УДК 517.518.234

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ*)

М. Ю. Васильчик

Описание граничных значений дифференцируемых в различных смыслах функций является традиционной задачей теории функциональных пространств. Исследования этого вопроса, начатые с характеризации следов функций на линейных подпространствах и достаточно гладких многообразиях, доведены к настоящему времени до описания следов на довольно общих подмножествах евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (см., например, [1–4], где приведена подробная библиография). Полученные в этой области результаты находят применение в теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Они позволили, в частности, установить в некоторых случаях в окончательной форме условия разрешимости различных краевых задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных в соответствующих функциональных пространствах (см., например, [5–9] и приведенную там литературу).

Ставшая уже классической постановка задачи о следах функций может быть сформулирована в следующем виде. Пусть G — некоторая область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей ∂G, N — единичная внутренняя нормаль, определенная на ∂G. Требуется описать необходимые и достаточные условия для того, чтобы определенные на ∂G функции $f_0, f_1, \dots, f_{l-1}$ были следами соответствующих производных по нормали некоторой функции $F \in W_p^l(G)$, т. е. чтобы выполнялись равенства

$$\left.\frac{\partial^k F}{\partial N^k}\right|_{\partial G} = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, l-1.$$

Эта задача рассматривалась и для других функциональных пространств, например для пространств Бесова и Никольского. В данной статье мы рассматриваем только пространства Соболева.

При $l = 1$ описание следов функций из $W_p^1(G)$ дано Гальярдо [10] для области G с липшицевой границей. Для $l > 1$ и для области с липшицевой границей следы функций охарактеризованы О. В. Бесовым [11]. Несколько более общая ситуация рассмотрена в [12, 13]. В работах [12, 13] описание следов дано с помощью пространств, обобщающих пространства Бесова на границе области. Элементами этих пространств являются не функции, а наборы функций. Так, если $F \in W_p^l(G)$, то элементом такого обобщения пространства Бесова на ∂G будет набор функций $\{D^\alpha F|_{\partial G}\}$, $|\alpha| \leqslant l-1$.

Представляет интерес задача описания граничных свойств функций, определенных в области с кусочно-гладкой границей. В этом случае на гладких

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94–01–00378).

участках границы определены производные по нормали и, следовательно, правомерно рассматривать задачу о следах в постановке, близкой к классической. При этом оказывается, что при наличии на границе нерегулярных точек описание граничного поведения функций существенно зависит от геометрии области. Так, например, если на границе области есть только одна нерегулярная точка — вершина пика, то пространства следов функций класса W_p^1 будут различными для пика, направленного внутрь области, и для пика, направленного наружу.

В данной статье мы рассматриваем задачу о следах функций из пространства Соболева, определенных в области, граница которой состоит из конечного числа гладких $(n-1)$-мерных поверхностей. Для таких областей при дополнительном условии липшицевости границы (отсутствие нулевых углов) задача о следах рассматривалась в [14–16] (см. также [8] и приведенную там литературу). В ряде работ исследованы некоторые случаи областей с кусочно-гладкой нелипшицевой границей. В [17] описано пространство следов для функций из W_p^1, определенных в плоской области с вершинами внешних пиков на границе. В [18–20] получены обратимые характеристики следов функций из W_p^l для плоских областей с вершинами внешних и внутренних пиков на границе. Различные случаи областей, имеющих на границе пики или гребни, рассмотрены в [21–24].

Материал в статье организован следующим образом. В § 1 приводятся некоторые определения, обозначения, вспомогательные сведения и формулируются основные результаты. В § 2 доказывается теорема для пространства W_p^1. В § 3 приводится интегральное представление функций для области с гребнем и рассматриваются некоторые следствия такого представления. В § 4, 5 рассматривается результат для пространств W_p^l, в § 4 — для области с внешним гребнем, в § 5 — для области с внутренним гребнем.

§ 1. Предварительные сведения. Формулировка основных результатов

Через $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, далее везде обозначается m-мерное арифметическое евклидово пространство. Если $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то, как обычно, полагаем $|x| = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$. Для того чтобы выделить группу координат среди координат точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$, мы будем использовать штрихи. Через x' будет обозначаться $(n-1)$-мерная точка, через x'' — $(n-2)$-мерная, через x''' — $(n-3)$-мерная. Таким образом, например, запись (x_1, x'', x_n) означает точку из $\mathbb{R}^n$, где $x'' = (x_2, \ldots, x_{n-1})$. Аналогичного соглашения будем придерживаться и для мультииндексов. Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс длины n, то α' обозначает мультииндекс длины $n-1$, α'' — длины $n-2$ и α''' — мультииндекс длины $n-3$. Полагаем $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Через Q^m обозначаем куб в $\mathbb{R}^m$, $Q^m = \{y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m : 0 < y_j < 1,\ j = 1, 2, \ldots, m\}$.

Если E — некоторая область в $\mathbb{R}^n$, то норму функции $F \in L_p(E)$ будем обозначать $\|F\|_{p,E}$. Норму функции из пространства Соболева $W_p^l(E)$ будем обозначать через $\|F\|_{l,p,E}$. Таким образом,

$$\|F\|_{l,p,E} = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \|D^\alpha F\|_{p,E}.$$

Здесь через D^α обозначена производная $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Эту же производную будем иногда записывать $D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$.

Пусть G — некоторая область в $\mathbb{R}^n$ с границей ∂G. $(n-1)$-мерную поверхностную меру на ∂G обозначаем через $d\Sigma(x)$ или просто $d\Sigma$.

Пусть на ∂G почти всюду в смысле $(n-1)$-мерной поверхностной меры определен единичный вектор внутренней нормали N. Положим для $x \in \partial G$

$$\rho(x) = \sup\{\tau : \tau > 0,\ x + \tau N(x) \in G\}.$$

Для $x,\ y \in \partial G$ полагаем $m(x,y) = \min\{\rho(x), \rho(y)\}$.

Пусть χ — характеристическая функция отрезка $[0,1]$. Положим для $\lambda > 0$, $x,\ y \in \partial G$

$$\sigma_\lambda(x,y) = \chi\left(\frac{|x-y|}{\lambda m(x,y)}\right).$$

При $\lambda = 1$ пишем просто $\sigma(x,y)$.

Через $d(x,y)$ далее будем обозначать внутреннее относительно области G расстояние между точками $x,\ y \in \partial G$, т. е. точную нижнюю грань длин спрямляемых кривых, лежащих в $\overline{G}$ и соединяющих x с y.

Определим область, для которой в работе устанавливаются основные результаты.

Пусть φ_1 и φ_2 — функции из $C^{l+1}([0,1])$, где l — некоторое натуральное число, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\lim_{\tau\to+0}\varphi_i(\tau) = 0, \quad i = 1,2; \tag{1.1}$$

$$\varphi_1(\tau) < \varphi_2(\tau), \quad \tau \in (0,1); \tag{1.2}$$

$$\max_{\tau\in[0,1]}\left|\varphi_i'(\tau)\right| \leqslant 1/2, \quad i = 1,2; \tag{1.3}$$

$$\varphi_2(\tau) > 0 \quad \text{при} \quad \tau \in (0,1); \tag{1.4}$$

$$\text{функции} \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1,\ \varphi' = \frac{d\varphi}{d\tau} \quad \text{возрастают на} \quad (0,1). \tag{1.5}$$

Положим

$$D = \{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \varphi_1(x_2) < x_1 < \varphi_2(x_2),\ x' = (x_2,\dots,x_n) \in Q^{n-1}\},$$

$$Q = \{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : -1 < x_1 < 1,\ -1 < x_2 < 1,\ x'' = (x_3,\dots,x_n) \in Q^{n-2}\}.$$

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей ∂G. Считаем, что ∂G можно покрыть конечным числом окрестностей $\{U_j\}_{j=1}^m$ так, что каждое пересечение $U_j \cap G$ можно C^l-диффеоморфно отобразить либо на область D, либо на область $V = Q \setminus \overline{D}$, либо на полушар $B^+ = \{x = (x_1,\dots,x_n) : |x| < 1,\ x_n > 0\}$, причем в последнем случае части границы $\partial G \cap U_j$ соответствует $(n-1)$-мерный шар $\{y = (y_1,\dots,y_n) : |y| < 1,\ y_n = 0\}$.

Далее везде обозначение $\alpha \sim \beta$ для положительных величин α и β используется в тех случаях, когда отношение α/β отделено от нуля и ограничено сверху постоянными, зависящими только от l, p и области.

Норма в линейном пространстве $TW_p^1(G)$ следов на ∂G функций из $W_p^1(G)$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_{TW_p^1(G)} = \inf\{\|F\|_{1,p,G} : F|_{\partial G} = f\}.$$

Сформулируем результат для $W_p^1(G)$, где G — введенная выше область.

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$\|f\|_{TW_p^1(G)} \sim \left\{\int\limits_{\partial G} |f(x)|^p \rho(x)\, d\Sigma(x)\right\}^{1/p} + \left\{\int\limits_{\partial G}\int\limits_{\partial G} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{d^{n+p-2}(x,y)}\sigma_3(x,y)\, d\Sigma(x) d\Sigma(y)\right\}^{1/p}. \tag{1.6}$$

Опишем границу областей D и $V = Q \setminus \overline{D}$. Границу области D составляют поверхности

$$\Gamma_i = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1 = \varphi_i(x_2),\ x' = (x_2, \ldots, x_n) \in Q^{n-1}\},$$

$$\Gamma_j = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \\ \varphi_1(x_2) < x_1 < \varphi_2(x_2),\ x_j = 0,\ 0 < x_i < 1,\ i = 2, \ldots, n,\ i \neq j\}, \quad (1.7)$$

$$\Gamma_j^1 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \\ \varphi_1(x_2) < x_1 < \varphi_2(x_2),\ x_j = 1,\ 0 < x_r < 1,\ r = 2, \ldots, n,\ r \neq j\},$$

$$\widetilde{\Gamma} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \\ x_2 = 1,\ \varphi_1(1) < x_1 < \varphi_2(1),\ x'' \in Q^{n-2}\},\ i = 1, 2,\ j = 3, \ldots, n.$$

Границу V составляют гиперповерхности (1.7), а также

$$\Gamma_j' = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in (-1, 1) \setminus [\varphi_1(x_2), \varphi_2(x_2)], \\ -1 < x_2 < 1,\ x_j = 0,\ 0 < x_r < 1,\ r = 3, \ldots, n,\ r \neq j\},$$

$$\Gamma_{1j}' = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in (-1, 1) \setminus [\varphi_1(x_2), \varphi_2(x_2)], \\ -1 < x_2 < 1,\ x_j = 1,\ 0 < x_r < 1,\ r = 3, \ldots, n,\ r \neq j\}, \quad (1.8)$$

$$\widetilde{\Gamma}' = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_2 = 1,\ \varphi_1(1) < x_1 < \varphi_2(1), \\ 0 < x_r < 1,\ r = 3, \ldots, j\},\ j = 3, \ldots, n.$$

Определим на Γ_i, $i = 1, 2$, весовые пространства $L_{p,\zeta}(\Gamma_i)$, $W^m_{p,\rho}(\Gamma_i)$, $B^\mu_{p,\rho,\sigma_\lambda}(\Gamma_i)$, где $1 < p < \infty$, $\rho(x)$ и $\sigma_\lambda(x, y)$ определены выше, ζ — некоторая положительная измеримая функция на Γ_i, m — натуральное число, $\mu > 0$ — нецелое число, причем $[\mu] = m - 1$. Функция f принадлежит $L_{p,\zeta}(\Gamma_i)$, если для нее конечна норма

$$\|f\|_{p,\zeta,\Gamma_i} = \left\{ \int\limits_{\Gamma_i} |f(x)|^p \zeta(x)\, d\Sigma(x) \right\}^{1/p}.$$

Функция f принадлежит $W^m_{p,\rho}(\Gamma_i)$, если $g_i(x_2, \ldots, x_n) = g_i(x') = f(\varphi_i(x_2), x')$ на $Q^{n-1} = \{x' = (x_2, \ldots, x_n) : 0 < x_j < 1,\ j = 1, \ldots, n\}$ имеет обобщенные производные до порядка m включительно, суммируемые по Q^{n-1} в степени p с весом $\rho(x)$, т. е. если конечна норма

$$\|f\|_{m,p,\rho,\Gamma_i} = \|g_i\|_{m,p,\rho,Q^{n-1}} = \sum_{|\alpha'| \leqslant m} \left\{ \int\limits_{Q^{n-1}} |D^{\alpha'} g(x')|^p \rho(x)\, dx' \right\}^{1/p}.$$

Функция f принадлежит $B^\mu_{p,\rho,\sigma_\lambda}(\Gamma_i)$, если $g_i(x') = f(\varphi_i(x_2), x') \in W^m_{p,\rho}(Q^{n-1})$ и конечна норма

$$\|f\|_{B^\mu_{p\rho,\sigma_\lambda}(\Gamma_i)} = \|f\|_{m,p,\rho,\Gamma_i} \\ + \sum_{|\alpha'| = m} \left\{ \int\limits_{Q^{n-1}} \int\limits_{Q^{n-1}} \frac{|D^{\alpha'} g(x') - D^{\alpha'} g(y')|^p}{|x' - y'|^{n-1+(\mu-m)p}} \sigma_\lambda(x', y')\, dx' dy' \right\}^{1/p}. \quad (1.9)$$

При $\rho(x) = 1$, $\sigma(x,y) = 1$ пишем просто $L_p(\Gamma_i)$, $W_p^m(\Gamma_i)$, $B_p^\mu(\Gamma_i)$.

Пусть l — некоторое натуральное число. Если $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{l-1}$ — некоторая система функций с общей областью определения, то будем обозначать ее символом $\bar\zeta$. Таким образом, $\bar\zeta = \{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{l-1}\} = \{\zeta_j\}_{j=0}^{l-1}$.

Пусть даны функции s, c, $\psi \in C^l([0,1])$, причем $s - c\psi' \geqslant \varkappa_0 > 0$ на $(0,1)$, где $\varkappa_0 > 0$ — некоторое фиксированное число. Пусть на $[0,1]$ задана также система функций $\bar\zeta = \{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{l-1}\}$, $\zeta_j \in C^{l-j}([0,1])$. Определим на $(0,1)$ функции $L_r(\tau) = L_r(\tau, \bar\zeta)$, $r = 0, 1, \ldots, l-1$, с помощью рекуррентного соотношения (см. лемму 1 из [19]) $L_0 = \zeta_0$ и при $1 \leqslant r \leqslant l-1$

$$L_r = \frac{1}{(s - c\psi')^r}\left[\zeta_r - \sum_{j=1}^{r} C_r^j c^j s^{r-j} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\psi^i}{i!}\frac{d^j}{d\tau^j} R_{(r)r-j+i}\right],$$

где

$$R_{(r)k} = \sum_{i=1}^{r-k-1} (-1)^i L_{k+i}\frac{\psi^i}{i!}, \quad 0 \leqslant k \leqslant r-1.$$

Функции $L_r(\tau) = L_r(\tau, \bar\zeta) = L_r(\tau, \zeta_0, \ldots, \zeta_r)$ линейно выражаются через функции ζ_j, $0 \leqslant j \leqslant r$,

$$L_r(\tau) = \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{r-j} b_{(r)i,j}(\tau)\frac{d^i}{d\tau^i}\zeta_j + \frac{\zeta_r}{(s - c\psi')^r},$$

где функции $b_{(r)i,j}$ имеют ограниченные на $[0,1]$ производные до порядка $l-r$ включительно.

Далее функции L_r будут использоваться в ситуациях, когда $\psi = \varphi_1$ или $\psi = \varphi_2$ и при $\psi = \varphi_i(x_2)$

$$\begin{aligned} s &= s_i(x_2) = -\varphi_i'(x_2)\left(1 + [\varphi_i'(x_2)]^2\right)^{-1/2}, \\ c &= c_i(x_2) = \left(1 + [\varphi_i'(x_2)]^2\right)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

В роли переменной τ выступает x_2, $\zeta_j = \zeta_{(i)j}(x_2, x'')$, $x'' \in Q^{n-2}$, переменные $x_3, \ldots, x_n$ при определении L_r являются параметрами. В этих случаях функции L_r имеют вид

$$\begin{aligned} L_{(i)r}(x', \bar\zeta_{(i)}) &= L_{(i)r}(x_2, x'', \bar\zeta_{(i)}) \\ &= \sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{r-j} b_{(r)k,j}(x_2) D_2^k \zeta_{(i)j}(x') + \frac{\zeta_{(i)r}(x')}{\sqrt{1 + [\varphi_i'(x_2)]^2}}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Пусть $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, $\beta' = (m, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ — мультииндекс. Полагаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{r,\beta'}(x') &= \mathfrak{M}_{r,\beta'}(x', \bar\zeta_{(1)}, \bar\zeta_{(2)}) = D^{\beta'} L_{(2)r}(x', \bar\zeta_{(2)}) \\ &- \sum_{i=0}^{m} C_m^i \sum_{j=r}^{l-i-|\beta''|-1} D_2^i D^{\beta''} L_{(1)j}(x', \bar\zeta_{(1)}) \frac{d^{m-i}}{dx_2^{m-i}}\left[\frac{\varphi(x_2)^{j-r}}{(j-r)!}\right]. \end{aligned} \tag{1.12}$$

При $|\beta'| = m + |\beta''| = 0$ пишем просто $\mathfrak{M}_r(x')$.

Через $\frac{\partial^k}{\partial N_i^k}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0, \ldots, l-1$, будем обозначать операторы

$$\frac{\partial^k}{\partial N_i^k} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j c_i^j s_i^{k-j} \frac{\partial^k}{\partial x_1^j \partial x_2^{k-j}}, \quad i = 1, 2,$$

где c_i и s_i определены в (1.10) и

$$\frac{\partial^k}{\partial N_j^k} = \frac{\partial^k}{\partial x_j^k}, \quad j = 3, \ldots, n, \quad 0 \leqslant k < l - 1.$$

Если функция f_m определена на ∂D (или на ∂V), то ограничение f_m на Γ_j обозначаем $f_{(j)m}$. Таким образом,

$$f_{(j)m} = f_m|_{\Gamma_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad 0 \leqslant m \leqslant l - 1.$$

Введем в рассмотрение функции ($\beta' = (m, \beta'') = (m, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ — мультииндекс):

$$E_{k,\beta'}^{(1,2)} = E_{k,m,\beta''}^{(1,2)} = \varphi^{k+|\beta'|-l} \mathfrak{M}_{r,\beta'}; \tag{1.13}$$

$$E_{k,m,\beta''}^{(i,j)} = \frac{D^{\beta''} \frac{\partial^k}{\partial N_i^k} f_{(j)m} - D^{\beta''} \frac{\partial^m}{\partial N_j^m} f_{(i)k}}{x_j + x_1 - \varphi_i(x_2)} \tag{1.14}$$

при $i = 1, 2,\ j = 3, \ldots, n$;

$$E_{k,m,\beta''}^{(i,j)} = \frac{D^{\beta''} \frac{\partial^k}{\partial N_i^k} f_{(j)m} - D^{\beta''} \frac{\partial^m}{\partial N_j^m} f_{(i)k}}{x_i + x_j} \tag{1.15}$$

при $i, j = 3, \ldots, n,\ i \neq j$;

$$T_{k,\beta'} = T_{k,m,\beta''} = x_2^{k+|\beta'|-l} \mathfrak{M}_{r,\beta'}. \tag{1.16}$$

Положим

$$\Theta(\partial D) = \sum_{k+|\beta'|=l-1} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left\| E_{k,m,\beta''}^{(i,j)} \right\|_{p,\zeta,D_{(i,j)}}, \tag{1.17}$$

где $D_{(1,2)} = Q^{n-1}$, $D_{(i,j)} = D$ при $(i,j) \neq (1,2)$, $i < j$, $\zeta = \varphi$ при $i = 1$, $j = 2$ и $\zeta = 1$ в остальных случаях,

$$\Theta(\partial V) = \sum_{k+|\beta'|=l-1} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \left\| E_{k,m,\beta''}^{(i,j)} \right\|_{p,D} + \|T_{k,\beta'}\|_{p,x_2,Q^{n-1}} \right]. \tag{1.18}$$

В (1.17) и (1.18) $Q^{n-1} = \{x' = (x_2, \ldots, x_n) : 0 < x_j < 1\}$.

