УДК 512.542+515.162

КЛАССИФИКАЦИЯ ДЕЙСТВИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП НА ОРИЕНТИРУЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ РОДА 4*)

О. В. Богопольский

Описание конечных групп гомеоморфизмов поверхностей — классическая задача, привлекавшая постоянное внимание математиков еще с прошлого века и не решенная до сих пор. Она важна для проблемы модулей и при изучении строения групп классов отображений поверхностей. Обширная литература по этому вопросу имеется в [1] и [3].

Пусть T_σ — ориентируемая замкнутая поверхность рода σ, $\mathrm{Homeom}(T_\sigma)$ — группа всех ее гомеоморфизмов, $\mathrm{Isot}(T_\sigma)$ — подгруппа, состоящая из всех гомеоморфизмов, изотопных тождественному, $M_\sigma = \mathrm{Homeom}(T_\sigma)/\mathrm{Isot}(T_\sigma)$ — группа классов отображений поверхности T_σ. Группа M_σ изоморфна группе $\mathrm{Out}\,\pi_1(T_\sigma)$ внешних автоморфизмов фундаментальной группы поверхности T_σ [11].

Если ограничиться сохраняющими ориентацию гомеоморфизмами, то возникают подгруппы $\mathrm{Homeom}^+(T_\sigma)$ и M_σ^+ индекса 2 в группах $\mathrm{Homeom}(T_\sigma)$ и M_σ соответственно. При $\sigma \geqslant 2$ существует взаимно однозначное соответствие между классами сопряженности конечных подгрупп групп $\mathrm{Homeom}^+(T_\sigma)$ и M_σ^+ (см. [3, с. 233]).

Конечные подгруппы в M_σ^+ при $\sigma = 2, 3, 4$ и 5 с точностью до изоморфизма описаны в [13, 9, 7, 8] соответственно. В последних двух работах используется техника действий на пространстве голоморфных дифференциалов. Однако, как отмечено в [3, с. 237], эта техника не позволяет классифицировать сохраняющие ориентацию действия конечных групп на поверхности T_σ с точностью до топологической эквивалентности.

В настоящей работе классифицированы с точностью до топологической эквивалентности все эффективные и сохраняющие ориентацию действия конечных групп на поверхности T_4. Отсюда с помощью метода Райдемайстера — Шрайера легко перечислить представители классов сопряженности конечных подгрупп группы M_4^+.

Мы используем технику работы [3], где аналогичный результат получен для поверхностей T_2 и T_3.

В § 1 объясняется наш подход к изучению действий конечных групп на поверхностях, формулируется основная теорема и исправляется одна ошибка из работы [3]. В § 2 приводятся вспомогательные результаты, а в § 3 доказывается основная теорема.

§ 1. Алгебраический подход к изучению G-действий. Основная теорема

Ниже мы пользуемся следующими обозначениями: $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $x^y = y^{-1}xy$, где x и y — элементы некоторой группы. Пусть T_σ — ориентируемая замкнутая поверхность рода $\sigma \geqslant 2$, $\mathrm{Homeom}^+(T_\sigma)$ — группа всех ее сохраняющих

*) Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–11–1501), а также при частичной поддержке Международного научного фонда (грант RPC000).

ориентацию гомеоморфизмов и G — конечная группа. Под G-действием мы понимаем любой мономорфизм $\varepsilon : G \to \mathrm{Homeom}^+(T_\sigma)$. Будем говорить, что *два G-действия ε и ε' топологически эквивалентны*, если существуют автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ и гомеоморфизм $h \in \mathrm{Homeom}^+(T_\sigma)$ такие, что $\varepsilon'(g) = h^{-1}\varepsilon(\alpha(g))h$ для каждого $g \in G$.

Пусть $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ — гиперболическая плоскость. Любая разрывная группа сохраняющих ориентацию движений этой плоскости называется *фуксовой группой*. Зафиксируем некоторую фуксову группу S, изоморфную фундаментальной группе $\pi_1(T_\sigma)$. Тогда пространство орбит $\mathbb{H}/S$ гомеоморфно T_σ. Отождествим его с T_σ. Пусть M — нормализатор S в группе $\mathrm{Homeom}^+(\mathbb{H})$. Каждый гомеоморфизм плоскости $\mathbb{H}$ из группы M индуцирует некоторый гомеоморфизм поверхности T_σ из группы $\mathrm{Homeom}^+(T_\sigma)$. Возникающее отображение $f : M \to \mathrm{Homeom}^+(T_\sigma)$ является эпиморфизмом с ядром S.

Пусть $\varepsilon : G \to \mathrm{Homeom}^+(T_\sigma)$ — некоторое G-действие. Ввиду [1, § 7.3] группа $f^{-1}(\varepsilon(G))$ имеет генетический код вида

$$G^* = \left\langle \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_\rho, \beta_\rho, \gamma_1, \ldots, \gamma_r \,\middle|\, \prod_{i=1}^{\rho}[\alpha_i, \beta_i] \prod_{j=1}^{r} \gamma_i = 1,\ \gamma_1^{m_1} = \cdots = \gamma_r^{m_r} = 1 \right\rangle. \tag{1}$$

Набор чисел $\rho, m_1, \ldots, m_r$ определен однозначно, если считать, что $2 \leqslant m_1 \leqslant \cdots \leqslant m_r$. Это следует, например, из доказательства леммы 4.7.4 в [1]. Будем говорить, что $(\rho : m_1, \ldots, m_r)$ — данные ветвления для G-действия ε. Заметим, что данные ветвления эквивалентных G-действий совпадают. С другой стороны, мы увидим, что могут быть неэквивалентные G-действия с одинаковыми данными ветвления.

Отметим следующие фундаментальные факты.

1. Данные ветвления $(\rho : m_1, \ldots, m_r)$ связаны с σ и $|G|$ формулой Римана — Гурвица

$$(2\sigma - 2)/|G| = (2\rho - 2) + \sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_j}\right). \tag{2}$$

Отсюда легко вывести теорему Гурвица: $|G| \leqslant 84(\sigma - 1)$ при $\sigma \geqslant 2$; при фиксированных $\sigma \geqslant 2$ и $|G|$ существует только конечное число наборов $(\rho : m_1, \ldots, m_r)$, удовлетворяющих (2). Здесь и ниже мы рассматриваем только такие целочисленные наборы, для которых $\rho \geqslant 0$, $2 \leqslant m_1 \leqslant \cdots \leqslant m_r$.

2. Для G-действия с данными ветвления $(\rho : m_1, \ldots, m_r)$ существует эпиморфизм $\eta : G^* \to G$, где G^* такое же, как в (1), а ядро свободно от кручения (оно изоморфно $\pi_1(T_\sigma)$).

Обозначим через x_i, y_i и z_j образы элементов α_i, β_i и γ_j под действием эпиморфизма $\eta : G^* \to G$. Известно, что $|\gamma_j| = m_j$, и так как $\mathrm{Ker}\,\eta$ — группа без кручения, то $|z_j| = m_j$. Поэтому группа G порождается элементами x_i, y_i, z_j $(1 \leqslant i \leqslant \rho,\ 1 \leqslant j \leqslant r)$ такими, что

$$\prod_{i=1}^{\rho}[x_i, y_i] \prod_{j=1}^{r} z_j = 1, \tag{3}$$

$$|z_j| = m_j \quad (j = 1, \ldots, r). \tag{4}$$

В частности,

$$m_j \mid |G| \quad (j = 1, \ldots, r). \tag{5}$$

Определение 1. Упорядоченный набор $(x_1, \ldots, x_\rho, y_1, \ldots, y_\rho; z_1, \ldots, z_r)$ элементов группы G называется *порождающим $(\rho : m_1, \ldots, m_r)$-вектором*, если G порождается этими элементами и выполнены формулы (3), (4).

Ниже мы введем отношение эквивалентности на множестве порождающих $(\rho : m_1, \ldots, m_r)$-векторов группы G.

Пусть $\widehat{G^*}$ — свободная группа со свободными порождающими $a_1, \ldots, a_\rho$, $b_1, \ldots, b_\rho, c_1, \ldots, c_r$. Имеется естественный эпиморфизм $\widehat{G^*} \to G^*$, переводящий a_i в α_i, b_i в β_i $(1 \leqslant i \leqslant \rho)$ и c_j в γ_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$. Обозначим через w слово $\prod\limits_{i=1}^{\rho} [a_i, b_i] \prod\limits_{j=1}^{r} c_j$. Согласно [1, теорема 5.8.2] всякий автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(G^*)$ индуцируется некоторым автоморфизмом $\hat{\alpha} \in \mathrm{Aut}(\widehat{G^*})$ таким, что $\hat{\alpha}(w)$ сопряжено в $\widehat{G^*}$ с w^δ, а $\hat{\alpha}(c_j)$ сопряжено с $c_{\pi(j)}^{\varepsilon_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$. Здесь $\delta, \varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, π — некоторая подстановка на символах $1, \ldots, r$, такая, что $|\gamma_{\pi(j)}| = |\gamma_j|$ при $1 \leqslant j \leqslant r$. При этом δ не зависит от выбора $\hat{\alpha}$.

Пусть $\mathrm{Aut}^+(G^*)$ состоит из тех автоморфизмов $\alpha \in \mathrm{Aut}(G^*)$, для которых $\delta = 1$. Тогда $\mathrm{Aut}^+(G^*)$ — подгруппа индекса 2 в группе $\mathrm{Aut}(G^*)$. Определим действие группы $\mathrm{Aut}^+(G^*) \times \mathrm{Aut}(G)$ на множестве порождающих $(\rho : m_1, \ldots, m_r)$-векторов группы G.

Пусть $u = (x_1, \ldots, x_\rho, y_1, \ldots, y_\rho; z_1, \ldots, z_r)$ — порождающий $(\rho : m_1, \ldots, m_r)$-вектор для G, $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Aut}^+(G^*) \times \mathrm{Aut}(G)$. Положим $u(\alpha, \beta) = u'$, если вектор u' получается из вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho, \beta_1, \ldots, \beta_\rho; \gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ применением к каждой его компоненте отображения $\alpha\eta\beta$, где $\eta : G^* \to G$ — эпиморфизм, переводящий $\alpha_i, \beta_i, \gamma_j$ в x_i, y_i, z_j соответственно $(i = 1, \ldots, \rho; j = 1, \ldots, r)$. Порождающие $(\rho : m_1, \ldots, m_r)$-векторы v и v' группы G назовем *эквивалентными*, если $v(\alpha, \beta) = v'$ для некоторой пары $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Aut}^+(G^*) \times \mathrm{Aut}(G)$.

Предложение 1 (см. [3, 6, 10]). *Пусть для σ, $|G|$ и $(\rho : m_1, \ldots, m_r)$ выполняется формула (2). Тогда существует биекция между множеством классов эквивалентности G-действий на T_σ с данными ветвления $(\rho : m_1, \ldots, m_r)$ и множеством классов эквивалентности порождающих $(\rho : m_1, \ldots, m_r)$-векторов группы G.*

Прежде чем сформулировать основную теорему, сделаем следующие

Замечания. 1. Если в данных ветвления участвуют числа $n_1, \ldots, n_s$ с кратностями $k_1, \ldots, k_s$, то вместо $(\rho : \underbrace{n_1, \ldots, n_1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{n_s, \ldots, n_s}_{k_s})$ будем писать $(\rho : n_1^{k_1}, \ldots, n_s^{k_s})$. Далее мы опускаем в записи данных ветвления число ρ, если $\rho = 0$.

2. Ниже используются следующие генетические коды:

$\langle x \mid x^n = 1 \rangle$ для циклической группы $\mathbb{Z}_n$,

$\langle x, y \mid x^n = y^m = [x, y] = 1 \rangle$ для группы $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$,

$\langle x, y \mid x^2 = 1,\ y^n = 1,\ x^{-1}yx = y^{-1} \rangle$ для диэдральной группы D_n.

Через $D_{n,m,k}$ обозначена группа с генетическим кодом

$$\langle x, y \mid x^n = 1, y^m = 1, x^{-1}yx = y^k \rangle.$$

3. Квазидиэдральная группа порядка 2^n — это группа, изоморфная $D_{2,2^{n-1},2^{n-2}-1}$ $(n \geqslant 4)$.

$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ — группа кватернионов порядка 8.

S_n и A_n — симметрическая и знакопеременная группы на n символах.

$GL_n(q)$ и $SL_n(q)$ — общая и специальная линейные группы матриц размера $n \times n$ над полем из q элементов.

Теорема. *Конечная группа допускает эффективное и сохраняющее ориентацию действие на ориентируемой замкнутой поверхности рода 4 тогда и только тогда, когда она вкладывается в одну из следующих девяти групп:*

$$\mathbb{Z}_{15}, \quad \mathbb{Z}_{18}, \quad SL_2(3), \quad S_3 \times \mathbb{Z}_6, \quad S_4 \times \mathbb{Z}_3, \quad S_5,$$

квазидиэдральная группа порядка 32, $\mathbb{Z}_5 \rtimes D_4$, $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes D_4$, *где диэдральная группа D_4 порядка 8 действует на $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ точно, а на $\mathbb{Z}_5$ — с нециклическим ядром порядка 4.*

Классы эквивалентности G-действий, где G — неединичная конечная группа, находятся во взаимно однозначном соответствии с тройками (группа G, данные ветвления, порождающий вектор), перечисленными в табл. 1 и 2.

Табл. 1 и 2 составлены с учетом замечаний выше. Элементы $A, B, C \in GL_2(3) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ описаны в следующей лемме.

