УДК 517.956.224+517.952.25

ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА СУБЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*)

С. К. Водопьянов, И. Г. Маркина

Настоящая работа посвящена исследованию граничного поведения гармонических и супергармонических функций субэллиптического уравнения второго порядка
$$-\operatorname{div}_* \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u) = 0, \tag{0.1}$$
где $\nabla_{\mathscr{L}} u = (X_1 u, \dots, X_k u)$ — субградиент, определяемый C^∞-векторными полями $(X_1, \dots, X_k)$, удовлетворяющими условию гипоэллиптичности Хёрмандера [1].

Особенность излагаемого ниже подхода к теории потенциала состоит в том, что изучается такое граничное поведение гармонических и супергармонических функций, которое контролируется внутренней геометрией области.

Частным случаем уравнения (0.1) является p-лапласиан
$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0, \qquad 1 < p < \infty, \tag{0.2}$$
который при $p = 2$ сводится к уравнению Лапласа $\Delta u = 0$. Его решения — гармонические функции — явились первоначальным объектом изучения в классической теории потенциала.

Теорема о представлении для гармонических функций позволяет определять супергармоническую функцию как функцию, значение которой в центре шара не меньше среднего значения по шару. Знаменитая теорема Ф. Рисса устанавливает связь между супергармоническими функциями, гармоническими функциями и потенциалами, а именно: всякая супергармоническая функция локально представима в виде суммы потенциала и некоторой гармонической функции. Таким образом, изучая поведение супергармонических и гармонических функций, мы получаем представление о свойствах потенциалов, и наоборот.

Как решения уравнения (0.1), так и гармонические функции имеют несколько общих свойств, в силу которых становится возможным построение содержательной теории в общем случае, так называемой нелинейной теории потенциала. Одно из основных свойств, на котором основывается обобщенная концепция, — это порядковое свойство: если u и v — два решения задачи Дирихле в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такие, что $u \leqslant v$ на границе области Ω, то неравенство между функциями сохраняется и внутри области Ω. При отсутствии свойства линейности множества решений уравнения (0.1) порядковое свойство является основой нелинейной теории потенциала, естественно возникающей в связи с решением задач теории нелинейных уравнений с частными производными, теории функциональных пространств и других содержательных и сложных вопросов.

При изучении свойств решений и суперрешений нелинейных уравнений с частными производными был развит некоторый аналитический аппарат, базирующийся на таких положениях, как принцип сравнения для субрешений и суперрешений, неравенство Гарнака для гармонических функций, теоремы

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета РФ по образованию (код проекта 94–1.2–134) и Международного научного фонда (грант RAT 000).

сходимости монотонных последовательностей и ряд других. Позднее было установлено, что локально ограниченная сверху супергармоническая функция есть суперрешение соответствующего нелинейного уравнения. Такая связь позволила применить упомянутый выше аналитический аппарат теории дифференциальных уравнений к изучению свойств и поведения супергармонических функций в нелинейной теории.

Одновременно предпринимались попытки сформулировать и изучить применительно к нелинейной теории такие понятия классической теории потенциала, как выметание, барьер, решение Перрона, гармонические меры, полярные множества и др.

Отметим монографию [2], где подробно и наиболее полно изложена весовая нелинейная теория потенциала, развитая для решений p-лапласиана (0.2) и его квазилинейных обобщений.

В настоящей работе излагается теория потенциала, ассоциированная с решениями субэллиптических уравнений. Уравнения этого типа определяются векторными полями, удовлетворяющими условию гипоэллиптичности Хёрмандера [1]. Напомним, что условие гипоэллиптичности Хёрмандера состоит в том, что в каждой точке области векторные поля вместе с коммутаторами конечной длины, одной и той же для всех точек рассматриваемой области, порождают касательное пространство. Модельным уравнением, обобщающим уравнение Лапласа, служит сумма квадратов векторных полей.

Наш подход к исследованию граничного поведения гармонических функций базируется на работах [3–5], в которых введено понятие несобственной границы как результата пополнения по Хаусдорфу метрического пространства $\Omega_1 = (\Omega, d_\Omega)$ по внутренней метрике d_Ω, и методах, изложенных в монографии [2] . Посредством понятия несобственной границы исследовано граничное поведение функций классов Соболева в областях с произвольной границей [3] и доказан критерий Винера [4] регулярности решений в граничной точке. В статье [5] получены результаты по локальным свойствам решений и суперрешений субэллиптических уравнений вида (0.1), где функция $\mathscr{A}(x,\xi)$ удовлетворяет определенным условиям. $\mathscr{A}$-Супергармоническая функция определяется посредством сравнения с непрерывным решением уравнения (0.1). Последние называются $\mathscr{A}$-гармоническими функциями. При таком подходе мы вынуждены доказывать, что $\mathscr{A}$-супергармонические функции, определение которых не требует какой-либо априорной регулярности, обладают на самом деле рядом дополнительных свойств, которые позволяют при некоторых условиях рассматривать $\mathscr{A}$-супергармонические функции как суперрешения уравнения (0.1). Этот факт позволяет применить для изучения $\mathscr{A}$-супергармонических функций весь аналитический аппарат работы [5]. Кроме регулярности суперрешений уравнения (0.1) в [5] исследована также зависимость свойств емкости в пространстве Соболева от геометрии векторных полей. К обсуждаемой в работе тематике относится также и работа [6], в которой получены различные метрические и аналитические условия для устранения особенностей ограниченных решений уравнения весьма общей природы, включающей, в частности, уравнения вида (0.1).

Отметим, что $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонические функции, исследуемые в настоящей работе, сохраняют ряд основополагающих свойств теории эллиптических уравнений: принцип сравнения, неравенство Гарнака для $\mathscr{A}$-гармонических функций, теоремы о сходимости монотонных последовательностей и другие. Это обстоятельство позволяет развить теорию, аналогичную эллиптическому случаю. Особое внимание мы уделяем вопросам, специфически связанным с геометрией векторных полей. Принципиальные результаты, описывающие основные свойства геометрии, ассоциированной с векторными полями, получены в [7].

В § 1 работы определяются все необходимые понятия. В § 2–7 вводится определение $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической функции, устанавливается связь $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций и суперрешений уравнения (0.1), изучаются возможность устранения особенностей, свойства сингулярных решений уравнения (0.1) и интегрируемость $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций. Результаты § 2–7 служат основой для исследования классических вопросов теории потенциала: выметания (§ 8), решений Перрона (§ 9), $\mathscr{A}^\sigma$-регулярных граничных точек (§ 10), барьеров (§ 11), $\mathscr{A}^\sigma$-разрешимости (§ 12), связи между решениями Перрона $\mathscr{A}^\sigma$-потенциалами и $\mathscr{A}^\sigma$-полярными множествами (§ 14), а также $\mathscr{A}^\sigma$-гармонических мер (§ 15) и $\mathscr{A}$-тонких топологий (§ 16).

Наш подход к заданию граничных значений функций основан на работах [3, 4]. Он отличается от классического тем, что мы определяем граничные значения не на евклидовой границе, а на идеальной границе, присоединяемой к области при ее пополнении по внутренней метрике. Такой подход позволяет, в частности, различать берега разреза, что приводит к большей свободе в граничном поведении изучаемых функций.

§ 1. Весовые пространства Соболева

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_k$ — семейство вещественных векторных полей класса C^∞, определенных в некоторой окрестности U замыкания $\overline{G}$ ограниченной области G из $\mathbb{R}^n$, $n > 2$. Под областью мы понимаем далее открытое связное множество. Для мультииндекса $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ обозначим через X_α коммутатор

$$[X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots, [X_{i_{m-1}}, X_{i_m}] \dots]]$$

длины $|\alpha| = m$. В работе мы предполагаем, что семейство векторных полей удовлетворяет в области G условию гипоэллиптичности Хёрмандера. Это означает существование целого положительного числа s такого, что коммутаторы векторных полей порядка $|\alpha| = s$ образуют касательное пространство в каждой точке замыкания области G.

Введем множество векторных полей

$$X^{(1)} = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}, X^{(2)} = \{[X_1, X_2], \dots, [X_{k-1}, X_k]\}, \dots$$

таким образом, чтобы компоненты набора $X^{(p)}$ были коммутаторами длины p. Обозначим через $Z_1, Z_2, \dots, Z_q$ некоторую нумерацию векторных полей, входящих в совокупность $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(s)}$. Если Z_i — элемент $X^{(j)}$, то будем говорить, что Z_i имеет формальную степень $d(Z_i) = j$ или короче $d(Z_i) = d_i = j$.

Определим, следуя [7], метрику, ассоциированную с семейством векторных полей. Пусть $C(\delta)$ обозначает класс абсолютно непрерывных отображений $\varphi\colon [0;1] \to G$, почти всюду удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{q} a_j(t) Z_j(\varphi(t)), \qquad |a_j(t)| < \delta^{d_j}.$$

Тогда величина $\rho(x,y) = \inf\{\delta > 0 \mid$ существует такое отображение $\varphi \in C(\delta)$, что $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y\}$ есть метрика на G. Метрический шар есть множество точек $B(x,\delta) = \{y \in G : \rho(x,y) < \delta\}$.

Пусть $\Omega \subset G$ — такая область, что $\overline{\Omega} \subset G$. Пусть w — локально интегрируемая неотрицательная функция на области Ω. Тогда мера Радона μ, канонически ассоциируемая с весом w, определяется как $\mu(E) = \int\limits_E w(x)\,dx$. Поэтому $d\mu(x) = w(x)\,dx$, где dx — n-мерная мера Лебега. Будем говорить, что весовая функция w (или мера μ) *p-допустима*, если выполнены следующие условия:

$\mathscr{W}1$. $0 < w < \infty$ почти всюду в Ω, и мера μ удовлетворяет условию удвоения: $\mu(2B) \leqslant c_1 \mu(B)$ для любого шара $B = B(x,r)$ такого, что $2B = B(x,2r) \subset \Omega$, с постоянной c_1, не зависящей от выбора шара.

$\mathscr{W}2$. Если D — открытое подмножество Ω, $\varphi_i \in C^\infty(D)$ — последовательность функций такая, что

$$\int\limits_D |\varphi_i|^p \, d\mu \to 0 \qquad \text{и} \qquad \int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi_i - v|^p \, d\mu \to 0$$

при $i \to \infty$, где $v \in L_p(D;\mu;\mathbb{R}^k)$, то $v = 0$.

$\mathscr{W}3$. Существуют положительные числа $\varkappa > 1$, r_0 и c_3 такие, что

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B |\varphi|^{\varkappa p} \, d\mu\right)^{1/\varkappa p} \leqslant c_3 r \left(\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(B)$ и шара $B(x,r) \subset G$, $x \in \overline{\Omega}$, $0 < r < r_0$.

$\mathscr{W}4$. Существуют положительные числа r_0, c_4 такие, что верно неравенство

$$\int\limits_B |\varphi - \varphi_B|^p \, d\mu \leqslant c_4 r^p \int\limits_B |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi|^p \, d\mu$$

для любой функции $\varphi \in C^\infty(B)$ и произвольного шара $B(x,r) \subset G$, $x \in \overline{\Omega}$, $0 < r < r_0$.

Здесь и далее $\varphi_B = \mu(B)^{-1}\int\limits_B \varphi \, d\mu$, а $\nabla_{\mathscr{L}}\varphi = (X_1\varphi, X_2\varphi, \dots, X_k\varphi)$ есть субградиент функции φ.

Постоянные c_1, c_3 и c_4 могут зависеть от области $\Omega \subset G$. Если $w = 1$, то условие $\mathscr{W}1$ доказано в [7], $\mathscr{W}3$ (неравенство Соболева) — в [8, 9], а $\mathscr{W}4$ (неравенство Пуанкаре) — в [10]. Если для любого шара $B \subset G$ выполнено условие

$$\left(|B|^{-1}\int\limits_B w(x) \, dx\right)\left(|B|^{-1}\int\limits_B w(x)^{-1/(p-1)} \, dx\right)^{p-1} \leqslant c_w$$

для некоторой постоянной c_w, не зависящей от выбора шара B, то весовая функция w удовлетворяет A_p-условию Макенхаупта в области G, ($w \in A_p(G)$). Если $w \in A_p(G)$, то условия $\mathscr{W}3$ и $\mathscr{W}4$ (весовые неравенства Соболева и Пуанкаре) установлены в [11].

Доказано, что условия $\mathscr{W}1$–$\mathscr{W}4$ не являются независимыми: в работе [12] установлено, что из неравенства Пуанкаре вытекает неравенство Соболева.

