Из работы [28] следует существование таких двух чисел $1 < q \leqslant Q < \infty$, что для любых точки $x \in \Omega'$ и шара $B(x, R) \subset \Omega'$ верны соотношения

$$|B(x, tR)| \leqslant C_q t^q |B(x, R)|, \quad |B(x, tR)| \geqslant C_Q t^Q |B(x, R)|, \quad t \leqslant 1. \tag{6.9}$$

Числа q и Q будем называть соответственно *нижней* и *верхней однородными размерностями* области Ω'. В случае свободных векторных полей, в частности однородных групп, нижняя и верхняя однородные размерности принимают одно и то же значение, не зависящее от области Ω' (в случае однородной группы называемое однородной размерностью группы $\mathbb{G}$).

Теорема 6.13. *Предположим, что борелевское множество $E \subset \Omega'$ имеет конечную $H_{q-p;w}$-меру Хаусдорфа, где $1 < p < q$. Тогда весовая емкость $\operatorname{cap}\left(E; W_p^1(\Omega'; \mu)\right)$ равна нулю.*

Доказательство. В силу полуаддитивности емкости и ее измеримости по Шоке достаточно рассмотреть случай компактного множества $E \subset \Omega'$. Положим $R = {}^1\!/\!{}_3 \operatorname{dist}(E, \partial\Omega')$. Для любого открытого множества U, $E \subset U \subset \Omega'$, и числа $0 < \varepsilon < \min\{{}^1\!/\!{}_2 r_0, {}^1\!/\!{}_3 \operatorname{dist}(E, \partial U)\}$, где r_0 — число из леммы 6.6, существует покрытие множества E шарами $B_i = B_i(x_i, r_i) \subset U$, $r_i < \varepsilon$, такое, что $B_i(x_i, r_i) \cap E \neq \varnothing$ и

$$\sum_i r^{q-p} \fint_{B_i} w\, dz \leqslant 2H_{q-p;w}(E) \leqslant C.$$

Тогда для этого покрытия справедливы следующие оценки:

$$\operatorname{cap}\left(E; \overset{\circ}{L}{}_p^1(U; \mu)\right) \leqslant \sum_i \operatorname{cap}\left(B(x_i, r_i); \overset{\circ}{L}{}_p^1(B(x_i, 2r_i); \mu)\right)$$
$$\leqslant c \sum_i \mu(B(x_i, r_i)) r_i^{-p} \leqslant \frac{cC_q}{R^q} \sum_i |B(x_i, R)| r_i^{q-p} \frac{\mu(B_i)}{|B(x_i, r_i|} \leqslant \frac{cC_q|\Omega'|}{R^q}.$$

Таким образом, для любого открытого множества $U \subset \Omega'$, содержащего множество E, емкость $\operatorname{cap}\left(E; \overset{\circ}{L}{}_p^1(U; \mu)\right)$ ограничена одной и той же постоянной $M = cC_q|\Omega'|/R^q$, не зависящей от выбора открытого множества $U \subset \Omega'$, $E \subset U$.

Переходя к допустимым функциям, можно построить последовательность функций $u_i \in A\left(E; \overset{\circ}{L}{}_p^1(U_i; \mu)\right) \subset A\left(E; \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega'; \mu)\right)$, обладающих следующими свойствами: $U_i \supset U_{i+1} \ldots \supset E$ и $\bigcap\limits_i U_i = E$; в некоторой окрестности $V_i \subset U_i$ множества E выполняется $u_i \equiv 1$ и, следовательно, $\nabla_{\mathscr{L}} u_i = 0$ почти всюду в V_i и $\left\| u_i | \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega'; \mu) \right\| \leqslant 2M$ для всех $i \in \mathbb{N}$, где функции u_i продолжены нулем с множества U_i на область Ω. В силу слабой компактности пространства $\overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega'; \mu)$ последовательность $\{u_i\}$ можно считать слабо сходящейся к некоторому элементу $u_0 \in A\left(E; \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega'; \mu)\right)$ такому, что $\nabla_{\mathscr{L}} u_0 = 0$ почти всюду в Ω'. Следовательно, $\operatorname{cap}\left(E; \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega'; \mu)\right) \leqslant \int\limits_{\Omega'} |\nabla_{\mathscr{L}} u_0|^p\, d\mu = 0$. С учетом предложения 6.2 теорема доказана.