Лемма 1. *В группе $GL_2(3)$ имеется всего два класса сопряженности инволюций с представителями $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, один класс сопряженности элементов порядка 4 с представителем $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, один класс сопряженности подгрупп, изоморфных $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, с представителем $\langle A, B \rangle$, и один класс сопряженности подгрупп, изоморфных D_4, с представителем $\langle C, B \rangle$.*

Таблица 1

Группы	Данные ветвления	Порождающие векторы	Группы	Данные ветвления	Порождающие векторы
$\mathbb{Z}_2$	(2^{10})	$(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{10})$	$\mathbb{Z}_8$	$(2^2, 8^2)$	(x^4, x^4, x, x^{-1})
	$(1 : 2^6)$	$(1, 1; \underbrace{x, x, \ldots, x}_{6})$	D_4	$(2^4, 4)$	(x, x, x, xy^{-1}, y)
	$(2 : 2^2)$	$(1, 1, 1, 1; x, x)$			$(x, xy^{-1}, y^2, y^2, y)$
$\mathbb{Z}_3$	(3^6)	$(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{6})$	$\mathbb{Z}_9$	(9^3)	(x, x, x^{-2})
		(x, x, x, x^2, x^2, x^2)	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	(3^4)	(x, y, x, xy^2)
	$(1 : 3^3)$	$(1, 1; x, x, x)$			(x, y, x^2, y^2)
	$(2 : -)$	$(x, 1, 1, 1)$	$\mathbb{Z}_{10}$	$(5, 10^2)$	(x^2, x, x^{-3})
$\mathbb{Z}_4$	$(1 : 4^2)$	$(1, 1; x, x^{-1})$			(x^{-2}, x, x)
	$(2^4, 4^2)$	$(x^2, x^2, x^2, x^2, x, x^{-1})$		$(2^2, 5^2)$	(x^5, x^5, x^2, x^{-2})
	$(2, 4^4)$	(x^2, x, x, x, x^{-1})	D_5	$(2^2, 5^2)$	(x, x, y, y^{-1})
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	(2^7)	(x, x, x, y, y, y, xy)			(x, xy^2, y, y^2)
		$(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{5}, y, xy)$	$\mathbb{Z}_{12}$	$(3, 12^2)$	(x^4, x^7, x)
	$(1 : 2^3)$	$(1, 1; x, y, xy)$		$(4, 6, 12)$	(x^{-3}, x^2, x)
$\mathbb{Z}_5$	(5^4)	(x, x^2, x^3, x^4)	D_6	(2^5)	(x, x, xy, xy^4, y^3)
		(x, x, x^{-1}, x^{-1})		$(2^2, 3, 6)$	(x, xy, y^{-2}, y)
		(x, x, x, x^2)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	$(2^2, 3, 6)$	(x, y^3, y^2, yx)
$\mathbb{Z}_6$	$(2^3, 3, 6)$	(x^3, x^3, x^3, x^2, x)		(6^3)	(y, xy, xy^{-2})
	$(3^2, 6^2)$	(x^2, x^2, x, x)	$\mathbb{Z}_{15}$	$(3, 5, 15)$	(x^5, x^{-6}, x)
		(x^2, x^{-2}, x^{-1}, x)	$\mathbb{Z}_{16}$	$(2, 16^2)$	(x^8, x, x^7)
	$(2, 6^3)$	(x^3, x, x, x)	D_8	$(2^3, 8)$	(x, xy^3, y^4, y)
	$(2^2, 3^3)$	$(x^3, x^3, x^2, x^2, x^2)$	$\mathbb{Z}_{18}$	$(2, 9, 18)$	(x^9, x^8, x)
	$(1 : 2^2)$	$(x, 1; x^3, x^3)$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$	$(3, 6^2)$	$(x, x^{-1}y^{-1}, y)$
D_3	$(2^2, 3^3)$	(x, x, y, y, y)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$	$(2, 10^2)$	$(x, y, y^{-1}x)$
	$(1 : 2^2)$	$(y, 1; x, x)$	D_{10}	$(2^3, 5)$	(x, xy^3, y^5, y^2)
	(2^6)	(x, x, x, x, x^y, x^y)			

Таблица 2

Группы	Данные ветвления	Порождающие векторы
Q_8	$(2,4^3)$	$(-1,i,j,k)$
$A_4=\langle x,y \mid x=(12)(34), y=(123)\rangle$	$(2,3^3)$	$(x,y,y,y^{-2}x)$
	$(1:2)$	$(x,y;[x,y]^{-1})$
$\langle x,y \mid y^8=1,\ x^2=y^4,\ x^{-1}yx=y^{-1}\rangle$	$(4^2,8)$	$(x,x^{-1}y^{-1},y)$
$(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3)\leftthreetimes\langle B\rangle$	$(3,6^2)$	(xy,yB,xyB)
		$(x,yB,xy^{-1}B)$
	$(2^2,3^2)$	(B,Bx^{-1},y^{-1},xy)
		(B,Bx,xy^{-1},xy)
$(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3)\leftthreetimes\langle A\rangle$	$(2^2,3^2)$	$(A,Ay^{-1}x^{-1},x,y)$
$D_{4,5,-1}$	$(4^2,5)$	$(x,x^{-1}y^{-1},y)$
$D_{4,5,2}$	$(4^2,5)$	$(x,x^{-1}y^{-1},y)$
S_4	$(2^3,4)$	$((12),(13),(14),(4321))$
$Q_8\leftthreetimes\langle y \mid y^3=1\rangle\cong SL_2(3)$	$(3,4,6)$	$(y,-i,iy^{-1})$
$D_{2,12,-5}$	$(2,6,12)$	(x,xy^{-1},y)
$D_{2,16,7}$	$(2,4,16)$	(x,xy^{-1},y)
$(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3)\leftthreetimes\langle A,B\rangle$	$(2^3,3)$	$(A,BAy,Bx,x^{-1}y^{-1})$
	$(2,6^2)$	(Axy^{-1},By,BAx)
$S_3\times\langle u \mid u^6=1\rangle$	$(2,6^2)$	$((12),(123)u,(13)u^{-1})$
$(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3)\leftthreetimes\langle C\rangle$	$(3,4^2)$	$(y,C^{-1}x,C)$
$A_4\times\langle x \mid x^3=1\rangle$	$(3^2,6)$	$((123),(143)x^{-1},(12)(34)x)$
$\langle x,y,z \mid x^5=y^4=z^2=1,\ y^z=y^{-1},\ x^z=x,\ x^y=x^{-1}\rangle\cong\mathbb{Z}_5\leftthreetimes D_4$	$(2,4,10)$	(xzy,y,y^2zx^{-1})
A_5	$(2,5^2)$	$((24)(35),(12345),(13452))$
$S_4\times\langle x \mid x^3=1\rangle$	$(2,3,12)$	$((14),(123)x,(1324)x^{-1})$
$(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3)\leftthreetimes\langle B,C\rangle$	$(2,4,6)$	(Bx,C,BCx)
S_5	$(2,4,5)$	$((12),(2543),(12345))$

Примечание. Мы используем следующие генетические коды:
$\langle x \mid x^n=1\rangle$ для циклической группы $\mathbb{Z}_n$,
$\langle x,y \mid x^n=y^m=[x,y]=1\rangle$ для группы $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m$,
$\langle x,y \mid x^2=1,\ y^n=1,\ x^{-1}yx=y^{-1}\rangle$ для диэдральной группы D_n.
Через $D_{n,m,k}$ обозначена группа с генетическим кодом

$$\langle x,y \mid x^n=1, y^m=1, x^{-1}yx=y^k\rangle.$$

A, B, C — автоморфизмы группы $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$, заданные равенствами:

$$A(x)=x^{-1},\ A(y)=y^{-1};\quad B(x)=x^{-1},\ B(y)=y;\quad C(x)=y^{-1},\ C(y)=x.$$

Схема доказательства теоремы следующая. Сначала перечисляются все наборы $(|G|,(\rho : m_1,\dots,m_r))$, удовлетворяющие формуле (2) при $\sigma=4$, формуле (5) и такие, что все m_j входят в список (9). Затем для каждого такого набора мы выясняем, для каких групп порядка $|G|$ существуют порождающие $(\rho : m_1,\dots,m_r)$-векторы, и находим представители классов эквивалентности этих векторов. Для абелевых и диэдральных групп при $\rho=0$ представители выписаны в табл. 1 без пояснений, так как их легко получить либо непосредственно, либо с помощью пп. 2.3 и 2.4. Остальные случаи разобраны в § 3.

В заключение отметим одну ошибку, допущенную в [3] на с. 263–264, а также в табл. 5. Там утверждается, что существуют два не эквивалентных действия группы

$$G=\langle x,y,z \mid x^2=y^2=z^4=[y,z]=[x,z]=1,\ xyx^{-1}=yz^2\rangle\cong(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2)\leftthreetimes\mathbb{Z}_2$$

на поверхности T_3 с данными ветвления $(2^3, 4)$. Одно определяется порождающим вектором (x, xzy, y, z^{-1}), второе — вектором (x, xzy, z^2, yz) (в табл. 5 второй вектор записан с ошибкой). На самом деле, второй вектор не является порождающим: группа $\langle x, xzy, z^2, yz\rangle = \langle x, yz\rangle$ имеет нормальную подгруппу $\langle yz\rangle$ индекса 2 и порядка 4 и поэтому не равна G.

Можно доказать, что G-действие на поверхности T_3 с данными ветвления $(2^3, 4)$ единственно с точностью до топологической эквивалентности.

§ 2. Вспомогательные результаты

2.1. Группы $\mathrm{Aut}^+(G^*)$ при $\rho = 0$ и 1.

Условимся записывать действие автоморфизма на порождающем только в том случае, когда этот порождающий сдвигается.

Предложение 2 (см. [2, 3]). *Пусть G^* и $\widehat{G^*}$ — группы, введенные выше, где $\rho = 0$ или 1. При $\rho = 0$ рассмотрим следующие автоморфизмы из группы* $\mathrm{Aut}(\widehat{G^*})$:

$$\theta_j : c_j \to c_{j+1},\ c_{j+1} \to c_{j+1}^{-1} c_j c_{j+1} \quad (1 \leqslant j \leqslant r-1).$$

При $\rho = 1$ дополнительно рассмотрим автоморфизмы

$$\varphi : a_1 \to b_1 a_1, \quad \psi : b_1 \to a_1 b_1,$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu_j : \begin{cases} a_1 \to a_1 c_r^{-1} \dots c_{j+1}^{-1} c_{j-1}^{-1} \dots c_1^{-1} b_1^{-1}, \\ c_j \to t c_j t^{-1}, \ \text{где } t = c_{j+1} \dots c_r b_1 c_1 \dots c_{j-1}, \end{cases} \\ \nu_j : \begin{cases} b_1 \to b_1 a_1 c_r^{-1} \dots c_{j+1}^{-1} c_{j-1}^{-1} \dots c_1^{-1}, \\ c_j \to t c_j t^{-1}, \ \text{где } t = c_{j+1} \dots c_r a_1^{-1} c_1 \dots c_{j-1}, \end{cases} \end{array}\right. \quad j \in \{1, \dots, r\}.$$

Конечное произведение $\hat{p}$ внутренних, указанных выше и обратных к ним автоморфизмов индуцирует автоморфизм из группы $\mathrm{Aut}^+(G^*)$ тогда и только тогда, когда образы элементов $\hat{p}(c_j)$ и c_j в группе G^* имеют одинаковые порядки $(1 \leqslant j \leqslant r)$. При $\rho = 0$ всякий автоморфизм $p \in \mathrm{Aut}^+(G^*)$ индуцируется некоторым таким автоморфизм $\hat{p} \in \mathrm{Aut}(\widehat{G^*})$.

2.2. Метод Зингермана промежуточных действий.

Следующее предложение непосредственно вытекает из [12].

Предложение 3. *Пусть $\varepsilon : G \to \mathrm{Homeom}^+(T_\sigma)$ — действие с данными ветвления $(\rho : m_1, \dots, m_r)$ и $(x_1, \dots, x_\rho, y_1, \dots, y_\rho; z_1, \dots z_r)$ — некоторый соответствующий этому действию порождающий $(\rho : m_1, \dots, m_r)$-вектор для G. Пусть $H \leqslant G$ и действие $\varepsilon|_H : H \to \mathrm{Homeom}^+(T_\sigma)$ имеет данные ветвления $(\tau : n_1, \dots, n_t)$. Рассмотрим действие группы G умножением справа на множестве правых смежных классов G/H. Пусть элемент z_i имеет k_i орбит, длины которых равны $m_i/l_{i1}, \dots, m_i/l_{ik_i}$. Тогда набор $(n_1, \dots, n_t)$ получается из набора $(l_{11}, \dots, l_{1k_1}, \dots, l_{r1}, \dots, l_{rk_r})$ вычеркиванием единиц, а τ определяется из равенства*

$$|G : H| \cdot \left(2\rho - 2 + \sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)\right) = \left(2\tau - 2 + \sum_{s=1}^{t} \left(1 - \frac{1}{n_s}\right)\right).$$

Чаще всего нам достаточно будет знать, что

$$\text{каждое } n_s \text{ является делителем некоторого } m_j. \tag{6}$$

Предложение 4. *Пусть в условиях предыдущего предложения $\tau = 0$ (тогда автоматически $\rho = 0$). Тогда подгруппа H нормальна в G в том и только том случае, когда для каждого $i = 1, \dots, r$ равны длины всех орбит при действии $\langle z_i\rangle$ на G/H умножением справа.*

Как замечено в [3], это предложение легко следует из [4].

Мы будем пользоваться предложением 4, зная только данные ветвления для G-действия ε и возможные данные ветвления для H-действий, но не зная самих порождающих векторов.

Пример. Опишем классы действий групп порядка 24 на T_4 с данными ветвления $(3,4,6)$.

Пусть $|G| = 24$, $\varepsilon : G \to \mathrm{Homeom}^+(T_4)$ — действие с данными ветвления $(3,4,6)$ и (x_1, x_2, x_3) — некоторый порождающий $(3,4,6)$-вектор для G, соответствующий ε.