Для функции $\varphi \in C^\infty(D)$, где область $D \subset \Omega$ может совпадать с Ω, полагаем

$$\|\varphi \mid W_p^1(D;\mu)\| = \left(\int\limits_D |\varphi|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Пространство Соболева $W_p^1(D;\mu)$ определяется как пополнение класса $\{\varphi \in C^\infty(D) : \|\varphi \mid W_p^1(D;\mu)\| < \infty\}$ относительно нормы $\|\varphi \mid W_p^1(D;\mu)\|$. Другими словами, функция u лежит в классе $W_p^1(D;\mu)$, если и только если $u \in L_p(D;\mu)$ и найдется векторнозначная функция $v \in L_p(D;\mu;\mathbb{R}^k)$ такая, что для некоторой последовательности $\varphi_i \in C^\infty(D)$ верно

$$\int\limits_D |\varphi_i - u|^p \, d\mu \to 0 \qquad \text{и} \qquad \int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi_i - v|^p \, d\mu \to 0,$$

когда $i \to \infty$. Функцию v называют *субградиентом* функции u в $W_p^1(D;\mu)$ и обозначают $v = \nabla_{\mathscr{L}} u$. Условие $\mathscr{W}2$ влечет корректность определения субградиента функции u. Пространство $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$ есть пополнение $C_0^\infty(D)$ в $W_p^1(D;\mu)$. Ясно, что $W_p^1(D;\mu)$ и $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$ — банаховы пространства относительно нормы $\|\cdot \mid W_p^1(D;\mu)\|$. Будем говорить, что *функция лежит в классе* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mu)$, если она лежит в классе $W_p^1(K;\mu)$ для каждой компактной области $K \Subset D$ (т. е. K — ограниченная область и $\overline{K} \subset D$).

Определим внутреннюю метрику $d_\Omega(x,y)$ на области Ω, $x,y \in \Omega$, положив $d_\Omega(x,y) = \inf\{\delta > 0 \mid$ существует такое отображение $\varphi \in C(\delta)$, что $\varphi(t) \in \Omega$ для всех $t \in [0,1]$, $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y\}$. Рассмотрим метрическое пространство $\Omega_1 = (\Omega; d_\Omega)$ и тождественное отображение $\pi\colon \Omega_1 \to \Omega$, $\pi(x) = x$, $x \in \Omega$. Если $\{x_l\}$, $l \in \mathbb{N}$, — фундаментальная в Ω_1 последовательность точек, то $\{\pi(x_l)\}$, $l \in \mathbb{N}$, есть последовательность, фундаментальная в области Ω. Следовательно, последовательность $\{\pi(x_l)\}$, $l \in \mathbb{N}$, сходится либо к некоторой точке, лежащей внутри области Ω, либо к точке, принадлежащей евклидовой границе $\partial\Omega = \overline{\Omega}\setminus\Omega$ области Ω. В первом случае исходная последовательность сходится к некоторой точке $x_0 \in \Omega_1$, а во втором — последовательность $\{x_l\}$, $l \in \mathbb{N}$, предела в Ω_1 не имеет. Пополним метрическое пространство Ω_1 по теореме Хаусдорфа и обозначим пополнение символом $\widetilde{\Omega}_1$. В результате к области Ω присоединятся несобственные элементы — это в точности пределы фундаментальных в Ω_1 последовательностей, соответствующих второму из рассмотренных случаев. Множество $\partial\widetilde{\Omega}_1 = \widetilde{\Omega}_1 \setminus \Omega_1$ называется в дальнейшем *1-границей* области Ω, и предполагается, что $\partial\widetilde{\Omega}_1$ является компактным множеством. Для множества D, лежащего строго внутри области Ω, $D \Subset \Omega$, имеет место совпадение его границы ∂D в метрическом пространстве $(G,\rho(x,y))$ (замыкания области D в метрическом пространстве $(G,\rho(x,y))$) с границей в метрическом пространстве $\widetilde{\Omega}_1$ (с замыканием в метрическом пространстве $\widetilde{\Omega}_1$).

Наряду с пространствами Соболева на области Ω рассмотрим пространства Соболева $W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$ и $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$ на $\widetilde{\Omega}_1$, определяемые как пополнение функций из $C(\widetilde{\Omega}_1) \cap W_p^1(\Omega;\mu)$ и $C(\widetilde{\Omega}_1) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mu)$ соответственно, по норме $\|\cdot \mid W_p^1(\Omega;\mu)\|$. (Здесь $C(\widetilde{\Omega}_1)$ есть пространство непрерывных на пополнении $\widetilde{\Omega}_1$ функций.) Норму в пространстве $W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$ обозначим символом $\|\cdot \mid W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)\|$. Очевидно, что ограничения функций пространства $W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$ $\big(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)\big)$ на Ω принадлежат классу Соболева $W_p^1(\Omega;\mu)$ $\big(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mu)\big)$. Формально это вложение индуцируется тождественным отображением $i\colon \Omega \to \widetilde{\Omega}_1$, $i(x) = x$, $x \in \Omega$, по правилу $i^* = f \circ i$. (Свойства пространств Соболева $W_p^1(\Omega;\mu)$ и $W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$ см. в [4, 5].)

Определение 1.1. *Емкостью* компакта $K \subset \widetilde{\Omega}_1$ в пространстве $W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$ называется следующая величина:

$$\operatorname{cap}(K, W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)) = \inf\{\, \|f \mid W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)\|^p :$$
$$f \in C(\widetilde{\Omega}_1) \cap W_p^1(\Omega;\mu),\ f(x) \geqslant 1 \quad \text{для всех} \quad x \in K\}.$$

Для произвольного множества $E \subset \widetilde{\Omega}_1$ его внутренняя емкость есть величина

$$\underline{\operatorname{cap}}(E, W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)) = \sup\{\operatorname{cap}(K, W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)) : K \subset E,\ K \text{ компактно}\},$$

а его внешняя емкость — величина

$$\overline{\operatorname{cap}}(E, W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)) = \inf\{\underline{\operatorname{cap}}(V, W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)) : E \subset V \subset \widetilde{\Omega}_1,\ V \text{ открыто}\}.$$

Скажем, что множество E имеет емкость нуль, если

$$\operatorname{cap}\bigl(E, W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)\bigr) = 0.$$

(Свойства емкости см. в [5, §6].)

Пусть $D \subset \Omega$ — некоторое открытое подмножество в полном метрическом пространстве $\widetilde{\Omega}_1$, снабженном внутренней метрикой $d_\Omega(x,y)$. Не исключается возможность совпадения замыкания $\overline{D}$ со всем пространством $\widetilde{\Omega}_1$. Здесь и далее замыкание $\overline{D}$ понимается в смысле замыкания относительно метрики $d_\Omega(x,y)$, а граница ∂D есть граница в метрическом пространстве $\widetilde{\Omega}_1$. В статье одновременно рассматриваются два случая расположения компактных множеств K_0 и K_1 в метрическом пространстве $\widetilde{\Omega}_1$.

Первый случай. Фиксируем два компактных множества K_0 и K_1 таких, что $K_0 \cap K_1 = \varnothing$, $K_0 \subset \overline{D}$, $K_1 \subset \overline{D}$, и имеющих положительные емкости $\operatorname{cap}\bigl(K_0, W_p^1(D;\mu)\bigr)$ и $\operatorname{cap}\bigl(K_1, W_p^1(D;\mu)\bigr)$. Определим пространство $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D, K_0 \cup K_1;\mu)$ $\bigl(\overset{\circ}{L}{}_p^1(D, K_0 \cup K_1;\mu)\bigr)$ как пополнение по весовой норме $\bigl\|\cdot \mid W_p^1(D;\mu)\bigr\|$ $\bigl(\bigl\|\cdot \mid L_p^1(D;\mu)\bigr\|\bigr)$ всех таких функций $f \in C(\overline{D}) \cap W_p^1(D;\mu)$ $\bigl(f \in C(\overline{D}) \cap L_p^1(D;\mu)\bigr)$, что f обращается в ноль в окрестности (относительно топологии в $\overline{D}$) объединения $K_0 \cup K_1$. Далее, в основном, рассматривается ситуация, когда пересечение компактов K_0 и K_1 с границей ∂D множества D не пусто.

Второй случай. Если $K_0 = \varnothing$, то роль компакта K_1 всегда играет граница ∂D множества D. В этом случае полагаем

$$\overset{\circ}{W}{}_p^1(D, K_0 \cup K_1;\mu) = \overset{\circ}{W}{}_p^1(D;\mu) \quad \bigl(\overset{\circ}{L}{}_p^1(D, K_0 \cup K_1;\mu) = \overset{\circ}{L}{}_p^1(D;\mu)\bigr).$$

В первом случае все понятия, термины, классы, функции снабжаются значком σ, символизирующим сумму компактов $K_0 \cup K_1$. Во втором случае значок σ опускается.

§2. $\mathscr{A}^\sigma$-Супергармонические функции

Рассмотрим уравнение

$$-\operatorname{div}_* \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u) = 0, \tag{2.1}$$

где $\nabla_{\mathscr{L}} u = (X_1 u, X_2 u, \dots, X_k u)$. Здесь $\mathscr{A}\colon \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ — отображение, удовлетворяющее для некоторых чисел $1 < p < \infty$ и $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$ следующим условиям:

($\mathscr{A}$1) отображение $x \to \mathscr{A}(x,\xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbb{R}^k$, а отображение $\xi \to \mathscr{A}(x,\xi)$ непрерывно для почти всех $x \in \Omega$,

($\mathscr{A}$2) $\mathscr{A}(x,\xi)\cdot\xi \geqslant \alpha w(x)|\xi|^p$,

($\mathscr{A}$3) $|\mathscr{A}(x,\xi)| \leqslant \beta w(x)|\xi|^{p-1}$,

($\mathscr{A}$4) $(\mathscr{A}(x,\xi_1) - \mathscr{A}(x,\xi_2))(\xi_1 - \xi_2) > 0$ для всех $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^k$, $\xi_1 \neq \xi_2$,

($\mathscr{A}$5) $\mathscr{A}(x,\lambda\xi) = \lambda|\lambda|^{p-2}\mathscr{A}(x,\xi)$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

В условиях ($\mathscr{A}$2), ($\mathscr{A}$3) неотрицательная функция w есть некоторый p-допустимый вес на области Ω.

Определение 2.1. Функция $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mu)$ называется (*слабым*) *решением* уравнения (2.1) на множестве $D \subset \Omega$ относительно компактов K_0 и K_1, если для каждой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D, K_0 \cup K_1;\mu)$, непрерывной на множестве $D \cup K_0 \cup K_1 \subset \widetilde{\Omega}_1$ и обращающейся в нуль в окрестности объединения $K_0 \cup K_1$, имеет место соотношение

$$\int\limits_{D\setminus(K_0\cup K_1)} \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\, dx = 0. \tag{2.2}$$

Определение 2.2. Непрерывная функция $u\colon D\to\mathbb{R}$ называется *$\mathscr{A}^\sigma$-гармонической* на множестве $D\subset\Omega$ относительно компактов K_0 и K_1 $\big(u\in\mathscr{H}^\sigma(D)$ или $u\in\mathscr{H}(D,K_0\cup K_1)\big)$, если она является слабым решением уравнения (2.1) на множестве $D\subset\widetilde{\Omega}_1$ относительно компактов K_0 и K_1.

Определение 2.3. Функция $u\colon D\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ называется *$\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической* в $D\subset\Omega$ относительно компактов K_0 и K_1 $(u\in S^\sigma(D)$ или $u\in S(D,K_0\cup K_1))$, если выполнены следующие условия:

(1) функция u полунепрерывна снизу,

(2) на каждой компоненте связности множества D функция u не равна тождественно бесконечности,

(3) для каждого открытого множества $V\subset D$ такого, что $D\setminus\overline{V}=U_0\cup U_1$, $\overline{U_0\cap U_1}=\varnothing$, $K_0\subset U_0$, $K_1\subset U_1$, и каждой $\mathscr{A}^\sigma$-гармонической в V относительно $\overline{\partial V\cap D}$, непрерывной в $V\cup(\partial V\cap D)$ функции h из того, что неравенство $h\leqslant u$ выполняется на $\partial V\cap D$, следует, что оно выполняется на всем множестве V.

Функция v называется *$\mathscr{A}^\sigma$-субгармонической* $(v\in -S^\sigma(D)$ или $v\in -S(D,$ $K_0\cup K_1))$, если $-v\in S^\sigma(D)$.

Во втором случае при $X_i=\partial/\partial x_i$ (стандартные векторные поля) приведенные выше определения принимают общепринятые формулировки, которые могут быть найдены в [2]. Если не возникает разночтений, мы опускаем слова «относительно компактов K_0 и K_1».