Далее мы рассматриваем только невесовой случай. *Хаусдорфовой размерностью* множества E называется наименьшее число $\dim_H(E) \geqslant 0$ такое, что $H_\alpha(E) = 0$ для всех $\alpha > \dim_H(E)$.

Теорема 6.14. *Пусть $1 < p \leqslant Q$. Если для множества $E \subset \Omega'$ имеет место равенство* $\operatorname{cap}\big(E; W_p^1(\Omega')\big) = 0$, *то размерность Хаусдорфа множества E не превосходит $Q - p$.*

Доказательство. Так как результат локальный, то можно считать, что $E \subset B(x_0, R/2)$, где $x_0 \in E$, $(2c+1)R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega')$, а c — число из [31, лемма 2]. Рассмотрим шар $B = B(x_0, R)$. Для любой функции $u \in C(B) \cap \overset{\circ}{L}{}_p^1(B)$ из формулы (6.7) получаем

$$|u(x)| \leqslant C_2 \int\limits_B \frac{\rho(x,y)}{|B(x, \rho(x,y))|} |\nabla_{\mathcal{L}} u(y)|\, dy = C_2 I(|\nabla_{\mathcal{L}} u(y)|)(x),$$

где

$$If(x) = \int\limits_B \frac{\rho(x,y)}{|B(x,\rho(x,y))|} |f(y)|\, dy,$$

а C_2 — постоянная из формулы (6.7). Для чисел $\alpha > 0$ и $p > 1$ определим в точках $x \in B$ максимальную функцию

$$M_{\alpha,p} f(x) = \sup_{0<r<2R} \Bigg(|B(x,r)|^{-\alpha/Q} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|^p\, dy \Bigg)^{1/p},$$

где носитель функции f содержится в B. Имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} M_{\alpha,p} f(x) &\geqslant \Bigg(|B(x,r)|^{-\alpha/Q} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|^p\, dy \Bigg)^{1/p} \\ &= |B(x,r)|^{\frac{1}{p}(1-\frac{\alpha}{Q})} \Bigg(\fint\limits_{B(x,r)} |f(y)|^p\, dy \Bigg)^{1/p} \geqslant |B(x,r)|^{\frac{1}{p}(1-\frac{\alpha}{Q})} \fint\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \\ &\geqslant C^{-1} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}(1-\frac{\alpha}{Q})} r^{-1} \int\limits_{r/2 \leqslant \rho(x,y) \leqslant r} \frac{\rho(x,y)}{|B(x,\rho(x,y))|} |f(y)|\, dy, \end{aligned}$$

где C — постоянная из условия удвоения лебеговой меры [28]. Таким образом, полагая $\tau = 2R$, для точек $x \in B$ получаем

$$\begin{aligned} If(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A(x; 2^{-i}\tau, 2^{-i+1}\tau)} \frac{\rho(x,y)}{|B(x,\rho(x,y))|} |f(y)|\, dy \\ &\leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau |B(x, \tau/2^{i-1})|^{\frac{1}{p}(\frac{\alpha}{Q}-1)}}{2^{i-1}} M_{\alpha,p} f(x) \\ &\leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\frac{\tau}{2^{i-1}}\Big)^{\frac{\alpha+p-Q}{p}} (C_Q |B(x,\tau)|)^{\frac{1}{p}(\frac{\alpha}{Q}-1)} M_{\alpha,p} f(x) \\ &\leqslant K (C_Q |B(x_0, R/2)|)^{\frac{1}{p}(\frac{\alpha}{Q}-1)} M_{\alpha,p} f(x) \end{aligned}$$

при условии $\alpha + p - Q > 0$. Здесь константа K зависит лишь от τ, чисел α, p, Q и свойства удвоения меры.

Если $u \in C(B) \cap A\big(E; \overset{\circ}{L}{}_p^1(B)\big)$, то, учитывая полученные оценки и свойство $1 \leqslant u(x)$, $x \in E$, имеем

$$E \subset E_\beta = \{x \in B : M_{\alpha,p}(\nabla_{\mathcal{L}} u)(x) > \beta\},$$

где число β зависит от постоянных K, C_2 и $|B(x_0, R/2)|$. Для каждой точки $z \in E$ выберем радиус $r(z)$ такой, что

$$|B(z, r(z))|^{\alpha/Q} < \beta^{-p} \int\limits_{B(z,r(z))} |\nabla_{\mathcal{L}} u|^p \, dx.$$