Ввиду формул (2) и (5), примененных к произвольной группе H порядка 8, действия группы H на T_4 могут иметь только следующие данные ветвления: $(1:4)$, $(2^4, 4)$, $(2, 4^3)$, $(2^2, 8^2)$. Пусть H — некоторая силовская 2-подгруппа в G и G/H — множество правых смежных классов G по H. Для того чтобы понять, какие данные ветвления имеет действие $\varepsilon|_H$, необходимо исследовать действия подгрупп $\langle x_i \rangle$ умножением справа на G/H.

Подгруппы $\langle x_1 \rangle$ и $\langle x_3 \rangle$ действуют транзитивно на G/H, так как в противном случае возникли бы одноэлементные орбиты и в данных ветвления действия $\varepsilon|_H$ появилось бы число 3 или 6. Поэтому в данных ветвления для $\varepsilon|_H$ от $\langle x_1 \rangle$ не появляется ничего, а от $\langle x_3 \rangle$ появляется число 2. Группа $\langle x_2 \rangle$ имеет либо три орбиты длины 1, либо одну орбиту длины 1 и одну длины 2. В первом случае $\langle x_2 \rangle$ внесет в данные ветвления для $\varepsilon|_H$ три 4, во втором — 4 и 2. Мы видим, что возможно только первое. Поэтому данные ветвления для H — $(2, 4^3)$ и $H \trianglelefteq G$.

Так как в абелевой и диэдральной группах порядка 8 произведение трех элементов порядка 4 не является элементом порядка 2, то $H \cong Q_8$.

Пусть $L = \langle y \rangle$ — некоторая силовская 3-подгруппа в G. Заметим, что она не единственная силовская 3-подгруппа в G. В противном случае $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle x_1, (x_1^{-1} x_3^{-1}), x_3 \rangle = \langle x_1, x_3 \rangle = \langle x_3 \rangle \neq G$. Поэтому y действует сопряжением на H как элемент порядка 3 из $\mathrm{Aut}(H)$. Так как в $\mathrm{Aut}(Q_8)$ все элементы порядка 3 сопряжены, то

$$G = \langle Q_8, y \mid y^3 = 1,\ y^{-1} i y = j,\ y^{-1} j y = k,\ y^{-1} k y = i \rangle \cong SL_2(3).$$

Теперь докажем, что всякий порождающий $(3,4,6)$-вектор (x_1, x_2, x_3) для G эквивалентен вектору $(y, -i, iy^{-1})$ относительно действия группы $\mathrm{Aut}^+(G^*) \times \mathrm{Aut}(G)$. Применяя подходящий автоморфизм из $\mathrm{Aut}(G)$, можно считать, что $x_1 = y$. Группа $\langle y \rangle$, действуя сопряжением на множестве всех элементов порядка 4, дает две орбиты: $\{i, j, k\}$ и $\{-i, -j, -k\}$. Поэтому можно считать, что $x_2 = i$ или $x_2 = -i$. Первое не подходит, так как тогда $|x_3| = |x_1 x_2| = 3$. Остается второе, и мы получаем вектор $(y, -i, iy^{-1})$.

Итак, существует только один класс действий групп порядка 24 на T_4 с данными ветвления $(3,4,6)$.

В дальнейшем для произвольного действия $\varepsilon : G \to \mathrm{Homeom}^+(T_4)$ и подгруппы $H < G$ мы будем сразу писать возможные данные ветвления для действия $\varepsilon|_H$, опуская подробный анализ действия компонент порождающего вектора на множестве правых смежных классов G/H. При этом мы будем делать выбор из уже известных данных ветвления всевозможных H-действий.

2.3. Действия циклических групп.

Пусть G — конечная (не обязательно циклическая) группа, $\varepsilon : G \to \mathrm{Homeom}^+(T_\sigma)$ — действие с данными ветвления $(\rho : m_1, \ldots, m_r)$ и $(x_1, \ldots, x_\rho, y_1, \ldots, y_\rho; z_1, \ldots, z_r)$ — некоторый порождающий $(\rho : m_1, \ldots, m_r)$-вектор, отвечающий действию ε. Для неединичного элемента $g \in G$ обозначим через $|T_\sigma^g|$ число точек поверхности T_σ, неподвижных относительно g.

В [3, 5] отмечено следующее:

$$|T_\sigma^g| = |N_G(\langle g\rangle)| \cdot \sum_{j=1}^{r} \frac{\delta_j(g)}{m_j}, \tag{7}$$

где $\delta_j(g)$ равно 1, если g сопряжено со степенью z_j, и 0 в противном случае;

$$\text{если } G = \langle g\rangle, \text{ то } |T_\sigma^g| \text{ равно количеству тех } j, \text{ для которых } |G| = m_j. \tag{8}$$

Предложение 5 [6]. *Пусть группа $\mathbb{Z}_n$ действует на поверхности T_σ рода $\sigma \geqslant 2$ с данными ветвления $(\rho : m_1, \dots, m_r)$. Тогда каждый класс эквивалентности порождающих $(\rho : m_1, \dots, m_r)$-векторов содержит вектор $(x_1, \dots, x_\rho, y_1, \dots, y_\rho; z_1, \dots, z_r)$, где $x_2 = \dots = x_\rho = y_1 = \dots = y_\rho = 0$ и x_1 порождает $\mathbb{Z}_n/\mathbb{Z}_m$, $m = НОК(m_1, \dots, m_r)$. Более того, с помощью преобразований $\mu_1, \dots, \mu_r$ можно убедиться, что векторы $(x_1, 1, \dots, 1; z_1, \dots, z_r)$ и $(x_1', 1, \dots, 1; z_1, \dots, z_r)$ эквивалентны, если $x_1' x_1^{-1} \in \langle z_1, \dots, z_r\rangle$.*

Предложение 6 [3, с. 256]. *Пусть группа $\mathbb{Z}_n$ $(n > 1)$ действует на поверхности T_σ рода $\sigma \geqslant 2$. Тогда*

1) *$n \leqslant 4\sigma + 2$,*
2) *если n простое, то $n = 2\sigma + 1$ или $n \leqslant \sigma + 1$,*
3) *$\varphi(n) \leqslant 2\sigma$, где φ — функция Эйлера.*

Из этого предложения видно, что для $\sigma = 4$ возможные значения n таковы:

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15,\ 16,\ 18. \tag{9}$$

Из нашей теоремы следует, что все эти значения реализуются.

2.4. Действия групп диэдрального типа при $\rho = 0$.

В этом пункте A обозначает конечную абелеву группу, не изоморфную $\mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$, $\widetilde{A} = \langle A, x \mid x^2 = 1, a^x = a^{-1}\ (a \in A)\rangle$ — ее расширение диэдрального типа. Отсюда A — автоморфно допустимая подгруппа в $\widetilde{A}$.

Будем говорить, что упорядоченные наборы $(a_1', \dots, a_s')$ и $(a_1'', \dots, a_s'')$ элементов из A *эквивалентны*, если от первого ко второму можно перейти с помощью конечного числа преобразований вида:

n_{ij}: перестановка a_i и a_j, если $|a_i| = |a_j|$, $i \neq j$,

n_i : обращение a_i,

τ : замена a_k на $\tau(a_k)$ для всех $k = 1, \dots, s$ $(\tau \in \mathrm{Aut}(A);\ i, j \in \{1, \dots, s\})$.

Назовем упорядоченный набор $(a_1, \dots, a_s)$ *слабо порождающим* $(k_1, \dots, k_s)$-*вектором* для A, если $2 \leqslant k_1 \leqslant \dots \leqslant k_s$, $|a_1| = k_1, \dots, |a_s| = k_s$ и $\langle a_1, \dots, a_s\rangle = A$ (ср. с определением 1).

Для порождающего вектора $(z_1, \dots, z_r)$ группы $\widetilde{A}$ назовем его A-*частью* вектор, получающийся вычеркиванием из него элементов, не лежащих в A.

Лемма 2. *Пусть $(z_1', \dots, z_r')$ и $(z_1'', \dots, z_r'')$ — эквивалентные порождающие $(m_1, \dots, m_r)$-векторы для $\widetilde{A}$ (см. § 1). Тогда их A-части эквивалентны (в смысле, указанном в начале пункта).*

Доказательство следует из предложения 2.

Лемма 3. *Любой порождающий $(m_1, \dots, m_r)$-вектор с $m_4 \geqslant 3$ для группы $\widetilde{A}$ эквивалентен порождающему вектору вида $(x, xa_r^{-1} \dots a_3^{-1}, a_3, \dots, a_r)$, где $(a_3, \dots, a_r)$ — слабо порождающий $(m_3, \dots, m_r)$-вектор для A.*

Доказательство. Пусть $(z_1, \dots, z_r)$ — порождающий $(m_1, \dots, m_r)$-вектор для $\widetilde{A}$. Так как $3 \leqslant m_4 \leqslant \dots \leqslant m_r$, то $z_4, \dots, z_r \in A$. Так как $\langle z_1, \dots, z_r\rangle = \widetilde{A}$ и $z_1 z_2 \cdot \ldots \cdot z_r = 1$, то ровно два элемента из (z_1, z_2, z_3) лежат в смежном классе xA, а третий вместе с $z_4, \dots, z_r$ порождает A. Применяя одно из преобразований:

id, θ_2, $\theta_1\theta_2$, можно получить вектор $(z_1', z_2', z_3', z_4, \ldots, z_r)$ такой, что $z_1', z_2' \in xA$, $z_3' \in A$.

Пусть $z_1' = xa$, где $a \in A$. Тогда автоморфизм $\tau : \begin{cases} x \to xa^{-1}, \\ b \to b \ (b \in A) \end{cases}$ переводит вектор $(z_1', z_2', z_3', z_4, \ldots, z_r)$ в вектор $(x, z'', z_3', z_4, \ldots, z_r)$, где $z'' = xz_r^{-1} \ldots z_4^{-1}(z_3')^{-1}$, так как произведение всех компонент должно равняться 1. Осталось положить $a_3 = z_3'$, $a_i = z_i$ при $i \geqslant 4$.

Лемма 4. *Пусть $m_1 \leqslant \cdots \leqslant m_r$, $m_1 = m_2 = 2$, $m_4 \geqslant 3$. Тогда существует биекция между классами эквивалентности порождающих $(m_1, \ldots, m_r)$-векторов для $\widetilde{A}$ и классами эквивалентности слабо порождающих $(m_3, \ldots, m_r)$-векторов для A.*

Доказательство. Определим отображение Ψ из множества слабо порождающих $(m_3, \ldots, m_r)$-векторов для A в множество порождающих $(2, 2, m_3, \ldots, m_r)$-векторов для $\widetilde{A}$ по правилу: вектору $(a_3, \ldots, a_r)$ сопоставим вектор $(x, xa_r^{-1} \ldots a_3^{-1}, a_3, \ldots, a_r)$. Докажем, что Ψ согласовано с отношениями эквивалентности. Для этого достаточно показать, что если вектор $(b_3, \ldots, b_r)$ получается из вектора $(a_3, \ldots, a_r)$ преобразованием n_{ij}, n_i или τ, то вектор $t_b = (x, xb_r^{-1} \ldots b_3^{-1}, b_3, \ldots, b_r)$ эквивалентен вектору $t_a = (x, xa_r^{-1} \ldots a_3^{-1}, a_3, \ldots, a_r)$.

В случае n_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant r-2)$ вектор t_b получается из вектора t_a преобразованием $\theta_{i+2} \ldots \theta_j \theta_{j+1} \theta_j^{-1} \ldots \theta_{i+2}^{-1}$, в случае n_i $(1 \leqslant i \leqslant r-2)$ — преобразованием $\theta_{i+1}\theta_i \ldots \theta_3 \theta_2^2 \theta_3^{-1} \ldots \theta_i^{-1} \theta_{i+1}^{-1}$, в случае $\tau \in \mathrm{Aut}(A)$ — автоморфизмом $\hat{\tau} \in \mathrm{Aut}(\widetilde{A})$, где $\hat{\tau}(x) = x$, $\hat{\tau}(y) = \tau(y)$ при $y \in A$.

Поэтому можно (естественным образом) определить отображение Ψ^* из множества классов эквивалентности слабо порождающих $(m_3, \ldots, m_r)$-векторов для A в множество классов эквивалентности порождающих $(2, 2, m_3, \ldots, m_r)$-векторов для $\widetilde{A}$. Ввиду леммы 3 Ψ^* — отображение «на», а ввиду леммы 2 Ψ^* взаимно однозначно.

Лемма 5. *Для группы $D_3 = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = 1,\ x^{-1}yx = y^{-1} \rangle$ любой порождающий (2^6)-вектор эквивалентен вектору (x, x, x, x, x^y, x^y).*

Доказательство. Пусть $(x_1, \ldots, x_6)$ — произвольный порождающий (2^6)-вектор для D_3. Пусть $n(x)$, $n(x^y)$, $n(x^{y^2})$ — число его компонент, равных соответственно x, x^y, x^{y^2}. Группа D_3 действует сопряжениями на множестве $\{x, x^y, x^{y^2}\}$ всех своих инволюций как полная группа подстановок. Сопрягая вектор $(x_1, \ldots, x_6)$ подходящим элементом из D_3, можно считать, что

$$n(x) \geqslant n(x^y) \geqslant n(x^{y^2}), \quad n(x) + n(x^y) + n(x^{y^2}) = 6. \tag{10}$$

Далее, применяя подходящие преобразования вида θ_j, можно считать, что все x стоят перед всеми x^y, а те стоят перед всеми x^{y^2}. Из всех таких векторов формулам (10) и свойствам $x_1 \cdot \ldots \cdot x_6 = 1$, $\langle x_1, \ldots, x_6 \rangle = D_3$ удовлетворяют только два вектора:

$$(x, x, x^y, x^y, x^{y^2}, x^{y^2}) \quad \text{и} \quad (x, x, x, x, x^y, x^y).$$

Но они эквивалентны, так как второй получается из первого с помощью преобразования $\theta_4^{-1}\theta_3\theta_5^{-1}\theta_4$.

