УДК 510.532

СЖАТЫЕ СИСТЕМЫ ФИНИТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ МНОЖЕСТВ ИЗ КЛАССА Σ_2^0*)

О. В. Кудинов

В статье усилено понятие полной системы финитных аппроксимаций множества $M \in \Sigma_2^0$, введенное автором [1], рассматриваются вопросы существования таких систем «приближений» в зависимости от выбранного класса полных систем финитных аппроксимаций.

Стандартные определения и сведения о классе Σ_2^0 можно найти в [1–5].

Через $\{0, \dots, x\}$ в дальнейшем обозначается соответствующий начальный отрезок множества $\mathbb{N}$, а через $|Y|$ — число элементов конечного множества Y. Напомним, что сильно вычислимая последовательность конечных подмножеств натурального ряда $\{M_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ называется полной системой финитных аппроксимаций (множества $M \subseteq \mathbb{N}$), если выполнено условие:

для любого конечного множества $Y \subset \mathbb{N}$

$$Y \cap M = \varnothing \leftrightarrow \exists^\infty s \quad (Y \cap M_s = \varnothing).$$

Естественно, что под вычислимым классом K полных систем финитных аппроксимаций множеств из класса Δ_2^0 подразумевается двойная сильно вычислимая последовательность конечных множеств $\{H_s^k\}_{k,s\in\mathbb{N}}$ такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$ существует (однозначно определенное и обозначаемое $\lambda k \lim_s H_s^k$) множество $H^k \in \Delta_2^0$, для которого $\{H_s^k\}_{s\in\mathbb{N}}$ является системой финитных аппроксимаций, а для его дополнения $\mathbb{N} \setminus H^k$ такой системой служит $\{\overline{H}_s^k\}$, взятая по правилу $\overline{H}_s^k \leftrightharpoons \{0, \dots, s\} - H_s^k$. Зафиксируем любой такой класс K.

Назовем систему финитных аппроксимаций $\{M_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ множества *сжатой* (относительно класса K), если она полна и для всех $k \in \mathbb{N}$ из $H^k \cap M = \varnothing$ следует, что $\exists^\infty s H_s^k \cap M_s = \varnothing$.

Основным результатом работы является

Теорема. *Пусть K — вычислимый класс полных финитных аппроксимаций множеств из класса Δ_2^0. Тогда у всякого множества $M \in \Sigma_2^0$ существует сжатая (относительно K) система его финитных аппроксимаций.*

Доказательство. Пусть $\{H_s^k\}_{s\in\mathbb{N}}$ — полная система финитных аппроксимаций (из класса K) множества $H^k = \lim_s H_s^k$ (для всех k). Образуем множество $R = \{k \in \mathbb{N} \mid H^k \cap M \neq \varnothing\}$, оно попадает в Σ_2^0. Поскольку у множества $M \oplus R \leftrightharpoons \{2i \mid i \in M\} \cup \{2i+1 \mid i \in R\}$ есть полная система финитных аппроксимаций (см. [1]), из нее можно составить системы $\{M_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ для M и $\{R_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ для R такие, что для любых конечных X, Y имеет место соотношение

$$(X \cap M = \varnothing \& Y \cap R = \varnothing) \leftrightarrow \exists^\infty s \quad (X \cap M_s = \varnothing \& Y \cap R_s = \varnothing).$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-16014).

Теперь будем строить сильно вычислимую последовательность $\{B_{k,s}\}_{k,s\in\mathbb{N}}$, для которой выполняются свойства:

а) $\forall k \forall s \quad B_{k+1,s} \subseteq B_{k,s}$,

б) $\{B_{k,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ — полная система финитных аппроксимаций множества M.

Параллельно строятся вспомогательные функции $\text{сч}(x,i,s) \leftrightharpoons |\{j < s \mid x \notin B_{i-1,j}\}|$ и $r(x,i,k,s)$; последняя неформально означает число попыток смещения числа x из $\{B_{i,s'}\}_{s'\leqslant s}$ при удовлетворении k-го условия

$$H^k \cap M = \varnothing \to \exists^\infty s\,(B_{i,s} \cap H^k_s = \varnothing).$$

С самого начала мы полагаем $B_{0,s} \leftrightharpoons M_s$ для всех s.

Опишем пошаговую конструкцию.

Шаг 0. Для всех $i \geqslant 1$ полагаем $B_{i,0} \leftrightharpoons M_0$ — и для всех k, x — $r(x,i,k,0) \leftrightharpoons 0$.

Шаг $s > 0$. Для чисел $1 \leqslant i \leqslant s$ последовательно проделаем этапы i этого шага $(\ni^s_i)$.

Этап i. Ищем наименьшее $k \leqslant s$, $i \leqslant k$, $k \notin R_s$. Это число *не участвовало в построении* $B_{j,s}$ для $j < i$. Если его нет, то $B_{i,s} \leftrightharpoons B_{i-1,s}$ и для всех x, k

$$r(x,i,k,s) \leftrightharpoons r(x,i,k,s-1);$$

если такое k нашлось, то:

1) в дальнейшем считаем, что k *участвует в построении* $B_{i,s}$;

2) строим множество «смещений» следующим образом:

$$I^s_i \leftrightharpoons \left\{x \leqslant k \mid x \geqslant i,\ \text{сч}(x,i,s) > l \leftrightharpoons 1 + \sum_{m=x}^{s-1} r(x,i,m,s-1)\right\} \cup \{x > k \mid x \in H^k_s\};$$

3) окончательно $B_{i,s} \leftrightharpoons B_{i-1,s} \setminus I^s_i$; для чисел $x \in I^s_i$ полагаем $r(x,i,k,s) \leftrightharpoons r(x,i,k,s-1)+1$, остальные значения r не меняются. Про числа $x \in I^s_i$ будем говорить, что они смещаются k-м условием на этапе i.