Предложение 2.1. *$\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция на множестве D относительно компактов $K_0\subset\partial D$ и $K_1\subset\partial D$ является $\mathscr{A}$-гармонической на множестве D.*

Доказательство. Действительно, допустим, что функция h $\mathscr{A}^\sigma$-гармонична относительно компактных множеств K_0 и K_1, принадлежащих границе ∂D области D, а на оставшейся части границы, т. е. на $\partial D\setminus(K_0\cup K_1)$, граничные данные «распределились свободным образом». Тогда для всякой финитной в области D функции $\varphi\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(D;\mu)$ выполняется соотношение (2.2). Предложение доказано.

Следующие свойства $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций вытекают из определения.

Лемма 2.1. *Если u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция, то для любых действительных чисел λ и τ, $\lambda\geqslant 0$, функция $\lambda u+\tau$ также $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая.*

Лемма 2.2. *Если u и v — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонические в D функции, то $\min(u,v)$ также есть $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в D.*

Лемма 2.3. *Пусть $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций в D. Если последовательность функций $\{u_i\}$ либо возрастает, либо сходится равномерно на компактных подмножествах D, то в области D предельная функция $u=\lim\limits_{i\to\infty}u_i$ является $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической, за исключением случая, когда $u\equiv\infty$.*

Лемма 2.4. *Предположим, что F — семейство локально равномерно ограниченных снизу $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций в D относительно компактов $K_0\subset\partial D$ и $K_1\subset\partial D$. Тогда полунепрерывная снизу регуляризация s функции $\inf F$*

$$s(x)=\lim_{r\to 0}\inf_{B(x,r)}(\inf F)$$

является $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической функцией относительно тех же компактов K_0 и K_1.

Доказательство. Так как семейство $F = \{u : u \in S^\sigma(D)\}$ локально равномерно ограничено снизу, то функция s полунепрерывна снизу. Фиксируем открытое множество $V \subset D$ так, чтобы $K_0 \cup K_1 \subset \Omega \setminus \overline{V}$ и любые окрестности компактов K_0 и K_1 не пересекались. Пусть h — $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция в V относительно $\overline{\partial V \cap D}$, непрерывная в V вплоть до границы $\partial V \cap D$ и такая, что $h \leqslant s$ на $\partial V \cap D$. Тогда $h \leqslant u$ в V для любой функции $u \in F$, значит, воспользовавшись непрерывностью функции h, имеем, что $h \leqslant s$ в V. Лемма 2.4 доказана.

Из леммы 2.4 так же, как и в [2, теорема 7.5], выводится

Лемма 2.5. *Пусть $u\colon D \to (a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция. Если функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ выпукла вверх и возрастает, то суперпозиция $f \circ u$ — также $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция.*

Определим понятие регулярной граничной точки.

Определение 2.4. Точка $x_0 \in K_0 \cup K_1 \subset \partial D$, внутренняя для одного из компактов K_0, K_1 (относительно индуцированной на границе $\partial D \subset \overline{D}$ топологии), *регулярна в смысле Соболева* для ограниченного открытого множества D, если равенство

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in D}} h(x) = \theta(x_0)$$

выполнено для любой функции $\theta \in W^1_p(D; \mu)$, непрерывной на множестве $D \cup K_0 \cup K_1 \subset \widetilde{\Omega}_1$ и такой функции $h \in \mathscr{H}^\sigma(D)$, что $h - \theta \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D, K_0 \cup K_1; \mu)$. В дальнейшем, говоря о регулярной точке компакта K_0 или K_1, всегда предполагаем, что рассматриваемая точка является внутренней для этого компакта.

Теорема 2.1 (принцип сравнения). *Предположим, что u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция, а v — $\mathscr{A}^\sigma$-субгармоническая функция в области Ω относительно компактов $K_0 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ и $K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, имеющих положительные емкости $\operatorname{cap}(K_i, W^1_p(\widetilde{\Omega}_1; \mu))$, $i = 0, 1$. Если для всех точек $x \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ выполняется неравенство*

$$\varlimsup_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ y\in\Omega}} v(y) \leqslant \varliminf_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ y\in\Omega}} u(y)$$

и если обе части неравенства не обращаются в $+\infty$ или $-\infty$, то $v \leqslant u$ в Ω.

Доказательству принципа сравнения предпошлем следующую лемму.

Лемма 2.6. *Пусть $K \subset \widetilde{\Omega}_1$ — компакт. Тогда точки множества $\partial V \cap \Omega$, где $V = \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K) > \alpha\}$, регулярны.*

Доказательство. Так как множество $\partial V \cap \Omega$ относительно замкнуто, то для любой точки $x \in \partial V \cap \Omega$ существует такое число ε, что шар $B(x, \varepsilon)$ целиком лежит в области Ω и не пересекает компакт K. Пусть точка $z \in K$ — ближайшая к x, а y — это точка пересечения шара $B(x, \varepsilon)$ с кратчайшей кривой, соединяющей точки x и z. Имеют место оценки

$$|B(x,\varepsilon) \setminus V| \geqslant |B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon)| \geqslant |B(y',\varepsilon/3)| \geqslant {}^1\!/_5|B(x,\varepsilon)|,$$

где y' — середина кратчайшей кривой, соединяющей точки x и y. Здесь символ $|A|$ означает меру Лебега множества A. Таким образом, выполняется достаточное условие критерия Винера [4] и поэтому точки множества $\partial V \cap \Omega$ регулярны.

Доказательство принципа сравнения. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Покроем каждый компакт K_0 и K_1, принадлежащий границе $\partial\widetilde{\Omega}_1$, совокупностью шаров относительно внутренней метрики $B(x, r(x))$, в каждом из которых выполняется неравенство $v < u + \varepsilon$. Выбрав конечное число таких шаров, рассмотрим их объединение W.

Пусть $\tau = \min\{d_\Omega(K_0, \Omega \setminus W), d_\Omega(K_1, \Omega \setminus W)\}$. Тогда согласно лемме 2.6 точки множества $\partial V \cap \Omega$, где $V = \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_0) > \tau/2\} \cap \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_1) > \tau/2\}$, регулярны, причем в каждой точке $z \in \partial V \cap \Omega$ выполняется неравенство $v < u + \varepsilon$.

Доопределим функцию v на $\partial\widetilde{\Omega}_1$ ее верхним пределом, при этом полученная функция будет полунепрерывной сверху. Выберем строго убывающую последовательность функций $\varphi_i \in C(\widetilde{\Omega}_1)$, сходящуюся к v на $\widetilde{\Omega}_1$. Ввиду того, что множество $\overline{\partial V \cap \Omega}$ компактно, а функция $u + \varepsilon$ полунепрерывна снизу, то, начиная с некоторого номера i, на множестве $\overline{\partial V \cap \Omega}$ выполняется неравенство $\varphi_i \leqslant u + \varepsilon$. Пусть h — $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция в области V относительно $\overline{\partial V \cap \Omega}$, непрерывная в V вплоть до $\partial V \cap \Omega$, и пусть $h = \varphi_i$ на $\partial V \cap \Omega$. Тогда на границе $\partial V \cap \Omega$ имеем неравенства $v \leqslant \varphi_i \leqslant u + \varepsilon$ или $v \leqslant h \leqslant u + \varepsilon$, а значит, $v \leqslant h \leqslant u + \varepsilon$ всюду в V. Ввиду произвольности ε неравенство $v \leqslant u$ выполняется всюду в V.

Из принципа сравнения получаем следующее свойство.

Лемма 2.7. *Функция h является $\mathscr{A}^\sigma$-гармонической тогда и только тогда, когда она одновременно $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая и $\mathscr{A}^\sigma$-субгармоническая.*

Лемма 2.8 (первая лемма о склейке). *Предположим, что $D \subset \Omega$ — открытое множество, замыкание которого содержит один из компактов $K_i \subset \widetilde{\Omega}_1$, $i = 0, 1$ (для определенности положим $i = 0$). Пусть u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω относительно компактов K_0 и K_1, а функция v — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в D относительно K_0 и $\overline{\partial D \cap \Omega}$. Если функция*

$$s = \begin{cases} \min(u, v) & \text{в} \quad D, \\ u & \text{в} \quad \Omega \setminus D \end{cases}$$

полунепрерывна снизу, то она — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в Ω относительно K_0 и K_1.

Доказательство. Определим множество $V = \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_0) > \alpha\} \cap \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_1) > \alpha\}$, где α — некоторое число, меньшее расстояния от $\partial D \cap \Omega$ до компакта K_0. Пусть h — $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция, определенная на V, непрерывная в V вплоть до части границы $\partial V \cap \Omega$ и такая, что $h \leqslant s$ на $\partial V \cap \Omega$. Тогда $h \leqslant u$ в V, т. е. на множестве $V \setminus \overline{D}$ неравенство $h \leqslant s$ получено. Покажем, что оно верно и на множестве $D \cap V$. Так как s — полунепрерывная снизу функция, то для всех $x \in \partial D \cap V$ справедливы неравенства

$$\lim_{\rho(x,y) \to 0} h(y) \leqslant u(x) = s(x) \leqslant \varliminf_{\rho(x,y) \to 0} v(y).$$

Тогда из принципа сравнения следует, что $h \leqslant s$ в $D \cap V$. Поэтому $h \leqslant s$ в V. Лемма 2.8 доказана.

Аналогично доказывается еще один вариант леммы о склейке.

Лемма 2.9 (вторая лемма о склейке). *Предположим, что $D \subset \Omega$ — такое открытое множество, что его дополнение $\Omega \setminus \overline{D}$ содержит непересекающиеся окрестности компактов K_0 и K_1. Пусть u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω относительно компактов K_0 и K_1, а функция v — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в D относительно $\overline{\partial D \cap \Omega}$. Если функция*

$$s = \begin{cases} \min(u, v) & \text{в} \quad D, \\ u & \text{в} \quad \Omega \setminus D \end{cases}$$

полунепрерывна снизу, то она $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в Ω относительно K_0 и K_1.

Доказательство этой леммы аналогично предыдущей, однако выбор числа α осуществляется следующим образом: $\alpha < \min(d_\Omega(\partial D \cap \Omega, K_0), d_\Omega(\partial D \cap \Omega, K_1))$.

Замечание 2.1. Предположим, что $D \Subset \Omega$ или множество $D \subset \Omega$ располагается таким образом, что замыкание $\overline{D}$ содержит точки компакта $K_0 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, но не содержит точек из $\partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus K_0$. Если функция v — $\mathscr{A}$-супергармоническая в D, а функция u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в области Ω относительно компактов K_0 и K_1, то при условии, что функция

$$s = \begin{cases} \min(u, v) & \text{в} \quad D, \\ u & \text{в} \quad \Omega \setminus D \end{cases}$$

полунепрерывна снизу, получаем, что s — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в области Ω относительно K_0 и K_1.

При доказательстве замечания 2.1 выберем множество V по схеме леммы 2.6 и заметим, что неравенство

$$\lim_{\substack{\rho(x,y)\to 0\\ y\in D\cap V}} h(y) \leqslant s(x) \leqslant \varliminf_{\substack{\rho(x,y)\to 0\\ y\in D\cap V}} s(y)$$

выполняется для всех точек $x \in \partial(D \cap V)$, откуда получаем, что $h \leqslant s$ в $D \cap V$. Значит, неравенство $h \leqslant s$ верно на всем множестве V.

Лемма 2.10. *Если u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в области Ω, то множество $\{x \in \Omega : u(x) < \infty\}$ плотно в Ω.*

Доказательство. Предположим, что существует шар $B \Subset \Omega$ такой, что $u = \infty$ в $\overline{B}$. Выберем точку $y \in \Omega$, $u(y) < \infty$. Пусть $\tau = \min(d_\Omega(y, K_i), d_\Omega(\partial B, K_i))$, $i = 0, 1$, и пусть $D = \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_0) > \tau/2\} \cap \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_1) > \tau/2\}$. Тогда D содержит точку y и шар $\overline{B}$, а также согласно лемме 2.6 является регулярным множеством. Выберем функцию h, $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническую в $D \setminus \overline{B}$, непрерывную вплоть до $\partial D \cap \Omega$ и на границе ∂B шара B, принимающую значения 0 на $\partial D \cap \Omega$ и 1 на ∂B. Если $m = \inf\limits_{\overline{D}} u$, то $m > -\infty$. По принципу сравнения $ih \leqslant u - m$ в $D \setminus \overline{B}$ для каждого целого i. Так как по принципу минимума $h(y) > 0$, то имеем $\lim\limits_{i\to\infty} ih(y) = \infty$, а это противоречит неравенству $ih(y) \leqslant u(y) - m < \infty$. Лемма доказана.