Лемма 6. *Для группы $D_4 = \langle x, y \mid x^2 = y^4 = 1,\ x^{-1}yx = y^{-1} \rangle$ существует только два класса эквивалентности порождающих $(2^4, 4)$-векторов: один определяется вектором (x, x, x, xy^{-1}, y), другой — вектором $(x, xy^{-1}, y^2, y^2, y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_1, \ldots, x_5)$ — порождающий $(2^4, 4)$-вектор для D_4. Сопрягая его элементом x (если надо), можно считать, что $x_5 = y$. Возможны два случая.

1. Предположим, что x_1, x_2, x_3, x_4 — не центральные инволюции. Тогда некоторые из них совпадают (в противном случае, они равны, с точностью до перестановки, инволюциям x, xy, xy^2, xy^3, и тогда $x_1 \ldots x_5 \neq 1$ даже по модулю коммутанта). С помощью преобразований вида $\theta_j^{\pm 1}$ можно считать, что $x_1 = x_2$, а с помощью автоморфизма вида $x \to xy^i$, $y \to y$, добиться, чтобы $x_1 = x_2 = x$. Тогда $x_3x_4 = x_2^{-1}x_1^{-1}x_5^{-1} = y^{-1}$ и для пары (x_3, x_4) имеется четыре возможности: $(x_3, x_4) = (xy^i, xy^{i-1})$, $i = 0, 1, 2, 3$. Так как группа $\langle\theta_3\rangle$ действует транзитивно на множестве векторов $(x, x, xy^i, xy^{i-1}, y)$, $i = 0, 1, 2, 3$, то все векторы в этом случае эквивалентны вектору (x, x, x, xy^{-1}, y).

2. Предположим, что среди элементов x_1, x_2, x_3, x_4 имеются элементы, равные центральной инволюции y^2. Таких элементов должно быть в точности два, чтобы соблюдалось условие $x_1x_2 \ldots x_5 = 1$. С помощью преобразований вида $\theta_j^{\pm 1}$ можно считать, что $x_3 = x_4 = y^2$. Тогда $x_1x_2 = x_5^{-1}x_4^{-1}x_3^{-1} = y^{-1}$ и, как в конце случая 1, можно прийти к вектору $(x, xy^{-1}, y^2, y^2, y)$.

Векторы (x, x, x, xy^{-1}, y) и $(x, xy^{-1}, y^2, y^2, y)$ не эквивалентны, так как преобразования вида θ_j и автоморфизмы сохраняют число компонент вектора, лежащих в центре.

Лемма 7. *Для группы* $D_6 = \langle x, y \mid x^2 = y^6 = 1,\ x^{-1}yx = y^{-1}\rangle$ *любой порождающий* (2^5)*-вектор эквивалентен вектору* (x, x, xy, xy^4, y^3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_1, \ldots, x_5)$ — произвольный порождающий (2^5)-вектор для D_6. Так как все его компоненты — инволюции и $x_1 \cdot \ldots \cdot x_5 = 1$, то одна из его компонент равна y^3. Применяя преобразования вида θ_j^{-1}, можно считать, что $x_5 = y^3$. Докажем, что $x_i \neq y^3$ при $i = 1, \ldots, 4$. Предположим, что это не так. Тогда ввиду $x_1 \cdot \ldots \cdot x_5 = 1$ по крайней мере две компоненты из первых четырех равны y^3. Снова можно считать, что $x_3 = x_4 = y^3$. Но тогда $x_1x_2 = y^3$ и $\langle x_1, \ldots, x_5\rangle = \langle x_1, y^3\rangle \neq G$. Противоречие.

Итак, элементы x_i $(i = 1, \ldots, 4)$ — нецентральные инволюции, и поэтому имеют вид xy^{k_i}, где $k_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Докажем, что существует вектор, эквивалентный вектору $(x_1, \ldots, x_4, y^3)$ и такой, что в нем какие-то две из первых четырех компонент совпадают.

Предположим, что все k_i различны. Тогда существуют индексы i и j такие, что $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ и $|k_i - k_j| = 1$. Применяя преобразование $\theta_{j-1}\theta_{j-2} \cdot \ldots \cdot \theta_{i+1}$, добьемся того, что на местах i и $i+1$ будут элементы xy^{k_i} и xy^{k_j}. Заметим, что дальнейшее применение преобразования θ_i^s приводит к замене этих компонент на $xy^{k_i+s(k_j-k_i)}$ и $xy^{k_j+s(k_j-k_i)}$. Пусть на каком-то другом месте (отличном от i и $i+1$) стоит элемент xy^{k_t}. Тогда при $s = \frac{k_t - k_i}{k_j - k_i}$ мы получим на месте i такой же элемент xy^{k_t}.

Итак, можно считать, что $x_i = x_j$ для некоторых i и j $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$. С помощью преобразований вида θ_j и автоморфизмов вида $\nu_t : x \to xy^t$, $y \to y$, можно считать, что $x_1 = x_2 = x$. Тогда $x_3x_4 = x_2^{-1}x_1^{-1}x_5^{-1} = y^3$. Отсюда $(x_3, x_4) = (xy^a, xy^{a+3})$, $a \in \{0, \pm 1, \pm 2, 3\}$. Учитывая то, что $\langle x_1, \ldots, x_5\rangle = D_6$, получаем $a \in \{\pm 1, \pm 2\}$. Автоморфизм $x \to x$, $y \to y^{-1}$ приводит к замене a на $-a$. Преобразование θ_3 приводит к замене a на $a+3 \pmod 6$. Поэтому всякий порождающий (2^5)-вектор для D_6 эквивалентен вектору (x, x, xy, xy^4, y^3).

§ 3. Доказательство основной теоремы

3.1. Исключение некоторых групп.

Лемма 8. Группы порядков 27, 30, 45, 48, 54, 90, 108 *не могут эффективно и с сохранением ориентации действовать на поверхности* T_4.

Доказательство. Пусть G — группа одного из указанных порядков, и предположим, что G действует эффективно и с сохранением ориентации на T_4. Тогда формулам (2), (5) и условию, что все m_i находятся в списке (9), удовлетворяют только $\rho = 0$ и (m_1, m_2, m_3), указанные ниже. Пусть (x_1, x_2, x_3) — некоторый порождающий (m_1, m_2, m_3)-вектор для G. В каждом из рассмотренных ниже случаев придем к противоречию.

1. $|G| = 27$, данные ветвления $(3^2, 9)$.

Так как G нильпотентна, то $\langle x_3 \rangle \trianglelefteq G$. Отсюда и из $G = \langle x_2, x_3 \rangle$ следует, что $G = \langle x_3 \rangle \rtimes \langle x_2 \rangle$. Пусть $x_2^{-1} x_3 x_2 = x_3^t$. Тогда $1 = x_1^3 = \left(x_3^{-1} x_2^{-1}\right)^3 = x_3^{-1} \cdot x_2^{-1} x_3^{-1} x_2 \cdot x_2^{-2} x_3^{-1} x_2^2 = x_3^{-t^2-t-1}$. Однако сравнение $t^2 + t + 1 \equiv 0 \pmod 9$ неразрешимо. Противоречие.

Ввиду этого и теоремы Силова отвергаются случаи $|G| = 54$ (данные ветвления $(2, 3, 18)$) и $|G| = 108$ (данные ветвления $(2, 3, 9)$).

2. $|G| = 30$, данные ветвления $(2, 5, 10)$.

Произвольная группа порядка 10 может иметь данные ветвления только $(2^2, 5^2)$ или $(5, 10^2)$. Однако, это противоречит п. 2.2, примененному к G и $H = \langle x_3 \rangle$.

3. $|G| = 45$, данные ветвления $(3^2, 5)$.

Этот случай исключается, так как x_1 и x_2 лежат в единственной силовской 3-подгруппе и не порождают G.

4. $|G| = 48$, данные ветвления $(2, 4, 8)$.

Пусть H — некоторая силовская 2-подгруппа в G. Для произвольной группы порядка 16 возможны только данные ветвления $(2^3, 8)$, $(4^2, 8)$ и $(2, 16^2)$. Ни одни из них не подходят для H ввиду п. 2.2.

5. $|G| = 90$, данные ветвления $(2, 3, 10)$.

Группа G не простая, так как порядок любой конечной простой нециклической группы должен делиться на 4. Поэтому в G есть нормальная подгруппа индекса либо 2, либо 3, либо 5. Первые две возможности исключаются ввиду рассмотренных случаев 2 и 3. Предположим теперь, что $H \trianglelefteq G$ и $|G : H| = 5$. Пусть $(\tau : n_1, \dots, n_t)$ — данные ветвления для H. Из формулы Римана — Гурвица для H легко вывести, что $\tau = 0$ и среди $n_1, \dots, n_t$ нет пяти двоек. Однако, это противоречит предложению 4.

3.2. Действия с данными ветвления $(\rho : m_1, \dots, m_r)$, где $\rho > 0$.

Все порядки $|G|$ и наборы $(\rho : m_1, \dots, m_r)$, где $\rho > 0$, удовлетворяющие формуле (2) при $\sigma = 4$, условию (5) и такие, что $m_1, \dots, m_r$ находятся в списке (9), перечислены ниже. Некоторые случаи не приводят к G-действиям.

1. $|G| = 2$, $(1 : 2^6)$.
2. $|G| = 2$, $(2 : 2^2)$.
3. $|G| = 3$, $(2 : -)$.

Классы эквивалентности G-действий в этих случаях единственны и определяются с помощью предложения 5 (см. табл. 1).

4. $|G| = 3$, $(1 : 3^3)$.

Пусть $G = \langle x \mid x^3 = 1 \rangle$. Порождающий вектор $(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ по предложению 5 можно выбрать таким, чтобы выполнялось равенство $\alpha_1 = \beta_1 = 1$. Далее, так как γ_1, γ_2, γ_3 — элементы порядка 3 и $1 = [\alpha_1, \beta_1]\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$, то все γ_i либо равны x, либо равны x^2. Второй случай сводится к первому автоморфизмом группы G. Итак, любой порождающий $(1 : 3^3)$-вектор для G эквивалентен вектору $(1, 1; x, x, x)$.

5. $|G| = 4$, $(1 : 2^3)$.

Пусть $(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — порождающий $(1 : 2^3)$-вектор для G. Легко понять, что $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Пусть $G = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1,\ xy = yx\rangle$. Из равенства $1 = [\alpha_1, \beta_1]\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$ следует, что все инволюции γ_1, γ_2, γ_3 различны. С помощью $\mathrm{Aut}(G)$ можно считать, что $\gamma_1 = x$, $\gamma_2 = y$, $\gamma_3 = xy$. Преобразования $\mu_i\varphi$ и $\nu_j\psi^{-1}$ в данном случае выглядят следующим образом: $\mu_i\varphi : \alpha_1 \to \alpha_1\gamma_i$; $\nu_j\psi^{-1} : \beta_1 \to \beta_1\gamma_j$. С их помощью можно добиться, чтобы было $\alpha_1 = \beta_1 = 1$. Итак, любой порождающий $(1 : 2^3)$-вектор для G эквивалентен вектору $(1, 1; x, y, xy)$.

6. $|G| = 4$, $(1 : 4^2)$.

Имеем $G \cong \mathbb{Z}_4$. Пусть $(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1, \gamma_2)$ — порождающий $(1 : 4^2)$-вектор для $G = \langle x \mid x^4 = 1\rangle$. Из равенства $[\alpha_1, \beta_1]\gamma_1\gamma_2 = 1$ следует, что один из элементов γ_1, γ_2 равен x, другой — x^{-1}. С помощью преобразования θ_1 можно считать, что $\gamma_1 = x$, $\gamma_2 = x^{-1}$. Ввиду предложения 5 получаем, что исходный вектор эквивалентен вектору $(1, 1; x, x^{-1})$.

7. $|G| = 6$, $(1 : 2^2)$.

Возможны два случая: $G \cong \mathbb{Z}_6$ и $G \cong S_3$.

(а) $G = \langle x \mid x^6 = 1\rangle \cong \mathbb{Z}_6$.

Из предложения 5 следует, что любой порождающий $(1 : 2^2)$-вектор для G эквивалентен вектору $(x, 1; x^3, x^3)$ или $(x^{-1}, 1; x^3, x^3)$. Но эти векторы $\mathrm{Aut}(G)$-эквивалентны.

(б) $G = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = 1,\ x^{-1}yx = y^{-1}\rangle \cong S_3$.

Пусть $(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1, \gamma_2)$ — порождающий $(1 : 2^2)$-вектор. Мы покажем, что он эквивалентен вектору $(y, 1; x, x)$. Предположим, что инволюции γ_1 и γ_2 различны. Тогда ввиду $[\alpha_1, \beta_1]\gamma_1\gamma_2 = 1$ или α_1, или β_1 будет инволюцией. Так как преобразование $\varphi\psi^{-1}$ переводит вектор $(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1, \gamma_2)$ в $(\beta_1\alpha_1, \alpha_1^{-1}; \gamma_1, \gamma_2)$, то без ограничения общности можно считать, что β_1 — инволюция. Так как θ_1^{-1} переводит $(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1, \gamma_2)$ в $(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}, \gamma_1)$ и $\gamma_1 \neq \gamma_2$, то можно считать, что $\beta_1 \neq \gamma_2$. Тогда элемент $\gamma_2\beta_1$ имеет порядок 3 как произведение различных инволюций.