Перед тем как сформулировать результаты для W_p^l, сделаем некоторые замечания.

Используя разбиение единицы, изучение граничного поведения функций из $W_p^l(G)$ можно свести к областям, C^l-диффеоморфным D, V или B^+. Последний случай мы рассматривать не будем, поскольку он хорошо известен (см., например, [2]). В первых двух случаях наше рассмотрение ограничивается модельными областями D и V. Описание результатов в общем виде было бы труднообозримым.

Далее, ввиду возможности использовать разбиение единицы, мы можем считать, что все функции, рассматриваемые в D или на границе D, зануляются при $x_j \geqslant a_0 > 0$, $j = 2, \ldots, n$, где $a_0 \in (0,1)$ — некоторое фиксированное число. При рассмотрении области V будем считать, что все функции, рассматриваемые в V или на границе V, обращаются в нуль при $|x_1| > c_0$, где $c_0 \in (0,1)$ и $c_0 > \max\{\varphi_2(1), |\varphi_1(1)|\}$, и при $-1 < x_2 < -a_0$, $x_j > a_0 > 0$, $j = 3, \ldots, n$, где $a_0 \in (0,1)$ — некоторое фиксированное число.

След $F|_{\partial G}$ определим равенством $F|_{\partial G}(x) = f(x)$ в каждой точке $x \in \partial G$, где $f(x)$ существует и где

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_r(x) \cap G|} \int\limits_{B_r(x) \cap G} F(y)\, dy.$$

Здесь $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$, $|A|$ — мера Лебега множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

Сформулируем основные результаты для пространства W_p^l.

Теорема 2. I. *Если $F \in W_p^l(D)$, $l \geqslant 2$, $1 < p < \infty$, то почти всюду на ∂D в смысле $(n-1)$-мерной поверхностной меры на ∂D определены функции*

$$\left.\frac{\partial^k F}{\partial N^k}\right|_{\partial D} = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1, \tag{1.19}$$

для которых выполняются условия

(1) $f_{(i)k} \in B_{p,\rho,\sigma}^{l-k-1/p}(\Gamma_i)$, $i = 1, 2$;

(2) $f_{(j)k} \in B_p^{l-k-1/p}(\Gamma_j)$, $j = 3, \ldots, n$;

(3) $\left.\frac{\partial^k}{\partial N_i^k} f_{(j)m}\right|_{\Gamma_i} = \left.\frac{\partial^m}{\partial N_j^m} f_{(i)k}\right|_{\Gamma_j}$ *при* $k + m \leqslant l - 2$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 3, \ldots, n$, $i \neq j$;

(4) $\Theta(\partial D) < \infty$.

При этом существует постоянная C, зависящая только от l, p и D, такая, что справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=1}^{n} \|f_{(j)k}\|_{B_{p,\rho,\sigma}^{l-k-1/p}(\Gamma_j)} + \Theta(\partial D) \leqslant C \|F\|_{l,p,D}, \tag{1.20}$$

где $\rho(x) = 1$, $\sigma(x, y) = 1$ при $j \geqslant 3$.

II. *Если на ∂D определены функции $f_0, f_1, \ldots, f_{l-1}$, для которых выполнены условия (1)–(4) части I теоремы, то существует функция $F \in W_p^l(D)$ такая, что для нее выполнены равенства (1.19), и для некоторой постоянной C, зависящей только от l, p и области D, справедливо неравенство*

$$\|F\|_{l,p,D} \leqslant C \left\{ \Theta(\partial D) + \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=1}^{n} \|f_{(j)k}\|_{B_{p,\rho,\sigma}^{l-k-1/p}(\Gamma_j)} \right\}, \tag{1.21}$$

где $\rho = 1$, $\sigma = 1$ при $j \geqslant 3$.

Теорема 3. I. *Пусть $F \in W_p^l(V)$, $l \geqslant 2$, $1 < p < \infty$, $V = Q \backslash \overline{D}$. Тогда почти всюду на ∂V в смысле $(n-1)$-мерной поверхностной меры определены функции*

$$\left.\frac{\partial^k F}{\partial N^k}\right|_{\partial V} = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1, \tag{1.22}$$

для которых выполняются условия

(1) $f_{(j)k} \in B_p^{l-k-1/p}(\Gamma_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$;

(2) $\left.\frac{\partial^k}{\partial N_i^k} f_{(j)m}\right|_{\Gamma_i} = \left.\frac{\partial^m}{\partial N_j^m} f_{(i)k}\right|_{\Gamma_j}$ *при* $k + m \leqslant l - 2$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 3, \ldots, n$, $i \neq j$;

(3) $\mathfrak{M}_{r,\beta'}(x', \bar{f}_{(1)}, \bar{f}_{(2)})|_{x_2=0} = 0$, $r + |\beta'| \leqslant l - 2$;

(4) $\Theta(\partial V) < \infty$.

При этом существует постоянная C, зависящая только от l, p и области V, такая, что справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=1}^{n} \|f_{(j)k}\|_{B_p^{l-k-1/p}(\Gamma_j)} + \Theta(\partial V) \leqslant C \|F\|_{l,p,V}. \tag{1.23}$$

II. *Пусть на ∂V определены функции $f_0, f_1, \dots, f_{l-1}$, $f_{(j)k} = f_k|_{\Gamma_j}$, удовлетворяющие условиям (1)–(4) части I теоремы. Тогда существует функция $F \in W_p^l(V)$ такая, что выполняются равенства (1.22), и для некоторой постоянной C, зависящей только от l, p и V, справедливо неравенство*

$$\|F\|_{l,p,V} \leqslant C\left\{\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{j=1}^{n}\|f_{(j)k}\|_{B_p^{l-k-1/p}(\Gamma_j)} + \Theta(\partial V)\right\}. \tag{1.24}$$

Далее все постоянные, зависящие только от l, p и области, обозначаем C, C_1, $C_2, \dots$, причем в различных неравенствах возможно использование одного обозначения для, вообще говоря, различных по значению констант.

В заключение параграфа приведем известные неравенства, используемые в дальнейшем.

Неравенство Харди. *Пусть $1 < p < \infty$, $r > 0$, $\alpha > 0$. Тогда*

$$\int_0^\alpha \left|\int_0^s f(\tau)\,d\tau\right| \frac{ds}{s^{r+1}} \leqslant \left(\frac{p}{r}\right)^p \int_0^\alpha s^{p-r-1}|f(s)|^p\,ds.$$

Обобщенное неравенство Минковского. *Если $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\psi(x,y)$ — измеримая функция, заданная на $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, то имеет место неравенство*

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy\right\|_{L_p(\mathbb{R}^k)} \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \|f(x,y)\|_{L_p(\mathbb{R}^k)}\,dy.$$

§ 2. Доказательство теоремы 1

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, рассмотрим некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть $x \in \mathbb{R}^k$, $k \geqslant 1$, λ, a, b — положительные числа такие, что $\lambda > k$, $a \leqslant b$. Тогда*

$$\int_{|y-x|<b} \frac{dy}{[|y-x|^2 + a^2]^{\lambda/2}} \sim \frac{1}{a^{\lambda-k}}. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1 просто доказывается переходом к полярным координатам в интеграле.

Лемма 2.2. *Положим $e(x,y) = \min\{\varphi(x_2), \varphi(y_2)\}$. Тогда справедливы неравенства*

$$\frac{4}{5}e(x,y) \leqslant m(x,y) \leqslant \sqrt{5}\,e(x,y). \tag{2.2}$$

Доказательство. Положим $\varkappa_i = \varkappa_i(x_2) = \left(1 + [\varphi_i'(x_2)]^2\right)^{-1/2}$. Пусть $x \in \Gamma_1$. Тогда величина $\rho(x)$ определяется из равенства

$$\varphi_1(x_2) + \rho(x)\varkappa_1(x_2) = \varphi_2\big(x_2 - \rho(x)\varkappa_1(x_2)\varphi_1'(x_2)\big). \tag{2.3}$$

Запишем правую часть (2.3) в виде

$$\varphi_2(x_2 - \rho\varkappa_1\varphi_1') = \varphi_2(x_2) + \int\limits_{x_2}^{x_2-\varkappa_1\rho\varphi_1'} \varphi_2'(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда, из (2.3) и условий (1.1)–(1.5) на φ_1 и φ_2 следует

$$\frac{4}{5}\varphi(x_2)\varkappa_1(x_2) < \rho(x) < 2\varphi(x_2)\varkappa_1(x_2).$$

Такие же неравенства теми же рассуждениями получаются и для $x \in \Gamma_2$ с заменой $\varkappa_1$ на $\varkappa_2$. Учитывая условия (1.3), получаем

$$\frac{4}{5}\varphi(x_2) < \rho(x) < \sqrt{5}\,\varphi(x_2). \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует неравенство (2.2). Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Положим*

$$\{f\}_{i,j}^{(k)} = \int\limits_{\Gamma_i}\int\limits_{\Gamma_j} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+p-2}}\sigma_k(x,y)\,d\Sigma(x)d\Sigma(y). \tag{2.5}$$

При $i=j$ пишем просто $\{f\}_i^{(k)}$. Тогда справедливо соотношение

$$\{f\}_i^{(k)} \sim \{f\}_i^{(1)}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Для $x, y \in \Gamma_i$, $i = 1, 2$, имеем

$$|x-y|^2 = |x''-y''|^2 + (x_2-y_2)^2\left[1 + \left(\frac{\varphi_i(x_2)-\varphi_i(y_2)}{x_2-y_2}\right)^2\right],$$

где $x'' = (x_3, \dots, x_n)$, $y'' = (y_3, \dots, y_n)$. Отсюда и из (1.3) следует

$$|x'-y'| \leqslant |x-y| \leqslant \sqrt{2}\,|x'-y'|, \tag{2.7}$$

где $x' = (x_2, \dots, x_n)$, $y' = (y_2, \dots, y_n)$. Из (2.2) и (2.7) вытекают неравенства

$$\chi\left(\frac{|x'-y'|}{e(x,y)}\right) \leqslant \sigma_k(x,y) \leqslant \chi\left(\frac{|x'-y'|}{3ke(x,y)}\right). \tag{2.8}$$

Так как $d\Sigma(x) \sim [\varkappa_i(x_2)]^{-1}\,dx'$ при $x \in \Gamma_i$, то из (2.5), (2.7) и (2.8) следует, что (2.6) будет доказано, если мы установим для любого натурального k неравенство

$$\{g_i\}^{(k)} \leqslant C\{g_i\}^{(1)}, \quad i = 1, 2, \tag{2.9}$$

где

$$\{g_i\}^{(k)} = \int\limits_{Q^{n-1}} dx' \int\limits_{Q^{n-1}} \frac{|g_i(x')-g_i(y')|^p}{|x'-y'|^{n+p-2}}\chi\left(\frac{|x'-y'|}{ke(x,y)}\right) dy' \tag{2.10}$$

и $g_i(x') = f(\varphi_i(x_2), x') = f(\varphi_i(x_2), x_2, \dots, x_n)$. Обозначим

$$\tilde\sigma_k(x',y') = \chi\left(\frac{|x'-y'|}{ke(x',y')}\right).$$

Запишем $\{g_i\}^{(k)}$ в виде $\{g_i\}^{(k)} = 2J$, где

$$J = \int\limits_0^1 dy_2 \int\limits_0^{y_2} dx_2 \int\limits_{Q^{n-2}} dx'' \int\limits_{Q^{n-2}} \frac{|g_i(x') - g_i(y')|^p}{|x'-y'|^{n+p-2}} \tilde{\sigma}_k(x', y')\, dy''.$$

Пусть $z_j = x' + j(y' - x')/k$, $j = 0, 1, \ldots, k$. Тогда

$$J \leqslant C \sum_{j=0}^{k-1} J_j, \tag{2.11}$$

где

$$J_j = \int\limits_{\{x', y' \in Q^{n-1} : x_2 < y_2\}} dx' \int \frac{|g_i(z_j) - g_i(z_{j+1})|^p}{|x'-y'|^{n+p-2}} \tilde{\sigma}_k(x', y')\, dy'.$$

Сделаем замену переменных: $s' = x' + (y' - x')j/k$, $ds' = (j/k)^{n-1}\, dy'$, $|x' - s'| = |y' - x'| j/k$, $j \geqslant 1$. Так как $x_2 \leqslant s_2 \leqslant y_2$, то $|x' - s'| \leqslant j\varphi(x_2) = je(x', s')$. Имеем

$$J_j \leqslant \left(\frac{j}{k}\right)^{p-1} \int\limits_0^1 dx_2 \int\limits_{x_2}^{x_2 + \frac{j}{k}(1-x_2)} ds_2 \int\limits_{Q^{n-2}} dx'' \int\limits_{Q^{n-2}(x)} \tilde{\sigma}_j(x', s')$$
$$\times \frac{\left|g(s') - g\left(s' + \frac{1}{j}(s' - x')\right)\right|^p}{|x' - s'|^{n+p-2}}\, ds'',$$

где $Q^{n-2}(x) = \{s = (s_3, \ldots, s_n) : x_i(1 - j/k) < s_i < j/k + x_i(1 - j/k)\}$. Меняя порядок интегрирования по x_2 и s_2, по x_i и s_i, $i = 3, \ldots, n$, делая замену переменных $t' = s' + (s' - x')/j$, $dx' = j^{n-1} dt'$, $|x' - s'| = j \cdot |t' - s'|$ и учитывая, что $t \leqslant s_2$, получаем

$$J_j \leqslant C \int\limits_0^1 ds_2 \int\limits_0^{s_2} dt_2 \int\limits_{Q^{n-2}} ds'' \int\limits_{Q^{n-2}} \tilde{\sigma}_1(s', t') \frac{|g(s') - g(t')|^p}{|s' - t'|^{n+p-2}}\, dt''. \tag{2.12}$$

При $j = 0$ делаем только одну замену $t' = x' + (y' - x')/k$ и приходим к оценке (2.13) для J_0. Из (2.11) и (2.12) следует оценка (2.9), что влечет соотношение (2.6). Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. *Пусть*

$$g_i(x') = g_i(x_2, \ldots, x_n) = f(\varphi_i(x_2), x_2, \ldots, x_n) = f(\varphi_i(x_2), x'), \quad i = 1, 2.$$

Положим

$$I_{i1} = \int\limits_{Q^{n-2}} dx'' \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \chi\left(\frac{|x_n - y_n|}{m(x_2, y_2)}\right) \frac{|g_i(x'', x_n) - g_i(x'', y_n)|^p}{|x_n - y_n|^p}\, dx_n dy_n,$$

$$I_{i2} = \int\limits_{Q^{n-2}} dx'' \int\limits_{Q^{n-2}} dy'' \int\limits_0^1 \chi\left(\frac{|x'' - y''|}{m(x, y)}\right) \frac{|g_i(x'', x_n) - g_i(y'', x_n)|^p}{|x'' - y''|^{n+p-3}}\, dx_n.$$

Тогда для любого натурального k справедливо соотношение

$$\{f\}_i^{(k)} \sim I_{i1} + I_{i2}. \tag{2.13}$$

Доказательство леммы 2.4 проводится с использованием леммы 2.1 так же, как и доказательство леммы 2.2 из [24].

Доказательство теоремы 1. Используя разбиение единицы и билипшицевы отображения, доказательство теоремы можно свести к рассмотрению отдельно областей D, V и B^+. Случай области B^+ мы не рассматриваем, так как он хорошо известен. Докажем сначала (1.6) для D. Для области D имеем $d(x, y) \sim |x - y|$. Пусть $F \in W_p^1(D)$ и $F|_{\partial D} = f$. Покажем, что

$$\left\{ \int\limits_{\partial D} |f(x)|^p \rho(x)\, d\Sigma(x) \right\}^{1/p} \leqslant C\|F\|_{1,p,D}. \tag{2.14}$$

Из определения области D следует, что $\rho(x) \sim 1$ при $x \in \Gamma_j$, $j = 3, \ldots, n$, и $\rho(x) \sim \varphi(x_2)$ при $x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Рассмотрим часть границы ∂D — поверхность Γ_i, $i = 1, 2$. Так как $d\Sigma(x) \sim dx_2 \ldots dx_n$ при $x \in \Gamma_i$, то достаточно получить оценку

$$\int\limits_{Q^{n-1}} |g_i(x')|^p \varphi(x_2)\, dx' \leqslant C\|F\|_{1,p,D}, \tag{2.15}$$

где $g_i(x') = f(\varphi_i(x_2), x')$. Пусть $x \in \Gamma_1$, тогда

$$g_1(x') = F(x) - \int\limits_{\varphi_1(x_2)}^{x_1} D_1 F(\tau, x')\, d\tau,$$

где $x = (x_1, x')$. Отсюда, интегрируя по x_1 и применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$|g_1(x')|^p \varphi(x_2) \leqslant C \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x_2)}^{\varphi_2(x_2)} |F(x)|^p\, dx_1 + \int\limits_{\varphi_1(x_2)}^{\varphi_2(x_2)} |D_1 F(x)|^p\, dx_1 \right\}.$$

Интегрируя затем по $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, получаем (2.15). Для Γ_2 оценка (2.15) находится аналогично.

Пусть $j \geqslant 3$. Для определенности считаем $j = n$. Для остальных j рассуждения повторяются дословно. Пусть $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Имеем ($x = (x', x_n)$)

$$|f(x')|^p \leqslant C \left\{ \int\limits_0^1 |F(x)|^p\, dx_n + \int\limits_0^1 x_n^p \left(\frac{1}{x_n} \int\limits_0^{x_n} |D_n F(x', \tau)|\, d\tau \right)^p dx_n \right\}.$$

Интегрируя по $\Gamma_n = \{x' = (x', 0), \varphi_1(x_2) < x_1 < \varphi_2(x_2), 0 < x_j < 1, 2 \leqslant j \leqslant n - 1\}$, получаем (2.15) с $\rho = 1$. Из оценок для Γ_i, $i = 1, 2$, Γ_j, $j = 3, \ldots, n$, следует (2.14).

Рассмотрим интеграл по $\partial D \times \partial D$, который можно представить в виде суммы интегралов по $\Gamma_1 \times \Gamma_1$, $\Gamma_2 \times \Gamma_2$, $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, $\Gamma_1 \times \Gamma_j$, $\Gamma_2 \times \Gamma_j$, $\Gamma_i \times \Gamma_j$, где

$i, j = 3, 4, \ldots, n$, $i \neq j$. Мы получим оценки для интегралов по $\Gamma_1 \times \Gamma_1$, $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, $\Gamma_1 \times \Gamma_n$ и $\Gamma_{n-1} \times \Gamma_n$. Для других случаев рассуждения аналогичны.