Следствие 2.1. *Если $u \in S(\Omega, K_0 \cup K_1)$, то $u \in S(D, (K_0 \cap \overline{D}) \cup (K_1 \cap \overline{D}))$ для любого открытого множества $D \subset \Omega$ такого, что*

$$\operatorname{cap}(\overline{D} \cap K_i, W_p^1(D; \mu)) > 0, \quad i = 0, 1.$$

Теорема 2.2 (строгий принцип минимума). *Непостоянная $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция u не может достигать своей нижней грани в области Ω.*

Доказательство. Предположим, что функция u достигает нижней грани в точке x. Пусть $u(x) = m = \inf_\Omega u$, и пусть $u(y) > m$. Тогда неравенство $u > m$ выполняется на некоторой открытой области D. Введем обозначение $v_i = i(u - m)$. Так как $v_i(x) = 0$, то функция $v = \lim\limits_{i\to\infty} v_i$ — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в Ω. С другой стороны, $v = \infty$ в D, что противоречит лемме 2.10.

Введем понятие *модификации Пуассона.* Предположим, что функция u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в области Ω относительно компактов K_0 и K_1 и $D \subset \Omega$ — открытое множество такое, что точки $x \in \partial D \cap \Omega$ регулярны и $\Omega \setminus \overline{D} = U_0 \cup U_1$, $U_0 \cap U_1 = \varnothing$, $K_0 \subset U_0$, $K_1 \subset U_1$. Положим

$$u_D = \inf\Big\{v : v \in S(D, \overline{\partial D \cap \Omega}), \varliminf_{d_\Omega(x,y)\to 0} v(y) \geqslant u(x) \quad \text{для любой точки} \quad x \in \partial D \cap \Omega\Big\}.$$

Назовем *модификацией Пуассона* $P^\sigma(u,D)=P(u,D,\partial D\cap\Omega)$ функции u в области D следующую функцию:

$$P^\sigma(u,D)=P(u,D,\partial D\cap\Omega)=\begin{cases} u & \text{в} \quad \Omega\setminus D,\\ u_D & \text{в} \quad D.\end{cases}$$

Лемма 2.11. *Модификация Пуассона $P(u,D,\partial D\cap\Omega)$ — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в области Ω относительно компактов K_0 и K_1 и $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая в D относительно $\overline{\partial D\cap\Omega}$. Кроме того, справедливо неравенство*

$$P(u,D,\partial D\cap\Omega)\leqslant u \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Доказательство. Очевидно, что $P(u,D,\partial D\cap\Omega)\leqslant u$ в Ω. Доопределим функцию u на $\partial\widetilde{\Omega}_1$ ее нижним пределом. Далее выберем возрастающую последовательность $\varphi_i\in C^\infty(\widetilde{\Omega}_1)$, сходящуюся к u в $\widetilde{\Omega}_1$. Пусть $\mathscr{A}^\sigma$-гармонические функции h_i таковы, что они непрерывны в D вплоть до $\partial D\cap\Omega$ и $h_i=\varphi_i$ на $\partial D\cap\Omega$. По принципу сравнения последовательность $\{h_i\}$ возрастает и, следовательно, по теореме Гарнака о сходимости (см.[4]) предельная функция $h=\lim\limits_{i\to\infty}h_i$ является $\mathscr{A}^\sigma$-гармонической в D. Заметим, что $h\leqslant u$, поэтому функция h принимает конечные значения (лемма 2.10). Для точек $y\in\partial D\cap\Omega$ выполняется неравенство

$$\varliminf_{\rho(x,y)\to 0} h(x)\geqslant\lim_{i\to\infty}\varphi_i(y)=u(y).$$

Следовательно, $h\geqslant P(u,D,\partial D\cap\Omega)$ в D. С другой стороны, из принципа сравнения вытекает, что $h_i\leqslant P(u,D,\partial D\cap\Omega)$ в D для всех i и поэтому сужение $P(u,D,\partial D\cap\Omega)|_D=h$ — $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция в D относительно $\overline{\partial D\cap\Omega}$. Это утверждение показывает также, что функция $P(u,D,\partial D\cap\Omega)$ полунепрерывна снизу, значит, $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая по лемме 2.9.

На основании леммы 2.11 можно дать другое определение модификации Пуассона: *в области D функция $P(u,D,\partial D\cap\Omega)$ есть предел некоторой возрастающей последовательности $\mathscr{A}^\sigma$-гармонических функций h_i на множестве D относительно $\overline{\partial D\cap\Omega}$, непрерывных в D вплоть до $\partial D\cap\Omega$ и таких, что граничные значения функций h_i возрастают к значениям u на $\partial D\cap\Omega$.*

Если в качестве множества D рассмотреть шар $B(x,r)\Subset\Omega$, то модификацией Пуассона $P(u,B)$ функции u в шаре $B(x,r)$ называется предел некоторой возрастающей последовательности функций $h_i\in C(\overline{B})\cap\mathscr{H}(B)$ таких, что граничные значения функций h_i возрастают к значениям u на границе шара $B(x,r)$. В этом случае $P(u,B)\leqslant u$ в Ω и модификация Пуассона $P(u,B)$ есть $\mathscr{A}$-гармоническая функция в шаре $B(x,r)$ (см. [2, лемма 7.14]).

§ 3. Связь суперрешений и $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций

Определение 3.1. Функция $u\in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mu)$ называется *суперрешением* уравнения (2.1) в области D относительно множеств K_0 и K_1, если

$$\int\limits_{D\setminus(K_0\cup K_1)}\mathscr{A}(x,\nabla_{\mathscr{L}}u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\,dx\geqslant 0$$

для каждой неотрицательной функции $\varphi\in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D,K_0\cup K_1;\mu)$, непрерывной на множестве $D\cup K_0\cup K_1$ и равной нулю в окрестности объединения компактов $K_0\cup K_1$.

Заметим, что если суперрешение $u\in L^1_p(D;\mu)$, то интегральное соотношение в вышеприведенном определении справедливо для любой функции $\varphi\in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D,K_0\cup K_1;\mu)$ (см. аналогичное рассуждение в [5, лемма 2.1]).

Скажем, что функция $v\in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D;\mu)$ — *субрешение* уравнения (2.1) в области D относительно множеств K_0 и K_1, если $(-v)$ есть суперрешение уравнения (2.1) в области D относительно множеств K_0 и K_1.

Лемма 3.1. *Пусть K — компакт положительной емкости*

$$\operatorname{cap}(K, W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)).$$

Если $\nabla_{\mathcal{L}}\varphi = 0$ почти всюду в Ω и $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\widetilde{\Omega}_1, K;\mu)$, то $\varphi = 0$ почти всюду в области Ω.

Доказательство. Ввиду того, что $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\widetilde{\Omega}_1, K;\mu)$, существует последовательность непрерывных функций φ_n, равных нулю в окрестности компакта K, и такая, что

$$\|\varphi_n - \varphi \mid W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)\| \to 0.$$

Из условий леммы 3.1 следует, что $\nabla_{\mathcal{L}}\varphi_n \to 0$, а функция $\varphi = \mathrm{const}$ почти всюду в Ω. Покажем, что эта постоянная равна нулю. Предположим, что $\varphi = a > 0$ и рассмотрим последовательность функций $\psi_n = (a - \varphi_n)/a$. Функции ψ_n непрерывны и равны 1 в окрестности компакта K, таким образом, они являются допустимыми функциями для измерения емкости компакта K. Имеем

$$\operatorname{cap}(K, W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)) = \inf\{\|\psi_n \mid W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)\|^p\} = 0,$$

что противоречит предположению теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть множество $K_i \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ имеет положительную емкость $\operatorname{cap}(K_i, W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu))$, $i = 1, 2$. Пусть даны суперрешение $u \in W_p^1(\Omega;\mu)$ и субрешение $v \in W_p^1(\Omega;\mu)$ уравнения (2.1) в области Ω относительно множеств K_0 и K_1. Если $\min(u - v, 0) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1;\mu)$, то $u \geqslant v$ почти всюду в Ω.*

Доказательство. Функция $\eta = \min(u - v, 0)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1;\mu)$, поэтому

$$\begin{aligned} 0 \geqslant \int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathcal{L}} u)\nabla_{\mathcal{L}}\eta\,dx - \int_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathcal{L}} v)\nabla_{\mathcal{L}}\eta\,dx \\ = \int_{u<v} (\mathscr{A}(x, \nabla_{\mathcal{L}} u) - \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathcal{L}} v)) \cdot (\nabla_{\mathcal{L}} u - \nabla_{\mathcal{L}} v)\,dx. \end{aligned}$$

С другой стороны, по условию ($\mathscr{A}4$) последний интеграл неотрицателен. По этой причине $\nabla_{\mathcal{L}}\eta = 0$ почти всюду в Ω. Так как $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1;\mu)$, то по лемме 3.1 равенство $\eta = 0$ выполняется почти всюду в Ω.

Для функции u, определенной в D, полагаем

$$\operatorname{ess}\varliminf_{\rho(x,y)\to 0} u(y) = \lim_{r\to 0} \operatorname{ess}\inf_{B(x,r)} u.$$

Тогда для полунепрерывной снизу функции верно

$$u(x) \leqslant \varliminf_{\rho(x,y)\to 0} u(y) \leqslant \operatorname{ess}\varliminf_{\rho(x,y)\to 0} u(y).$$

Поэтому если функция $u\colon D \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ удовлетворяет равенству

$$u(x) = \operatorname{ess}\varliminf_{\rho(x,y)\to 0} u(y)$$

для всех точек $x \in D$, то функция u полунепрерывна снизу в D.

Теорема 3.2. *Пусть функция u — суперрешение уравнения (2.1) в области Ω относительно множеств K_0 и K_1 и для каждой точки $x \in \Omega$ выполняется свойство*

$$u(x) = \operatorname{ess}\varliminf_{\rho(x,y)\to 0} u(y). \tag{3.1}$$

Тогда u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω относительно множеств K_0 и K_1.

Доказательство. Во-первых, функция u локально ограничена снизу, значит, $u > -\infty$. Во-вторых, из свойства (3.1) следует, что функция u полунепрерывна снизу. Далее, $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$, значит, $u \not\equiv \infty$ в области Ω.

Пусть $V \subset \Omega$ — открытое множество такое, что $\Omega\setminus\overline{V} = U_0 \cup U_1$, $U_0 \cap U_1 = \varnothing$, $K_0 \subset U_0$, $K_1 \subset U_1$ и точки множества $\partial V \cap \Omega$ регулярны (см. лемму 2.6). Пусть h — $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция, непрерывная в V вплоть до границы $\partial V \cap \Omega$ такая, что $h \leqslant u$ на $\partial V \cap \Omega$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество $U = \{x \in V : d_\Omega(x, \partial V \cap \Omega) > \alpha\}$. По лемме 2.6 точки множества $\partial U \cap V$ регулярны и в $V \setminus U$ выполняется неравенство $u + \varepsilon > h$. Функция $\min(u+\varepsilon-h, 0)$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_p(U, \overline{\partial U \cap V};\mu)$. Тогда по теореме 3.1 $u + \varepsilon > h$ почти всюду в U, следовательно, почти всюду в V. По свойству (3.1) последнее неравенство выполняется в каждой точке V. Так как ε произвольно, то $u > h$ в V. Доказательство закончено.