Теперь рассмотрим цепочку эквивалентных векторов

$$(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1, \gamma_2) \xrightarrow{\mu_1} (*, \beta_1; (\gamma_2\beta_1)\gamma_1(\gamma_2\beta_1)^{-1}, \gamma_2) \xrightarrow{\mu_1} (*, \beta_1; (\gamma_2\beta_1)^2\gamma_1(\gamma_2\beta_1)^{-2}, \gamma_2).$$

Так как тройной цикл действует транзитивно на множестве инволюций, то для некоторого i элемент $(\gamma_2\beta_1)^i\gamma_1(\gamma_2\beta_1)^{-i}$ совпадает с γ_2. Поэтому далее считаем, что $\gamma_1 = \gamma_2$. Из условия $[\alpha_1, \beta_1]\gamma_1\gamma_2 = 1$ следует, что $[\alpha_1, \beta_1] = 1$, т. е. α_1 является степенью β_1 или наоборот. С помощью преобразований φ и ψ можно добиться, чтобы β_1 равнялось 1.

Так как вектор $(\alpha_1, 1; \gamma_1, \gamma_1)$ порождающий и $|\gamma_1| = 2$, то или α_1, или $\alpha_1\gamma_1$ будет тройным циклом. Ввиду того, что

$$(\alpha_1, 1; \gamma_1, \gamma_2) \xrightarrow{\mu_1} (\alpha_1\gamma_1, 1; \gamma_1, \gamma_1),$$

без ограничения общности можно считать, что $|\alpha_1| = 3$.

Осталось заметить, что группа $\mathrm{Aut}(G)$ действует транзитивно на множестве всех пар (тройной цикл, инволюция). Поэтому вектор $(\alpha_1, 1; \gamma_1, \gamma_1)$ эквивалентен вектору $(y, 1; x, x)$.

8. $|G| = 8$, $(1 : 4)$.

В этом случае G-действие невозможно, так как коммутант любой группы порядка 8 имеет порядок не более 2, и, следовательно, нарушается условие (3).

9. $|G| = 9$, $(1 : 3)$.

Этот случай тоже не реализуется, так как любая группа порядка 9 абелева, и снова нарушается условие (3).

10. $|G| = 12$, $(1 : 2)$. Пусть $(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1)$ — порождающий $(1 : 2)$-вектор для G, в частности, $[\alpha_1, \beta_1]\gamma_1 = 1$ и $|\gamma_1| = 2$. Поэтому G — неабелева группа

и $G \ncong D_{4,3,-1}$, $G \ncong D_6$ (в последних двух случаях $G' \cong \mathbb{Z}_3$). Остается одна возможность:

$$G \cong A_4 = \langle x, y \mid x = (12)(34),\ y = (123)\rangle.$$

Докажем сначала, что для любых двух тройных циклов d_1, d_2 из A_4 либо d_2d_1, либо $d_2^{-1}d_1$ принадлежат группе Клейна K. Действительно, группа K действует сопряжением транзитивно на четырех силовских 3-подгруппах группы G. Поэтому существует $k \in K$ такое, что либо $d_2 = k^{-1}d_1k$, либо $d_2 = k^{-1}d_1^{-1}k$. В первом случае $d_2^{-1}d_1 = k^{-1}d_1^{-1}kd_1 \in G' = K$, во втором $d_2d_1 = k^{-1}d_1^{-1}kd_1 \in K$. Поэтому можно считать, что α_1 или β_1 лежит в K (если и α_1, и β_1 не лежат в K, то, применяя преобразование φ или φ^{-1}, можно заменить α_1 на $\beta_1\alpha_1$ или $\beta_1^{-1}\alpha_1$ и использовать рассуждение, приведенное выше). Элементы α_1 и β_1 одновременно не лежат в K, иначе было бы $\langle\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\rangle \neq G$. Значит, либо $\alpha_1 \in K$, $\beta_1 \notin K$, либо $\alpha_1 \notin K$, $\beta_1 \in K$.

Так как $(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1) \xrightarrow{\psi\varphi^\varepsilon} ((\alpha_1, \beta_1)^\varepsilon\alpha_1, \alpha_1\beta_1; \gamma_1)$, то ввиду изложенного выше утверждения при подходящем выборе $\varepsilon = \pm 1$, второй случай сводится к первому. Поэтому можно считать, что $|\alpha_1| = 2$, $|\beta_1| = 3$. Но $\mathrm{Aut}(A_4)$ действует транзитивно на множестве пар, в которых первый элемент порядка 2, второй — порядка 3. Следовательно, вектор $(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1)$ эквивалентен вектору $(x, y; [x, y]^{-1})$.

3.3. Действия с данными ветвления $(0 : m_1, \ldots, m_r)$.

Ниже разбираются случаи для возможных порядков групп G и данных ветвлений с $\rho = 0$. Если возникает абелева или диэдральная группа, то мы не будем подробно пояснять, как получаются порождающие векторы из табл. 1. Для абелева случая это можно сделать непосредственно. Для диэдрального случая порождающие векторы ищутся с помощью лемм 3–7. В частности, мы начинаем разбор случаев с $|G| = 6$.

Замечание. Если в данных ветвления для группы G встречается число $n = |G|$, то $G \cong \mathbb{Z}_n$.

1. $|G| = 6$.

В этом случае возможны следующие данные ветвления: $(2^3, 3, 6)$, $(3^2, 6^2)$, $(2, 6^3)$, (2^6), $(2^2, 3^3)$. Для первых трех вариантов $G \cong \mathbb{Z}_6$; для четвертого $G \cong D_3$, так как $\mathbb{Z}_6$ не порождается инволюциями; для пятого возможно $G \cong \mathbb{Z}_6$ и $G \cong D_3$.

2. $|G| = 8$.

Мы воспользуемся тем, что всякая группа порядка 8 либо абелева, либо изоморфна D_4 или Q_8.

2.1. $(2^2, 8^2)$. Тогда $G \cong \mathbb{Z}_8$.

2.2. $(2^4, 4)$. Тогда G неабелева, так как в абелевой группе произведение элементов порядка 2 не будет элементом порядка 4. Далее, $G \ncong Q_8$, так как в Q_8 есть только один элемент порядка 2 и, следовательно, не выполняется условие (3). Итак, в этом случае возможно только $G \cong D_4$.

2.3. $(2, 4^3)$. Тогда G неабелева и $G \ncong D_4$, так как в D_4 элементы порядка 4 порождают собственную подгруппу. Остается проанализировать группу Q_8.

Пусть (x_1, x_2, x_3, x_4) — порождающий $(2, 4^3)$-вектор для Q_8. Тогда $x = -1$; $x_2, x_3, x_4 \in \{\pm i, \pm j, \pm k\}$. Более того, $x_2^{\pm 1}$, $x_3^{\pm 1}$, $x_4^{\pm 1}$ — различные элементы, так как в противном случае условие (3) нарушалось бы не только в группе Q_8, но и в ее фактор-группе $Q_8/\langle x_1\rangle$. Так как группа $\mathrm{Aut}(Q_8)$ действует транзитивно на множестве всех упорядоченных пар (a, b), где $a, b \in \{\pm i, \pm j, \pm k\}$, $a \neq b^{\pm 1}$, то можно считать, что $x_2 = i$, $x_3 = j$, и тогда $x_4 = (x_1x_2x_3)^{-1} = k$.

Итак, в этом случае всякий порождающий вектор эквивалентен вектору $(-1, i, j, k)$.

3. $|G| = 10$.

3.1. $(5, 10^2)$. Тогда $G \cong \mathbb{Z}_{10}$.

3.2. $(2^2, 5^2)$. В этом случае возможно $G \cong \mathbb{Z}_{10}$ и $G \cong D_5$.

4. $|G| = 12$.

Произвольная группа порядка 12 либо абелева, либо изоморфна D_6, или $D_{4,3,-1}$, или A_4.

4.1. $(3, 12^2)$, $(4, 6, 12)$. Тогда $G \cong \mathbb{Z}_{12}$.

4.2. (6^3). Тогда G абелева, так как в D_6 и $D_{4,3,-1}$ имеется единственная подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}_6$ (и в случае $G \cong D_6$ или $G \cong D_{4,3,-1}$ было бы нарушено условие порождаемости), а в A_4 элементов порядка 6 нет.

4.3. $(2^2, 3, 6)$. В этом случае G абелева или изоморфна D_6, так как в A_4 нет элементов порядка 6, а в $D_{4,3,-1}$ не выполняется условие (3) ввиду единственности инволюции.

4.4. (2^5). Тогда $G \cong D_6$, так как в абелевой группе порядка 12, в A_4 и в $D_{4,3,-1}$ подгруппы, порожденные всеми инволюциями, собственные.

4.5. $(2, 3^3)$. Так как в абелевой группе порядка 12, в D_6 и в $D_{4,3,-1}$ силовские 3-подгруппы единственны и, следовательно, нарушается условие (3), то

$$G \cong A_4 = \langle x, y \mid x = (12)(34),\ y = (123)\rangle.$$

Пусть $a = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ — порождающий $(2, 3^3)$-вектор для A_4. Докажем, что для некоторого вектора (x_1', x_2', x_3', x_4'), эквивалентного вектору a, какие-то две из трех силовских 3-подгрупп $\langle x_2'\rangle$, $\langle x_3'\rangle$, $\langle x_4'\rangle$ совпадают. Предположим, что это не так. Тогда, в частности, подгруппы $\langle x_2\rangle$, $\langle x_3\rangle$, и $\langle x_4\rangle$ различны.

Пусть P — четвертая силовская 3-подгруппа в A_4. Рассмотрим векторы $\theta_3 a = (x_1, x_2, x_4, x_4^{-1}x_3x_4)$ и $\theta_1^{-2}a = (*, x_1x_2x_1^{-1}, x_3, x_4)$. По предположению имеем $\langle x_4^{-1}x_3x_4\rangle \neq \langle x_2\rangle, \langle x_4\rangle$ и, кроме того, $\langle x_4^{-1}x_3x_4\rangle \neq \langle x_3\rangle$, так как $N_{A_4}(\langle x_3\rangle) = \langle x_3\rangle$.

Итак, $\langle x_4^{-1}x_3x_4\rangle = P$. Аналогично $\langle x_1x_2x_1^{-1}\rangle = P$. Но тогда в векторе $\theta_3\theta_1^{-2}a = (*, x_1x_2x_1^{-1}, x_4, x_4^{-1}x_3x_4)$ вторая и четвертая компоненты порождают одну и ту же подгруппу P. Противоречие.

Итак, без ограничения общности можно считать, что в исходном векторе a какие-то две из его компонент x_2, x_3, x_4 порождают одну и ту же силовскую 3-подгруппу. Применяя преобразования вида θ_j, можно считать, что $\langle x_2\rangle = \langle x_3\rangle$. Так как $x_1x_2x_3x_4 = 1$ и $|x_1| = 2$, $|x_2| = |x_3| = |x_4| = 3$, то $x_2 = x_3$. Далее, группа $\mathrm{Aut}(A_4)$ действует транзитивно на множестве упорядоченных пар (g, h), где $|g| = 2$, $|h| = 3$, $g, h \in A_4$. Поэтому исходный вектор эквивалентен вектору $(x, y, y, y^{-2}x)$.

4.6. $(2^2, 4^2)$. Этот случай не реализуется, так как в A_4 и D_6 нет элементов порядка 4, а в $D_{4,3,-1}$ ввиду единственности инволюции не выполняются одновременно условие порождаемости и условие (3). Абелева группа тоже не подходит.

5. $|G| = 15$.

Тогда $G \cong \mathbb{Z}_{15}$ и из двух возможных данных ветвления $(3, 5, 15)$ и (5^3) реализуется только первое.

6. $|G| = 16$.

6.1. $(2, 16^2)$. Тогда $G \cong \mathbb{Z}_{16}$.

6.2. $(2^3, 8)$. Пусть (x_1, x_2, x_3, x_4) — порождающий $(2^3, 8)$-вектор для G. Тогда $|G : \langle x_4\rangle| = 2$. Так как $\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle = G$, то $x_i \notin \langle x_4\rangle$ для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$. С помощью преобразований вида θ_j можно считать, что $x_1 \notin \langle x_4\rangle$, и тогда $G = \langle x_4\rangle \leftthreetimes \langle x_1\rangle$. Группа G неабелева, так как в абелевой группе произведение элементов порядка 2 не является элементом порядка 8. Остаются три возможности: $G \cong D_8$ и $G \cong D_{2,8,\pm 3} = \langle x, y \mid x^2 = y^8 = 1,\ x^{-1}yx = y^{\pm 3}\rangle$. Первая разбирается с помощью лемм 3 и 4.

Рассмотрим вторую и третью возможности. Группа $\mathrm{Aut}(D_{2,8,\pm 3})$ действует транзитивно на множестве всех упорядоченных пар (a, b) таких, что $\langle a, b\rangle = D_{2,8,\pm 3}$, $|a| = 2$, $|b| = 8$. Поэтому можно считать, что $x_1 = x$, $x_4 = y$. Так как равенство $x_1x_2x_3x_4 = 1$ должно выполняться во всех фактор-группах группы G, и, в частности, в $G/\langle x_4\rangle$, то один из элементов x_2, x_3 лежит в $\langle x_4\rangle$, другой —

вне $\langle x_4\rangle$. С помощью преобразования вида $\theta_j^{\pm 1}$ можно считать, что $x_2 \notin \langle x_4\rangle$, $x_3 \in \langle x_4\rangle$. В группе $\langle x_4\rangle = \langle y\rangle$ имеется только один элемент порядка 2 — это y^4. Поэтому $x_3 = y^4$ и, следовательно, $x_2 = x_1^{-1}x_4^{-1}x_3^{-1} = xy^3$. Однако $|xy^3| \neq 2$ в группах $D_{2,8,\pm 3}$, и, значит, в них не существует порождающего $(2^3, 8)$-вектора.