Рассмотрим интеграл по $\Gamma_1 \times \Gamma_1$: интеграл $\{f\}_1^{(1)}$ (см. (2.5)). Считаем здесь $g(x') = f(\varphi_1(x_2), x')$. Имеем

$$\{f\}_1^{(1)} \leqslant C\{g\}^{(1)},$$

где $\{g\}^{(1)}$ — интеграл (2.10) с $k = 1$. Для g имеем

$$\begin{aligned}
&|g(x') - g(y')|^p \\
&\leqslant C\Bigg\{\Bigg(\int\limits_{\varphi_1(x_2)}^{\varphi_1(x_2)+|x'-y'|/2} |D_1F(\tau, x')|\,d\tau\Bigg)^p + \Bigg(\int\limits_{\varphi_1(y_2)}^{\varphi_1(y_2)+|x'-y'|/2} |D_1F(\tau, y')|\,d\tau\Bigg)^p \\
&+ \Bigg(\int\limits_0^1 \Bigg|D_1F\left(\varphi_1(z_\tau) + \frac{|x'-y'|}{2}, y' + \tau(x'-y')\right)\varphi_1'(z_\tau)\Bigg|\,d\tau\Bigg)^p |x_2 - y_2|^p \\
&+ \sum_{j=2}^{n}\Bigg(\int\limits_0^1 \Bigg|D_jF\left(\varphi_1(z_\tau) + \frac{|x'-y'|}{2}, y' + \tau(x'-y')\right)\Bigg|\,d\tau\Bigg)^p |x_j - y_j|^p\Bigg\}, \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

где $z_\tau = y_2 + \tau(x_2 - y_2)$. Как и ранее, полагаем $\tilde{\sigma}(x', y') = \chi(|x' - y'|/e(x, y))$. Проинтегрируем последнее неравенство по $Q^{n-1} \times Q^{n-1}$ с весом $\tilde{\sigma}$. Получим

$$\{g\}^{(1)} \leqslant C\left[A_1 + A_2 + A_3 + \sum_{j=2}^{n} A_{4j}\right],$$

где через A_i, $i = 1, 2, 3$, A_{4j}, $j = 2, \ldots, n$, обозначены интегралы, соответствующие слагаемым в правой части (2.16). Оценки для A_1 и A_2 находятся одинаково. Получим оценку для A_1. Имеем

$$A_1 \leqslant C \int\limits_{Q^{n-1}} dx' \int\limits_{Q^{n-1}} \Bigg(\frac{2}{|x'-y'|} \int\limits_{\varphi_1(x_2)}^{\varphi_1(x_2)+|x'-y'|/2} |D_1F(\tau, x')|\,d\tau\Bigg)^p \frac{\tilde{\sigma}(x', y')dy}{|x'-y'|^{n-2}}.$$

Переходя к полярным координатам по y', $y' = 2\rho\omega'$, $|\omega'| = 1$, делая затем замену $\tau = \varphi_1(x_2) + s$, получаем

$$A_1 \leqslant C \int\limits_{Q^{n-1}} dx' \int\limits_0^{\varphi(x_2)} \Bigg(\frac{1}{\rho} \int\limits_0^{\rho} |D_1F(\varphi_1(x_2) + s, x')|\,ds\Bigg)^p d\rho.$$

Применяя неравенство Харди, приходим к оценке

$$A_1 \leqslant C\|F\|_{1,p,D}.$$

Для оценки A_3 применяем сначала обобщенное неравенство Минковского, затем делаем замену переменных $z' = x' + \tau(x' - y')$, $dy' = (1-\tau)^{1-n}\,dz'$. Получаем

$$A_3^{1/p} \leqslant C\int_0^1 \left\{ \int_{Q^{n-1}} dz' \int_{\{|x'-z'|<(1-\tau)\varphi(z_2)\}} \left| D_1 F\left(\varphi_1(z_2) + \frac{|z'-x'|}{2(1-\tau)}, z'\right)\right|^p \frac{dx'}{|x'-z'|^{n-2}} \right\}^{1/p} \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1/p}}.$$

Переходя к полярным координатам по x', $x' = z' + 2(1-\tau)\rho\omega'$, $|\omega'| = 1$, имеем

$$A_3^{1/p} \leqslant C\int_0^1 \left\{ \int_{Q^{n-1}} dz' \int_0^{\varphi(z_2)/2} |D_1 F(\varphi_1(z_2)+\rho, z')|^p\, d\rho \right\}^{1/p} \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1/p}} \leqslant C\|F\|_{1,p,D}.$$

Теми же рассуждениями такая же оценка получается и для интегралов A_{4j}. Таким образом, оценка для интеграла по $\Gamma_1 \times \Gamma_1$ установлена.

Рассмотрим интеграл по $\Gamma_n \times \Gamma_n$. Полагаем $g(x') = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$, $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \Gamma_n$. Пусть $[x', y'] \subset \Gamma_n$. В этих обозначениях

$$|g(x') - g(y')|^p \leqslant C\left\{ \left(\int_0^{|x'-y'|} |D_n F(x', \tau)|\, d\tau \right)^p + \left(\int_0^{|x'-y'|} |D_n F(y', \tau)|\, d\tau \right)^p + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\int_0^1 |D_j F(y' + \tau(x'-y'), |x'-y'|)\, d\tau \right)^p |x_j - y_j|^p \right\}.$$

Интегрируем это неравенство по $\Gamma_n \times \Gamma_n$. Оценка

$$\int_{\Gamma_n}\int_{\Gamma_n} \frac{|\Delta(x', y')g|^p}{|x'-y'|^{n+p-2}}\, dx'dy' \leqslant C\|F\|_{1,p,D}$$

получается теми же рассуждениями, что и оценка для интеграла по $\Gamma_1 \times \Gamma_1$.

Рассмотрим интеграл по $\Gamma_{n-1} \times \Gamma_n$. Ниже $x'' = (x_1, \dots, x_{n-2})$, $x'_{n-1} = (x'', 0, x_n)$, $x'_n = (x'', x_{n-1}, 0)$. Пусть $x'_{n-1} \in \Gamma_{n-1}$, $y'_n \in \Gamma_n$, тогда для $g(x'_{n-1}) = f(x'', 0, x_n)$, $g(y'_n) = f(y'', y_{n-1}, 0)$,

$$\begin{aligned} |g(x'_{n-1}) - g(y'_n)|^p \leqslant C\Bigg\{ & \left(\int_0^{(x_n+y_{n-1})/2} |D_{n-1} F(x'', \tau, x_n)|\, d\tau \right)^p \\ & + \left(\int_0^{x_n} \left| D_n F\left(x'', \frac{x_n + y_{n-1}}{2}, \tau\right)\right| d\tau \right)^p \\ & + \left| g\left(x'', \frac{x_n + y_{n-1}}{2}, 0\right) - g(y'', y_{n-1}, 0)\right|^p \Bigg\} \\ & = C\{h_1(x,y) + h_2(x,y) + h_3(h,y)\}. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Деля на $|x'_{n-1} - y'_n|^{n+p-2}$ и интегрируя (2.17) по $\Gamma_{n-1} \times \Gamma_n$, оценим каждое получившееся в правой части слагаемое. Для первого слагаемого, используя лемму 2.1, имеем неравенство

$$\int\limits_{\Gamma_{n-1}} dx'_{n-1} \int\limits_{\Gamma_n} \frac{h_1(x,y)}{\left|x'_{n-1}-y'_n\right|^{n+p-2}}\, dy'_n$$
$$\leqslant C \int\limits_{\Gamma_{n-1}} dx'_{n-1} \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{(x_n+y_{n-1})/2} |D_{n-1}F(x'',\tau,x_n)|\, d\tau \right)^p \frac{dy_{n-1}}{(x_n+y_{n-1})^p}.$$

Сделаем замену переменной $x_n+y_{n-1}=2x_{n-1}$, $dy_{n-1}=2dx_{n-1}$. Тогда интеграл в правой части последнего неравенства оценится через

$$C \int\limits_{\Gamma_{n-1}} dx'_{n-1} \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{x_{n-1}} \int\limits_0^{x_{n-1}} |D_{n-1}F(x'',\tau,x_n)|\, d\tau \right)^p dx_{n-1}.$$

Применяя неравенство Харди, отсюда получаем

$$\int\limits_{\Gamma_{n-1}} \int\limits_{\Gamma_n} \frac{h_1(x,y)}{\left|x'_{n-1}-y'_n\right|^{n+p-2}}\, dx'_{n-1} dy'_n \leqslant C\|F\|_{1,p,D}.$$

Оценка

$$\int\limits_{\Gamma_{n-1}} \int\limits_{\Gamma_n} \frac{h_2(x,y)}{\left|x'_{n-1}-y'_n\right|^{n+p-2}}\, dx'_{n-1} dy'_n \leqslant C\|F\|_{1,p,D}$$

выводится аналогично.

Рассмотрим интеграл от $h_3(x,y)$. Сделаем замену переменной $x_n+y_{n-1}=2x_{n-1}$. Для $\left|x'_{n-1}-y'_n\right|$ справедливы неравенства

$$\left|x'_{n-1}-y'_n\right|^2 \geqslant |x''-y''|^2+2x_{n-1}^2 \geqslant |x''-y''|^2+\frac{1}{8}(x_{n-1}-y_{n-1})^2 \geqslant \frac{1}{8}\left|x'_n-y'_n\right|^2.$$

Отсюда по уже доказанному следует $((x'_n=(x'',x_{n-1},0))$

$$\int\limits_{\Gamma_{n-1}} dx'_{n-1} \int\limits_{\Gamma_n} \frac{h_3(x,y)}{\left|x'_{n-1}-y'_n\right|^{n+p-2}}\, dy'_n$$
$$\leqslant C \int\limits_{\Gamma_n} dy'_n \int\limits_0^1 dx_2 \int\limits_{\varphi_1(x_2)}^{\varphi_2(x_2)} dx_1 \int\limits_{Q^{n-3}} dx''' \int\limits_{y_n/2}^{y_{n+1}/2} \frac{\left|g(x'_n)-g(y'_n)\right|^p}{\left|x'_n-y'_n\right|^{n+p-2}}\, dx_{n-1}$$
$$\leqslant C \int\limits_{\Gamma_n} dx'_n \int\limits_{\Gamma_n} \frac{\left|g(x'_n)-g(y'_n)\right|^p}{\left|x'_n-y'_n\right|^{n+p-2}}\, dy'_n \leqslant C\|F\|_{1,p,D}.$$

Рассмотрим интеграл по $\Gamma_1\times\Gamma_2$, $x\in\Gamma_2$, $y\in\Gamma_1$. Имеем $(x=(\varphi_2(x_2);x')$, $y=(\varphi_1(y_2),y'))$

$$f(\varphi_2(x_2),x')-f(\varphi_1(y_2),y')=f(\varphi_2(x_2),x')$$
$$-f(\varphi_1(x_2),x')+f(\varphi_1(x_2),x')-f(\varphi_1(y_2),y'). \quad (2.18)$$

Далее, справедливо равенство

$$|x-y|^2 = |x''-y''|^2 + 2(x_2-y_2)\varphi(x_2)\frac{\varphi_1(x_2)-\varphi_1(y_2)}{x_2-y_2}$$
$$+\varphi^2(x_2)+(x_2-y_2)^2\left[1+\left(\frac{\varphi_1(x_2)-\varphi_1(y_2)}{x_2-y_2}\right)^2\right].$$

Отсюда и из (1.3) получаем для $x\in\Gamma_2$, $y\in\Gamma_1$

$$|x-y|^2 \sim |x'-y'|^2+\varphi^2(x_2). \tag{2.19}$$

Аналогично показывается, что

$$|x-y|^2 \geqslant c_0[|x'-y'|^2+(\varphi_1(x_2)-\varphi_1(y_2))^2],$$

где $c_0>0$ — некоторая постоянная. Отсюда и из (2.18), (2.19) вытекает

$$\int\limits_{\Gamma_2}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+p-2}}\sigma(x,y)\,d\Sigma(x)d\Sigma(y)$$
$$\leqslant C\int\limits_{Q^{n-1}}|f(\varphi_2(x_2),x')-f(\varphi_1(x_2),x')|^p$$
$$\times\int\limits_{\{|y'-x'|<m(x,y)\}}\frac{dy'}{[|x'-y'|^2+\varphi^2(x_2)]^{(n+p-2)/2}}\,dx'$$
$$+C\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+p-2}}\sigma(x,y)\,d\Sigma(x)d\Sigma(y). \tag{2.20}$$

Второй интеграл в правой части (2.20) оценивался выше. Первый интеграл с учетом леммы 2.1 не превосходит

$$C\int\limits_{Q^{n-1}}\frac{|f(\varphi_2(x_2),x')-f(\varphi_1(x_2),x')|^p}{\varphi^{p-1}(x_2)}\,dx'$$
$$\leqslant C\int\limits_{Q^{n-1}}\frac{1}{\varphi^{p-1}(x_2)}\left(\int\limits_{\varphi_1(x_2)}^{\varphi_2(x_2)}|D_1F(\tau,x')|\,d\tau\right)^p dx'.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получаем оценку и первого интеграла в правой части (2.20) через $\|F\|_{1,p,D}$ и тем самым оценку интеграла по $\Gamma_1\times\Gamma_2$. Для завершения доказательства первой части теоремы 1 для D нам осталось оценить интеграл по $\Gamma_1\times\Gamma_n$.

Пусть $y_n'=(y_1,\dots,y_{n-1},0)$, $g(x'',x_n)=f(\varphi_1(x_2),x'',x_n)$. Имеем

$$f(\varphi_1(x_2),x')-f(y_n')=\int\limits_0^{x_n}D_nF(y_n',\tau)\,d\tau$$
$$-\int\limits_{\varphi_1(y_2)}^{y_1}D_1F(\tau,y'',x_n)\,d\tau+f(\varphi_1(x_2),x'',x_n)-f(\varphi_1(y_2),y'',x_n).$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{\Gamma_1} d\Sigma(x) \int\limits_{\Gamma_n} \frac{|f(x)-f(y_n')|}{|x-y_n'|^{n+p-2}}\chi\left(\frac{|x-y_n'|}{\rho(x)}\right) dy_n'$$

$$\leqslant C\Bigg\{\int\limits_{\Gamma_n} dy_n' \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{x_n} |D_n F(y_n',\tau)|\, d\tau\right)^p dx_n$$

$$\times \int\limits_{\{|x''-y''|<1\}} \frac{dx''}{\left[|x''-y''|^2+(y_1-\varphi_1(x_2))^2+x_n^2\right]^{(n+p-2)/2}}$$

$$+\int\limits_{\Gamma_n} dy_n' \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\varphi_1(y_2)}^{y_1} |D_1 F(\tau,y'',x_n)|\, d\tau\right)^p dx_n \int\limits_{\{|x''-y''|<1\}} \frac{dx''}{|x-y_n'|^{n+p-2}}$$

$$+\int\limits_0^1 dx_n \int\limits_{\{x'',y''\in Q^{n-2}:|x''-y''|<\rho(x)\}} dx'' \int dy''|g(x'',x_n)-g(y'',x_n)|^p$$

$$\times \int\limits_{\varphi_1(y_2)}^{\varphi_2(y_2)} \frac{\chi\left(\frac{|x''-y''|}{\rho(x)}\right)dy_1}{\left[|x''-y''|^2+(y_1-\varphi_1(x_2))^2+x_n^2\right]^{(n+p-2)/2}}\Bigg\} = C\{I_1+I_2+I_3\}.$$

Интегралы I_1 и I_2 оцениваются по одной схеме: сначала применяется лемма 2.1, а затем неравенство Харди. В результате приходим к неравенству

$$I_i \leqslant C\|F\|_{1,p,D}, \quad i=1,2.$$

Для оценки интеграла I_3 заметим вначале, что в силу условий (1.3)

$$(y_1-\varphi_1(x_2))^2 = \left(y_1-\varphi_1(y_2)+(y_2-x_2)\frac{\varphi_1(y_2)-\varphi_1(x_2)}{y_2-x_2}\right)^2$$
$$\geqslant \frac{1}{2}[(y_1-\varphi_1(y_2))^2-(y_2-x_2)^2].$$

Поэтому

$$|x-y_n'|^2 \geqslant \frac{1}{2}\left[|x''-y''|^2+x_n^2+(y_1-\varphi_1(y_2))^2\right]. \tag{2.21}$$

Отсюда и из леммы 2.1 получаем

$$I_3 \leqslant C \int\limits_{Q^{n-2}} dx'' \int\limits_{Q^{n-2}} dy'' \int\limits_0^1 \frac{|g(x'',x_n)-g(y'',x_n)|^p}{|x''-y''|^{n+p-3}}\chi\left(\frac{|x''-y''|}{km(x,y)}\right) dx_n$$

$$\sim C \int\limits_{Q^{n-2}} dx'' \int\limits_{Q^{n-2}} dy'' \int\limits_0^1 \frac{|g(x'',x_n)-g(y'',x_n)|^p}{|x''-y''|^{n+p-3}}\chi\left(\frac{|x''-y''|}{m(x,y)}\right) dx_n$$

для $k>1$ и $g(x'',x_n)=f(\varphi_1(x_2),x'',x_n)$. Эквивалентность интегралов устанавливается так же, как и в лемме 2.3. Последний интеграл оценивается, согласно лемме 2.4, через интеграл $\{f\}_1^{(1)}$, который, в свою очередь, оценивается через $\|F\|_{1,p,D}$. Таким образом, получена оценка интеграла по $\Gamma_1\times\Gamma_n$, а вместе с тем и первая часть теоремы 1.

Пусть функция f определена на ∂D и величина в правой части (1.6) конечна. Рассмотрим f на Γ_j, $j = 3, \ldots, n$. Для определенности рассмотрим f на Γ_n. Если $f \in B_p^\lambda(\Gamma_n)$, где $\lambda > 0$ — некоторое нецелое число, то продолжить f на все пространство R^{n-1} в общем случае нельзя из-за наличия гребня $\{x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) : \varphi_1(x_2) < x_1 < \varphi_2(x_2), 0 < x_i < 1, i = 2, \ldots, n-1\}$, при $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ достаточно быстро устремляющейся к нулю при $x_2 \to +0$. Но функцию f можно продолжить за область $\Gamma_n \subset \mathbb{R}^{n-1}$ так, чтобы продолженная функция была определена на всех отрезках $[x', y']$, $x', y' \in \Gamma_n$, имеющих длину, сравнимую с $\varphi(x_2) = \varphi_2(x_2) - \varphi_1(x_2)$. Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть $f \in B_p^\lambda(\Gamma_n)$, где $\lambda > 0$ — некоторое число, $m = [\lambda]$, $1 < p < \infty$. Тогда для любых натуральных k, r существует функция f^*, определенная на*

$$\Gamma^*_{n,k,r} = \{x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) : \\ \varphi_1(x_2) - k\varphi(x_2) < x_1 < \varphi_2(x_2) + r\varphi(x_2), 0 < x_i < 1, i = 2, \ldots, n-1\},$$

такая, что $f^*|_{\Gamma_n} = f$ и

$$\|f^*\|_{B_p^\lambda\left(\Gamma^*_{n,k,r}\right)} \leqslant C\|f\|_{B_p^\lambda(\Gamma_n)},$$

где постоянная C зависит только от Γ_n, p, λ, k и r.

Норма в $B_p^\lambda(U)$, $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, определяется следующим образом:

$$\|f\|_{B_p^\lambda(U)} = \|f\|_{W_p^m(U)} + \sum_{|\alpha'|=m} \left\{\int_U \int_U \frac{|\Delta(x', y')D^{\alpha'} f|^p}{|x' - y'|^{n-1+p(\lambda-m)}}\, dx'dy'\right\}^{1/p},$$

где $\Delta(x', y')g = g(x') - g(y')$, если $[x', y'] \subset U$, и $\Delta(x', y')g = 0$, если $[x', y'] \not\subset U$.

Продолжение f^* получается методом Хестенса (см., например, [6]). Укажем здесь кратко, как это можно проделать.

Рассмотрим отображение $\Lambda_1 : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \to (u_1, \ldots, u_{n-1})$, $u_j = x_j$ при $j = 2, \ldots, n-1$, $u_1 = x_1 - \varphi_1(x_2)$. Тогда $g(u') = f(u_1 + \varphi_1(u_2), u'') \in B_p^\lambda(\Lambda_1(\Gamma_n))$. Пусть числа $\beta_0, \ldots, \beta_m$ удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{\beta_j}{(j+1)^q} = (-1)^q, \quad q = 0, 1, \ldots, m.$$

Тогда функция

$$g^*(u) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j g\left(-\frac{u_1}{j+1}, u''\right)$$

определена при $-\varphi(u_2) < u_1 < \varphi(u_2)$ и норма g^* в этой области оценивается через норму g в $B_p^\lambda(\Lambda_1(\Gamma_n))$. Оценка получается дословным повторением рассуждений из [6]. Повторяя процедуру нужное число раз, придем к утверждению теоремы 4.