Следствие 3.1. *Если u — суперрешение уравнения 2.1 в области Ω относительно K_0 и K_1, то существует $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция v в Ω относительно K_0 и K_1 такая, что $u = v$ почти всюду в области Ω.*

Сформулируем *задачу с препятствием.* Пусть ψ — произвольная функция, принимающая значения на расширенной вещественной прямой $[-\infty; +\infty]$, и пусть $\theta \in W^1_p(D;\mu)$. Пусть K_0 и K_1 — некоторые компакты, принадлежащие границе области D. Полагаем

$$K^\sigma_{\psi,\theta} = K_{\psi,\theta}(D, K_0 \cup K_1) = \Big\{ v \in W^1_p(D;\mu) : v \geqslant \psi \quad \text{почти всюду в} \quad D,$$
$$v - \theta \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D, K_0 \cup K_1;\mu) \Big\}.$$

Если $\psi = \theta$, то пишем $K_{\psi,\psi}(D, K_0 \cup K_1) = K_\psi(D, K_0 \cup K_1)$. Задача заключается в отыскании функции u из $K_{\psi,\theta}(D, K_0 \cup K_1)$ такой, что

$$\int_D \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}(v-u)\,dx \geqslant 0, \tag{3.2}$$

где $v \in K_{\psi,\theta}(D, K_0 \cup K_1)$. Функция ψ называется *препятствием.*

Определение 3.2. Функция u из $K_{\psi,\theta}(D, K_0 \cup K_1)$, удовлетворяющая неравенству (3.2) для всех функций $v \in K_{\psi,\theta}(D, K_0 \cup K_1)$, называется *решением задачи с препятствием ψ и граничным значением на K_0 и K_1, равным θ, или решением задачи с препятствием в $K_{\psi,\theta}(D, K_0 \cup K_1)$ относительно компактов K_0 и K_1.*

Теорема 3.3. *Предположим, что u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω относительно компактов K_0 и K_1, а $V \subset \Omega$ — открытое множество такое, что $K_0 \cup K_1 \subset \Omega \setminus \overline{V}$. Тогда существует возрастающая последовательность суперрешений $u_i \in W^1_p(V;\mu)$ относительно $\overline{\partial V \cap \Omega}$, непрерывных в V вплоть до $\partial V \cap \Omega$ и таких, что $u = \lim\limits_{i\to\infty} u_i$ в V. Кроме того, u_i — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонические функции в V относительно $\overline{\partial V \cap \Omega}$.*

Доказательство. Пусть $\alpha > 0$ и множество

$$V = \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_0) > \alpha\} \cap \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_1) > \alpha\}$$

не пусто. Согласно лемме 2.6 точки множества $\partial V \cap \Omega$ регулярны. Доопределим функцию u ее нижним пределом и выберем возрастающую последовательность функций $\varphi_i \in C(\widetilde{\Omega}_1)$, сходящуюся к u в $\widetilde{\Omega}_1$. Пусть u_i — решение задачи с препятствием в $K_{\varphi_i}(V, \overline{\partial V \cap \Omega})$. Тогда $u_i \in W^1_p(V;\mu)$ непрерывны в V вплоть до $\partial V \cap \Omega$ и $u_i = \varphi_i$ на $\partial V \cap \Omega$ (см. [5]). Покажем, что u_i — требуемая последовательность.

Заметим, что последовательность $\{u_i\}$ — возрастающая. Кроме того, ввиду непрерывности u_i и теоремы 3.2 u_i — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонические функции в V относительно $\overline{\partial V \cap \Omega}$ и $\mathscr{A}^\sigma$-гармонические на открытом множестве $U_i = \{x \in V, u_i(x) > \varphi_i(x)\}$ [5]. Так как для всех точек $y \in \partial U_i \cap \Omega$ верны соотношения

$$\varliminf_{\rho(x,y)\to 0} u(x) \geqslant u(y) \geqslant \varphi_i(y) = \lim_{\rho(x,y)\to 0} u_i(x),$$

то по принципу сравнения $u \geqslant u_i$ в U_i, а значит, $u \geqslant u_i$ в V. Тогда из неравенств $u = \lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i \leqslant \lim\limits_{i\to\infty} u_i \leqslant u$, которые выполнены в области V, следует, что функции u_i сходятся к u в V. Доказательство закончено.

Согласно [5, теорема 5.1] предел локально ограниченной и возрастающей последовательности суперрешений есть вновь суперрешение. По этой причине имеем

Следствие 3.2. *Если u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω относительно компактов K_0 и K_1 и локально ограниченная сверху, то u принадлежит $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$ и u есть суперрешение уравнения (2.1) в области Ω относительно тех же множеств.*

Применяя следствие 3.2 к $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническим функциям $\min(u, i)$, $i = 1, 2, \ldots$, получаем

Следствие 3.3. *Если $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция принадлежит пространству $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$, то она является суперрешением уравнения (2.1) в области Ω.*

Для полноты картины отметим, что справедлива

Лемма 3.2. *Предположим, что функция u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в области Ω и $u = 0$ почти всюду в Ω. Тогда $u(x) = 0$ для каждой точки $x \in \Omega$.*

Доказательство. Так как функция u полунепрерывна снизу, то она неположительна. Достаточно показать, что $u = 0$ на произвольном шаре $B \Subset \Omega$. Обозначим через v модификацию Пуассона $P(u, B)$ функции u на шаре B. Так как разность $u - v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mu)$ положительна и функция v — суперрешение в области Ω, то справедливы неравенства

$$\alpha \int\limits_\Omega |\nabla_{\mathscr{L}} v|^p \, d\mu \leqslant \int\limits_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} v) \nabla_{\mathscr{L}} v \, dx \leqslant \int\limits_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} v) \nabla_{\mathscr{L}} u \, dx = 0.$$

Значит, $v = 0$ почти всюду в Ω и, следовательно, почти всюду в B. Ввиду того, что функция v непрерывна в шаре B, $v(x) = 0$ для всех точек $x \in B$. Из соотношений $0 = v(x) \leqslant u(x) \leqslant 0$ заключаем, что $u(x) = 0$ для любой точки $x \in B$.

Теорема 3.4. *Если u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в области Ω, то*

$$u(x) = \operatorname{ess} \varliminf_{\rho(x,y)\to 0} u(y)$$

для каждой точки $x \in \Omega$.

Доказательство. Зафиксируем точку x из Ω. Если ввести обозначение $\lambda = \operatorname{ess}\varliminf\limits_{\rho(x,y)\to 0} u(y)$, то ввиду полунепрерывности снизу функции u имеем $\lambda \geqslant \varliminf\limits_{\rho(x,y)\to 0} u(y) \geqslant u(x)$. Для доказательства обратного неравенства выберем произвольное число $\gamma < \lambda$. Тогда существует радиус $r > 0$ такой, что шар $B = B(x,r) \Subset \Omega$ и $u \geqslant \gamma$ почти всюду в B. По лемме 3.2 $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция $v = \min(u,\gamma) - \gamma$ тождественно равна нулю в шаре B. В частности, $u(x) \geqslant \gamma$, откуда ввиду произвольности числа $\gamma < \lambda$ выполняется неравенство $u(x) \geqslant \lambda$. Теорема доказана.

Следствие 3.3. *Предположим, что u и v — две $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонические функции в Ω. Если $u = v$ почти всюду в области Ω, то $u = v$ в каждой точке Ω.*

Основные результаты этого раздела сформулированы в следующей теореме.

Теорема 3.5. (1) *Функция $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$ является $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической тогда и только тогда, когда u есть суперрешение уравнения* (2.1), *обладающее свойством* (3.1) *для каждой точки $x \in \Omega$.*

(2) *Если $u \in S^\sigma(\Omega)$ и локально ограничена, то $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$.*

(3) *Если $u \in S^\sigma(\Omega)$, то свойство* (3.1) *выполняется всюду в Ω.*

(4) *Если u — суперрешение уравнения* (2.1), *то свойство* (3.1) *выполняется почти всюду в Ω и существует $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция v в области Ω такая, что $u = v$ почти всюду.*

Определение $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической функции не носит локальный характер, так как оно требует сравнения с гармоническими функциями для всех открытых множеств $V \subset \Omega$ таких, что $\Omega \setminus \overline{V} = U_0 \cup U_1$, $U_0 \cap U_1 = \varnothing$, $K_0 \subset U_0$, $K_1 \subset U_1$. Однако теорема 3.5 открывает локальную природу $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций, что было бы трудно увидеть непосредственно.

Теорема 3.6. *Если в области Ω для функции u ее сужение $u|_D$ на любую область $D \subset \Omega$ такую, что $\operatorname{cap}(\overline{D} \cap K_i, W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)) \neq 0$, является $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической функцией относительно $\overline{D} \cap K_i$, $i = 0,1$, то и сама функция u является $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической относительно компактов K_0 и K_1.*

Доказательство. Покроем область Ω множествами D_n такими, чтобы емкость $\operatorname{cap}(\overline{D}_n \cap K_i, W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu))$, $i = 0,1$, $n = 1,2,\dots$, не равнялась нулю. Подчиним этому покрытию разбиение единицы ψ_n такое, чтобы $\psi_n \subset C_0^\infty(D_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n = 1$ и носитель функций ψ_n содержался бы в $\overline{D}_n$.

Пусть φ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1;\mu)$, непрерывна в области Ω и обращается в нуль в окрестности объединения компактов K_0 и K_1. Тогда любая функция $\psi_n\varphi$, $n \in \mathbb{N}$, принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_n, (\overline{D}_n \cap K_0) \cup (\overline{D}_n \cap K_1);\mu)$, непрерывна в D_n и равна нулю в окрестности объединения компактов $\overline{D}_n \cap K_i$, $i = 0,1$. Так как $u|_{D_n}$ есть $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в D_n относительно $\overline{D}_n \cap K_0$ и $\overline{D}_n \cap K_1$, то $u|_{D_n}$ — суперрешение, откуда имеем соотношения

$$\int\limits_{\Omega} \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{D_n} \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}(\psi_n\varphi)\, dx \geqslant 0.$$

Таким образом, функция u есть суперрешение в области Ω относительно компактов K_0 и K_1. Так как в каждой точке $x \in \Omega$ выполняется соотношение 3.1, то функция u является $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической в Ω относительно K_0 и K_1. Доказательство закончено.

Следствие 3.4. *Предположим, что множество $D \subset \Omega$ такое, что его замыкание $\overline{D}$ содержит компакты K_0 и K_1, причем емкость $\operatorname{cap}(\overline{D} \cap K_i, W_p^1(\widetilde{\Omega}_1; \mu))$, $i = 0, 1$, положительна. Пусть функция u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в области Ω относительно компактов K_0 и K_1, а функция v — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в D относительно $K_0 \cap \overline{D}$ и $K_1 \cap \overline{D}$. Тогда если функция*

$$s = \begin{cases} \min(u, v) & \text{в} \quad D, \\ u & \text{в} \quad \Omega \setminus D \end{cases}$$

полунепрерывна снизу, то она $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в области Ω относительно K_0 и K_1.

Отметим следующее полезное свойство $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций.

Теорема 3.7. *Пусть функция u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в Ω относительно компактов K_0 и K_1. Тогда любое ее сужение $u|_D$ на область $D \subset \Omega \setminus (K_0 \cup K_1)$ является $\mathscr{A}$-супергармонической функцией в области D.*

Доказательство. Так как $\min(u, k)$ — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция и локально ограниченная, то она является суперрешением в области Ω относительно компактов K_0 и K_1. Выберем неотрицательную функцию $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D; \mu) \cap C(\overline{D})$ и продолжим ее нулем на $\widetilde{\Omega}_1 \setminus D$. Тогда ее продолжение $\widetilde{\varphi}$ принадлежит классу $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1; \mu)$, непрерывно в Ω и равно нулю в окрестности объединения компактов K_0 и K_1. Значит, верны следующие соотношения:

$$\int\limits_D \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} \min(u, k)) \nabla_{\mathscr{L}} \varphi \, dx = \int\limits_{\Omega \setminus (K_0 \cup K_1)} \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} \min(u, k)) \nabla_{\mathscr{L}} \widetilde{\varphi} \, dx \geqslant 0.$$

Таким образом, функция $\min(u, k)$ есть суперрешение на множестве D. Так как, являясь $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической функцией, функция u обладает свойством

$$u(x) = \operatorname{ess} \varliminf_{\rho(x,y) \to 0} u(y)$$

в каждой точке $x \in \Omega$, то по теореме 3.5 $\min(u, k)$ — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в D. Теперь, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем вывод теоремы.

§ 4. Продолжение $\mathscr{A}$-супергармонических функций

Пусть K — компактное подмножество Ω. Положим

$$W(K, \Omega) = \{u \in C_0^\infty(\Omega);\ u \geqslant 1 \text{ на } K\}.$$

Определим (p, μ)-емкость компакта K следующим образом:

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(K, \Omega) = \inf_{u \in W(K, \Omega)} \int\limits_\Omega |\nabla_{\mathscr{L}} u|^p \, d\mu.$$

Распространим ее обычным способом на произвольные множества: для множества $E \subset \Omega$ его внутренняя емкость есть величина

$$\underline{\operatorname{cap}}_{p,\mu}(E, \Omega) = \sup\{\operatorname{cap}_{p,\mu}(K, \Omega) : K \subset E,\ K \text{ компактно}\},$$

а его внешняя емкость — величина

$$\overline{\operatorname{cap}}_{p,\mu}(E, \Omega) = \inf\{\underline{\operatorname{cap}}_{p,\mu}(V, \Omega) : E \subset V \subset \Omega,\ V \text{ открыто}\}.$$

Множество называется *измеримым в смысле Шоке*, если его внешняя и внутренняя емкости совпадают. Свойства емкости изложены в [5, § 6], где, в частности, доказано, что все борелевские множества измеримы относительно емкости.