6.3. $(4^2, 8)$. Пусть (x_1, x_2, x_3) — порождающий $(4^2, 8)$-вектор для G. Так как $|G : \langle x_3\rangle| = 2$, то $x_1^2 = x_3^4$ и $x_2^2 = x_3^4$. С учетом равенства $x_2 = x_1^{-1}x_3^{-1}$ отсюда следует, что $x_1^{-1}x_3x_1 = x_3^{-1}$, и мы получаем, что $G \cong \langle x, y \mid y^8 = 1,\ x^2 = y^4,\ x^{-1}yx = y^{-1}\rangle$. Группа $\mathrm{Aut}(G)$ действует транзитивно на множестве упорядоченных пар (u, v) таких, что $\langle u, v\rangle = G$, $|u| = 4$, $|v| = 8$. Поэтому можно считать, что $x_1 = x$, $x_3 = y$, и тогда $x_2 = x^{-1}y^{-1}$.

7. $|G| = 18$.

7.1. $(2, 9, 18)$. Тогда $G \cong \mathbb{Z}_{18}$.

7.2. $(2^3, 3^2)$. Пусть (x_1, x_2, x_3, x_4) — порождающий $(2^2, 3^2)$-вектор для G. Пусть H — некоторая силовская 3-подгруппа в G. С помощью предложения 3 можно определить, что H имеет данные ветвления (3^4) и, следовательно, $H \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Так как $|x_1| = 2$, то $G = H \leftthreetimes \langle x_1\rangle$. Если $\langle x_1\rangle$ действует тривиально на H, то $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$, и этот случай легко отвергается. Если x_1 действует на H обращением элементов, то этот случай разбирается с помощью лемм 3 и 4. Ввиду леммы 1 осталось разобрать случай

$$G = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = [x, y] = 1\rangle \leftthreetimes \langle B\rangle. \tag{11}$$

Пусть (x_1, x_2, x_3, x_4) — порождающий $(2^2, 3^2)$-вектор для G. Так как B, Bx, Bx^2 — элементы порядка 2 в G и они сопряжены (элементами $x^{\pm 1}$), то можно считать, что $x_1 = B$. Тогда $2 = |x_2| = |x_1^{-1}x_4^{-1}x_3^{-1}| = |Bx_4^{-1}x_3^{-1}|$, и отсюда $x_3x_4 = x^i$ для некоторого $i = 0, 1, 2$. Элементы x_3 и x_4 не лежат одновременно в $\langle x\rangle$, так как в противном случае было бы $\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle = \langle x_1, x_3, x_4\rangle = \langle B, x\rangle <$ G. Аналогично x_3 и x_4 не лежат одновременно в $\langle y\rangle$. Исключается и третий случай, когда один из элементов x_3, x_4 лежит в $\langle x\rangle$, а другой — в $\langle y\rangle$, так как нарушалось бы условие $x_3x_4 = x^i$. Поэтому один из элементов x_3, x_4 равен x^py^q, где $p, q \in \{-1, 1\}$. С помощью преобразования θ_3^{-1} и автоморфизма $\overline{\varphi}$: $x \to x^p$, $y \to y^q$, $B \to B$, можно считать, что $x_4 = xy$, и тогда $x_3 = x^{i-1}y^{-1}$. Преобразование θ_2^{-2} позволяет заменить $(i-1)$ на $-(i-1)$. Поэтому с точностью до эквивалентности имеем $x_3 = y^{-1}$ или $x_3 = xy^{-1}$.

Итак, в этом случае получаются два вектора:

$$(B, Bx^{-1}, y^{-1}, xy) \quad \text{и} \quad (B, Bx, xy^{-1}, xy).$$

Эти векторы не эквивалентны, так как в первом есть компонента, лежащая в центре группы G, а во втором нет. Преобразования вида θ_j и автоморфизмы группы G сохраняют число центральных элементов в векторах.

7.3. $(2^3, 6)$. Докажем, что этот случай невозможен. Предположим противное, и пусть (x_1, x_2, x_3, x_4) — порождающий $(2^3, 6)$-вектор для G. Тогда нормализатор инволюции x_4^3 либо совпадает с G, либо индекса 3 в G. Поэтому число инволюций в G либо 1, либо 3. Если среди инволюций x_1, x_2, x_3 есть одинаковые, то очевидно, что $|x_1x_2x_3| = 2$. Последнее противоречит условию $x_1x_2x_3x_4 = 1$, $|x_4| = 6$. Если x_1, x_2, x_3 — три различные инволюции в G, то различными будут также инволюции x_1, $x_2^{x_1}$, $x_3^{x_1}$. Тогда $x_2^{x_1} = x_3$ и $x_3^{x_1} = x_2$ (если бы было $x_i^{x_j} = x_i$ при $i \neq j$, то $|\langle x_i, x_j\rangle| = 4$). Отсюда уже легко следует, что $|x_1x_2x_3| = 2$. Получили противоречие и в этом случае.

7.4. $(3, 6^2)$. Как и в 7.2, устанавливается, что $G = H \leftthreetimes \langle z\rangle$, где $H \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ — силовская 3-подгруппа в G, z — произвольная инволюция в G. Тогда G либо абелева, либо диэдрального типа, либо имеет вид (11). Первый случай разбирается непосредственно. Второй отвергается ввиду отсутствия в такой группе элементов порядка 6. Разберем третий случай.

Пусть (x_1, x_2, x_3) — порождающий $(3, 6^2)$-вектор для группы G из (11). Все элементы порядка 6 в группе G имеют вид $x^i y^j B$, где $i = 0, 1, -1$; $j = -1, 1$. С помощью автоморфизмов $\varphi_{ij} : B \to x^{-i}B,\ y \to y^j,\ x \to x$ они приводятся к элементу yB. Используя φ_{ij} и преобразования вида θ_k, можно считать, что $x_2 = yB$. Тогда элемент x_3 порядка 6 имеет вид $x^p y^q B$, где $p = \pm 1$, $q = \pm 1$ (если $p = 0$, то $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle x_2, x_3 \rangle = \langle y, B \rangle < G$, что невозможно).

Автоморфизмом $x \to x^{-1}$, $y \to y$, $B \to B$ можно добиться, чтобы x_3 равнялось $xy^{\pm 1}B$. Соответственно возникают два порождающих $(3, 6^2)$-вектора: (xy, yB, xyB) и $(x, yB, xy^{-1}B)$. Они не эквивалентны, так как первая компонента первого вектора не является автоморфным образом никакой компоненты второго.

8. $|G| = 20$.

8.1. $(2^3, 5)$ и $(2, 10^2)$. Пусть $H \cong \mathbb{Z}_5$ — единственная силовская 5-подгруппа в G, L — некоторая силовская 2-подгруппа в G. Тогда $G = H \leftthreetimes L$. С помощью метода из п. 2.2 и нашей классификации для групп порядка 4 получаем, что L имеет данные ветвления (2^7) или $(1 : 2^3)$ и, значит, $L \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Так как из трех инволюций в L по крайней мере одна действует тождественно на $H \cong \mathbb{Z}_5$, то $G \cong \mathbb{Z}_{10} \leftthreetimes \mathbb{Z}_2$. Тогда либо $G \cong \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2$, либо $G \cong D_{10}$. В первом случае G имеет данные ветвления $(2, 10^2)$, во втором — $(2^3, 5)$.

8.2. $(4^2, 5)$. Тогда $G \cong \mathbb{Z}_5 \leftthreetimes \mathbb{Z}_4$ и либо $G \cong \mathbb{Z}_{20}$ (что сразу отвергается ввиду (3)), либо $G \cong D_{4,5,-1} = \langle x, y \mid x^4 = y^5 = 1,\ x^{-1}yx = y^{-1} \rangle$, либо $G \cong D_{4,5,2}$. Рассмотрим одновременно второй и третий случаи.

Пусть (x_1, x_2, x_3) — произвольный порождающий $(4^2, 5)$-вектор в G. С помощью $\mathrm{Aut}(G)$ можно считать, что $x_3 = y$. Пусть $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ — образы элементов x_1 и x_2 в $G/\langle y \rangle$. Легко понять, что $|\bar{x}_1| = |\bar{x}_2| = 4$ и $\bar{x}_1\bar{x}_2 = 1$. Отсюда $x_1 = y^i x^\varepsilon$, $x_2 = y^j x^{-\varepsilon}$ для некоторых i, j и $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Преобразование θ_1 заменяет (в частности) ε на $-\varepsilon$. Поэтому можно считать, что $x_1 = y^i x$. Применяя к вектору (x_1, x_2, x_3) автоморфизм, обратный к $\varphi_i : x \to y^i x,\ y \to y$, получим $(4^2, 5)$-вектор $(x, x^{-1}y^{-1}, y)$.

9. $|G| = 24$.

9.1. $(2^3, 4)$. Пусть G — группа порядка 24, имеющая порождающий $(2^3, 4)$-вектор (x_1, x_2, x_3, x_4). Так как произвольная группа порядка 24 разрешима, то в G есть либо нормальная подгруппа индекса 2, либо нормальная подгруппа индекса 3. Последнее, однако, невозможно, так как тогда все элементы x_1, x_2, x_3, x_4 содержались бы в единственной силовской 2-подгруппе и не порождали бы G.

Пусть H — некоторая подгруппа индекса 2 группы G. Ввиду п. 2.2 и нашей классификации для групп порядка 12 получаем, что данные ветвления для H либо (2^5) и $H \cong D_6$, либо $(1 : 2)$ и $H \cong A_4$.

В первом случае $H \cong D_6$ содержит автоморфно допустимую подгруппу $L \cong \mathbb{Z}_3$. Поэтому $L \trianglelefteq G$, $|C_G(L)| = 12$ и $C_G(L) \not\cong D_6$, $C_G(L) \not\cong A_4$. Противоречие.

Рассмотрим второй случай: $H \cong A_4$. Так как инволюции x_1, x_2, x_3 порождают G, то одна их них лежит вне H и тогда $G \cong A_4 \leftthreetimes \mathbb{Z}_2$. Случай $G \cong A_4 \times \mathbb{Z}_2$ невозможен ввиду отсутствия в такой группе элементов порядка 4. По той же причине G не изоморфно расщепляемому расширению A_4 с помощью внутреннего автоморфизма.

Итак, $G \cong S_4$. Так как $|x_1x_2x_3| = 4$ и, значит, $x_1x_2x_3$ — нечетная подстановка, то для инволюций x_1, x_2, x_3 выполняется одно из двух: либо все они транспозиции, либо одна из них — транспозиция, а две другие — инволюции из подгруппы $K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Последнее невозможно, так как тогда $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ содержится в некоторой силовской подгруппе группы S_4.

Далее, все три транспозиции x_1, x_2, x_3 различны (иначе их произведение — транспозиция), и в них входят все символы 1, 2, 3, 4 (иначе они не породят S_4). С помощью преобразований вида θ_j можно добиться, чтобы они имели общий символ. Действительно, если для транспозиций x_1, x_2, x_3 это не так, то какие-то две из них не имеют общих символов. С помощью преобразований вида θ_j можно считать, что это x_1 и x_2. Тогда x_3 имеет общий символ и с x_1, и с x_2. Применяя θ_2, получим инволюции x_1, x_3, $x_3^{-1}x_2x_3$, которые уже имеют один общий символ. Наконец, сопрягая подходящим элементом из S_4, можно считать, что $x_1 = (12)$, $x_2 = (13)$, $x_3 = (14)$, и тогда $x_4 = (4321)$.

9.2. $(3,4,6)$. Этот случай разобран в примере из п. 2.2.

9.3. $(2,6,12)$. Пусть (x_1,x_2,x_3) — порождающий $(2,6,12)$-вектор для G. Так как $|G:\langle x_3\rangle| = 2$, то $x_2^2 \in \langle x_3\rangle$, и поэтому $x_2^2 = x_3^{4\varepsilon}$, где $\varepsilon = \pm 1$. Но $x_2 = x_1^{-1}x_3^{-1}$. Отсюда $x_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}x_3^{-1} = x_3^{4\varepsilon}$, и, следовательно, $x_3^{x_1} = x_3^{-(4\varepsilon+1)}$. Так как $|x_3| = 12$, то возможно только $\varepsilon = 1$. Итак,

$$G = \langle x_1, x_3 \mid x_1^2 = 1,\ x_3^{12} = 1,\ x_1^{-1}x_3x_1 = x_3^{-5}\rangle \cong D_{2,12,-5}.$$

Пусть теперь группа G задана абстрактно как $G = \langle x,y \mid x^2 = 1,\ y^{12} = 1,\ x^{-1}yx = y^{-5}\rangle$. Тогда всякий порождающий $(2,6,12)$-вектор для G автоморфно эквивалентен вектору (x, xy^{-1}, y).

9.4. Данные ветвления $(2,8^2)$, (4^3) и $(3^2,12)$ невозможны. Это доказывается с помощью результатов п. 2.2 и с учетом уже известных данных ветвления для групп порядка 8 и для $\mathbb{Z}_{12}$.

10. $|G| = 32$, $(2,4,16)$.

Как и в случае 9.3, доказывается, что $G \cong \langle x,y \mid x^2 = 1,\ y^{16} = 1,\ x^{-1}yx = y^7\rangle \cong D_{2,16,7}$ и любой порождающий $(2,4,16)$-вектор для G эквивалентен вектору (x, xy^{-1}, y).

11. $|G| = 36$.