В силу теоремы 4 считаем, что функция f определена на

$$\Gamma_n^* = \{x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) : \varphi_1 - 3\varphi < x_1 < \varphi_2 + 3\varphi, 0 < x_i < 1\}.$$

Пусть вне Γ_n^* функция f равна нулю. Рассмотрим неотрицательную функцию $K \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $\operatorname{supp} K \subset [1/2, 1]$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\, d\tau = 1$.

Положим

$$\mathscr{K}(x') = \mathscr{K}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \prod_{j=1}^{n-1} K(x_j),$$

$$F_n(x) = F_n(x', x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x' + x_n t')\mathscr{K}(t')\, dt'.$$

Обозначим

$$D_n = \{x = (x', x_n) : x' \in \Gamma_n,\ 0 < x_n < \varphi(x_n)\}. \tag{2.22}$$

Тогда стандартными рассуждениями (см., например, [25]) можно показать, что $F_n \in W_p^1(D_n)$ и

$$\|F_n\|_{1,p,D_n} \leqslant C \int\limits_{\Gamma_n}\int\limits_{\Gamma_n} \frac{|\Delta(x', y')f|^p}{|x'-y'|^{n+p-2}}\, dx' dy'.$$

Продолжение функции f с Γ_1 и Γ_2 строится следующим образом. Пусть $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, $g_i(x') = f(\varphi_i(x_2), x')$, $i = 1, 2$, K — функция, введенная выше, и $\mathscr{K}(x') = \prod\limits_{j=2}^{n} K(x_j)$. Тогда

$$F_{(1)}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g_1(x' + (x_1 - \varphi_1(x_2))t')\mathscr{K}(t')\, dt',$$

$$F_{(2)}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g_2(x' + (\varphi_2(x_2) - x_1)t')\mathscr{K}(t')\, dt'.$$

Оценка для норм $F_{(i)}$, $i = 1, 2$, в $W_p^1(D)$ производится стандартным образом (см., например, [25]). Наличие весов в норме пространств $B^{1-1/p}_{p,\rho,\sigma_3}(\Gamma_i)$ не влияет на вывод оценок.

Рассмотрим функцию

$$\beta(x_1, x_2) = \frac{x_1 - \varphi_1(x_2)}{\varphi(x_2)}$$

и положим

$$F_{12} = \beta F_{(2)} + (1-\beta)F_{(1)}.$$

Из определения β и F_{12} вытекает, что достаточно установить

$$\frac{F_{(2)} - F_{(1)}}{\varphi} \in L_p(D). \tag{2.23}$$

Имеем

$$F_{(2)}(x_1, x') - F_{(1)}(x_1, x')$$

$$= -\int\limits_{x_1}^{\varphi_2(x_2)} D_1 F_{(2)}(\tau, x')\, d\tau - \int\limits_{\varphi_1(x_2)}^{x_1} D_1 F_{(1)}(\tau, x')\, d\tau + f(\varphi_2(x_2), x') - f(\varphi_1(x_2), x').$$

Оценки норм первых двух функций в $W_p^1(D)$ следуют из оценок норм для $F_{(1)}$ и $F_{(2)}$. Оценим интеграл

$$J = \int\limits_D \frac{|f(\varphi_2(x_2), x') - f(\varphi_1(x_2), x')|^p}{\varphi^p(x_2)}\, dx$$

$$= \int\limits_{Q^{n-1}} \frac{|f(\varphi_2(x_2), x') - f(\varphi_1(x_2), x')|^p}{\varphi^{p-1}(x_2)}\, dx'. \tag{2.24}$$

По лемме 2.1 имеем

$$J \leqslant \int\limits_{Q^{n-1}} |f(\varphi_2(x_2), x') - f(\varphi_1(x_2), x')|^p$$

$$\times \int\limits_{\{|y'-x'|<\sqrt{m^2(x_2)-\frac{3}{5}\varphi^2(x_2)}\}} \frac{dy'dx'}{[|y'-x'|^2+\varphi^2(x_2)]^{(n+p-r)/2}}. \tag{2.25}$$

Из (1.3) следуют неравенства

$$\frac{1}{2}[|x'-y'|^2+\varphi^2(x_2)] \leqslant |y'-x'|^2+(\varphi_2(x_2)-\varphi_1(y_2))^2 \leqslant 2[|x'-y'|^2+\varphi^2(x_2)] \tag{2.26}$$

и соотношение

$$|x'-y'|^2 \sim |x'-y'|^2+(\varphi_1(x_2)-\varphi_1(y_2))^2. \tag{2.27}$$

Производя оценку

$$|f(\varphi_2(x_2), x') - f(\varphi_1(x_2), x')|^p$$
$$\leqslant C\{|f(\varphi_2(x_2), x') - f(\varphi_1(y_2), y')|^p + |f(\varphi_1(y_2), y') - f(\varphi_1(x_2), x')|^p\},$$

из (2.25)–(2.27) получаем (учитывая лемму 2.3)

$$J = C\biggl\{\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+p-2}}\sigma_3(x,y)\,d\Sigma(x)d\Sigma(y)$$
$$+\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+p-2}}\sigma(x,y)\,d\Sigma(x)d\Sigma(y)\biggr\}.$$

Таким образом, $F_{12} \in W_p^1(D)$.

Определим функцию

$$\beta_{12n} = \frac{x_1-\varphi_1(x_2)}{x_1-\varphi_1(x_2)+x_n}\cdot\frac{\varphi_2(x_2)-x_1}{x_n+\varphi_2(x_2)-x_1}.$$

Для этой функции имеем $\beta_{12n}|_{\Gamma_n} = 1$, $\beta_{12n}|_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} = 0$.

Положим

$$\Phi = \beta_{12n}F_n + (1-\beta_{12n})F_{12}.$$

Покажем, что $\Phi \in W_p^1(D_n)$, где D_n — область (2.22). Из определения β_{12n} и Φ следует, что достаточно установить

$$\frac{F_n-F_{12}}{x_1-\varphi_1(x_2)+x_n},\ \frac{F_n-F_{12}}{\varphi_2(x_2)-x_1+x_n} \in L_p(D_n).$$

Докажем включение для первой функции. Для второй рассуждения аналогичны.

Учитывая, что $x_n+x_1-\varphi_1(x_2) \sim \bigl[x_n^2+(x_1-\varphi_1(x_2))^2\bigr]^{1/2}$, из леммы 2.1 имеем

$$(x_n+x_1-\varphi_1(x_2))^{-p} \leqslant C\int\limits_{\{|y''-x''|<\gamma\}} \frac{dy''}{\bigl[|x''-y''|^2+(x_1-\varphi_1)^2+x_n^2\bigr]^{(n+p-2)/2}},$$

где $\gamma = [\rho^2(x_2) - (7/25)[(x_1 - \varphi_1(x_2))^2 + x_n^2]]^{1/2}$. Отсюда

$$\int_{D_n} \left| \frac{F_n(x) - F_{12}(x)}{x_1 - \varphi_1(x_2) + x_n} \right|^p dx \leqslant C \Bigg\{ \int_{D_n} \left(\frac{1}{x_n} \int_0^{x_n} |D_n F_n(x', \tau)|\, d\tau \right)^p dx$$

$$+ \int_{D_n} \left(\frac{1}{x_1 - \varphi_1(x_2)} \int_{\varphi_1(x_2)}^{x_1} |D_1 F_{12}(\tau, x')|\, d\tau \right)^p dx$$

$$+ \int_{D_n} dx \int_{\{|y'' - x''| < \gamma\}} \frac{|f(x', 0) - f(\varphi_1(y_2), y'', x_n)|^p dy''}{\left[|x'' - y''|^2 + (x_1 - \varphi_1(y_2))^2 + x_n^2\right]^{(n+p-2)/2}}$$

$$+ \int_{D_n} dx \int_{\{|x'' - y''| < \gamma\}} |f(\varphi_1(y_2), y'', x_n) - f(\varphi_1(x_2), x'', x_n)|^p$$

$$\times [|x'' - y''|^2 + (x_1 - \varphi_1(x_2))^2]^{-(n+p-2)/2}\, dy'' \Bigg\} = C\{L_1 + L_2 + L_3 + L_4\}. \qquad (2.28)$$

При выводе (2.28) мы использовали определение D_n.

Интегралы L_1 и L_2 оцениваются через F_n и F_{12} в $L_p(D_n)$ с помощью неравенства Харди. Для L_3 имеем

$$L_3 < C \int_{\Gamma_n} dy' \int_{\Gamma_1} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+p-2}} \chi\left(\frac{|x - y|}{3\rho(x_2)} \right) d\Sigma(x).$$

Для L_4 имеем оценку $L_4 \leqslant C I_{12}$, где I_{12} — интеграл из леммы (2.4) (при $i = 1$). Но интеграл I_{12} по лемме 2.4 оценивается через $\{f\}_1^{(1)}$ (см. (2.5)). Таким образом,

$$\Phi = \beta_{12n} F_n + (1 - \beta_{12n}) F_{12} \in W_p^1(D_n).$$

Функция Φ совпадает с F_{12} на Γ_i при $0 < x_n < \varphi(x_2)$. Пусть функция $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta(\tau) = 1$ при $(-1/2) < \tau < 1/2$ и $\eta(\tau) = 0$ при $|\tau| > 1$. Рассмотрим функцию $\psi(x_2, x_n) = \eta(x_n/\varphi(x_2))$. Положим

$$F_{12n} = \psi\Phi + (1 - \psi) F_{12}.$$

Покажем, что $F_{12n} \in W_p^1(D)$. Для этого, как легко заметить, достаточно показать, что $\psi(\Phi - F_{12})/\varphi \in L_p(D)$. Имеем

$$\eta|\Phi(x) - F_{12}(x)| \leqslant \int_0^{x_n} |\eta D_n \Phi(x', \tau)|\, d\tau$$

$$+ \int_{\varphi_1(x_2)}^{x_1} |\eta D_1 F_{12}(\tau, x')|\, d\tau + |f(x', 0) - f(\varphi_1(x_2), x')|\eta.$$

Далее оценки получаются так же, как и при доказательстве включения $\Phi \in W_p^1(D_n)$. Таким образом, теорема 1 доказана для областей, диффеоморфных D.

Пусть теперь $F \in W_p^1(V)$, $V = Q \setminus \overline{D}$, $f = F|_{\partial V}$. Так как каждая часть Γ_i' границы ∂V есть часть границы некоторой липшицевой области, содержащейся в V, то включения $f|_{\Gamma_i'} \in B_p^{1-1/p}(\Gamma_i')$, $i = 1, \ldots, n$, — хорошо известный факт. Проверим, что выполняются условия согласования на соседних гранях. Заметим, что для области $V = Q \setminus \overline{D}$ можно считать $\sigma(x, y) = 1$, $\rho(x) = 1$.

Пусть $x \in \Gamma_1$, $y \in \Gamma_2$. Как несложно проверить, $d(x,y) \sim x_2^2 + y_2^2 + |x'' - y''|^2$, где $x'' = (x_3, \ldots, x_n)$, $y'' = (y_3, \ldots, y_n)$. В силу $x_2^2 + y_2^2 \geqslant (x_2 - y_2)^2 \sim (x_2 - y_2)^2 + (\varphi_2(x_2) - \varphi_2(y_2))^2$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d^{n+p-2}(x,y)}\, d\Sigma(x) d\Sigma(y) \leqslant C(I_1 + I_2),$$

где для $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, $y' = (y_2, \ldots, y_n)$ обозначено

$$I_1 = \int\limits_{Q^{n-1}} dx' \int\limits_{Q^{n-1}} \frac{|f(\varphi_2(x_2), x') - f(\varphi_2(y_2), y')|^p}{[|x' - y'|^2 + (\varphi_2(x_2) - \varphi_2(y_2))^2]^{(n+p-2)/2}},$$

$$I_2 = \int\limits_{Q^{n-1}} dx' \int\limits_{Q^{n-1}} \frac{|f(\varphi_1(x_2), x') - f(\varphi_2(x_2), x')|^p}{\left[x_2^2 + y_2^2 + |x'' - y''|^2\right]^{(n+p-2)/2}}.$$

Для I_1 имеем оценку

$$I_1 \leqslant C \int\limits_{\Gamma_2}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+p-2}}\, d\Sigma(x) d\Sigma(y).$$

Интеграл в правой части оценивается через $\|F\|_{1,p,V}$.

Для интеграла I_2, используя лемму 2.1, получаем

$$I_2 \leqslant C \int\limits_{Q^{n-1}} \frac{|f(\varphi_1(x_2), x') - f(\varphi_2(x_2), x')|^p}{x_2^{p-1}}\, dx'.$$

Так как

$$\begin{aligned} &f(\varphi_1(x_2), x') - f(\varphi_2(x_2), x') \\ &\quad= \int\limits_{-x_2}^{\varphi_1(x_2)} D_1 F(\tau, x')\, d\tau + \int\limits_{\varphi_2(x_2)}^{x_2} D_1 F(\tau, x')\, d\tau + f(-x_2, x') - f(x_2, x'), \end{aligned}$$

где

$$f(-x_2, x') = F|_{x_1 = -x_2}, \quad f(x_2, x') = F|_{x_1 = x_2},$$

то

$$\begin{aligned} I_2 \leqslant C \Bigg\{ &\int\limits_{Q^{n-1}} \left[\int\limits_{-x_2}^{\varphi_1(x_2)} |D_1 F(\tau, x')|\, d\tau \right]^p \frac{dx'}{x_2^{p-1}} \\ &+ \int\limits_{Q^{n-1}} \left[\int\limits_{\varphi_2(x_2)}^{x_2} |D_1 F(\tau, x')|\, d\tau \right]^p \frac{dx'}{x_2^{p-1}} + \int\limits_{Q^{n-1}} \left| \frac{f(-x_2, x') - f(x_2, x')}{x_2} \right|^p x_2\, dx' \Bigg\}. \end{aligned}$$

В силу того, что $\varphi_1(x_2) + x_2 \sim x_2$, $x_2 - \varphi(x_2) \sim x_2$, первые два интеграла оцениваются через нормы $D_1 F$ в $L_p(V)$ с помощью неравенства Гёльдера. Третий интеграл оценивается через норму ∇F в пространстве L_p по множеству $Q \setminus \overline{U}$, где $U = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in Q : -x_2 < x_1 < x_2,\ 0 < x_i < 1,\ i = 2, \ldots, n\}$. Это вытекает из результатов работы [15]. (Следует сделать поворот на угол $\pi/4$ в плоскости (x_1, x_2), чтобы получить в точности условия из [15] (см. (2.30).)

Оценка интегралов по $\Gamma_1 \times \Gamma_j$, $\Gamma_2 \times \Gamma_j$, $\Gamma_i \times \Gamma_j$, $i, j = 3, \dots, n$, $i \neq j$, следует из результатов [15]. Для интегралов по $\Gamma_1 \times \Gamma_j$ и по $\Gamma_2 \times \Gamma_j$, $j = 3, \dots, n$, — после распрямления Γ_1 и Γ_2 ($u_j = x_j$, $j = 2, \dots, n$, $u_1 = x_1 - \varphi_1(x_2)$ — для Γ_1 и $u_1 = \varphi_2(x_2) - x_1$ — для Γ_2). Для интегралов по $\Gamma_i \times \Gamma_j$, $i, j \geqslant 3$, непосредственно применяем результаты [15]. Таким образом, в одну сторону теорема 1 для области V доказана.

Пусть функция f определена на ∂V и для нее правая часть (1.6) конечна. Построим функцию $F \in W_p^1(V)$ такую, что $F|_{\partial V} = f$.

Продолжим $f_j = f|_{\Gamma_j}$, $j = 1, \dots, n$, любым способом в $V = Q \setminus \overline{D}$ так, что соответствующее продолжение $F_{(j)}$ будет принадлежать $W_p^1(V)$. Функции $F_{(i)}$ и $F_{(j)}$ при $i, j \geqslant 3$ ($i \neq j$) «склеиваем» в функцию из $W_p^1(V)$, совпадающую с $F_{(i)}$ и $F_{(j)}$ на Γ_i и Γ_j соответственно, используя результаты работы [15]. «Склейку» функций $F_{(1)}$ с $F_{(j)}$ и $F_{(2)}$ с $F_{(j)}$, $j = 3, \dots, n$, производим также по [15], распрямляя поверхности Γ_1 и Γ_2.

Покажем, как получить функцию из $W_p^1(V)$, совпадающую с f_1 и f_2 на Γ_1 и Γ_2 соответственно.

Рассмотрим отображение $x_1 = u_1 - u_2$; $x_2 = u_1 + u_2$, $x_j = u_j$, $j = 3, \dots, n$. Пусть $G_1(u) = F_{(1)}(u_1 - u_2, u_1 + u_2, u'')$, $G_2(u) = F_{(2)}(u_1 - u_2, u_1 + u_2, u'')$. Функция G_1 принадлежит $W_p^1(\Pi_1)$, где $\Pi_1 = \{u = (u_1, \dots, u_n) : -\sqrt{2} < u_1 < 0,\ -\sqrt{2} - u_1 < u_2 < u_1 + \sqrt{2},\ 0 < u_j < 1\}$, $G_2 \in W_p^1(\Pi_2)$, $\Pi_2 = \{u = (u_1, \dots, u_n) : -\sqrt{2} - u_2 < u_1 < u_2 + \sqrt{2},\ -\sqrt{2} < u_2 < 0,\ u_j \in (0, 1)\}$.

Необходимым и достаточным условием, чтобы функция $(u_1/(u_1 + u_2))G_1 + (u_2/(u_1 + u_2))G_2$ принадлежала пространству W_p^1 в области $\{u = (u_1, \dots, u_n) : 0 < u_j < 1,\ j = 3, \dots, n,\ |u_1| + |u_2| < \sqrt{2}\} \setminus \{0 \leqslant u_1 \leqslant \sqrt{2},\ u_2 \leqslant \sqrt{2} - u_1,\ 0 \leqslant u_j \leqslant 1,\ j = 3, \dots, n\}$, является условие [15]

$$I = \int\limits_{Q^{n-2}} du'' \int\limits_0^{\sqrt{2}} du_2 \int\limits_0^{\sqrt{2} - u_2} \left| \frac{G_1(0, u_2, u'') - G_2(u_1, 0, u'')}{u_1 + u_2} \right|^p du_1 < \infty. \tag{2.29}$$

Но, как несложно заметить,

$$\begin{aligned} I = \int\limits_{Q^{n-2}} dx'' \int\limits_0^1 dx_2 \int\limits_{-x_2}^{x_2} \left| \frac{F_{(1)}(-x_2, x') - F_{(2)}(x_2, x')}{x_2} \right|^p dx_1 \\ = \int\limits_{Q^{n-1}} \frac{|F_{(1)}(-x_2, x') - F_{(2)}(x_2, x')|^p}{x_2^{p-1}}\, dx'. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Здесь, чтобы не вводить новых обозначений, мы положили

$$F_{(1)}(-x_2, x') = F_{(1)}|_{x_1 = -x_2}; \quad F_{(2)}(x_2, x') = F_{(2)}|_{x_1 = x_2}.$$

Таким образом, достаточно показать конечность интеграла (2.30). Имеем

$$\begin{aligned} &F_{(1)}(-x_2, x') - F_{(2)}(x_2, x') \\ &= \int\limits_{-x_2}^{\varphi_1(x_2)} D_1 F_{(1)}(\tau, x')\, d\tau - \int\limits_{\varphi_2(x_2)}^{x_2} D_1 F_{(2)}(\tau, x')\, d\tau + f(\varphi_1(x_2), x') - f(\varphi_2(x_2), x'). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.30) следует

$$I \leqslant C\Bigg\{\int\limits_{Q^{n-1}}\Bigg(\int\limits_{-x_2}^{\varphi_1(x_2)}|D_1F(\tau,x')|\,d\tau\Bigg)^p\frac{dx'}{x_2^{p-1}} + \int\limits_{Q^{n-1}}\Bigg(\int\limits_{\varphi_2(x_2)}^{x_2}|D_1F(\tau,x')|\,d\tau\Bigg)^p\frac{dx'}{x_2^{p-1}} + \int\limits_{Q^{n-1}}\frac{|f(\varphi_1(x_2),x')-f(\varphi_2(x_2),x')|^p}{x_2^{p-1}}\,dx'\Bigg\}. \tag{2.31}$$

Первые два интеграла в правой части (2.31) оцениваются с помощью неравенства Гёльдера через $\|D_1F\|_{1,p,V}$. Обозначим третий интеграл в правой части (2.31) через I_3. Из леммы 2.1 следует

$$\frac{1}{x_2^{p-1}} \leqslant C\int\limits_{x_2}^{2x_2}dy_2\int\limits_{\{|y''-x''|<1/2\}}\frac{dy''}{\left[|x''-y''|^2+x_2^2+y_2^2\right]^{(n+p-2)/2}} \leqslant C\int\limits_{\{|y'-x'|<1\}}\frac{dy'}{d^{n+p-2}(x,y)}.$$

Отсюда и из (2.31) получаем

$$I_3 \leqslant C\int\limits_{Q^{n-1}}dx'\int\limits_{Q^{n-1}}\frac{|f(\varphi_1(x_2),x')-f(\varphi_2(y_2),y')|^p}{d^{n+p-2}(x,y)} + C\int\limits_{Q^{n-1}}dx'\int\limits_{Q^{n-1}}\frac{|f(\varphi_2(y_2),y')-f(\varphi_2(x_2),x')|^p}{|x'-y'|^{n+p-2}}\,dy'$$
$$\leqslant C\int\limits_{\Gamma_1}d\Sigma(x)\int\limits_{\Gamma_2}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{d^{n+p-2}(x,y)}\,d\Sigma(y) + C\int\limits_{\Gamma_2}d\Sigma(x)\int\limits_{\Gamma_2}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+p-2}}\,d\Sigma(y).$$

Таким образом, мы доказали конечность I из (2.31) и получили его оценку через правую часть соотношения (1.6). Теорема 1 доказана.