Определение 4.1. Множество E называется *(p,μ)-плотным* в точке x_0, если выполняется равенство

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,t), B(x_0,2t))}{\operatorname{cap}_{p,\mu}(B(x_0,t), B(x_0,2t))}\right)^{1/(p-1)}\frac{dt}{t}=\infty.$$

Лемма 4.1. *Пусть $E\Subset\Omega$ — компактное множество такое, что $\Omega\setminus E$ связно и E (p,μ)-плотно в каждой точке E. Тогда существует функция*

$$v\in C(\Omega)\cap S(\Omega)\cap\mathscr{H}(\Omega\setminus E)$$

такая, что $v=0$ в E и $v<0$ в $\Omega\setminus E$.

Доказательство. Пусть $\alpha_i<\rho(E,\partial\widetilde{\Omega}_1)$, $i=0,1,2,\dots,$ — некоторая строго убывающая последовательность чисел, стремящаяся к нулю. Тогда множества $D_i=\{x\in\Omega:\rho(x,\partial\widetilde{\Omega}_1)>\alpha_i\}$ обладают следующими свойствами: $D_i\Subset D_{i+1}$, $\bigcup\limits_i D_i=\Omega$, D_i регулярны по лемме 2.6 и содержат множество E.

Пусть u_i есть $\mathscr{A}$-гармоническая функция в открытом множестве $D_i\setminus E$, непрерывная вплоть до границы и такая, что $u_i=0$ на ∂E, $u_i=1$ на ∂D_i. Такие функции u_i могут быть найдены, так как $D_i\setminus E$ — регулярное множество [4].

Определим функцию $v_i=-u_i/u_i(y_i)$, где $y_i\in\partial D_0$ такова, что $u_i(y_i)=\min\limits_{y\in\partial D_0}u_i$. Тогда $v_i<0$ — $\mathscr{A}$-гармоническая функция в $D_i\setminus E$, $v_i(y_i)=-1$ и $v_i\leqslant -1$ на границе D_0.

Из неравенства Гарнака следует, что последовательность v_i локально ограничена и равностепенно непрерывна. По теореме Асколи и теореме о сходимости [4, 5] подпоследовательность v_k сходится локально равномерно к неположительной $\mathscr{A}$-гармонической функции v в $\Omega\setminus E$ и $v(y)\leqslant -1$ на ∂D_0. Значит, по принципу максимума $v<0$.

Далее, покажем, что существует константа $c>0$ такая, что $cv_0\leqslant v<0$ в $D_0\setminus E$. Согласно неравенству Гарнака $v_k\geqslant -c$ на множестве ∂D_0, где c не зависит от k. Тогда из принципа сравнения следует, что $v_k\geqslant cv_0$ в $D_0\setminus E$, поэтому $cv_0\leqslant v_k<0$. Следовательно, $cv_0\leqslant v<0$, откуда вытекает, что $\lim\limits_{\rho(x,y)\to 0}v(x)=0$, где $y\in\partial E$. В заключение доопределим функцию v нулем на E и, применяя лемму 2.8, получаем, что v — $\mathscr{A}$-супергармоническая функция в Ω.

Теорема 4.1. *Пусть $E\Subset\Omega$ — компактное множество такое, что $\Omega\setminus E$ связно и (p,μ)-плотно в каждой точке E. Если u — $\mathscr{A}$-супергармоническая функция в связной окрестности V множества E, то существует $\mathscr{A}$-супергармоническая функция s в Ω такая, что $s=u$ на E.*

Доказательство. Пусть v — $\mathscr{A}$-супергармоническая функция, удовлетворяющая условиям леммы 4.1, и пусть D_0 — множество, построенное в лемме 4.1. Так как функция $v=0$ на E, а на ∂D_0 функция $v\leqslant -1$, то ввиду непрерывности и $\mathscr{A}$-гармоничности функции v можно указать такое число $c<0$, что для множества V или некоторого его сужения, содержащего E, верно $V=\{x: v(x)>c\}\Subset\Omega$.

Можно предполагать, что $u\geqslant 0$ на $\overline{V}$. Выберем число $0<\tau<\rho(E,\partial V)$. Тогда множество $U=\{x\in V,\rho(x,\partial V)>\tau\}\Subset V$ и $U\setminus E$ регулярно. Далее, выберем открытое множество W такое, что

$$E\subset W\Subset U\Subset V.$$

Обозначим разность $v-c$ символом h. Тогда существует константа $\lambda>0$ такая, что $\lambda h\geqslant P(u,U\setminus E)$ на ∂W. Из леммы 2.8 вытекает, что функция

$$\tilde{s}=\begin{cases}\min(\lambda h, P(u,U\setminus E)) & \text{в}\quad V\setminus\overline{W},\\ P(u,U\setminus E) & \text{в}\quad\overline{W}\end{cases}$$

$\mathscr{A}$-супергармоническая в V. Кроме того, так как $\min(\lambda h, \tilde{s}) = \tilde{s}$ в $V \setminus \overline{W}$ и для всех точек $y \in \partial V$ выполняется равенство

$$\lim_{\rho(x,y)\to 0} \tilde{s}(x) = \lim_{\rho(x,y)\to 0} \lambda h(x) = 0,$$

то из второй леммы о склейке имеем, что функция

$$s = \begin{cases} \lambda h & \text{в} \quad \Omega \setminus V, \\ \tilde{s} & \text{в} \quad V \end{cases}$$

$\mathscr{A}$-супергармоническая в Ω. Ввиду того, что $s = u$ на E, s есть требуемое продолжение функции u.

§ 5. Затираемые множества

Лемма 5.1. *Если множество E имеет емкость нуль в Ω, то оно имеет емкость нуль относительно любого открытого множества ω, содержащего множество E.*

Доказательство. Покроем множество E шарами $B_i(x, r)$, $i = 1, 2, \dots$, радиусы которых удовлетворяют условиям теоремы 6.10 из [5]. Обозначим через E_i пересечение $E \cap B_i(x, r)$. На основании теоремы 6.10 [5] имеем

$$\begin{aligned}(1 + Cr^p)^{-1} \operatorname{cap}\big(E_i; W_p^1(\omega; \mu)\big) &\leqslant \operatorname{cap}\big(E_i; \overset{\circ}{L}{}_p^1(B(x_0, 2r); \mu)\big) \\ &\leqslant c(1 + r^{-p}) \operatorname{cap}\big(E_i; W_p^1(\Omega; \mu)\big) \leqslant c(1 + r^{-p}) \operatorname{cap}\big(E; W_p^1(\Omega; \mu)\big).\end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что емкость каждого множества E_i в пространстве $W_p^1(\omega; \mu)$ равна нулю. Значит, емкость всего множества E в пространстве $W_p^1(\omega; \mu)$ равна нулю.

В дальнейшем выражение *свойство A выполняется квазивсюду на множестве Ω* означает, что свойство A выполняется всюду на Ω за исключением множества, имеющего емкость нуль.

В следующей серии результатов мы обсуждаем ситуацию более простую сравнительно с работой [6].

Лемма 5.2. *Пусть E — относительно замкнутое множество в Ω нулевой емкости. Если u — суперрешение уравнения (2.1) в $\Omega \setminus E$ относительно множеств K_0 и K_1, $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega, \mu)$, то u — суперрешение в Ω относительно тех же множеств. В частности, если $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega, \mu)$ — класс $\mathscr{A}^\sigma$-гармонических функций в $\Omega \setminus E$ относительно множеств K_0 и K_1, то класс u содержит непрерывный представитель, который $\mathscr{A}^\sigma$-гармоничен в Ω относительно тех же множеств.*

Доказательство. Так как условие леммы 5.2 носит локальный характер, можно считать, что функция u принадлежит $W_p^1(\Omega; \mu)$. Пусть $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1; \mu)$ — неотрицательная функция, непрерывная в области Ω и равная нулю в окрестности объединения компактов K_0 и K_1. Так как E имеет емкость нуль, то, рассуждая так же, как и в [5, теорема 6.11], имеем $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1; \mu) = \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega \setminus E, K_0 \cup K_1; \mu)$. Поэтому функция φ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega \setminus E, K_0 \cup K_1; \mu)$, непрерывна в области Ω и равна нулю в окрестности объединения компактов K_0 и K_1. Кроме того, $|E| = 0$. Следовательно, верны соотношения

$$0 \leqslant \int_{\Omega \setminus E} \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u) \nabla_{\mathscr{L}} \varphi \, dx = \int_{\Omega} \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u) \nabla_{\mathscr{L}} \varphi \, dx.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Пусть E — относительно замкнутое множество в Ω нулевой емкости, и пусть u — суперрешение в $\Omega \setminus E$ относительно множеств K_0 и K_1. Если каждая точка $x \in E \cap \Omega$ имеет окрестность $V \subset \Omega$ такую, что функция u ограничена в $V \setminus E$, то u — суперрешение в Ω относительно тех же множеств.*

Доказательство. Если мы покажем, что $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$, то ссылка на предыдущую лемму закончит доказательство. Пусть B такой шар, что $2B \Subset \Omega$ и функция u ограничена в $2B$. Достаточно показать, что $u \in W^1_p(B;\mu)$. Можно предполагать, что $u \leqslant 0$ в шаре $2B$. Выберем последовательность функций $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega)$ таких, что $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1$, $\varphi_i = 1$ в окрестности $E \cap \overline{2B}$ и $\|\varphi_i \mid W^1_p(\Omega;\mu)\| \to 0$. Пусть теперь $\eta \in C_0^\infty(2B)$ — неотрицательная функция такая, что $\eta = 1$ в шаре B. Применяя оценки Каччиопполи [5], имеем

$$\int\limits_{2B\setminus E} |\nabla_{\mathscr{L}} u|^p |\eta(1-\varphi_i)|^p \, d\mu \leqslant c \cdot \sup_{2B\setminus E} |u|^p \int\limits_{2B} |\nabla_{\mathscr{L}}(\eta(1-\varphi_i))|^p \, d\mu.$$

Ввиду того, что функция $\eta(1-\varphi_i)$ сходится к функции η в $W^1_p(\Omega;\mu)$, получаем

$$\int\limits_{B\setminus E} |\nabla_{\mathscr{L}} u|^p \, d\mu \leqslant c < \infty.$$

Значит, функция u принадлежит $W^1_p(B \setminus E;\mu)$. С другой стороны, так как E имеет емкость нуль, то $W^1_p(B\setminus E;\mu) = W^1_p(B;\mu)$ [5]. Лемма доказана.

Теорема 5.1. *Пусть E — относительно замкнутое множество Ω нулевой емкости. Если u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в $\Omega \setminus E$ относительно множеств K_0 и K_1, обладающая свойством $\varliminf\limits_{\rho(x,y)\to 0} u(y) > -\infty$ для всех $x \in E\cap\Omega$, то*

$$u(x) = \operatorname{ess}\varliminf_{\rho(x,y)\to 0} u(y), \qquad x \in \Omega,$$

есть $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω относительно тех же множеств.

Доказательство. Пусть $u_k = \min(u,k)$, $k = 1,2,\ldots$, тогда по лемме 5.3 и следствию 3.2 функции u_k — это суперрешения уравнения 2.1 в Ω относительно множеств K_0 и K_1. Если функцию u_k доопределить по правилу

$$u_k(x) = \operatorname{ess}\varliminf_{\rho(x,y)\to 0} u_k(y),$$

то по теореме 3.2 u_k является $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической функцией в Ω. Устремив k к ∞, получаем доказательство теоремы.

Следующая теорема есть следствие предыдущей.

Теорема 5.2. *Пусть E — относительно замкнутое множество в Ω нулевой емкости. Тогда каждая ограниченная $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция h в $\Omega \setminus E$ относительно множеств K_0 и K_1 может быть продолжена на Ω так, что продолжение есть $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция относительно тех же множеств.*

Лемма 5.4. *Пусть множество $E \subset K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ имеет нулевую емкость*

$$\operatorname{cap}\bigl(E, W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)\bigr).$$

Пусть $u \in S(\Omega, K_0 \cup K_1)$ и $v \in -S(\Omega, K_0\cup K_1)$ — ограниченные функции такие, что для всех точек $x \in (K_0 \cup K_1)\setminus E \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ выполняется неравенство

$$\varlimsup_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ y\in\Omega}} v(y) \leqslant \varliminf_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ y\in\Omega}} u(y).$$

Тогда в случае, если одна из функций u или v принадлежат $L^1_p(\Omega;\mu)$, в области Ω выполняется неравенство $v \leqslant u$.

Доказательство. Так как для каждого $\varepsilon > 0$ множество

$$\Big\{x \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1 : \varliminf_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ y\in\Omega}} u(y) + \varepsilon > \varlimsup_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ y\in\Omega}} v(y)\Big\}$$

открыто на $K_0 \cup K_1$, то можно предполагать, что E — компактное множество. Можно также считать, что функция u принадлежит $W^1_p(\Omega;\mu)$.