11.1. $(2^3,3)$. Пусть (x_1,x_2,x_3,x_4) — произвольный порождающий $(2^3,3)$-вектор для группы G, $H \leqslant G$ — некоторая силовская 3-подгруппа, L — некоторая силовская 2-подгруппа. Ввиду предложения 3 и ранее полученной классификации действий групп порядка 9 и 4, H имеет данные ветвления (3^4), $H \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$; L имеет данные ветвления (2^7) или $(1:2^3)$, $L \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Кроме того, из предложения 4 следует, что $H \trianglelefteq G$. Группа L действует точно на H, иначе существовала бы подгруппа M в G, изоморфная $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$. Такая группа M должна по нашей классификации иметь данные ветвления $(3,6^2)$, что противоречит предложению 3.

Так как с точностью до сопряженности в $GL_2(3)$ есть только одна подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, то отсюда следует, что

$$G = \langle x,y \mid x^3 = y^3 = [x,y] = 1\rangle \rtimes \langle B,A \mid B^2 = A^2 = [B,A] = 1\rangle,$$

где $B^{-1}xB = x^{-1}$, $B^{-1}yB = y$, $A^{-1}xA = x^{-1}$, $A^{-1}yA = y^{-1}$.

Нам понадобятся следующие автоморфизмы группы G:

$$\theta_x : x \to x^{-1};\quad \theta_y : y \to y^{-1};\quad \mu : A \to Ay;\quad \tau : B \to Bx,\ A \to Ax.$$

Множество всех инволюций в G распадается на три орбиты относительно действия группы $\langle \theta_x, \theta_y, \mu, \tau\rangle$: $\{Ax^iy^j\}$, $\{BAy^q\}$ и $\{Bx^p\}$, где i, j, p, q пробегают множество $\{0,1,-1\}$. Произведение любых двух инволюций из одной орбиты лежит в $\langle x,y\rangle$.

Мы утверждаем, что x_1, x_2, x_3 — инволюции из разных орбит. Действительно, если, скажем, x_1 и x_3 из одной орбиты, то $x_2 = x_1x_3(x_4^{-1})^{x_3} \in \langle x,y\rangle$, что невозможно. С помощью преобразований вида θ_j можно считать, что x_1, x_2, x_3 — инволюции из первой, второй и третьей орбит соответственно. Далее, применяя автоморфизм $\tau^{-i}\mu^{-j}$ к вектору (x_1,x_2,x_3,x_4), получим эквивалентный порождающий вектор вида $(A, BAy^n, Bx^m, x^{-m}y^{-n})$. Заметим, что $n \neq 0$ и $m \neq 0$, иначе этот вектор не будет порождающим. С помощью автоморфизмов θ_x и θ_y можно привести этот вектор к вектору $(A, BAy, Bx, x^{-1}y^{-1})$.

11.2. $(2,6^2)$. Пусть (x_1,x_2,x_3) — произвольный порождающий $(2,6^2)$-вектор для G. Как и в случае 11.1, устанавливается, что $G = H\leftthreetimes L$, где $H \cong \mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$, $L \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Разберем три подслучая.

(А) Пусть подгруппа L действует точно на H. Тогда группа G такая же, как в 11.1. В G есть два типа элементов порядка 6: Bx^iy^j и BAx^jy^i, где $i = 0,-1,1$; $j = -1,1$. Так как элементы одного типа не порождают G, то x_2 и x_3 принадлежат разным типам. Применив, если необходимо, θ_2, можно считать, что x_2 — элемент первого типа, x_3 — второго. С помощью автоморфизмов θ_x, θ_y, μ, τ можно перевести любую такую пару (x_2,x_3) в пару (By, BAx) и, значит, получить порождающий $(2,6^2)$-вектор (Axy^{-1}, By, BAx).

(Б) Пусть в L есть инволюция t, действующая тождественно на H, и инволюция z, действующая нетождественно на H. Тогда $G = (H \leftthreetimes \langle z\rangle) \times \langle t\rangle$, где $H = \langle x,y \mid x^3 = y^3 = [x,y] = 1\rangle$, и ввиду леммы 1 либо $z^{-1}xz = x^{-1}$, $z^{-1}yz = y^{-1}$, либо $z^{-1}xz = x^{-1}$, $z^{-1}yz = y$. В первом случае все элементы порядка 6 (в частности, x_2 и x_3) лежат в $H \times \langle t\rangle$ и, значит, не порождают G. Поэтому может реализовываться только второй случай, в котором $G \cong S_3 \times \langle u \mid u^6 = 1\rangle$.

Заметим, что x_1 — нецентральная инволюция в G, иначе было бы $\langle x_1,x_2\rangle \neq G$. Так как все нецентральные инволюции в G автоморфно сопряжены, то можно считать, что $x_1 = (12)$. Далее, из $\langle x_1,x_2\rangle = G$ и $\langle x_1,x_3\rangle = G$ следует, что x_i (при $i = 2,3$) имеет вид $a_iu^{\varepsilon_i}$, где $a_i \neq e$, $\varepsilon_i \in \{-1,1\}$.

Так как $x_1x_2x_3 = 1$, то или a_2, или a_3 будет тройным циклом. С помощью преобразования θ_2 можно считать, что a_2 — тройной цикл, а с помощью $\mathrm{Aut}(G)$ — что $x_2 = (123)u$. Тогда $((12),(123)u,(13)u^{-1})$ — порождающий $(2,6^2)$-вектор для G.

(В) Пусть L действует тождественно на H. Тогда $G \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$, и легко понять, что этот случай невозможен.

11.3. $(3,4^2)$. Пусть (x_1,x_2,x_3) — произвольный порождающий $(3,4^2)$-вектор для G. Пусть H — некоторая силовская 3-подгруппа в G, $L = \langle x_3\rangle \cong \mathbb{Z}_4$ — силовская 2-подгруппа. Как и в 11.1, устанавливается, что $H \cong \mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$, $H \trianglelefteq G$. Докажем, что L действует точно на H. Предположим, что это не так. Тогда элемент x_3^2 лежит в ядре действия и, значит, в центре G. Посчитаем число его неподвижных точек:

$$|T_4^{x_3^2}| = |N_G(\langle x_3^2\rangle)| \cdot \left(\frac{\delta_1}{3} + \frac{\delta_2}{4} + \frac{\delta_3}{4}\right) = 36\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 18$$

(см. определение δ_i в п. 2.3 с учетом того, что $\langle x_2\rangle$ сопряжено с $\langle x_3\rangle$). Однако элемент порядка 2 может иметь максимум десять неподвижных точек (см. замечание (8) и классификацию действий групп порядка 2). Противоречие.

Итак, L действует точно на H, и так как в $GL_2(3)$ есть только один класс сопряженности элементов порядка 4, то

$$G = \langle x,y,C \mid x^3 = y^3 = [x,y] = 1,\ C^4 = 1,\ C^{-1}xC = y^{-1},\ C^{-1}yC = x\rangle.$$

Кроме того, можно считать, что $x_3 = C$. Все элементы порядка 4 в G имеют вид Cx^iy^j или $C^{-1}x^iy^j$, где $i,j \in \{0,-1,1\}$. Элемент x_2 имеет вид $C^{-1}x^iy^j$, иначе элемент $x_1 = (x_2x_3)^{-1} = x^{-j}y^iC^2$ имел бы порядок 2. При этом $x_2 \neq C^{-1}$, иначе x_1 равнялось бы 1. Рассмотрим автоморфизм $\alpha : x \to xy,\ y \to x^{-1}y,\ C \to C$. Он имеет порядок 8 и действует транзитивно на множестве $\langle x,y\rangle\setminus\{1\}$. Применяя его подходящую степень к вектору $(x_1, C^{-1}x^iy^j, C)$, получим вектор $(x_1', C^{-1}x, C)$, где $x_1' = y$ ввиду (3).

11.4. $(3^2,6)$. Так как группа G порядка 36 разрешима, в ней существует нормальная подгруппа H индекса 2 или 3. Первый случай отметается ввиду п. 2.2 и нашей классификации. Поэтому предположим, что $H \trianglelefteq G$, $|G : H| = 3$. Если (в обозначениях предложения 3) $\tau = 0$, то ввиду предложений 3, 4 и нашей классификации либо H имеет данные ветвления (6^3) и тогда $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$, либо

H имеет данные ветвления $(2,3^3)$ и тогда $H \cong A_4$. Если $r > 0$, то H имеет данные ветвления $(1:2)$ и тогда $H \cong A_4$.

Во всяком случае, силовская 2-подгруппа в H изоморфна $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ и автоморфно допустима. Легко установить также, что силовская 3-подгруппа в G изоморфна $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Отсюда $G \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \leftthreetimes (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ и группа $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ действует на $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ с нетривиальным ядром M. Заметим, что $M \ncong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, так как группа $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ не может действовать на T_4 с данными ветвления $(3^2, 6)$ (она не порождается элементами порядка 3). Поэтому $M \cong \mathbb{Z}_3$ и $G = A_4 \times \langle x \mid x^3 = 1 \rangle$.

Так как все элементы порядка 6 в G автоморфно сопряжены элементу $(12)(34)x$, то можно считать, что $x_3 = (12)(34)x$. Так как $|x_1| = 3$ и $\langle x_1, x_3 \rangle = G$, то $x_1 = (ijk)x^l$, $l \in \{0, 1, -1\}$. С помощью автоморфизма $\overline{\varphi} \in \mathrm{Aut}(G)$ такого, что $\overline{\varphi}(x) = x$, $\overline{\varphi}((12)(34)) = (12)(34)$ и $\overline{\varphi}((ijk)x^l) = (123)$, можно считать, что $x_1 = (123)$. Итак, всякий порождающий $(3^2, 6)$-вектор для G эквивалентен вектору $((123), (143)x^{-1}, (12)(34)x)$.

11.5. $(2,4,12)$. Группы с такими данными ветвления не существует: достаточно применить результаты п. 2.2 к подгруппе, порожденной элементом порядка 12, и учесть нашу классификацию.

12. $|G| = 40$, $(2,4,10)$. Пусть (x_1, x_2, x_3) — произвольный порождающий $(2,4,10)$-вектор для G, H — единственная силовская 5-подгруппа в G, L — некоторая силовская 2-подгруппа в G. Тогда $G = H \leftthreetimes L$. Мы утверждаем, что $L \cong D_4$.

Действительно, если $L \ncong D_4$, то ввиду нашей классификации действий групп порядка 8, $L \cong \mathbb{Z}_8$ или $L \cong Q_8$. Так как $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5) \cong \mathbb{Z}_4$, то L действует на H с неединичным ядром. В это ядро обязательно попадает единственная в L инволюция. Тогда она попадает в центр G и является также единственной инволюцией в G. Как и в случае 11.3, с помощью формулы (7) получаем противоречие.

Пусть

$$H = \langle x \mid x^5 = 1 \rangle, \quad L = \langle y, z \mid y^4 = 1,\ z^2 = 1,\ z^{-1}yz = y^{-1} \rangle.$$

Элемент y действует нетривиально на H (в противном случае $|xy| = 20$, что противоречит предложению 6). Заменяя, если надо z на zy или zy^2, можно считать, что z централизует H. Тогда из соотношения $z^{-1}yz = y^{-1}$ следует, что y действует на H как автоморфизм порядка 2. Поэтому

$$G = \langle x, y, z \mid x^5 = 1,\ y^4 = 1,\ z^2 = 1,\ z^{-1}yz = y^{-1},\ y^{-1}xy = x^{-1},\ z^{-1}xz = x \rangle.$$

Нам понадобятся следующие автоморфизмы группы G:

$$\mu_i : x \to x^i \ (i = 1,2,3,4) \quad \text{и} \quad \tau : z \to zy^2.$$

Ввиду теоремы Силова любой элемент порядка 4 из G сопряжен с y. Поэтому можно считать, что $x_2 = y$. Так как $\langle x_1, x_2 \rangle = G$, то $x_1 \notin L$. Все инволюции из G, не лежащие в L, имеют вид $x^i zy^\varepsilon$ ($i = 1,2,3,4$; $\varepsilon = -1, 1$). Автоморфизмами μ_i^{-1} или $\mu_i^{-1}\tau$ они переводятся в xzy (при этом $x_2 = y$ не изменяется). Поэтому можно считать, что $x_1 = xzy$ и тогда $x_3 = (x_1x_2)^{-1} = y^2zx^{-1}$. В итоге мы пришли к порождающему $(2,4,10)$-вектору (xzy, y, y^2zx^{-1}).

13. $|G| = 60$.

13.1. $(2,5^2)$. Предположим, что G — не простая группа. Тогда в G существует нормальная подгруппа индекса либо 2, либо 3, либо 5. Первое невозможно ввиду леммы 8. Второе тоже невозможно ввиду п. 2.2 и перечисленных выше данных ветвления для групп порядка 20. Предположим теперь, что существует $H \trianglelefteq G$, $|H| = 12$. Учитывая данные ветвления для групп порядка 12 и п. 2.2, получаем, что H имеет данные ветвления $(1:2)$ или (2^5). По нашей классификации в первом случае $H \cong A_4$, во втором $H \cong D_6$.

В первом случае обозначим через L подгруппу Клейна в H, во втором случае — циклическую подгруппу порядка 6 в H. В обоих случаях L — характеристическая подгруппа в H, $L \trianglelefteq G$. Пусть M — некоторая силовская 5-подгруппа в G. Тогда $L \leftthreetimes M$ — нормальная подгруппа в G индекса 3 в первом случае и индекса 2 во втором. Обе эти ситуации отвергнуты выше.

Итак, G — простая группа, и, значит, $G \cong A_5$. Пусть (x_1, x_2, x_3) — произвольный порождающий $(2, 5^2)$-вектор для G. Применяя подходящий автоморфизм, можно считать, что $x_2 = (12345)$. Заметим, что силовские 5-подгруппы, порожденные x_2 и x_3, не совпадают, так как $\langle x_2, x_3\rangle = G$. Так как x_2 действует сопряжением на шести силовских 5-подгруппах, стабилизируя $\langle x_2\rangle$ и переставляя по циклу остальные пять, то можно считать, что $x_3 \in \langle(13452)\rangle$. Условию, что $x_1^{-1} = x_2x_3$ — элемент порядка 2, удовлетворяет только $x_3 = (13452)$. Итак, мы получаем порождающий $(2, 5^2)$-вектор $((24)(35), (12345), (13452))$.