§ 3. Интегральное представление функций

Построим интегральное представление функций класса W_p^l, $l \geqslant 1$, $1 < p < \infty$, определенных в области $G = \{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \psi_1(x_2) < x_1 < \psi_2(x_2),\ 0 < x_j < 1,\ j = 2,\dots,n\}$, где $\psi_1,\ \psi_2 \in C^{l+1}([0,1])$, функция $\psi_2 > 0$ на $(0,1)$ и возрастает, функция ψ_1 либо положительна на $(0,1)$ и возрастает на $(0,1)$, либо отрицательна на $(0,1)$ и убывает. Будем считать, что

$$\max_{\tau\in[0,1]}|\varphi_1'(\tau)| \leqslant 1/2. \tag{3.1}$$

Предполагаем также, что если $\psi = \psi_2 - \psi_1$, то функции ψ и ψ' возрастают на $(0,1)$.

Построение интегрального представления функций в G в основном следует аналогичным построениям из [2, § 7]. Поэтому мы лишь отмечаем основные моменты построения.

Пусть $K \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — неотрицательная функция такая, что $\operatorname{supp} K \subset [1/2, 1]$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\,d\tau = 1.$$

Обозначим через θ функцию Хевисайда, т. е. $\theta(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ и $\theta(\tau) = 1$ при $\tau > 0$. Положим

$$\mathscr{K}(x) = \mathscr{K}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} K(x_j).$$

Рассмотрим функции

$$\Omega_1(x_1, x_2, s_1) = D_{s_1}^l \left[\frac{s_1^{l-1}}{(l-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x_1 - \psi_1(x_2) + u_1}{\psi(x_2)}\right) \theta(u_1 - s_1) \frac{du_1}{\psi(x_2)} \right],$$

$$\Omega_j(x_2, s_j) = D_{s_j}^l \left[\frac{s_j^{l-1}}{(l-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{u_j}{\psi(x_2)}\right) \theta(u_j - s_j) \frac{du_j}{\psi(x_2)} \right], \quad j = 2, \ldots, n.$$

Рассмотрим ядро усреднения

$$\Omega(x, s) = \Omega(x_1, x_2, s) = \prod_{j=1}^{n} \Omega_j(x_1, x_2, s).$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$. Тогда

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \Omega\left(x, \frac{s}{\varepsilon}\right) = \frac{\partial^l}{\partial s_1^l} \left[\frac{s_1^{l-1}}{(l-1)!} \int_{\frac{s_1 + \varepsilon(x_1 - \psi_1(x_2))}{\varepsilon\psi(x_2)}}^{\infty} K(v_1)\,dv_1 \right] \times \prod_{j=2}^{n} \frac{\partial^l}{\partial s_j^l} \left[\frac{s_j^{l-1}}{(l-1)!} \int_{s_j/\varepsilon\psi(x_2)}^{\infty} K(v_j)\,dv_j \right]. \tag{3.2}$$

Пусть $F \in W_p^l(G)$. Далее в этом параграфе мы считаем, что $F(x) = 0$ при $x_j \geqslant c_0 > 0$, где $c_0 \in (0, 1)$ — некоторое число $j = 2, \ldots, n$. Полагаем

$$F_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x + s) \frac{1}{\varepsilon^n} \Omega\left(x, \frac{s}{\varepsilon}\right) ds.$$

При $\delta \to 0$ функции

$$F_\delta = F_1 - \int_{\delta}^{1} \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\,d\varepsilon$$

стремятся к F в $L_p(G)$ [2]. Поэтому мы сразу рассматриваем равенство

$$F(x) = F_1(x) - \int_0^1 \frac{\partial F_\varepsilon(x)}{\partial \varepsilon}\,d\varepsilon = F_1(x) + R(x). \tag{3.3}$$

Вычисляя $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[\varepsilon^{-n}\Omega(x, s/\varepsilon)]$ (см. [2]), получаем

$$R(x) = \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} \Bigg[D_1^l F(z)(z_1 - x_1)^l K\left(\frac{z_1 - x_1)}{\varepsilon\psi(x_2)} + \frac{x_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}\right) \mathscr{L}_1\left(\frac{z' - x'}{\varepsilon\psi(x_2)}\right)$$
$$+ \sum_{j=2}^{n} D_j^l F(z)(z_j - x_j)^l K\left(\frac{z_j - x_j}{\varepsilon\psi(x_2)}\right)$$
$$\times \mathscr{L}_j\left(\frac{z_1 - x_1}{\varepsilon\psi(x_2)} + \frac{x_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}, \frac{z''_{(j)} - x''_{(j)}}{\varepsilon\psi(x_2)}\right)\Bigg] \frac{dz}{\psi^n(x_2)}. \tag{3.4}$$

В (3.4) обозначено $z''_{(j)} = (z_2, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n)$,

$$\mathscr{L}_1\left(\frac{z' - x'}{\varepsilon\psi(x_2)}\right) = \frac{(-1)^l}{(l-1)!} \prod_{j=2}^{n} \Omega_j\left(\frac{z_j - x_j}{\varepsilon\psi(x_2)}\right), \tag{3.5}$$

$$\mathscr{L}_j\left(x, \frac{z'_{(j)} - x'}{\varepsilon\psi(x_2)}\right) = \mathscr{L}_j\left(\frac{x_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)} + \frac{z_1 - x_1}{\varepsilon\psi(x_2)}, \frac{z''_{(j)} - x''_{(j)}}{\varepsilon\psi(x_2)}\right)$$
$$= \frac{(-1)^l}{(l-1)!}\Omega_1\left(x_1, x_2, \frac{z_1 - x_1}{\varepsilon\psi(x_2)} + \frac{x_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}\right) \prod_{i=2}^{n}{}^{(j)} \Omega_i\left(\frac{z_i - x_i}{\varepsilon\psi(x_2)}\right), \tag{3.6}$$

где значок (j) у символа произведения в (3.6) означает, что j-й множитель отсутствует. Далее будем писать

$$\Omega_1\left(x, \frac{z_1 - x_1}{\varepsilon\psi(x_2)}\right) = \Omega_1\left(x_1, x_2, \frac{z_1 - x_1}{\varepsilon\psi(x_2)} + \frac{x_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}\right).$$

Таким образом,

$$R(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} D_j^l F(z)(z_j - x_j)^l \mathscr{L}_j\left(x, \frac{z'_{(j)} - x'_{(j)}}{\varepsilon\psi(x_2)}\right) \frac{dz}{\psi^n(x_2)}. \tag{3.7}$$

Покажем, что интегрирование по z фактически ведется по области G (носитель представления лежит в G (см. [2])).

Для $j = 2, \ldots, n$ имеем

$$x_j + \frac{\varepsilon}{2}\psi(x_2) < z_j < x_j + \varepsilon\psi(x_2). \tag{3.8}$$

Отсюда следует, что $z_j > 0$. (Напомним, что $F(z) = 0$ при $z_j \geqslant c_0 > 0$, $j = 2, \ldots, n$.) Для z_1 из определения Ω_1 имеем

$$(1-\varepsilon)x_1 + \frac{\varepsilon}{2}\psi(x_2) + \varepsilon\psi_1(x_2) < z_1 < (1-\varepsilon)x_1 + \varepsilon\psi(x_2) + \varepsilon\psi_1(x_2).$$

Отсюда и из (3.8) при $j = 2$ вытекает неравенство $z_1 < \psi(x_2) < \psi(z_2)$. Оценивая z_1 снизу, получаем

$$\psi_1(x_2) + \frac{\varepsilon}{2}\psi(x_2) < z_1. \tag{3.9}$$

Если мы покажем, что

$$\psi_1(z_2) \leqslant \psi_1(x_2) + \frac{\varepsilon}{2}\psi(x_2), \tag{3.10}$$

то, учитывая оценку для z_1 сверху, будем иметь $\psi_1(z_2) < z_1 < \psi_2(z_2)$ и, следовательно, с учетом (3.8) покажем, что носитель представления содержится в G.

Если $\psi_1 < 0$ на $(0,1)$, то ψ_1 убывает, поэтому из $x_2 < z_2$ следует $\psi_1(z_2) < \psi_1(x_2) < \psi_1(x_2) + \frac{\varepsilon\psi(x_2)}{2}$.

Если $\psi_1 > 0$ на $(0,1)$, то ψ_1 возрастает и из (3.8) для $j = 2$ и (3.1) следует

$$\psi_1(z_2) < \psi_1(x_2 + \varepsilon\psi(x_2)) = \psi_1(x_2) + \int\limits_{x_2}^{x_2+\varepsilon\psi(x_2)} \psi_1'(\tau)\,d\tau \leqslant \psi_1(x_2) + \frac{\varepsilon}{2}\psi(x_2).$$

Отсюда и из (3.9) следует требуемое утверждение.

Рассмотрим слагаемое $F_1(x)$ из (3.3). Произведя несложные вычисления (см. [2, § 7]), при $\varepsilon = 1$ получаем

$$\Omega_1\left(x_1, x_2, \frac{z_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}\right)$$
$$= -\sum_{m=0}^{l-1} C_l^{m+1}\frac{1}{m!\psi(x_2)}K^{(m)}\left(\frac{z_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}\right)\left(\frac{z_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}\right)^m.$$

Положим ($x' = (x_2, \dots, x_n)$)

$$\prod_{j=2}^{n}\Omega_j\left(\frac{z_j - x_j}{\psi(x_2)}\right) = T\left(\frac{z' - x'}{\psi(x_2)}\right).$$

Тогда, действуя, как в [19], имеем

$$F_1(x) = \sum_{k=0}^{l-1} c_k \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_1^k F(z)\frac{(z_1 - x_1)^k}{k!}K\left(\frac{z_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}\right)T\left(\frac{z' - x'}{\psi(x_2)}\right)\frac{dz}{\psi^n(x_2)}. \tag{3.11}$$

Пусть $h(x_2)$ — некоторая функция, определенная на $(0,1)$. Записывая $z_1 - x_1 = [z_1 - h(x_2)] - [x_1 - h(x_2)]$, из (3.11) выводим

$$F_1(x) = \sum_{m=0}^{l-1} d_m(x', h)\frac{(x_1 - h(x_2))^m}{m!},$$

где

$$d_m = \sum_{j=m}^{l-1} c_{m,j}\int\limits_{\mathbb{R}^n} D_1^j F(z)\frac{(z_1 - h(x_2))^{j-m}}{(j-m)!}K\left(\frac{z_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}\right)T\left(\frac{z' - x'}{\psi(x_2)}\right)\frac{dz}{\psi^n(x_2)}. \tag{3.12}$$

Пусть $d_m(x', h) = a_m(x')$ при $h = 0$, $d_m = b_{(i)m}(x')$ при $h = \psi_i$, $i = 1, 2$. Тогда имеем

$$F_1(x) = \sum_{m=0}^{l-1} a_m(x')\frac{x_1^m}{m!}, \tag{3.13}$$

$$F_1(x) = \sum_{m=0}^{l-1} b_{(i)m}(x')\frac{(x - \psi_i(x_2))^m}{m!}, \quad i = 1, 2. \tag{3.14}$$

Рассмотрим некоторые следствия интегрального представления (3.3).

Лемма 3.1. *Для функций* $b_{(i)r}$, $i = 1, 2$, $r = 0, 1, \ldots, l-1$, *из* (3.14) *справедливы оценки*

$$\|D^{\beta'} b_{(i)r}\|_{p,\psi,Q^{n-1}} \leqslant C\|F\|_{l,p,G} \tag{3.15}$$

при $|\beta'| \leqslant l - r$,

$$\|\psi^j D^{\beta'} b_{(i)r}\|_{p,\psi,Q^{n-1}} \leqslant C\|F\|_{l,p,G} \tag{3.16}$$

при $|\beta'| = l - r + j$, $0 \leqslant j \leqslant r$. *В* (3.15), (3.16) $Q^{n-1} = \{x' = (x_2, \ldots, x_n) : 0 < x_j < 1,\ j = 2, \ldots, n\}$.

Доказательство. Докажем (3.15), (3.16) для $b_r = b_{1r}$. Для функций b_{2r} оценки (3.15), (3.16) получаются аналогично.

Имеем для b_r

$$b_r = \sum_{i=0}^{l-r-1} c_{ri}\psi^i(x_2) \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_1^{r+i} F(\psi_1(x_2) + t_1\psi(x_2), x' + t'\psi(x_2)) \frac{t_1^i}{i!} K(t_1)T(t')\, dt. \tag{3.17}$$

Пусть $|\beta'| \leqslant l - r$. Обозначим $\beta_2 = m$, тогда $\beta' = (m, \beta'')$, $\beta'' = (\beta_3, \ldots, \beta_n)$.

Если $|\beta''| = l - r$, то представим β'' в каждом слагаемом по i в (3.17) в виде $\beta'' = \mu_i'' + (\beta'' - \mu_i'')$, где $|\mu_i''| = l - r - i$. Тогда из (3.17) получаем

$$\begin{aligned} D^{\beta'} b_r = \sum_{i=0}^{l-r-1} c_{ri} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha''| \leqslant l} D^\alpha F(z) \\ \times D_x^{\beta''-\mu_i''} \left\{ A_{\alpha''}(x,z)\psi^{i-n}(x_2) K\left(\frac{z_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}\right) T\left(\frac{z' - x'}{\psi(x_2)}\right)\right\} dz, \end{aligned} \tag{3.18}$$

где $A_{\alpha''}(x,z)$ — достаточное число раз дифференцируемые функции с ограниченными производными.

Пусть $|\beta''| = 0$, $\beta_2 = m \leqslant l - r$. Тогда $D^{\beta'} b_r = D_1^m b_r$ и поэтому

$$\begin{aligned} D^{\beta'} b_r = \sum_{i=0}^{l-r-1} c_{ri} D_2^m \bigg\{ \psi^i(x_2) \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_1^{r+i} F(z) \\ \times K\left(\frac{z_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}\right) T\left(\frac{z' - x'}{\psi(x_2)}\right) \frac{dz}{\psi^n(x_2)} \bigg\}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

При $|\beta''| = 1$ и $\beta_2 = m \leqslant l - r - 1$ имеем

$$\begin{aligned} D^{\beta'} b_r = \sum_{i=0}^{l-r-2} c_{ir} D_2^m \bigg\{ \psi^i(x_2) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha'| \leqslant r+1} A_{\alpha'}(x,z) D^{\alpha'} D_1^i F(z) \\ \times K\left(\frac{z_1 - \psi_1(x_1)}{\psi(x_2)}\right) T\left(\frac{z' - x'}{\psi(x_2)}\right) \frac{dz}{\psi^n(x_2)} \bigg\} + c_{r,l-r-1} D_2^m \bigg\{ \psi^{l-r-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha'| \leqslant l} D^{\alpha'} F(z) \\ \times A_{\alpha'}(x,z) K\left(\frac{z_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}\right) T\left(\frac{z' - x'}{\psi(x_2)}\right) \frac{dz}{\psi(x_2)} \bigg\}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Пусть $2 \leqslant |\beta''| \leqslant l - r - 1$. Тогда $D^{\beta'} b_r$ можно представить в следующем виде:

$$D^{\beta'} b_r = \sum_{i=0}^{l-k-1} c_{ri} D_2^m \left\{ \psi^i(x_2) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha'| \leqslant k} D^{\alpha'} D_1^i F(z) A_{\alpha'}(x, z) \right.$$

$$\left. \times K\left(\frac{z_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}\right) T\left(\frac{z' - x'}{\psi(x_2)}\right) \frac{dz}{\psi^n(x_2)} \right\} + \sum_{i=l-r-|\beta''|}^{l-r-1} c_{ri} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha_{(i)}| \leqslant l} D^{\alpha_{(i)}} F(z)$$

$$\times D_x^{\beta'' - \mu_i''} \left\{ A_{\alpha_{(i)}}(x, z) \psi^{i-n}(x_2) K\left(\frac{z_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}\right) T\left(\frac{z' - x'}{\psi(x_2)}\right) \right\} dz. \quad (3.21)$$

В (3.21) $k = |\beta''| + r$, $|\mu_i''| = l - r - i$.

Интеграл (3.18), интеграл при $i = l - r - 1$ в (3.20) и интегралы в сумме по $i \geqslant l - r - |\beta''|$ в (3.21) оцениваются сверху функцией вида

$$\int\limits_{\mathbb{R}} Y(z) K_1\left(\frac{z_1 - \psi_1(x_2)}{\psi(x_2)}\right) T_1\left(\frac{z' - x'}{\psi(x_2)}, x, z\right) \frac{dz}{\psi^n(x_2)}, \quad (3.22)$$

где $K_1(u_1)$ $(T_1(u', x, z))$ ограничена и обращается в нуль при $u_1 \notin [1/2, 1]$ $(|u'| > 1)$ и $Y(z)$ — это $|D^\alpha F(z)|$ при некотором α, продолженная нулем за область G.

Сумма интегралов (3.19), сумма по $i \leqslant l - r - 2$ в (3.20) и сумма интегралов в (3.21) по $i \leqslant l - k - 1 \leqslant l - |\beta''| - r - 1$ могут быть записаны в виде $(k \leqslant l - 1)$

$$J = \sum_{i=0}^{l-k-1} c_i D_2^m \left\{ \psi^i(x_2) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha D_1^i F(t) A_\alpha(x, t) K(t_1) T(t')\, dt \right\}.$$

Перепишем J следующим образом:

$$J = \sum_{i=0}^{l-k-m} c_i \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_{x_2}^m \left\{ \psi^i(x_2) \sum_{|\alpha| \leqslant k} A_\alpha(x, t)\, D^\alpha D_1^i F(\psi_1(x_2) + t_1 \psi(x_2),\ x' \right.$$

$$\left. + t'\psi(x_2)) \right\} K(t_1) T(t')\, dt + \sum_{i=l-k-m+1}^{l-k-1} c_i \sum_{j=0}^{m-l+k+i} C_m^j \frac{d^j}{dx_2^j} \psi^i(x_2)$$

$$\times \frac{\partial^{m+k+i-l-j}}{\partial x_2^{m+k+i-l-j}} \int \frac{\partial^{l-k-i}}{\partial x_2^{l-k-i}} \left[\sum_{|\alpha| \leqslant k} A_\alpha(x, t) D^\alpha D_1^i F \right] K(t_1) T(t')\, dt$$

$$+ \sum_{i=l-k-m+1}^{l-k-1} c_i \sum_{j=m-l+k+i+1}^{m} C_m^j \frac{d^j}{dx_2^j} \psi^i(x_2)$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_{x_2}^{m-j} \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant k} A_\alpha D^\alpha D_1^i F \right\} K(t_1) T(t')\, dt. \quad (3.23)$$

Делая во всех интегралах замену переменных $\psi_1(x_2) + t_1 \psi(x_2) = z_1$, $x' + t'\psi(x_2) = z'$ и производя затем в интегралах с $0 \leqslant j \leqslant m + k + i - l$ дифференцирование по x_2, мы получим во всех слагаемых суммы (3.23) интегралы, оцениваемые функциями вида (3.22). Интегралы от функций (3.22) по Q^{n-1} с весом ψ оцениваются в точности по той же схеме, что и интегралы (2.21) в [18].