Выберем теперь убывающую последовательность функций $\varphi_i \in C(\widetilde{\Omega}_1) \cap W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$ такую, что

$$0 \leqslant \varphi_i \leqslant M = \sup|u| + \sup|v|, \quad \varphi_i = M \quad \text{на} \quad E,$$

и удовлетворяющую условию $\big\|\varphi_i \mid W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)\big\| \to 0$. Действительно, сначала можно выбрать последовательность функций $\varphi'_j \in C(\widetilde{\Omega}_1) \cap W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$ таких, что $\varphi'_j = M$ на E и $\varphi'_j \to 0$ в $W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$. Затем полагаем $\varphi_1 = \min(M, \varphi'_1)$, и пусть для $i \geqslant 1$ $\varphi_{i+1} = \min(\varphi_i, \varphi'_j)$, где индекс j выбирается настолько большим, чтобы

$$\big\|\min(\varphi_i, \varphi'_j) \mid W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)\big\| \leqslant {}^1\!/_2 \big\|\varphi_i \mid W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)\big\|.$$

Это возможно, так как $\min(\varphi_i, \varphi'_j) \to 0$ в пространстве $W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$ [5].

Обозначим через ψ_i сумму $u + \varphi_i$, и пусть u_i есть $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническое решение задачи с препятствием в $K_{\psi_i}(\Omega, K_0 \cup K_1)$. По теореме 3.4 имеем, что $u_i \geqslant \psi_i$ в Ω. Следовательно, выполнено неравенство

$$\varlimsup_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ y\in\Omega}} v(y) \leqslant \varliminf_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ y\in\Omega}} u_i(y)$$

для всех $x \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ и для каждого $i \in \mathbb{N}$. Тогда по принципу сравнения $u_i \geqslant v$ в области Ω. Ввиду [5, теорема 5.4] последовательность u_i сходится к функции u почти всюду. Поэтому, используя вновь теорему 3.4, получаем, что $u \geqslant v$ в Ω. Лемма 5.4 доказана.

§ 6. Сингулярные решения

В этом параграфе остановимся на поведении $\mathscr{A}^\sigma$-гармонических функций в окрестности изолированных особенностей.

Теорема 6.1. *Предположим, что точка $x_0 \in \Omega$ и $K_i \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, $i = 0, 1$. Если $\operatorname{cap}(x_0, W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)) = 0$, то существует функция $u \in S(\Omega, K_0 \cup K_1) \cap \mathscr{H}(\Omega \setminus \{x_0\}, K_0 \cup K_1)$ такая, что*

$$\lim_{\rho(x,x_0)\to 0} u(x) = \infty = u(x_0),$$

и в каждой регулярной граничной точке $y \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ выполняется равенство

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) = 0.$$

Кроме того, $u \notin W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$ и поэтому она не является суперрешением уравнения (2.1) в области Ω относительно множеств K_0 и K_1.

Доказательство. Предположим, сначала, что $u \in S(\Omega, K_0 \cup K_1) \cap \mathscr{H}(\Omega \setminus \{x_0\}, K_0 \cup K_1)$ и $\lim\limits_{\rho(x,x_0)\to 0} u(x) = \infty$. Если бы $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$, то по теореме 5.2 функцию u можно было бы продолжить до $\mathscr{A}^\sigma$-гармонической во всей области Ω. Это, однако, невозможно, так как u не ограничена в окрестности точки x_0.

Теперь сконструируем требуемую функцию u. Зафиксируем шар $B = B(x_0, r) \Subset \Omega$, и пусть $B_i = i^{-1}B$, $i = 1, 2, \dots$, — стягивающаяся последовательность шаров. Выберем функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ такую, что $\varphi = 1$ на $\overline{B}(x_0, r)$, и пусть h_i — $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция такая, что $h_i - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega \setminus \overline{B}_i, K_0 \cup K_1 \cup \overline{B}_i; \mu)$. Полагая $h_i = 1$ на $\overline{B}_i$, имеем $h_i \in S(\Omega, K_0 \cup K_1) \cap \mathscr{H}(\Omega \setminus \overline{B}_i, K_0 \cup K_1)$. Определим функцию $u_i = h_i / (\max\limits_{\partial B} h_i)$. Тогда $u_i \in S(\Omega, K_0 \cup K_1) \cap \mathscr{H}(\Omega \setminus \overline{B}_i, K_0 \cup K_1)$ и, как следует из неравенства Гарнака, последовательность u_i локально ограничена в $\Omega \setminus \{x_0\}$. Следовательно, функции u_i, $i \geqslant j$, равностепенно непрерывны в $\Omega \setminus \overline{B}_j$. Теперь мы легко найдем подпоследовательность, которая сходится локально равномерно в $\Omega \setminus \{x_0\}$ к функции $u \in \mathscr{H}(\Omega \setminus \{x_0\}, K_0 \cup K_1)$. Кроме того, по теореме 5.1 о затирании $u \in S(\Omega, K_0 \cup K_1)$.

Из теоремы 3.1 следует, что в $\Omega \setminus \overline{B}$ выполняется неравенство $0 \leqslant u_i \leqslant u_1$, откуда следует, что соотношение $0 \leqslant u \leqslant u_1$ верно в $\Omega \setminus \overline{B}$ и $\lim\limits_{d_\Omega(x,y)\to 0} u(x) = 0$ для любой регулярной точки $y \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$.

Для того чтобы закончить доказательство, покажем, что

$$\lim_{\rho(x,x_0)\to 0} u(x) = \infty.$$

Для начала заметим, что предел $\lim\limits_{\rho(x,x_0)\to 0} u(x)$ существует [4]. Предположим, что этот предел конечен, т. е. функция u ограничена в окрестности точки x_0. Тогда из теоремы 5.1 следует, что u — $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая в Ω и, следовательно, выполняется неравенство $u \leqslant u_1$ в Ω. Покажем, что это приводит к противоречию. Пусть α_j — последовательность чисел, стремящаяся к нулю. Тогда множества $D_j = \{x \in \Omega;\ d_\Omega(x, K_0) > \alpha_j\} \cap \{x \in \Omega;\ d_\Omega(x, K_1) > \alpha_j\}$ регулярны, исчерпывают Ω и по лемме 2.6 точки $y \in \partial D_j \cap \Omega$ регулярны. Пусть функция v_j есть модификация Пуассона $v_j = P(u_1, D_j, \partial D_j \cap \Omega)$. Тогда $v_j \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1; \mu)$ и $u \leqslant v_j \leqslant u_1$ в Ω. Кроме того, последовательность v_j убывает к $\mathscr{A}^\sigma$-гармонической функции v в Ω. Так как разность $u_1 - v_j \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1; \mu)$ не отрицательна, то из свойства [5, неравенство 2.5] следуют соотношения

$$\int\limits_\Omega |\nabla_{\mathscr{L}} v_j|^p \, d\mu \leqslant c \int\limits_\Omega |\nabla_{\mathscr{L}} u_1|^p \, d\mu < \infty.$$

Из слабой полноты $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1; \mu)$ имеем $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1; \mu)$ и $v \equiv 0$ в Ω. Ввиду того, что $0 \leqslant u \leqslant v$, получаем тождество $u \equiv 0$ в Ω. Это противоречит неравенству $u \geqslant c > 0$ на ∂B, вытекающему из неравенства Гарнака. Таким образом, окончательно получаем $\lim\limits_{\rho(x,x_0)\to 0} u(x) = \infty$.

§ 7. Интегрируемость $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций

Пусть r_0 — действительное число такое, что для всех шаров $B(x, r) \subset \Omega$, $r < r_0$, выполняется весовое неравенство Соболева $\mathscr{W}3$ с некоторой константой $\varkappa > 1$.

Лемма 7.1. *Пусть $B(x,r)\subset\Omega$, $r<r_0$, и пусть u — неотрицательная почти всюду конечная функция в шаре B. Предположим, что для всех $k=1,2,\ldots$*

$$\min(u,k)\in \overset{\circ}{W}{}^1_p(B;\mu)$$

и

$$\int\limits_B |\nabla_{\mathscr{L}}\min(u,k)|^p\,d\mu\leqslant Mk, \tag{7.1}$$

где константа M не зависит от k.

(i) Если $0<q<\varkappa p/(\varkappa(p-1)+1)$, то

$$\int\limits_B |\nabla_{\mathscr{L}}\min(u,k)|^{q(p-1)}\,d\mu\leqslant c,$$

где $c=c(p,C_\mu,q,M,\mu(B),r_0)$.

(ii) Если $0<s<\varkappa(p-1)$, то

$$\int\limits_B u^s\,d\mu<\infty.$$

Доказательство. Получим первое утверждение. Из весового неравенства Соболева $\mathscr{W}3$ и условия (7.1) леммы следует цепочка неравенств

$$k^{\varkappa p}\mu(\{k\leqslant u<2k\})\leqslant \int\limits_{\{k\leqslant u<2k\}}\min(u,2k)^{\varkappa p}\,d\mu$$
$$\leqslant \int\limits_B \min(u,2k)^{\varkappa p}\,d\mu\leqslant c\Big(\int\limits_B |\nabla_{\mathscr{L}}\min(u,2k)|^p\,d\mu\Big)^{\varkappa}\leqslant c(Mk)^{\varkappa}.$$

Используя неравенство Гёльдера, выводим

$$\int\limits_{\{k\leqslant u<2k\}} |\nabla_{\mathscr{L}}\min(u,2k)|^{q(p-1)}\,d\mu$$
$$\leqslant \mu(\{k\leqslant u<2k\})^{1-q(p-1)/p}\Big(\int\limits_{\{k\leqslant u<2k\}}|\nabla_{\mathscr{L}}\min(u,2k)|^p\,d\mu\Big)^{q(p-1)/p}\leqslant ck^{p_1},$$

где $c=c(p,C_\mu,q,M,\mu(B),r_0)>0$ и

$$p_1=\varkappa(1-p)\big(1-\frac{q(p-1)}{p}\big)+\frac{q(p-1)}{p}=(p-1)\big(q\frac{\varkappa(p-1)+1}{p}-\varkappa\big)<0.$$

Следовательно, для $k<2^l$ с учетом полученной оценки имеем

$$\int\limits_B |\nabla_{\mathscr{L}}\min(u,k)|^{q(p-1)}\,d\mu\leqslant \int\limits_{\{u<1\}}|\nabla_{\mathscr{L}}\min(u,1)|^{q(p-1)}\,d\mu$$
$$+\sum_{j=1}^{l}\int\limits_{\{2^{j-1}\leqslant u<2^j\}}\big|\nabla_{\mathscr{L}}\min(u,2^j)\big|^{q(p-1)}\,d\mu\leqslant M+c\sum_{j=1}^{\infty}2^{p_1 j}<c,$$

где $c=c(p,C_\mu,q,M,\mu(B),r_0)>0$. Первое утверждение леммы 7.1 доказано.

Для доказательства второго утверждения леммы 7.1 поступим аналогично. Используя неравенство Гёльдера и весовое неравенство Соболева $\mathscr{W}3$, с учетом оценки $\mu(\{k \leqslant u < 2k\}) \leqslant ck^{\varkappa(1-p)}$ получаем соотношения

$$\int\limits_{\{k\leqslant u\leqslant 2k\}} u^s\,d\mu \leqslant \mu(\{k \leqslant u \leqslant 2k\})^{1-s/\varkappa p}\Bigl(\int\limits_B \min(u,2k)^{\varkappa p}\,d\mu\Bigr)^{s/\varkappa p}$$

$$\leqslant ck^{s(p-1)/p-\varkappa(p-1)}\Bigl(\int\limits_B |\nabla_{\mathscr{L}}\min(u,2k)|^p\,d\mu\Bigr)^{s/p} \leqslant ck^{s(p-1)/p-\varkappa(p-1)+s/p}.$$

Так как $p_2 = s(p-1)/p-\varkappa(p-1)+s/p = s-\varkappa(p-1)$ — отрицательная величина, окончательно имеем

$$\int\limits_B u^s\,d\mu \leqslant \mu(B) + \sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{\{2^{j-1}\leqslant u<2^j\}} u^s\,d\mu \leqslant \mu(B) + c\sum_{j=1}^{\infty}2^{p_2 j} < \infty,$$

что заканчивает доказательство леммы 7.1.