13.2. $(2, 3, 15)$. Докажем, что группы порядка 60 с такими данными ветвления не существует. Предположим противное. Тогда G — не простая группа, так как в A_5 нет элементов порядка 15. Поэтому в G есть нормальная подгруппа индекса либо 2, либо 5, либо 3. Первое исключается леммой 8. Второе тоже исключается ввиду п. 2.2 и перечисленных выше данных ветвления для групп порядка 12.

Предположим теперь, что $H \trianglelefteq G$, $|G : H| = 3$. Тогда ввиду п. 2.2 и перечисленных выше данных ветвления для групп порядка 20 получаем, что H имеет данные ветвления $(2^3, 5)$. Поэтому по нашей классификации $H \cong D_{10}$.

Пусть L — характеристическая подгруппа в H порядка 10, M — некоторая силовская 3-подгруппа в G. Тогда $L \trianglelefteq G$ и $L \leftthreetimes M$ — подгруппа индекса 2 в G, что уже отвергнуто выше.

14. $|G| = 72$.

Тогда в G есть нормальная подгруппа индекса 2 или 3.

14.1. $(3^2, 4)$. Такой группы не существует ввиду п. 2.2 и нашей классификации данных ветвления для групп порядков 24 и 36.

14.2. $(2, 3, 12)$. Предположим, что G содержит нормальную подгруппу M индекса 3. По нашей классификации и ввиду п. 2.2 M имеет данные ветвления $(2^3, 4)$, значит, $M \cong S_4$. Так как совершенная нормальная подгруппа всегда выделяется прямым множителем группы, то $G = M \times C_G(M)$. Следовательно, G, как и M, содержит подгруппу индекса 2.

Итак, осталось разобрать случай, когда G содержит подгруппу H индекса 2. С учетом нашей классификации и п. 2.2 H имеет данные ветвления $(3^2, 6)$, $H \cong A_4 \times \mathbb{Z}_3$. Так как G имеет данные ветвления $(2, 3, 12)$, то G порождается некоторыми элементами порядка 2 или 3. Отсюда следует, что $G \cong H \leftthreetimes \mathbb{Z}_2$.

Пусть $G = (A_4 \times \langle x\rangle) \leftthreetimes \langle y\rangle$, где $\langle x\rangle \cong \mathbb{Z}_3$, $\langle y\rangle \cong \mathbb{Z}_2$; $p : A_4 \times \langle x\rangle \to A_4$ — проекция на первый сомножитель. Зададим гомоморфизм $\tau : A_4 \to A_4$, полагая $\tau(a) = p(y^{-1}ay)$ при $a \in A_4$. Этот гомоморфизм является автоморфизмом ввиду y-инвариантности подгруппы Клейна K. Далее, $\langle x\rangle \trianglelefteq G$, так как $\langle x\rangle$ — центр группы H. Отсюда следует, что $|\tau| = 2$.

Ввиду нашей классификации $K \leftthreetimes \langle y\rangle \cong D_4$, значит, τ (как и y) стабилизирует одну из инволюций в K, а две другие переставляет. Поэтому действие инволюции τ на A_4 совпадает с сопряжением A_4 некоторой транспозицией из S_4. Перенумеровывая множество $\{1, 2, 3, 4\}$, можно считать, что эта транспозиция — (12). Далее возможны два подслучая.

(а) $A_4^y = A_4$. Тогда $\langle A_4, y\rangle \cong S_4$. По нашей классификации группа S_4 имеет данные ветвления $(2^3, 4)$, и ввиду п. 2.2 $\langle A_4, y\rangle \trianglelefteq G$. Так как $\langle x\rangle \trianglelefteq G$, то $G = \langle A_4, y\rangle \times \langle x\rangle \cong S_4 \times \mathbb{Z}_3$.

(б) $A_4^y \neq A_4$. Тогда $(123)^y = (123)^{(12)}x^\varepsilon$, где $\varepsilon = \pm 1$. Ввиду $|y| = 2$ и $|x| = 3$ отсюда следует, что $x^y = x$ и $((123)x^\varepsilon)^y = ((123)x^\varepsilon)^{-1}$. Поэтому

$$G = (\langle (12)(34), (123)x^\varepsilon\rangle \leftthreetimes \langle y\rangle) \times \langle x\rangle \cong S_4 \times \mathbb{Z}_3.$$

Итак, в обоих подслучаях можно считать, что

$$G = S_4 \times \langle x \mid x^3 = 1 \rangle.$$

Пусть (x_1, x_2, x_3) — произвольный порождающий $(2,3,12)$-вектор для G. Тогда $|x_1| = 2$, $x_1 \in S_4$, и ввиду $\langle x_1, x_2 \rangle = G$, $|x_2| = 3$ элементы x_1 и x_2 имеют следующий вид: $x_1 = (rs)$, $x_2 = (ijk)x^{\pm 1}$. С помощью $\mathrm{Aut}(G)$ можно считать, что $x_1 = (14)$, $x_2 = (123)x$. Итак, мы получили порождающий $(2,3,12)$-вектор $((14), (123)x, (1324)x^{-1})$.

14.3. $(2,4,6)$. Пусть H — некоторая силовская 3-подгруппа в G, L — некоторая силовская 2-подгруппа в G. Тогда ввиду п. 2.2 и нашей классификации H имеет данные ветвления (3^4), $H \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ и $H \trianglelefteq G$. Так как в L есть элемент порядка 4, то L изоморфна одной из групп $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_8$, Q_8, D_4. Группы $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ нет в нашей классификации, группы $\mathbb{Z}_8$ и Q_8 могут иметь только данные ветвления $(2^2, 8^2)$ и $(2, 4^3)$ соответственно и ввиду п. 2.2 тоже исключаются. Поэтому $L \cong D_4$.

Докажем, что L действует точно на H. Если ядро действия неединично, то в него обязательно попадет центральная инволюция g из L. Тогда $|T_4^g| = |N_G(\langle g \rangle)| \left(\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{4} + \frac{\delta_3}{6}\right)$ (см. п. 2.3) и либо $|T_4^g| = 0$ (если все $\delta_i = 0$), либо $|T_4^g| \geqslant 12$ (если существует $\delta_i = 1$). Но инволюция может иметь только 2, 6 или 10 неподвижных точек (см. нашу классификацию и замечание (8)). Получили противоречие.

Так как по лемме 1 в $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \cong GL_2(3)$ имеется с точностью до сопряженности только одна подгруппа, изоморфная D_4, то

$$\begin{aligned} G = \langle x, y, C, B \mid x^3 = y^3 = [x,y] = 1,\ C^4 = B^2 = 1,\ B^{-1}CB = C^{-1}, \\ C^{-1}xC = y^{-1},\ C^{-1}yC = x,\ B^{-1}xB = x^{-1},\ B^{-1}yB = y \rangle. \end{aligned}$$

Группа G имеет следующие автоморфизмы: $\tau : x \to x^{-1}$, $C \to C^{-1}$; $\mu : C \to Cy$, $B \to Bx$; $\nu : x \to xy^{-1}$, $y \to xy$, $B \to BC$.

Пусть (x_1, x_2, x_3) — произвольный порождающий $(2,4,6)$-вектор для G. Всякий элемент порядка 4 в G имеет вид $C^\varepsilon x^i y^j$, где $\varepsilon = \pm 1$; $i, j \in \{0, 1, -1\}$. Применяя к нему автоморфизм $\mu^{i-j}\widehat{Cy^i}$ при $\varepsilon = 1$ и $\tau\mu^{-i-j}\widehat{Cy^{-i}}$ при $\varepsilon = -1$, получим C. Поэтому можно считать, что $x_2 = C$.

Произвольный элемент порядка 2 в G принадлежит объединению множеств $\{Bx^i, BCx^iy^{-i}, BC^2y^i, BC^3x^iy^i \mid i \in \{0,1,-1\}\}$ и $\{C^2x^iy^j \mid i,j \in \{0,1,-1\}\}$. Для того чтобы $\langle x_1, x_2 \rangle = G$, необходимо, чтобы элемент x_1 принадлежал первому множеству и $i \neq 0$. Все элементы этого множества при $i \neq 0$ автоморфно сопряжены, в чем легко убедиться при помощи автоморфизмов ν и $\widehat{C^2}$. Эти автоморфизмы не изменяют $x_2 = C$.

Итак, можно считать, что $x_1 = Bx$, и мы получаем порождающий $(2,4,6)$-вектор (Bx, C, BCx).

15. $|G| = 120$, $(2,4,5)$. Так как группа порядка 120 не проста, то в G существует собственная нормальная подгруппа H минимального индекса и G/H изоморфна одной из следующих групп: $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$, A_5. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

(a) $G/H \cong \mathbb{Z}_2$. Тогда, с учетом классификации действий групп порядка 60, $H \cong A_5$. Далее мы считаем, что $H = A_5$.

Пусть (x_1, x_2, x_3) — произвольный порождающий $(2,4,5)$-вектор для G. Так как $x_3 \in H$ и $\langle x_1, x_3 \rangle = G$, то $G = H \leftthreetimes \langle x_1 \rangle$. Элемент x_1 действует точно на H, так как в противном случае $G = A_5 \times \mathbb{Z}_2$ и в G не будет элементов порядка 4 (с другой стороны, $x_2 \in G$, $|x_2| = 4$). Так как $\mathrm{Aut}(A_5) = S_5$, то x_1 действует на $H = A_5$ как сопряжение некоторой инволюцией a из S_5. Если $a \in A_5$, то инволюция ax_1 действует тривиально на A_5 и $G = A_5 \times \langle ax_1 \rangle$. Но последнее уже отвергнуто. Поэтому a — транспозиция из S_5 и $G = H \leftthreetimes \langle x_1 \rangle \cong S_5$.

Итак, мы считаем, что $G = S_5$, x_1 — транспозиция, x_3 — цикл длины 5. Сопрягая подходящим элементом из S_5, можно считать, что $x_3 = (12345)$, $x_1 = (1j)$ для некоторого $j \in \{2,3,4,5\}$. Условие, что $x_2 = x_1^{-1}x_3^{-1}$ — элемент порядка 4, удовлетворяется только при $j = 2$ и $j = 5$. Но $(12) = (15)^{x_3}$. Поэтому можно считать, что $x_1 = (12)$, и мы получаем порождающий $(2,4,5)$-вектор $((12),(2543),(12345))$.

(б) $G/H \cong \mathbb{Z}_3$. Ввиду п. 2.2 и известных данных ветвления для групп порядка 40 этот случай невозможен.

(в) $G/H \cong \mathbb{Z}_5$. Этот случай отвергается аналогично случаю (б).

(г) $G/H \cong A_5$. Тогда либо $G \cong A_5 \times \mathbb{Z}_2$, либо $G \cong SL_2(5)$. Первое уже отвергнуто выше. Пусть $G \cong SL_2(5)$. Так как в $SL_2(5)$ имеется только одна инволюция, то $\langle x_1, x_2\rangle = \langle x_2\rangle \neq G$. Противоречие.

16. $|G| = 144$, $(2,3,8)$.

Докажем, что такой группы не существует. Предположим противное. Тогда в G существует нормальная подгруппа индекса 2 или 3. Первое невозможно ввиду п. 2.2 и описанных выше данных ветвления для групп порядка 72. Второе невозможно ввиду леммы 8.

Все случаи разобраны и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д.* Поверхности и разрывные группы. М.: Наука, 1988.
2. *Birman J.* Braids, Links and Mappings Class Groups. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1974. (Ann. Math. Stud.; 82).
3. *Broughton S. A.* Classifying finite group actions on surfaces of low genus // J. Pure Appl. Algebra. 1990. V. 69. P. 233–270.
4. *Greenberg L.* Maximal subgroups and signatures // Discontinuous Groups and Riemann Surfaces. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1974. P. 207–226. (Ann. Math. Stud.; 79).
5. *Harvey J.* Cyclic groups of automorphisms of Riemann surfaces // Quart. J. Math. Oxford. Ser. 2. 1966. V. 17. P. 86–97.
6. *Harvey J.* On branch loci in Teichmüller space // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 153. P. 387–399.
7. *Kuribayashi I., Kuribayashi A.* On automorphism groups of compact Riemann surfaces of genus 4 // Proc. Japan. Acad. Ser. A. Math. Sci. 1986. V. 62, N 2. P. 65–72.
8. *Kuribayashi A., Kimura H.* On automorphism groups of compact Riemann surfaces of genus 5 // Proc. Japan. Acad. Ser. A. Math. Sci. 1987. V. 63, N 4. P. 126–130.
9. *Maclachlan C.* Ph. D. Thesis (ca. 1967).
10. *McBeath A. M.*. The classification of non-euclidean crystallographic groups // Canad. J. Math. 1966. V. 19, N 6. P. 1192–1205.
11. *Nielsen J.* Untersuchungen zur geschlossen zweiseitigen Flächen // Acta Math. 1927. V. 50. P. 264–275.
12. *Singerman D.* Subgroups of Fuchsian groups and finite permutation groups // Bull. London Math. Soc. 1970. V. 2. P. 319–323.
13. *Wiman A.* Über die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlecht $p = 3$, welche eindeutige Transformationen auf such zulassen. Bihang Kongl. Svenska Vedienskaps. Akadsemiens Hadlingar. Stockholm, 1895/96.

г. Новосибирск *Статья поступила 3 декабря 1993 г.*