Описание этапа i закончено, при $i < s$ переходим к следующему этапу.

В конце шага s для $i > s$ полагаем $B_{i,s} \leftrightharpoons B_{i,s-1}$ и значения функции r не меняем. Переходим к следующему шагу.

Свойство а) построенной системы $\{B_{k,s}\}_{k,s\in N}$ очевидно, полагаем $A_s \leftrightharpoons B_{ss}$ для всех $s \in \mathbb{N}$.

Для установления свойства б) потребуется

Лемма 1. *Для любого $i \geqslant 1$ выполнены условия:*

(А_i) *$\{B_{i,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ является системой финитных аппроксимаций множества M;*

(Б_i) *каждое число $y \in M$ может смещаться на этапах i (различных шагов) только конечное число раз, тем самым определены значения*

$$\hat{r}(y,i,m) \leftrightharpoons \lim_s r(y,i,m,s), \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \hat{r}(y,i,m) < \infty.$$

Доказательство. Пусть i — минимальный контрпример к утверждению леммы, тогда справедливо условие (А_{i-1}). Зафиксируем $y \in M$. Поскольку $\exists L \forall s\ \text{сч}(y,i,s) \leqslant L$, найдется шаг s_0 такой, что при $s \geqslant s_0$ и $k \geqslant y$ число y *не смещается k-м условием на этапе i шага s* (это следует из конструкции I^s_i). Что касается чисел $k < y$, то возможны 2 случая.

1. $y \in M \cap H^k$. Тогда $k \in R$ и, начиная с некоторого $s_1 > s_0$, при $s \geqslant s_1$ такие числа k *не участвуют в построении* $B_{i,s}$.

2. $y \notin H^k$. Тогда выберем $s_2 > s_1$ так, чтобы $y \notin H^k_s$ для всех таких $k < y$ при $s \geqslant s_2$.

Теперь ясно, что $y \notin I_i^s$ при $s \geqslant s_2$, а это значит, что

$$\hat{r}(y,i,m) = r(y,i,m,s_2), \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \hat{r}(y,i,m) < \infty.$$

Тем самым выполнен п. ($Б_i$). Отсюда и из конструкции $\{B_{i,s}\}_{i,s\in\mathbb{N}}$ следует п. ($А_i$). Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $H^k \cap M = \varnothing$ для некоторого $k \geqslant 1$, то*

$$\exists^{\infty} s\,(B_{k,s} \cap H_s^k = \varnothing).$$

Доказательство. Пусть $k \notin R$. Выпишем все элементы из $\mathbb{N} \setminus R$, не большие k: пусть это $k_1 < \dots < k_n = k$. Образуем бесконечное множество S из $s \in \mathbb{N}$ таких, что $k_j \notin R_s$ для $j = 1,\dots,n$ и $x \in R \to x \in R_s$, $x \notin M \to X \notin M_s$ для всякого $x \leqslant k_0$. Найдем шаг s_1 такой, что $H_s^k \cap \{0,\dots,k\} = H^k \cap \{0,\dots,k\}$ при $s \geqslant s_1$; образуем $S_1 = \{s \in S \mid s \geqslant s_1\}$. Если $s \in S_1$ и $x \in H_s^k \cap B_{n,s}$, то невозможно $x > k$ ввиду $x \in I_i^s$ для того этапа $i \leqslant n$, когда в построении $B_{i,s}$ участвовало k. Невозможно также и $x \leqslant k$ ввиду

$$x \in H_s^k \to x \in H^k \to x \notin M \to x \notin M_s \to x \notin B_{n,s}.$$

Поэтому для $s \in S_1$ $H_s^k \cap B_{n,s} = \varnothing$ и тем более $H_s^k \cap B_{k,s} = \varnothing$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *$\{A_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ — полная система финитных аппроксимаций множества M.*

Доказательство почти такое же, как в [1]. Если $x \in M$, то найдем s_0 такой, что $x \in B_{x,s}$ при $s \geqslant s_0$. Тогда на этапах $i > x$ число x не может смещаться ввиду конструкции I_i^s, т. е. $x \in B_{s,s}$ при $s \geqslant s_0$. Лемма 3 доказана.

Из лемм 2 и 3 следует, что $\{A_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ — искомая последовательность. Тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кудинов О. В.* О полных системах финитных аппроксимаций множеств из класса Σ_2^0 // Теория вычислимости и языки спецификаций. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1991. С. 111–116. (Вычислительные системы; 139).
2. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
3. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.
4. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
5. *Robert I.* Soare recursively enumerable sets ans degrees. Berlin; Heidelberg, New York: Springer-Verl., 1986.

г. Новосибирск *Статья поступила 15 декабря 1994 г.*