Если $|\beta'| = l - r + j$, то, выделяя μ' так, чтобы выполнялось $|\mu'| = l - r$, представим $D^{\beta'} b_r$ в виде $D^{\beta' - \mu'}(D^{\mu'} b_r)$, а $D^{\mu'} b_r$ запишем, как и выше в (3.18)–(3.21). Тогда $D^{\beta' - \mu'}(D^{\mu'} b_r)$ будет оцениваться функцией вида (3.22), умноженной на $\psi^{-j}(x_2)$. Таким образом, мы опять приходим к оценке интеграла по Q^{n-1} с весом ψ функции (3.22). Отсюда следует лемма 3.1.

Лемма 3.2. *Пусть* a_r, $b_{(i)r}$ *— функции из* (3.13), (3.14), $r = 0, 1, \ldots, l-1$, $i = 1, 2$, *тогда*

$$v_r = a_r(x')\frac{x_1^r}{r!} \in W_p^l(G),$$

$$w_{(i)r} = b_{(i)r}(x')\frac{(x_1 - \psi_i(x_2))^r}{r!} \in W_p^l(G). \tag{3.24}$$

Доказательство. Докажем (3.24). Для функций v_r рассуждения аналогичны.

Включение $b_{(i)r} \in L_p(G)$ легко получается из явного вида $b_{(i)r}$ (3.12) (при $h = \psi_i$). Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — некоторый мультииндекс, $|\alpha| \leqslant l$. Если $\alpha_1 > r$, то $D^\alpha w_{(i)r} = 0$. Если $\alpha_1 = r$, то $|\alpha'| \leqslant l - r$ и из леммы 3.1 следует

$$D^{\alpha_1} D^{\alpha'} w_{(i)r} = D^{\alpha'} b_{(i)r} \in L_p(G).$$

Также из леммы 3.1 следует включение $D^\alpha w_{(i)r} \in L_p(G)$ при $\alpha_1 < r$ и $|\alpha'| \leqslant l-r$.

Пусть $\alpha_1 < r$ и $|\alpha'| > l - r$. Положим $j = |\alpha'| - l + r$. Тогда

$$\begin{aligned} |D^\alpha w_{(i)r}| \leqslant \sum_{i=0}^{l-r} \sum_{|\xi'|=i} c_{\xi'} \left| D^{\xi'} b_{(i)r} D^{\alpha'-\xi'} \left[\frac{(x_1 - \psi_i(x_2))^{r-\alpha_1}}{(r-\alpha_1)!}\right]\right| \\ + \sum_{i=l-r+1}^{|\alpha'|} \sum_{|\xi'|=i} c_{\xi'} |\psi^{i+r-l}(x_2) D^{\xi'} b_{(i)r}| \\ \times \left|\psi^{l-r-i}(x_2) D^{\alpha'-\xi'} \left[\frac{(x_1 - \psi_i(x_2))^{r-\alpha_1}}{(r-\alpha_1)!}\right]\right|. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Так как

$$\left|D^{\alpha'-\xi'}\left[\frac{(x_1 - \psi_i(x_2))^{r-\alpha_1}}{(r-\alpha_1)!}\right]\right| \leqslant C\psi^{l-|\alpha|}(x_2),$$

то из (3.25) вытекает лемма 3.2.

Лемма 3.3. *Пусть* R *— функция из* (3.3). *Тогда при* $0 \leqslant |\alpha| \leqslant l$ *выполняется*

$$\left\|\frac{D^\alpha R}{\psi^{l-|\alpha|}}\right\|_{p,G} \leqslant C\|F\|_{l,p,G}. \tag{3.26}$$

Доказательство. Так как функция F_1 из (3.3) принадлежит $W_p^l(G)$ согласно лемме 3.2 и так как $F \in W_p^l(G)$, то и $R = F - F_1 \in W_p^l(G)$. Следовательно, (3.26) выполняется при $|\alpha| = l$. При $|\alpha| \leqslant l - 1$ из (3.4)–(3.7) следует, что для оценки нормы $\psi^{|\alpha|-l} D^\alpha R$ в $L_p(G)$ достаточно оценить норму в $L_p(G)$ функции вида

$$\Phi(x) = \int_0^1 d\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} D^\beta F(z) \widetilde{\mathscr{L}_1}\left(\frac{z_1 - \psi_1(x_2)}{\varepsilon\psi(x_2)}\right) \widetilde{\mathscr{L}_2}\left(\frac{z' - x'}{\psi(x_2)\varepsilon}, x, z\right) \frac{dz}{(\varepsilon\psi(x_2))^n}.$$

Такая оценка, как и оценка интегралов от функций вида (3.22), получается по той же схеме, что и оценка интегралов (2.21) в [18]. Отсюда следует лемма 3.3.

Пусть при $i = 1, 2$

$$S_i = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1 = \psi_i(x_2),\ x' = (x_2, \ldots, x_n) \in Q^{n-1}\}. \tag{3.27}$$

Для функций R из (3.7), чтобы не вводить новых обозначений, будем использовать обозначение $D^\alpha R_i(x')$ вместо $D^\alpha R|_{S_i} = D^\alpha R(\psi_i(x_2), x')$. Полагаем $\left.\frac{\partial^k R}{\partial N_i^k}\right|_{S_i} = \rho_{(i)k}$, где N_i — единичный вектор внутренней нормали к S_i. Мы будем писать $\rho_{(i)k}(x')$ вместо $\rho_{(i)k}(\psi_i(x_2), x')$.

Лемма 3.4. *Справедливы оценки*

$$\|\psi^{|\alpha|+|\beta'|-l} D^{\beta'}(D^\alpha R|_{S_i})\|_{p,\psi,Q^{n-1}} \leqslant C\|F\|_{l,p,G} \tag{3.28}$$

при $|\alpha| + |\beta'| \leqslant l-1$;

$$\|\psi^{|\beta'|+k-l} D^{\beta'} \rho_{(i)k}\|_{p,\psi,Q^{n-1}} \leqslant C\|F\|_{l,p,G} \tag{3.29}$$

при $|\beta'| + k \leqslant l-1$.

Если функции ψ_1, ψ_2 удовлетворяют условиям, сформулированным в начале этого параграфа, то выполняется

$$\int\limits_{Q^{n-1}} dx' \int\limits_{Q^{n-1}} \frac{|D^{\beta'}\rho_{(i)k}(x') - D^{\beta'}\rho_{(i)k}(y')|^p}{|x'-y'|^{n+p-2}} \chi\left(\frac{|x'-y'|}{re(x',y')}\right) dy' \leqslant C\|F\|_{l,p,G} \tag{3.30}$$

при $r \geqslant 1$, $|\beta'| + k = l-1$.

Оценки (3.28), (3.29) следуют из (3.4)–(3.7) и леммы 3.3. Для обоснования (3.30) заметим, что, как следует из (3.7), функции $D^{\beta'}\rho_{(i)k}$ при $|\beta'|+k = l-1$ являются следами некоторых функций из $W_p^1(G)$. Тогда (3.30) следует из теоремы 1.

Пусть $f_{(i)k} = \left.\frac{\partial^k F}{\partial N_i^k}\right|_{S_i}$, $i = 1, 2$, $k = 0, \ldots, l-1$, $\zeta_{(i)k} = f_{(i)k} - \rho_{(i)k}$. Ясно, что если $F = F_1 + R$ (см. (3.3)), то $\zeta_{(i)k} = \left.\frac{\partial^k F_1}{\partial N_i^k}\right|_{S_i}$. Из определения производной по нормали и из (3.13) получаем следующую систему для функций a_r:

$$\zeta_{(i)k} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m c_{(i)}^m s_{(i)}^{k-m} \sum_{r=m}^{l-1} D_2^{k-m} a_r \frac{x_1^{r-m}}{(r-m)!}, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1. \tag{3.31}$$

Данная система уравнений однозначно разрешима относительно функций a_r (см. лемму 1 в [19]), и решение дается равенством

$$a_r = \sum_{j=r}^{l-1} (-1)^{j-r} L_{(i)j}(x', \zeta_{(i)}) \frac{\psi_i^{j-r}}{(j-r)!}, \quad 0 \leqslant r \leqslant l-1,$$

где функции $L_{(i)j}$ определены в (1.11). Подставляя эти выражения для a_r в (3.13), получаем

$$F_1(x) = \sum_{r=0}^{l-1} L_{(i)r}(x', \zeta_{(i)}) \frac{(x_1 - \psi_i(x_2))^r}{r!}, \quad i = 1, 2. \tag{3.32}$$

В силу того, что F_1 есть многочлен по x_1, из (3.32) и (3.14) получаем $b_{(i)r} = L_{(i)r}$. Отсюда и из лемм 3.3 и 3.4 вытекают оценки

$$\|D^{\beta'} L_{(i)r}\|_{p,\psi,Q^{n-1}},\ \|D^{\beta'}\mathfrak{M}_r\|_{p,\psi,Q^{n-1}} \leqslant C\|F\|_{l,p,G}, \quad |\beta'| \leqslant l-r, \tag{3.33}$$

$$\|\psi^j D^{\beta'} L_{(i)r}\|_{p,\psi,Q^{n-1}},\ \|\psi^j D^{\beta'}\mathfrak{M}_r\|_{p,\psi,Q^{n-1}} \leqslant C\|F\|_{l,p,G}, \quad |\beta'| + r = l + j, \quad 0 \leqslant j \leqslant r. \tag{3.34}$$

§ 4. Доказательство теоремы 2

Пусть $F \in W_p^l(D)$ и функции f_k, $k = 0, 1, \ldots, l-1$, определяются равенствами (1.19). Из (3.3) при $G = D$ следует

$$f_k = \frac{\partial^k F_1}{\partial N^k}\bigg|_{\partial D} + \frac{\partial^k R}{\partial N^k}\bigg|_{\partial D} = h_{1k} + h_{2k}.$$

Пусть $h_{1k(j)} = \frac{\partial^k F_1}{\partial N_j^k}\Big|_{\Gamma_j}$, $j = 1, \ldots, n$. При $j = 3, \ldots, n$ представим F_1 в виде (3.13) и для проверки условий (2) части I теоремы 2 используем явный вид (3.12) коэффициентов a_m из (3.13). При $j = 1, 2$ запишем F_1 в форме (3.14) и для проверки условий (1) используем лемму 3.1. При всех j проверка того, что функции $D^{\beta'} h_{1k(j)}$ при $|\beta'| + k < l - 1$ интегрируемы в степени p по соответствующему множеству в $\mathbb{R}^{n-1}$, сводится к оценке интегралов от функций вида (3.22). Вес φ в интегралах возникает после интегрирования по переменной x_1.

Для проверки того, что $D^{\beta'} h_{1k(j)}$ есть функция класса $B_p^{1-1/p}$ при $|\beta'| + k = l - 1$ (см. (1.9)), используем теорему 1. При $j \geqslant 3$ считаем $\rho = 1$, $\sigma = 1$.

Пусть $h_{2k(j)} = \frac{\partial^k R}{\partial N_j^k}\Big|_{\Gamma_j}$. Проверка справедливости условий (1), (2) части I теоремы производится с помощью леммы 3.4 для $j = 1, 2$ и следует из (3.4)–(3.7) для $j \geqslant 3$.

Выполнение условий (3) для функций $f_{(i)k}$ и $f_{(j)m}$ при $i, j \geqslant 3$, $i \neq j$, следует из результатов работы [15] непосредственно. При $i = 1, 2$, $j = 3, \ldots, n$ справедливость условий (3) части теоремы 2 также вытекает из результатов работы [15]. Покажем это.

Рассмотрим отображение $\Lambda : u \in \mathbb{R}^n \to x \in \mathbb{R}^n$,

$$x_1 = \varphi_1(u_2) + u_1 \varkappa(u_2), \quad x_2 = u_2 - u_1 \varkappa(u_2)\varphi_1'(u_2), \quad x_j = u_i, \quad j = 3, \ldots, n, \tag{4.1}$$

где $\varkappa = \left(1 + \left[\varphi_1'(u_2)\right]^2\right)^{-1/2}$. Легко проверить, что отображение Λ есть C^l-диффеоморфизм между областями $\Lambda^{-1}(D)$ и D. Поверхности Γ_1 при отображении Λ соответствует часть гиперплоскости $u_1 = 0$.

Рассмотрим функцию

$$G(u) = F\big(\varphi_1(u_2) + u_1 \varkappa(u_2), u_2 - u_1 \varkappa(u_2)\varphi_1'(u_2), u''\big). \tag{4.2}$$

Функция G принадлежит $W_p^l(\Lambda^{-1}(D))$, и

$$\frac{\partial^k G}{\partial u_1^k}\bigg|_{u_1=0} = g_{(1)k}(0, u_2, \ldots, u_n) = \frac{\partial^k F}{\partial N_1^k}\bigg|_{\Gamma_1} \circ \Lambda(u') = f_{(1)k}(\varphi_1(u_2), u'). \tag{4.3}$$

Покажем, что условия (3) выполнены для $i = 1$, $j = n$. Для $i = 2$, $j = 3, \ldots, n-1$ рассуждения аналогичны.

Поскольку отображение Λ есть C^l-диффеоморфизм,

$$\|F\|_{l,p,D} \sim \|G\|_{l,p,\Lambda^{-1}(D)}.$$

Для $g_{(1)k}$ и $g_{(n)j}$, где $g_{(n)j} = \left(\frac{\partial^j}{\partial u_n^j}\right) G\Big|_{u_n=0}$, из [15] следует

$$D_n^j g_{(1)k}\big|_{u_n=0} = D_1^k g_{(n)j}\big|_{u_1=0}, \quad k + j \leqslant l - 2.$$

Но эти равенства эквивалентны равенствам

$$D_n^j f_{(1)k}\big|_{x_n=0} = \frac{\partial^k}{\partial N_1^k} f_{(n)j}\bigg|_{x_1=\varphi_1(x_2)}, \quad k + j \leqslant l - 2.$$

Таким образом, условия (3) для функций f_k выполняются.

Оценка норм в (1.7) для функций (1.15) проводится в точности так же, как и в [15]. Рассмотрим функции (1.14). Используя отображение (4.1), приходим к оценке [15]:

$$\left\| \frac{D^{\beta''} D_1^k g_{(n)j} - D^{\beta''} D_n^j g_{(1)k}}{u_1 + u_n} \right\|_{p,\Lambda^{-1}(D)} \leqslant C\|G\|_{l,p,\Lambda^{-1}(D)}.$$

Возвращаясь к переменным $x_1, \ldots, x_n$ (см. (4.1)), отсюда получаем

$$\left\| \frac{D^{\beta''} \frac{\partial^k}{\partial N_1^k} f_{(n)j} - D^{\beta''} D_n^j f_{(1)k}}{x_1 - \varphi_1(x_2) + x_n} \right\|_{p,D} \leqslant C\|F\|_{l,p,D}.$$

При переходе к переменным x_i мы учли, что из (1.3) вытекает $\frac{1}{2}u_1 < x_1 - \varphi_1(x_2) < \frac{3}{2}u_1$, следовательно, $u_1 \sim x_1 - \varphi_1(x_2)$.

Осталось оценить норму функций (1.13). Положим $\zeta_{(i)j} = f_{(i)j} - \rho_{(i)j}$, где $\rho_{(i)j} = \left.\frac{\partial^j R}{\partial N_i^j}\right|_{\Gamma_i}$. Тогда из (3.3), (3.14) и (1.12) следует (см. вывод (4.3) в [19])

$$F(x) = F_1(x) + R(x) = \sum_{k=0}^{l-1} \mathfrak{M}_k(x', \bar{\zeta}_{(1)}, \bar{\zeta}_{(2)}) \frac{(x_1 - \varphi_2(x_2))^k}{k!} + F_1(x) + R(x).$$

Отсюда вытекает

$$\sum_{k=0}^{l-1} \mathfrak{M}_k(x', \bar{\zeta}_{(1)}, \bar{\zeta}_{(2)}) \frac{(x_1 - \varphi_2(x_2))^k}{k!} = 0, \quad x \in D.$$

Дифференцируя это равенство r раз по x_1, полагая затем $x_1 = \varphi_2(x_2)$ и после этого дифференцируя по $x_2, \ldots, x_n$, получаем

$$D^{\beta'} \mathfrak{M}_r(x') = D^{\beta'} \mathfrak{M}_r(x', \bar{\zeta}_{(1)}, \bar{\zeta}_{(2)}) = 0 \tag{4.4}$$

при $|\beta'| + r \leqslant l - 1$. Из (1.12) следует, что $\mathfrak{M}_r$ линейно зависит от $\bar{\zeta}_{(1)}$ и $\bar{\zeta}_{(2)}$. Из (1.2) и (4.4) следует ($\beta' = (m, \beta_3, \ldots, \beta_n)$)

$$\mathfrak{M}_{r,\beta'}(x', \bar{f}_{(1)}, \bar{f}_{(2)}) = \mathfrak{M}_{r,\beta'}(x', \bar{\rho}_{(1)}, \bar{\rho}_{(2)})$$
$$- \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=l-|\beta''|-i}^{l-1} \left[\varphi^{i+j+|\beta''|-l} D_2^i D^{\beta''} L_{(1)j}(x', \bar{\zeta}_{(1)})\right] \varphi^{l-i-j-|\beta''|} \frac{d^{m-i}}{dx_2^{m-i}} \left[\frac{\varphi^{j-r}}{(j-r)!}\right].$$

Отсюда, из (1.12), леммы 3.4 и из того, что

$$\left| \frac{d^{m-i}}{dx_2^{m-i}} \left[\frac{\varphi^{j-r}}{(j-r)!}\right] \right| \leqslant C\varphi^{l-|\beta'|-r}$$

при $j \geqslant l - |\beta''| - i$, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1 из [17], получаем требуемую оценку.

Таким образом, справедливость всех условий (1)–(4) части I теоремы 2 проверена.

Докажем часть II теоремы 2. Пусть функции f_k, $k = 0, 1, \ldots, l-1$, определены на ∂D, $f_{(j)k} = f_k|_{\Gamma_j}$, $j = 1, \ldots, n$, и пусть для них выполнены условия (1)–(4) теоремы 2. Построим функцию $F \in W_p^l(D)$, для которой выполняются равенства (1.19).