Тогда $E \subset \bigcup\limits_{z \in E} B(z, r(z))$ и по лемме о покрытии [31, лемма 2] существует не более чем счетная совокупность попарно не пересекающихся шаров $B(z_i, r_i)$, $r_i = r(z_i)$, такая, что $E \subset \bigcup\limits_i B(z_i, cr_i)$. Учитывая вышесказанное и вытекающее из (6.9) ввиду $B(x_i, R) \supset B(x_0, R/2)$ соотношение

$$r_i^\alpha \leqslant C_Q^{-\alpha/Q} R^\alpha (C_Q |B(x_0, R/2)|)^{-\alpha/Q} |B(x_i, r_i)|^{\alpha/Q},$$

получаем следующую цепочку неравенств:

$$\Lambda_\alpha^\infty(E) \leqslant c^\alpha \sum_i r_i^\alpha \leqslant c^\alpha C_Q^{-\alpha/Q} R^\alpha |B(x_0, R/2)|^{-\alpha/Q} \sum_i |B(x_i, r_i)|^{\alpha/Q}$$
$$\leqslant M\beta^{-p} \int\limits_{\Omega'} |\nabla_{\mathcal{L}} u(y)|^p \, dy, \tag{6.10}$$

где $M = c^\alpha C_Q^{-\alpha/Q} R^\alpha |B(x_0, R/2)|^{-\alpha/Q}$. Так как u — произвольная допустимая функция, то правая часть может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно, для всех $\alpha > Q - p$ имеем $\Lambda_\alpha^\infty(E) = 0$, откуда в силу предложения 6.11 $H_\alpha(E) = 0$. Теорема доказана.

Следствие 6.11. *Если $p > Q-1$ и E — континуум в Ω' такой, что $\operatorname{diam} E \leqslant$ $\frac{1}{2}\operatorname{dist}(E, \partial\Omega')$, то*

$$\operatorname{diam} E \leqslant M \operatorname{cap}\bigl(E; \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega')\bigr),$$

где постоянная M зависит от p, свойства удвоения меры в области Ω' и расстояния от континуума E до границы множества Ω' (см. постоянную M в формуле (6.10)). В частности, невырожденный континуум имеет положительную емкость для всех $p > Q - 1$.

Следствие 6.12. *Пусть шар $B = B(x, 2r)$ содержится в области Ω', где r столь мало, что в B справедливо неравенство Пуанкаре $\mathcal{W}4$. Пусть F_0 и F_1 — произвольные континуумы такие, что F_0 пересекается как с $\overline{B}(x, r)$, так и с $\Omega' \setminus B(x, 2r)$, а F_1 содержит точку x и пересекается с $\Omega' \setminus B(x, r)$. Тогда для всех $p > Q - 1$ выполнено соотношение*

$$\inf_{F_0, F_1} \operatorname{cap}\bigl(F_0, F_1; L_p^1(B)\bigr) \geqslant \delta > 0,$$

где инфимум берется по всем описанным континуумам, а δ зависит только от p, области Ω' и радиуса r.

Доказательство. Применяя на шаре B неравенство Пуанкаре к произвольно допустимой функции u, $u \equiv 0$ на F_0, $u \equiv 1$ на F_1, имеем

$$\int\limits_B |u - u_B|^p \, dx \leqslant 4^p C_4 r^p \int\limits_B |\nabla_{\mathcal{L}} u| \, dx.$$

Предположим для определенности, что функция $v = 2(u - u_B)$ принадлежит классу $A\bigl(F_0; W_p^1(B)\bigr)$. Произведение $v\nu$, где ν — срезка из леммы 1.7 такая, что

$\nu \equiv 1$ на $\overline{B}(x, 4/3r)$, $\nu \equiv 0$ на $\Omega' \setminus B(x, 2r)$, $|\nabla_{\mathcal{L}}\nu| \leqslant C_1 r^{-1}$, является допустимой функцией класса $A\big(F_0 \cap \overline{B}(x, 4/3r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B)\big)$. Поэтому по следствию 6.11

$$\begin{aligned}\frac{r}{3} &\leqslant M\operatorname{cap}\big(F_0 \cap \overline{B}(x, 4/3r); \overset{\circ}{L}{}^1_p(B)\big) \leqslant M \int\limits_B |\nabla_{\mathcal{L}}(v\nu)|^p\,dx \\ &\leqslant M2^p\Big(\int\limits_B |\nabla_{\mathcal{L}}v|^p|\nu|^p\,dx + \int\limits_B |v|^p|\nabla_{\mathcal{L}}\nu|^p\,dx\Big) \\ &\leqslant M4^p\Big(\int\limits_B |\nabla_{\mathcal{L}}u|^p\,dx + C_1 r^{-p}\int\limits_B |u - u_B|^p\,dx\Big) \\ &\leqslant M4^p\max(1, C_1C_4)\int\limits_B |\nabla_{\mathcal{L}}u|^p\,dx.\end{aligned}$$