Продолжим $f_{(i)k}$ с Γ_i в D любым способом (например, тем, каким ниже строится продолжение с Γ_n) до функции Φ_i из $W_p^l(D)$, $i = 1,2$. Рассмотрим функцию (см. [15])

$$\gamma = \gamma(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1 - \varphi_1(x_2)}{\varphi(x_2)}\right)^l \sum_{i=0}^{l-1} C_{l+i-1}^i \left(\frac{\varphi_2(x_2) - x_1}{\varphi(x_2)}\right)^i.$$

Функция γ обладает следующими свойствами: $D^\beta\gamma|_{\Gamma_1} = 0$ при $|\beta| \leqslant l-1$, $\gamma|_{\Gamma_2} = 1$, $D^\beta\gamma|_{\Gamma_2} = 0$ при $1 \leqslant |\beta| \leqslant l-1$. Покажем, что функция

$$\Phi_{12} = \gamma\Phi_2 + (1-\gamma)\Phi_1$$

принадлежит $W_p^l(D)$. Для функции Φ_{12} выполняется

$$\left.\frac{\partial^k \Phi_{12}}{\partial N^k}\right|_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1. \tag{4.5}$$

Из определения γ вытекает

$$|D^\beta\gamma| \leqslant \frac{C}{\varphi^{|\beta|}}, \quad |\beta| \leqslant l.$$

Но тогда из равенства

$$D^\beta\Phi_{12} = D^\beta\Phi_1 + \sum_{\xi\leqslant\beta} c_\xi D^{\beta-\xi}(\Phi_2 - \Phi_1)D^\xi\gamma$$

следует, что достаточно показать

$$\frac{D^\mu(\Phi_2 - \Phi_1)}{\varphi^{l-|\mu|}} \in L_p(D), \quad |\mu| \leqslant l. \tag{4.6}$$

Так как $\Phi_2 - \Phi_1 \in W_p^l(D)$, то (4.6) достаточно установить для $|\mu| \leqslant l-1$. Представим Φ_1 и Φ_2 в виде (3.14) ($i = 1,2$)

$$\Phi_i(x) = \sum_{r=0}^{l-1} L_{(i)r}(x', \bar\zeta_{(i)})\frac{(x_1 - \varphi_i(x_2))^r}{r!} + R_{(i)}(x), \tag{4.7}$$

где $\zeta_{(1)j} = f_{(1)j} - \rho_{(1,1)j}$, $\zeta_{(2)j} = f_{(2)j} - \rho_{(2,2)j}$, $\rho_{(1,1)j} = \left.\frac{\partial^j R_{(1)}}{\partial N_1^j}\right|_{\Gamma_1}$, $\rho_{(2,2)j} = \left.\frac{\partial^j R_{(2)}}{\partial N_2^j}\right|_{\Gamma_2}$. Тогда из (1.12) и (4.7) следует

$$\Phi_2 = \sum_{r=0}^{l-1} \mathfrak{M}_r(x', \bar\zeta_{(1)}, \bar\zeta_{(2)})\frac{(x_1 - \varphi_2(x_2))^r}{r!} + R_{(2)} + \sum_{j=0}^{l-1} L_{(1)j}(x', \bar\zeta_{(1)})\frac{(x_1 - \varphi_1(x_2))^j}{j!}$$
$$= \sum_{r=0}^{l-1} \mathfrak{M}_r(x')\frac{(x_1 - \varphi_2(x_2))^r}{r!} + \Phi_1 + R_{(2)} - R_{(1)}.$$

Из леммы 3.3 следует, что

$$\varphi^{l-|\mu|}D^\mu(R_{(2)} - R_{(1)}) \in L_p(D).$$

Обозначим

$$g_r(x) = g_r(x_1, x_2) = \frac{(x_1 - \varphi_2(x_2))^r}{r!}, \quad 0 \leqslant r \leqslant l-1.$$

Очевидно, что для любого мультииндекса $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $|\mu| \leqslant l$, выполняется

$$|D^\mu g_r| \leqslant C\varphi^{r-|\mu|}, \ |\mu| \leqslant r, \quad |D^\mu g_r| \leqslant C, \ |\mu| > r.$$

Учитывая это, имеем для $|\mu| \leqslant l-1$

$$\sum_{r=0}^{l-1} D^\mu\{\mathfrak{M}_r(x')g_r(x)\} = \sum_{i=0}^{\mu_2} \sum_{r=\mu_1}^{l-|\mu''|-i-1} C^i_{\mu_2} D^i_2 D^{\mu''}\mathfrak{M}_r D_2^{\mu_2-i} g_r$$
$$+ \sum_{i=0}^{\mu_2} C^i_{\mu_2} \sum_{r=l-|\mu''|-i}^{l-1} \left[\varphi^{i+r+|\mu''|-l} D^i_2 D^{\mu''}\mathfrak{M}_r\right]\left\{\varphi^{l-i-r-|\mu''|} D_2^{\mu_2-i} g_r\right\}.$$

Далее, используя (3.33), (3.34), лемму 3.4 и рассуждая, как при доказательстве теоремы 2 из [19], приходим к (4.6). Таким образом, имеем функцию $\Phi_{12} \in W^l_p(D)$, для которой выполняются равенства (4.5).

Пусть $f_{(n)k} = f_k|_{\Gamma_n}$, K — функция, введенная в начале § 3, и

$$\mathscr{K}(t') = \mathscr{K}(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \prod_{j=1}^{n-1} K(t_j).$$

Через $D_{n,2}$ ниже обозначается область

$$D_{n,2} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x \in D, \ 0 < x_n < 2\varphi(x_2)\}.$$

Считаем, что функции $f_{(n)k}$ определены в области $\Gamma^*_{n,3,3}$ (см. теорему 4) и равны нулю при $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \notin \Gamma^*_{n,3,3}$. Полагаем (см., например, [25])

$$v_0(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{(n)0}(x' + x_n t')\mathscr{K}(t')\,dt,$$

$$w_0 = f_{(n)0}, \quad w_j = f_{(n)j} - \sum_{i=0}^{j-1} \left.\frac{\partial^j v_i}{\partial x_n^j}\right|_{x_n=0}, \quad j = 1, \ldots, l-1,$$

$$v_j(x) = \frac{x_n^j}{j!} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} w_j(x' + x_n t')\mathscr{K}(t')\,dt.$$

Тогда

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{l-1} v_j(x) \in W^l_p(D_{n,2}),$$
$$\left.\frac{\partial^j F_n}{\partial x_n^j}\right|_{x_n=0} = f_{(n)j}, \quad j = 0, 1, \ldots, l-1. \tag{4.8}$$

Равенства (4.8) проверяются стандартным способом (см., например, [25]).

Рассмотрим отображение (4.1). Положим $G_{12}(u) = \Phi_{12} \circ \Lambda(u)$, $G_n(u) = F_n \circ \Lambda(u)$. Имеем $G_{12}, G_n \in W^l_p(\Lambda^{-1}(D_{n,2}))$, $\Lambda(u') = \Lambda(0, u_2, \ldots, u_n) = (\varphi_1(u_2), u_2, \ldots, u_n)$,

$$g_{(1)k}(u') = \left.\frac{\partial^k G_{12}}{\partial u_1^k}\right|_{u_1=0} = f_{(1)k}\circ\Lambda(u'), \quad g_{(n)j} = \left.\frac{\partial^j G_n}{\partial u_n^j}\right|_{u_n=0} = f_{(n)j}\circ\Lambda(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0).$$

Из условий (3) теоремы 2 следует, что

$$\left\| \frac{D^{\beta''} D_1^k g_{(n)j} - D^{\beta''} D_n^j g_{(1)k}}{u_1 + u_n} \right\|_{p,\Lambda^{-1}(D_{n,2})} < \infty.$$

Отсюда (см. [15]) вытекает

$$G_{12n} = \gamma G_n + (1-\gamma)G_{12} \in W_p^l(\Lambda^{-1}(D_{n,2})),$$

где

$$\gamma = \left(\frac{u_1}{u_1+u_n}\right)^l \sum_{i=0}^{l-1} C_{l+i-1}^i \left(\frac{u_n}{u_n+u_1}\right)^i.$$

Поэтому $\Phi_{12n} = G_{12n} \circ \Lambda^{-1} \in W_p^l(D_{n,2})$, причем

$$\left.\frac{\partial^k \Phi_{12n}}{\partial N_j^k}\right|_{\Gamma_j \cap \overline{D}_{n,2}} = f_{(j)k}, \quad j = 1, 2, n, \ k = 0, 1, \dots, l-1.$$

Пусть $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ и $\eta(\tau) = 1$ при $|\tau| < 1/2$, $\eta(\tau) = 0$ при $|\tau| > 1$. Рассмотрим функцию $\eta(x_n/\varphi(x_2))$ и положим $F_{12n} = \eta\Phi_{12n} + (1-\eta)\Phi_{12}$. Для функции η выполняется $|D^\mu \eta| \leqslant C/\varphi^{|\mu|}$. Покажем, что $F_{12n} \in W_p^l(D)$. Достаточно проверить, что

$$D^\mu[\eta(\Phi_{12n} - \Phi_{12})] \in L_p(D), \quad |\mu| \leqslant l. \tag{4.9}$$

Имеем

$$D^\mu[\eta(\Phi_{12n} - \Phi_{12})] = \sum_{\xi \leqslant \mu} c_\xi D^\xi \eta D^{\mu-\xi}(\Phi_{12n} - \Phi_{12}).$$

Функции Φ_{12} и Φ_{12n} имеют на Γ_1 и Γ_2 одинаковые следы нормальных производных (при $0 < x_n < 2\varphi(x_2)$). Рассмотрим интегральные представления (3.3) для Φ_{12} и Φ_{12n} в $D_{n,2}$

$$\Phi_{12} = H_1 + R_{(1)}, \quad \Phi_{12n} = H_2 + R_{(2)}.$$

Полагая

$$\zeta_{(2)k} = f_{(2)k} - \left.\frac{\partial^k R_{(2)}}{\partial N_2^k}\right|_{\Gamma_2}, \quad \zeta_{(1)j} = f_{(1)j} - \left.\frac{\partial^j R_{(1)}}{\partial N_1^j}\right|_{\Gamma_1}$$

и представляя H_i по (3.32), $i = 1, 2$, получаем

$$\begin{aligned}
\Phi_{12n} &= \sum_{r=0}^{l-1} L_{(2)r}(x', \zeta_{(2)}) \frac{(x_1 - \varphi_2(x_2))^r}{r!} + R_{(2)} \\
&= \sum_{r=0}^{l-1} \mathfrak{M}_r(x', \zeta_{(1)}, \zeta_{(2)}) \frac{(x_1 - \varphi_2(x_2))^r}{r!} + H_1(x) + R_{(2)}(x) \\
&= \sum_{r=0}^{l-1} \mathfrak{M}_r(x') \frac{(x_1 - \varphi_2(x_2))^r}{r!} + \Phi_{12} + R_{(2)} - R_{(1)}.
\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (1.12), условия (4) части I теоремы 2 и леммы 3.4 получаем (4.9).

Построив точно так же функцию $\Phi_{12\,n-1}$, «склеиваем» ее с функцией $\Phi_{12\,n}$ с помощью функции

$$\gamma = \left(\frac{x_n}{x_n + x_{n-1}}\right)^l \sum_{i=0}^{l-1} C_{l+i-1}^i \left(\frac{x_{n-1}}{x_n + x_{n-1}}\right)^i$$

следующим образом:

$$\Phi_{12\,n-1\,n} = \Phi_{12\,n}(1-\gamma) + \gamma\Phi_{12\,n-1}.$$

Проверка того, что $\Phi_{12\,n-1\,n} \in W_p^l(D)$, проводится так же, как и в [15]. Продолжая далее для $j = n-2, \dots, 3$, получим в результате функцию $F \in W_p^l(D)$, для которой выполняются равенства (1.19). Теорема 2 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 3

Докажем часть I теоремы 3. Пусть $F \in W_p^l(V)$ и $\left.\frac{\partial^k F}{\partial N_j^k}\right|_{\Gamma_j'} = f_{(j)k}$, где $\Gamma_i' = \Gamma_i$ при $i = 1, 2$, Γ_j' при $j \geqslant 3$ — это поверхности (1.8).

Существование следов нормальных производных функции F на Γ_j', $j = 1, 2, \ldots, n$, и условие (1) теоремы 3 следуют из того, что все Γ_j' — гладкие поверхности класса C^{l+1} — являются частями границы липшицевых областей, содержащихся в $V = Q \setminus \overline{D}$ (см., например, [2] или [16]).

Условия (2) теоремы для $i, j \geqslant 3$ $(i \neq j)$ следуют непосредственно из результатов работы [15]. Случай $\Gamma_i' = \Gamma_i$, $i = 1, 2$, Γ_j', $j = 3, \ldots, n$, также следует из [15]. Для этого с помощью отображения (4.1) сведем рассмотрение к случаю двух ортогональных гиперплоскостей, как это было в § 4.

Покажем, что выполняются условия (3) и (4). Пусть

$$D_1 = \{x \in Q \setminus \overline{D} : -x_2 < x_1 < \varphi_1(x_2),\ 0 < x_2 < 1\},$$
$$D_2 = \{x \in Q \setminus \overline{D} : \varphi_2(x_2) < x_1 < x_2,\ 0 < x_2 < 1\}.$$

В силу условий (1.1)–(1.5) на φ_1 и φ_2 области D_1 и D_2 имеют кусочно-гладкую липшицеву границу. Рассмотрим в D_1 и в D_2 интегральные представления (3.3) с F_1 вида (3.11) и R (3.7). Для D_2 имеем $\psi_1(x_2) = \varphi_2(x_2)$, $\psi_2(x_2) = x_2$, $\psi(x_2) = x_2 - \varphi_2(x_2) \sim x_2$. Для D_1 в интегральном представлении берем $\psi_1(x_2) = -x_2$, $\psi_2(x_2) = \varphi_1(x_2)$. Тогда $\psi(x_2) = \varphi_1(x_2) + x_2 \sim x_2$ при $x_2 \in (0, 1)$. Чтобы носитель представления (3.3) для области $G = D_2$ лежал в D_2, мы берем ядро Ω_2 в виде (см. (3.8)–(3.10))

$$\Omega_2(x_2, s_2) = D_{s_2}^l \left[\frac{s_2^{l-1}}{(l-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{2u_2}{x_2 - \varphi_2(x_2)}\right) \theta(u_2 - s_2) \frac{du_2}{(x_2 - \varphi_2(x_2))/2} \right].$$

Для области D_1 с этой же целью поступаем следующим образом. Если $\varphi_1(x_2) < 0$ при $x_2 \in (0, 1)$, то сначала делаем замену $u_1 = -x_1$, затем строим интегральное представление для области D_1' — симметричной D_1 относительно плоскости $u_1 = 0$ затем делаем обратную замену $x_1 = -u_1$. При $\varphi_1(x_2) > 0$ можно непосредственно использовать интегральное представление (3.3) для области D_1.

Из (3.32) имеем для области D_i, $i = 1, 2$,

$$F(x) = \sum_{r=0}^{l-1} L_{(i)r}(x', \bar{\zeta}_{(i)}) \frac{(x_1 - \varphi_i(x_2))^r}{r!} + R_i(x), \tag{5.1}$$

где

$$\zeta_{(i)k} = f_{(i)k} - \rho_{(i)k}, \quad \rho_{(i)k} = \left.\frac{\partial^k R_i}{\partial N_i^k}\right|_{\Gamma_i}.$$

Отсюда, как и в § 4, получаем

$$F(x) = \sum_{r=0}^{l-1} \mathfrak{M}_r(x', \bar{\zeta}_{(1)}, \bar{\zeta}_{(2)}) \frac{(x_1 - \varphi_2(x_2))^r}{r!} + H(x) + R_2(x), \quad x \in D_2, \tag{5.2}$$

$$F(x) = H(x) + R_1(x), \quad x \in D_1, \tag{5.3}$$

где

$$H(x) = \sum_{j=0}^{l-1} L_{(1)j}(x', \bar{\zeta}_{(1)}) \frac{(x_1 - \varphi_1(x_2))^j}{j!}.$$

Положим

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : -x_2 < x_1 < x_2,\ 0 < x_j < 1,\ j = 2, \ldots, n\}.$$

Лемма 5.1. *Имеют место включения* $(0 \leqslant j \leqslant l-1)$

$$\mathfrak{M}_j(x', \bar{\zeta}_{(1)}, \bar{\zeta}_{(2)}) \frac{(x_1 - \varphi_2(x_2))^j}{j!} \in W_p^l(X),$$

$$L_{(1)j}(x', \bar{\zeta}_{(1)}) \frac{(x_1 - \varphi_1(x_2))^j}{j!} \in W_p^l(X).$$

Доказательство. При доказательстве лемм 3.1 и 3.2 условия (1.3) не использовались. Поэтому эти леммы справедливы и для областей D_1 и D_2. Таким образом, справедливы оценки (3.33)–(3.34) при $\psi(x_2) = x_2$ и $G = X$ (см. также доказательство леммы 4 в [19]). Отсюда следуют утверждения леммы 5.1.

Из леммы 5.1 следует, в частности, что $H \in W_p^l(X)$.

Ниже обозначено $\mathfrak{M}_r(x') = \mathfrak{M}_r(x', \bar{\zeta}_{(1)}, \bar{\zeta}_{(2)})$. Из (5.2) и (5.3) следует

$$D_1^r F\big|_{\Gamma_2} = \mathfrak{M}_r(x') + D_1^r H\big|_{\Gamma_2} + D_1^r R_2\big|_{\Gamma_2} \in B_p^{l-r-1/p}(\Gamma_2), \tag{5.4}$$

$$D_1^r F\big|_{\Gamma_1} = D_1^r H\big|_{\Gamma_1} + D_1^r R_1\big|_{\Gamma_1} \in B_p^{l-r-1/p}(\Gamma_1). \tag{5.5}$$

$(n-2)$-мерный куб $Q^{n-2} = \{x_1 = x_2 = 0,\ 0 < x_j < 1,\ j = 3, \ldots, n\}$ является частью границы $(n-1)$-мерных поверхностей Γ_1 и Γ_2. Из (3.4)–(3.7) и [1, § 6.4] следует, что

$$D^{\mu'} D_1^r R_{(i)}\big|_{Q^{n-2}} = 0, \quad |\mu'| + r \leqslant l-2, \tag{5.6}$$

где $\mu' = (\mu_2, \ldots, \mu_n)$. Из того, что $H \in W_p^l(X)$, вытекает

$$\big(D^{\mu'} D_1^r H\big|_{\Gamma_1}\big)\big|_{Q^{n-2}} = \big(D^{\mu'} D_1^r H\big|_{\Gamma_2}\big)\big|_{Q^{n-2}}.$$

Отсюда и из (5.4)–(5.6) следует

$$D^{\beta'} \mathfrak{M}_r(x')|_{x_2=0} = D^{\beta'} \mathfrak{M}_r(0, x'') = 0, \quad |\beta'| + r \leqslant l-2. \tag{5.7}$$

Для $\beta' = (m, \beta'') = (m, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ из (1.12) и определения $\bar{\zeta}_{(1)}$ и $\bar{\zeta}_{(2)}$ имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{r,\beta'}(x', \bar{f}_{(1)}, \bar{f}_{(2)}) &= \mathfrak{M}_{r,\beta'}(x', \bar{\rho}_{(1)}, \bar{\rho}_{(2)}) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{m} C_m^i \sum_{j=l-|\beta''|-i}^{l-1} D_2^i D^{\beta''} L_{(1)j}(x', \bar{\zeta}_{(1)}) \frac{d^{m-i}}{dx_2^{m-i}} \left[\frac{\varphi(x_2)^{j-r}}{(j-r)!}\right] \\ &= \mathfrak{M}_{r,\beta'}(x', \bar{\rho}_{(1)}, \bar{\rho}_{(2)}) - \Psi_{r,\beta'}(x').\end{aligned} \tag{5.8}$$

Из леммы 3.4 ($\psi(x_2) = x_2$) следует, что

$$\mathfrak{M}_{r,\beta'}(x', \bar{\rho}_{(1)}, \bar{\rho}_{(2)}) \in B_p^{l-r-|\beta'|-1/p}(Q^{n-1}).$$

Из (3.29) и определения следа [1, § 6.4] вытекает

$$\mathfrak{M}_{r,\beta'}(x', \bar{\rho}_{(1)}, \bar{\rho}_{(2)})|_{x_2=0} = 0, \quad |\beta'| + r \leqslant l-2. \tag{5.9}$$

Из определения (1.11) функций $L_{(1)j}$ и из определения функций $\zeta_{(1)k}$ следует

$$\Psi_{r,\beta'} \in B_p^{l-r-|\beta'|-1/p}(Q^{n-1}).$$

Отсюда и из того, что при $j \geqslant l - |\beta''| - i$ (см. (5.8))

$$\left|\frac{d^{m-i}}{dx_2^{m-i}}\left(\frac{\varphi^{j-r}}{(j-r)!}\right)\right| \leqslant C\varphi^{l-|\beta'|-r},$$

следует

$$\Psi_{r,\beta'}|_{x_2=0} = 0. \tag{5.10}$$

Отсюда, из (5.8) и (5.9) получаем условие (3) теоремы 3.