Поскольку u — произвольная допустимая функция для вычисления емкости $\operatorname{cap}\big(F_0, F_1; L^1_p(B)\big)$, следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. М.: Мир, 1964.
2. *Водопьянов С. К.* Весовая L_p-теория потенциала на однородных группах // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 2. С. 29–48
3. *Водопьянов С. К.* Весовые пространства Соболева и граничное поведение решений вырождающихся эллиптических уравнений // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 2. С. 278–300.
4. *Водопьянов С. К.* Геометрические аспекты пространств обобщенно-дифференцируемых функций: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1992.
5. *Водопьянов С. К.* L_p-теория потенциала для обобщенных ядер и ее приложения. Новосибирск, 1990. 47 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 6).
6. *Водопьянов С. К.* L_p-теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах // Тр. Ин-та математики /АН СССР. Сиб. отд-ние. 1989. Т. 14. С. 45–89.
7. *Водопьянов С. К.* Разреженные множества в весовой теории потенциала и вырождающиеся эллиптические уравнения // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 1. С. 28–36.
8. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Критерий устранимости множеств для пространств $\overset{\circ}{L}{}^1_p$, квазиконформных и квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 1. С. 48–68.
9. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифффеоенциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
10. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1964.
11. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
12. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
13. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
14. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
15. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950; Новосибирск: Изд-во АН СССР, Сиб. отд-ние, 1962; М.: Наука, 1988.
16. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
17. *Aronszajn N., Smith K. T.* Function spaces and function completion // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1956. T. 6. P. 125–185.
18. *Biroli M.* Local properties of solutions to equations involving square Hörmander's operators // Potential Theory (Proc. Intern. Conference on Potential Theory, Nagoya (Japan), Aug. 30–Sept. 4, 1990). Berlin etc.: Walter de Gruyter, 1992. P. 147–154.
19. *Capogna L., Danielli D., Garofalo N.* Embedding theorems and Harnack inequality for solutions of nonlinear subelliptic equations // C. r. Acad. sci. Sér. I. 1993. V. 316. P. 809–814.
20. *Coifman R., Weiss G.* Analyse harmonique non-commutative sur certain espaces homogenes. Berlin etc.: Springer, 1971. (Lecture Notes in Math.; 242).
21. *Danielli D.* Formules de représentation et théorèmes d'inclusion pour des opérateurs sous-elliptiques // C. r. Acad. sci. Sér. I. 1992. V. 314. P. 987–990.

22. *Folland G. B., Stein I.* Hardy spaces on homogeneous groups // Math. Notes 28. Princ. Univ. Press, 1982.
23. *Franchi B., Gallot S., Wheeden R.* Inéqalités isopérimetriques pour des métriques dégénerees // C. r. Acad. sci. Sér. I. 1993. V. 317. P. 651–654.
24. *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonliner potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford etc.: Clarendon Press, 1993.
25. *Hörmander L.* Hypoelliptic second order differential equation // Acta Math. 1967. V. 119. P. 141–171.
26. *Jerison D.* The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition // Duke Math. J. 1986. V. 53, N 2. P. 503–523.
27. *Lu G.* Weighted Poincaré and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmander's condition and aplications // Rev. Mat. Iberoamericana. 1992. V. 8, N 3. P. 367–439.
28. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties // Acta. Math. 1985. V. 155. P. 103–147.
29. *Rothschild L. P., Stein E. M.* Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups // Acta Math. 1976. V. 137. P. 247–320.
30. *Sanchez-Calle A.* Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields // Invent. Math. 1984. V. 78. P. 143–160.
31. *Strömberg J.-D., Torchinsky A.* Weighted Hardy spaces. Berlin etc.: Springer, 1989. (Lecture Notes in Math.; 1381).

г. Новосибирск *Статья поступила 21 марта 1994 г.*