Рассмотрим условие (4) теоремы 3. Оценка норм функций (1.14) и (1.15) в сумме (1.18) следует из результатов работы [15]. Оценка (последнее слагаемое в (1.18))

$$\left\|\frac{\mathfrak{M}_{r,\beta'}}{x_2}\right\|_{p,x_2,Q^{n-1}} \leqslant C\|F\|_{l,p,V}$$

получается в точности по той же схеме, что и доказательство аналогичного условия в теореме 1 из [19] (условие (3) части II). Только в нашем случае надо использовать теорему 1, доказанную в § 2. Этим завершается доказательство части I теоремы 3.

Докажем часть II теоремы 3. Пусть функции f_k, $k = 0, 1, \ldots, l-1$, определены на ∂V, $f_{(j)k} = f_k|_{\Gamma'_j}$, и пусть выполнены условия (1)–(4) теоремы. Существуют (см., например, [2]) функции $F_{(i)} \in W_p^l(D_i)$, $i = 1, 2$, такие, что

$$\left.\frac{\partial^k F_{(i)}}{\partial N_i^k}\right|_{\Gamma_i} = f_{(i)k}, \quad i = 1, 2, \ k = 0, 1, \ldots, l-1.$$

Покажем, что с помощью условий (1)–(4) и результатов работы [15] можно «склеить» функции $F_{(1)}$ и $F_{(2)}$ так, что получившаяся функция (обозначим ее F_{12}) будет из $W_p^l(V)$ и для нее будут выполняться равенства (1.22) на Γ_1 и Γ_2.

Рассмотрим отображение $P : u \in \mathbb{R}^n \to x \in \mathbb{R}^n$,

$$x_1 = \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{2}}, \quad x_j = u_j, \ j = 3, \ldots, n, \tag{5.11}$$

и рассмотрим функции $G_1 = F_{(1)} \circ P$, $G_2 = F_{(2)} \circ P$.

Пусть

$$S_1 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1 = -x_2, \ 0 < x_j < 1, \ j = 2, \ldots, n\},$$
$$S_2 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1 = x_2, \ 0 < x_j < 1, \ j = 2, \ldots, n\}.$$

Тогда $G_i \in W_p^l(P^{-1}(D_i))$, $i = 1, 2$, и

$$g_{(2)j} = \left.\frac{\partial^j G_2}{\partial u_1^j}\right|_{u_1=0} = \left.\frac{\partial^j F_{(2)}}{\partial n_2^j}\right|_{S_2} \circ P(0, u'),$$
$$g_{(1)k} = \left.\frac{\partial^k G_1}{\partial u_2^k}\right|_{u_2=0} = \left.\frac{\partial^k F_{(1)}}{\partial n_1^k}\right|_{S_1} \circ P(0, u'),$$

где $n_1 = \{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, \ldots, 0\}$ — единичный вектор внутренней нормали по отношению к D_1 на S_1, $n_2 = \{-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, \ldots, 0\}$ — единичный вектор внутренней нормали по отношению к D_2 на S_2.

Из [15] следует, что необходимыми и достаточными условиями для существования функции G класса W^l_p, определенной в $P^{-1}(Q)\setminus\overline{P^{-1}(X)}$ и удовлетворяющей на гиперплоскостях $\{u_1=0\}$ и $\{u_2=0\}$ тем же граничным условиям, что и G_2 и G_1 соответственно, являются условия

$$\frac{\partial^k}{\partial u_2^k} g_{(2)j}\Big|_{u_2=0} = \frac{\partial^j}{\partial u_1^j} g_{(1)k}\Big|_{u_1=0}, \quad j+k\leqslant l-2, \tag{5.12}$$

$$\left\| \frac{D^{\beta''}\frac{\partial^k}{\partial u_2^k}g_{(2)j} - D^{\beta''}\frac{\partial^j}{\partial u_1^j}g_{(1)k}}{u_1+u_2} \right\|_{p,Q^n} < \infty \tag{5.13}$$

при $|\beta''|+k+j=l-1$, $Q^n=\{u=(u_1,\dots,u_n): 0<u_j<1,\ j=1,\dots,n\}$.

Представим функцию $F_{(2)}$ в области D_2 в виде (5.2), а функцию $F_{(1)}$ в области D_1 — в виде (5.3). Положим

$$M_r(u_1,u_2)=\frac{1}{r!}\left(\frac{u_2-u_1}{\sqrt2}-\varphi_2\left(\frac{u_1+u_2}{\sqrt2}\right)\right)^r.$$

Легко видеть, что

$$\begin{gathered}\left|D_1^m D_2^k M_r\right| \leqslant C(u_1+u_2)^{r-m-k}, \quad m+k<r,\\ \left|D_1^m D_2^k M_r\right| \leqslant C, \quad m+k\geqslant r.\end{gathered} \tag{5.14}$$

Из (5.2), (5.3) и определения G_1 и G_2 следует

$$G_2(u)=\sum_{r=0}^{l-1}\mathfrak{M}_r\left(\frac{u_1+u_2}{\sqrt2},u''\right)M_r(u_1,u_2) + H\circ P(u)+R_{(2)}\circ P(u), \quad u\in P^{-1}(D_2), \tag{5.15}$$

$$G_1(u)=H\circ P(u)+R_{(1)}\circ P(u), \quad u\in P^{-1}(D_1). \tag{5.16}$$

Пусть $\Delta=P^{-1}(X)=\{u=(u_1,u_2,u'')\in\mathbb{R}^n: 0<u_1<\sqrt2,\ 0<u_2<\sqrt2-u_1,\ u''\in Q^{n-2}\}$. Из (5.15) и (5.16) имеем

$$D_1^j g_{(1)k}\big|_{u_1=0} = D_1^j\big(D_2^k H\circ P(u_1,0,u'')\big)\big|_{u_1=0} + D_1^j\big(D_2^k R_{(1)}\circ P(u_1,0,u'')\big)\big|_{u_1=0}, \tag{5.17}$$

$$D_2^k g_{(2)j}\big|_{u_2=0} = \left(D_2^k\sum_{i=0}^{j}C_j^i 2^{-i/2}D_2^i\mathfrak{M}_r\left(\frac{u_2}{\sqrt2},u''\right)D_1^{j-i}M_r(0,u_2)\right)\Bigg|_{u_2=0} + D_2^k\big(D_1^j H\circ P(0,u_2,u'')\big)\big|_{u_2=0} + D_2^k\big(D_1^j R_{(2)}\circ P(0,u_2,u'')\big)\big|_{u_2=0}. \tag{5.18}$$

Из леммы (3.3) и [1, § 6.4] следует

$$D_1^j\big(D_2^k R_{(1)}\circ P(u_1,0,u'')\big)\big|_{u_1=0} = D_2^k\big(D_1^j R_{(2)}\circ P(0,u_2,u'')\big)\big|_{u_2=0}, \quad j+k\leqslant l-2. \tag{5.19}$$

Из $H\circ P\in W^l_p(P^{-1}(X))$ и [15] следует

$$D_1^j\big(D_2^k H\circ P\big|_{u_2=0}\big)\big|_{u_1=0} = D_2^k\big(D_1^j H\circ P\big|_{u_1=0}\big)\big|_{u_2=0}. \tag{5.20}$$

Пусть

$$A_{j,k}=D_2^k\sum_{i=0}^{j}C_j^i 2^{-i/2}\sum_{r=0}^{l-1}D_2^i\mathfrak{M}_r\left(\frac{u_2}{\sqrt2},u''\right)D_1^{j-i}M_r(0,u_2). \tag{5.21}$$

Запишем $A_{j,k}$ в следующем виде:

$$A_{j,k} = \sum_{m=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} c_{mi} \sum_{r=0}^{l-1} D_2^{m+i}\mathfrak{M}_r\left(\frac{u_2}{\sqrt{2}}, u''\right) D_1^{j-i} D_2^{k-m} M_r(0,u_2)$$

$$= \sum_{m=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} c_{mi} \sum_{r=0}^{l-i-m-2} D_2^{m+i}\mathfrak{M}_r\left(\frac{u_2}{\sqrt{2}}, u''\right) D_1^{j-i} D_2^{k-m} M_r(0,u_2)$$

$$+ \sum_{m=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} c_{mi} \sum_{r=l-m-i-1}^{l-1} D_2^{m+i}\mathfrak{M}_r\left(\frac{u_2}{\sqrt{2}}, u''\right) D_1^{j-i} D_2^{k-m} M_r(0,u_2)$$

$$= A^1_{j,k} + A^2_{j,k}. \qquad (5.22)$$

Из леммы 5.1 следует, что

$$A^2_{j,k} \in B_p^{l-j-k-1/p}(Q^{n-1}), \quad j+k \leqslant l-2.$$

Значит, определен след $A^2_{j,k}\big|_{Q^{n-2}}$. Так как (см. (5.14))

$$\left|D_1^{j-i} D_2^{k-m} M_r(0,u_2)\right| \leqslant C u_2^{l-j-k-1} \leqslant C u_2$$

при $r \geqslant l-m-i-1$, $j+k \leqslant l-2$, то

$$A^2_{j,k}\big|_{u_2=0} = 0. \qquad (5.23)$$

При $r \leqslant l-i-m-2$, полагая $\beta' = (i+m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$, имеем (см. (5.8))

$$D_2^{m+i}\mathfrak{M}_r\left(\frac{u_2}{\sqrt{2}}, u'', \bar\zeta_{(1)}, \bar\zeta_{(2)}\right)$$

$$= \mathfrak{M}_{r,\beta'}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2}}, u'', \bar f_{(1)}, \bar f_{(2)}\right) - \mathfrak{M}_{r,\beta'}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2}}, u'', \bar\rho_{(1)}, \bar\rho_{(2)}\right) - \Psi_{r,\beta'} \circ P\big|_{u_1=0}.$$

Как и ранее (см. (5.9) и (5.10)), отсюда и из условия (3) теоремы вытекает

$$D_2^{i+m}\mathfrak{M}_r(0, u'', \bar\zeta_{(1)}, \bar\zeta_{(2)}) = 0, \quad i+m+r \leqslant l-2. \qquad (5.24)$$

Таким образом, $A^1_{j,k}\big|_{u_2=0} = 0$. Отсюда и из (5.22) следует

$$A_{j,k}|_{u_2=0} = 0.$$

Отсюда и из (5.17)–(5.20) вытекают равенства (5.12).

Далее, из лемм 3.3 и 3.4, из того, что $H \circ P \in W_p^l(P^{-1}(X))$, и из (5.17), (5.18) следует: для проверки справедливости (5.13) достаточно показать, что

$$\left\| \frac{A_{j,k,\beta''}(u_2, u_3, \ldots, u_n)}{u_1+u_2} \right\|_{p,Q^n} < \infty \qquad (5.25)$$

при $j+k+|\beta''| = l-1$, $\beta'' = (\beta_3, \ldots, \beta_n)$, где (см. (5.21)) $A_{j,k,\beta''} = D^{\beta''}A_{j,k}$.

Запишем $A_{j,k,\beta''}$ ($|\beta''| = l-k-j-1$) в следующем виде:

$$A_{j,k,\beta''} = \sum_{m=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} c_{mi} \left\{ \sum_{r=0}^{j+k-m-i-1} D_2^{m+i} D^{\beta''}\mathfrak{M}_r\left(\frac{u_2}{\sqrt{2}}, u''\right) D_2^{k-m} D_1^{j-i} M_r(0,u_2) \right.$$

$$+ D_2^{m+i} D^{\beta''}\mathfrak{M}_{j+k-m-i}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2}}, u''\right) D_2^{k-m} D_1^{j-i} M_{j+k-m-i}(0,u_2)$$

$$\left. + \sum_{r=j+k-m-i}^{l-1} \left[u_2^{m+i+r-j-k-1}\mathfrak{M}_r\left(\frac{u_2}{\sqrt{2}}, u''\right)\right] \left[u_2^{j+k-m-i+1} D_1^{j-i} D_2^{k-m} M_r\right] \right\}. \qquad (5.26)$$

Пусть при $r \leqslant j+k-m-i-1 = l-m-i-|\beta''|-2$

$$\eta(u_2, u'') = D_2^{m+i} D^{\beta''} \mathfrak{M}_r \left(\frac{u_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Из формулы Тейлора имеем

$$\eta(u_2, u'') = \sum_{s=0}^{\rho-1} \frac{u_2^s}{s!} D_2^s \eta(0, u'') + \frac{1}{(\rho-1)!} \int_0^{u_2} (u_2-\tau)^{\rho-1} D_2^\rho \eta(\tau, u'')\, d\tau,$$

где $\rho = l-m-i-|\beta''|-r-1 = j+k-m-i-r$ ($\rho \geqslant 1$). Из (5.24) следует

$$\begin{aligned} \eta(u_2, u'') &= D_2^{m+i} D^{\beta''} \mathfrak{M}_r \left(\frac{u_2}{\sqrt{2}}, u''\right) \\ &= \frac{1}{(\rho-1)!} \int_0^{u_2} (u_1-\tau)^{\rho-1} D_2^{m+i+\rho} D^{\beta''} \mathfrak{M}_r \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}, u''\right) d\tau. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Последняя сумма по r ($r \geqslant j+k-m-i$) в фигурных скобках в (5.26) оценивается через (см. (5.14))

$$\left| u_2^{m+i+r-j-k-1} \mathfrak{M}_r \left(\frac{u_2}{\sqrt{2}}, u''\right) \right| u_2^{r+1}. \tag{5.28}$$

Из (5.26)–(5.28) вытекает, что

$$\int_{Q^n} \left| \frac{A_{j,k,\beta''}(u_2, u'')}{u_1+u_2} \right|^p du \leqslant C \int_{Q^{n-1}} \left| \frac{A_{j,k,\beta''}(u_2, u'')}{u_2} \right|^p u_2\, du' < \infty.$$

Следовательно, установлена оценка (5.25), а вместе с тем и (5.13). Следовательно, существует функция $G_{12} \in W_p^l(P^{-1}(Q) \setminus \overline{P^{-1}(X)})$. Функция, совпадающая с G_{12} в $P^{-1}(Q) \setminus \overline{P^{-1}(X)}$, с G_1 в $P^{-1}(D_1)$ и с G_2 в $P^{-1}(D_2)$, будет принадлежать $W_p^l(P^{-1}(V))$ [26]. Обозначим ее $\widetilde{G}_{12}$. Тогда функция $F_{12} = \widetilde{G}_{12} \circ P^{-1} \in W_p^l(Q \setminus \overline{D})$ и для нее выполняются равенства (1.22) на Γ_1 и Γ_2.

Пусть $F_n \in W_p^l(V)$ — такая функция, что

$$\left.\frac{\partial^k F_n}{\partial x_n^k}\right|_{x_n=0} = f_{(n)k}, \quad k = 0.1.\ldots.l-1.$$

Распрямляя поверхность Γ_1 с помощью отображения (4.1), мы сводим ситуацию (как это показано в § 4) к случаю, когда соседние участки границы — взаимно ортогональные поверхности (гиперплоскости). После этого мы используем результаты работы [15]. Получаем функцию $F_{1n} \in W_p^l(Q \setminus \overline{D})$, удовлетворяющую (1.22) на Γ'_n и Γ_1. Аналогично получаем функцию $F_{2n} \in W_p^l(Q \setminus \overline{D})$, удовлетворяющую (1.22) на Γ_2 и Γ_n. Затем мы «склеиваем» функции F_{1n} и F_{2n} в функцию $F_{12n} \in W_p^l(V)$, удовлетворяющую (1.22) на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma'_n$. Аналогично получаем функции $F_{12\,n-1}, F_{12\,n-2}, \ldots, F_{123}$. Функции F_{12i} и F_{12j} при $i, j \geqslant 3$, $i \neq j$, «склеиваются» в точности, как в [15]. Следовательно, «подклеивая» к функции F_{12n} функцию $F_{12\,n-1}$, затем к получившейся — функцию F_{12n-2} и т. д. последовательно до функции F_{123}, мы в результате получаем функцию $F_{12\ldots n} = F \in W_p^l(V)$, удовлетворяющую (1.22) на всех участках Γ'_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Необходимая оценка (1.24) получается в процессе построения. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 480 с.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
3. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 644 с.
4. *Jonsson A., Wallin H.* Funktion spaces on subsets of $\mathbb{R}^n$ // Math. Rep. 2. Pt 1. Harwood Acad. Publ., 1984.
5. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1950. 255 с.
6. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена. 1958. Т. 197. С. 54–112.
7. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984. 223 с.
8. *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. Pitman; Boston, 1985. 410 p.
9. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 205 с.
10. *Gagliardo E.* Caratterizzazione delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzione in variabili // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 284–305.
11. *Бесов О. В.* Поведение дифференцируемых функций на негладкой поверхности // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1972. Т. 117. С. 3–10.
12. *Jonsson A.* The trace of potentials in general sets // Arc. Math. 1979. V. 17. P. 1–18.
13. *Jonsson A., Wallin H.* A Whitney extension theorem in L^p and Besov spaces // Ann. Inst. Fourier. 1978. V. 28. P. 139–192.
14. *Никольский С. М.* Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками. I–III // Мат. сб.: I — 1956. Т. 40(82), № 3. С. 303–318; II — 1957. Т. 44(86). С. 127–144; III — 1958. Т. 45(87). С. 181–194.
15. *Яковлев Г. Н.* О следах функций из пространства W_p^l на кусочно-гладких поверхностях // Мат. сб. 1967. Т. 74(116), № 4. С. 526–543.
16. *Jonsson A.* Besov spaces on Lipschitz superfaces // University of Umea. 1986. V. 7. P. 1–12.
17. *Яковлев Г. Н.* Задача Дирихле для областей с нелипшицевой границей // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 8. С. 1085–1098.
18. *Васильчик М. Ю.* О необходимых и достаточных условиях на след функций из пространства Соболева на границе плоской области с нелипшицевой границей // Исследования по математическому анализу и римановой геометрии. Новосибирск: Наука, 1992. С. 5–29.
19. *Васильчик М. Ю.* Обратимая характеристика следов функций из пространств Соболева на кусочно-гладкой границе плоской области // Тр. Ин-та математики / РАН. Сиб. отд-ние. 1996. Т. 31: Пространства Соболева и смежные вопросы анализа. С. 40–57.
20. *Васильчик М. Ю.* Граничные свойства функций из пространства Соболева, определенных в плоской области с угловыми точками // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 4. С. 787–804.
21. *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* О следах функций с суммируемым градиентом в области с вершиной пика на границе // Мат. заметки. 1989. Т. 45, № 1. С. 57–65.
22. *Мазья В. Г.* О функциях с конечным интегралом Дирихле в области с вершиной пика на границе // Зап. науч. семинаров ЛОМИ / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. Ленингр. отд-ние. 1983. Т. 126. С. 117–137.
23. *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* Следы функций из пространств Соболева на границе области с пиком // Современные проблемы геометрии и анализа. Новосибирск: Наука, 1989. С. 182–208.
24. *Васильчик М. Ю.* О следах функций из пространств Соболева W_p^1, определенных в областях с нелипшицевой границей // Современные проблемы геометрии и анализа. Новосибирск: Наука, 1989. С. 9–45.
25. *Избранные* главы анализа и высшей алгебры / Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева и др.; Под ред. М. З. Соломяка. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1981. 200 с.
26. *Буренков В. И.* Об аддитивности классов $W_p^{(r)}(\Omega)$ // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1967. Т. 89. С. 31–54.

г. Новосибирск *Статья поступила 7 марта 1996 г.*