Определение 7.1. Предположим, что функция u в области Ω такая, что $\min(u,k) \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$ для всех неотрицательных целых k. Определим *слабый градиент* функции u следующим образом:

$$D_{\mathscr{L}}u = \lim_{k\to\infty}\nabla_{\mathscr{L}}\min(u,k).$$

Для $k \geqslant j$ имеем $\nabla_{\mathscr{L}}\min(u,k) = \nabla_{\mathscr{L}}\min(u,j)$ почти всюду на множестве $\{u \leqslant j\}$. Значит, слабый градиент $D_{\mathscr{L}}u$ есть функция, принимающая почти всюду конечные значения. Кроме того, он определен для всех $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций (следствие 3.2). Если $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$, то $\nabla_{\mathscr{L}}u = D_{\mathscr{L}}u$. Наша цель — показать, что для $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической функции u ее слабый градиент $D_{\mathscr{L}}u$ принадлежит $L^{q(p-1)}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$ для некоторого $q > 1$.

Теорема 7.1. *Пусть u — неотрицательная $\mathscr{A}$-супергармоническая функция в открытом шаре $B(x,r)$, $r < r_0$, такая, что $\min(u,k) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(B;\mu)$, $k = 1,2,3\dots$ Тогда $D_{\mathscr{L}}u \in L^{q(p-1)}(B;\mu)$ для числа q, удовлетворяющего неравенствам $0 < q < \varkappa p/(\varkappa(p-1)+1)$. Кроме того, если $0 < s < \varkappa(p-1)$, то $u \in L^s(B;\mu)$.*

Доказательство. Покажем, что функция u удовлетворяет предположениям леммы 7.1. Пусть

$$a_k = \int\limits_{\{k-1\leqslant u\leqslant k\}} \mathscr{A}(x, D_{\mathscr{L}}u)D_{\mathscr{L}}u\,dx.$$

Тогда

$$\int\limits_{\{k-1\leqslant u\leqslant k\}} |\nabla_{\mathscr{L}}\min(u,k)|^p\,d\mu \leqslant \frac{a_k}{\alpha}.$$

Оценка (7.1) вытекает из неравенства

$$\int\limits_B |\nabla_{\mathscr{L}}\min(u,k)|^p\,d\mu \leqslant k\frac{a_1}{\alpha},$$

для справедливости которого достаточно показать, что последовательность a_k не возрастает.

Построим функцию $v_k = (1 - |u - k|)^+$. Тогда $v_k \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(B;\mu)$ — неотрицательная функция, и так как $\min(u, k+1)$ — суперрешение, принадлежащее $\overset{\circ}{W}{}^1_p(B;\mu)$, получаем соотношения

$$0 \leqslant \int\limits_B \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} \min(u, k+1)) \nabla_{\mathscr{L}} v_k \, dx$$
$$= \int\limits_{\{k-1 \leqslant u < k\}} \mathscr{A}(x, D_{\mathscr{L}} u) D_{\mathscr{L}} u \, dx - \int\limits_{\{k \leqslant u < k+1\}} \mathscr{A}(x, D_{\mathscr{L}} u) D_{\mathscr{L}} u \, dx = a_k - a_{k+1}.$$

Значит, $a_{k+1} \leqslant a_k$. Теорема 7.1 доказана.

Теорема 7.2. *Если u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в области Ω относительно компактов K_0 и K_1, то $u \in L^s_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$ и $D_{\mathscr{L}} u \in L^{q(p-1)}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$ для любых $0 < s < \varkappa(p-1)$ и $0 < q < \varkappa p/(\varkappa(p-1)+1)$.*

Доказательство. Пусть B — шар достаточно малого радиуса такой, что $2B \Subset \Omega$ и на нем выполняется весовое неравенство Соболева $\mathscr{W}3$. Достаточно показать, что $|u|^s$ и $|D_{\mathscr{L}} u|^{q(p-1)}$ μ-интегрируемы в шаре B. Так как $m = \inf\limits_{2B} u > -\infty$, то вместо функции u можно рассматривать функцию $u - m + 1$ и предполагать, что $u \geqslant 1$ на $2B$. Модификация Пуассона $P(u, 2B \setminus \overline{B})$ является $\mathscr{A}$-гармонической функцией в кольце $2B \setminus \overline{B}$. Значит, существует $\mathscr{A}$-гармоническая функция h в $2B \setminus \overline{3/2B}$, непрерывная вплоть до границы, $h \in W^1_p(2B \setminus \overline{3/2B})$, $h = 0$ на $\partial 2B$, $h = P(u, 2B \setminus \overline{B})$ на $\partial 3/2B$. Из принципа сравнения и [2, лемма 7.9] следует, что функция

$$v = \begin{cases} P(u, 2B \setminus \overline{B}) & \text{в } \overline{3/2B}, \\ h & \text{в } 2B \setminus \overline{3/2B} \end{cases}$$

$\mathscr{A}$-супергармоническая в шаре $2B$. Кроме того, так как $v = u$ в B и срезка $\min(v, k)$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_p(2B;\mu)$, утверждение доказываемой теоремы следует из теоремы 7.1.

§ 8. Выметание

Определение 8.1. *Полунепрерывной снизу регуляризацией* $\hat{u}$ некоторой функции $u\colon E \to [-\infty; +\infty]$ называется функция

$$\hat{u}(x) = \lim_{r \to 0} \inf_{E \cap B(x,r)} u.$$

Из определения имеем, что $\hat{u} \leqslant u$ на E. Если функция u локально ограничена снизу, то $\hat{u}$ полунепрерывна снизу. Действительно, $\hat{u}$ — наибольшая полунепрерывная снизу миноранта функции u.

Если функция u определена на открытом множестве Ω, а $x \in \partial\widetilde{\Omega}_1$, то шары $B(x, r)$ следует рассматривать в смысле внутренней метрики $d_\Omega(x, y)$. Такое определение полунепрерывной снизу регуляризации позволяет доопределить функцию u на замыкании $\widetilde{\Omega}$, и таким образом доопределенная функция является полунепрерывной снизу.

Определение 8.2. Пусть $\psi\colon \widetilde{\Omega}_1 \to (-\infty; +\infty]$ — локально ограниченная снизу функция, и пусть

$$\Phi^\psi = \Phi^\psi(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1) = \Phi^\psi(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1; \mathscr{A}) —$$

класс функций, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $u \in S^\sigma(\Omega)$,

(2) $u(x) \geqslant \psi(x)$ для всех точек $x \in \Omega$,

(3) $\lim\limits_{r\to 0} \inf\limits_{B(y,r)} u(x) \geqslant \psi(y)$ для всех точек $y \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$.

Тогда полунепрерывная снизу регуляризация функции

$$R^\psi = R^\psi(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1) = R^\psi(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1; \mathscr{A}) = \inf \Phi^\psi$$

называется *выметанием* функции ψ в $\widetilde{\Omega}_1$ и обозначается

$$\widehat{R}^\psi = \widehat{R}^\psi(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1) = \widehat{R}^\psi(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1; \mathscr{A}).$$

Если Φ^ψ пусто, то $\widehat{R}^\psi = \infty$. Однако будем предполагать в дальнейшем, что Φ^ψ — не пустое семейство.

Определение 8.3. Если u — неотрицательная функция на множестве $E \subset \widetilde{\Omega}_1$, пишем

$$\Phi^u_E = \Phi^\psi, \quad R^u_E = R^\psi \quad \text{и} \quad \widehat{R}^u_E = \widehat{R}^\psi,$$

где

$$\psi = \begin{cases} u & \text{в } E, \\ 0 & \text{в } \widetilde{\Omega}_1 \setminus E. \end{cases}$$

Функция $\widehat{R}^u_E$ называется *выметанием функции u относительно множества E*. Если функция u $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в области Ω, а множество E располагается на несобственной границе $\partial\widetilde{\Omega}_1$, то под выметанием $\widehat{R}^u_E(\widetilde{\Omega}_1)$ функции u относительно множества E следует понимать следующую конструкцию: сначала доопределяем функцию u на $\partial\widetilde{\Omega}_1$ ее нижним пределом, а затем рассматриваем выметание полученной функции в $\widetilde{\Omega}_1$ относительно множества E. Далее, если $u \equiv c$ — постоянная функция, пишем $\widehat{R}^c_E = \widehat{R}^u_E$. Специально выделим функцию $\widehat{R}^1_E$, которую назовем *$\mathscr{A}^\sigma$-потенциалом* множества E в $\widetilde{\Omega}_1$.

Выметание обладает рядом полезных свойств.

Лемма 8.1. *Сужение выметания $\widehat{R}^\psi$ на область Ω есть $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω.*

По существу, лемма 8.1 — это другая формулировка леммы 2.4.

Определение 8.4. Семейство функций $\mathscr{U}$ называется *направленным вниз*, если для любых функций u и v, принадлежащих семейству $\mathscr{U}$, существует функция $s \in \mathscr{U}$ такая, что $s \leqslant \min(u, v)$.

Лемма 8.2. *Выметание $\widehat{R}^u_E$ на множестве $\Omega \setminus \overline{E}$ является $\mathscr{A}^\sigma$-гармонической функцией относительно $\overline{E \cap \Omega}$ и $K_1 \Subset \partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus E$ и совпадает с R^u_E на $\Omega \setminus \overline{E}$. Если, кроме того, $u \in S^\sigma(\Omega)$, то $\widehat{R}^u_E = u$ во внутренности множества E.*

Доказательство. Заметим сначала, что если функции v_1 и v_2 принадлежат Φ^u_E, то $\min(v_1, v_2) \in \Phi^u_E$. Значит, семейство Φ^u_E является убывающим вниз. Используя лемму Шоке [13], заключаем, что существует убывающая последовательность функций $v_j \in \Phi^u_E$, имеющая своим пределом функцию v такую, что $\hat{v}(x) = \widehat{R}^u_E(x)$ для всех точек $x \in \widetilde{\Omega}_1$.

Пусть $V = \{x \in \Omega \setminus \overline{E} : d_\Omega(x, K_0) > \alpha\} \cap \{x \in \Omega \setminus \overline{E} : d_\Omega(x, K_1) > \alpha\}$, где $K_0 = \overline{E \cap \Omega}$, а $K_1 \Subset \partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus E$. В том случае, если $E \Subset \Omega$, в качестве компакта K_1 рассматривается вся несобственная граница $\partial\widetilde{\Omega}_1$. Полагаем $s_i = P(v_i, V, \partial V \cap \Omega)$. Тогда функции s_i $\mathscr{A}^\sigma$-гармонические в V относительно $\overline{\partial V \cap \Omega}$, $s_i \in \Phi^u_E$ и $s_{i+1} \leqslant s_i \leqslant v_i$. Значит,

$$R^u_E \leqslant s = \lim_{i\to\infty} s_i \leqslant \lim_{i\to\infty} v_i = v,$$

откуда вытекает $\widehat{R}_E^u \leqslant \hat{s} = \hat{v}$, т. е. в V справедливо равенство $\widehat{R}_E^u = \hat{s}$. Функция $\hat{s} = s$ — $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая в V по теореме о сходимости Гарнака, что доказывает первое утверждение леммы 8.2. Ввиду того, что функция u полунепрерывна снизу и $u \in \Phi_E^u$, доказано второе утверждение леммы 8.2.

Лемма 8.3. *Предположим, что K_1 — компактное подмножество $\widetilde{\Omega}_1$ и $u = \widehat{R}_{K_1}^1(\widetilde{\Omega}_1)$ — $\mathscr{A}^\sigma$-потенциал компакта K_1 в $\widetilde{\Omega}_1$. Пусть функция $\varphi \in C(\widetilde{\Omega}_1)$ такова, что $\varphi = 1$ на K_1, $\varphi = 0$ на K_0, где $K_0 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus K_1$, $K_0 \cap K_1 = \varnothing$. Тогда $u|_{\Omega\setminus K_1}$ — единственная $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция в $\Omega \setminus K_1$ такая, что $u - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1; \mu)$.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_j\}$ и $\{\tau_i\}$ — последовательности чисел, строго монотонно стремящиеся к нулю . Образуем множества

$$D_j = \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_1) > \alpha_j\} \quad \text{и} \quad \omega_i = \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_0) > \tau_i\},$$

обладающие следующими свойствами: $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset \widetilde{\Omega}_1 \setminus K_1$, $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \ldots \subset \widetilde{\Omega}_1 \setminus K_0$, $D_1 \cap \omega_1 \neq \varnothing$. Тогда согласно лемме 2.6 точки множеств $\partial D_j \cap \Omega$ и $\partial\omega_i \cap \Omega$ регулярны. Предположим, что функция $\varphi = 1$ на $(\Omega \setminus D_1) \cup K_1$ и $\varphi = 0$ на $(\Omega \setminus \omega_1) \cup K_0$. Пусть $h_{i,j}$ — $\mathscr{A}^\sigma$-гармонические функции в $\omega_i \cap D_j$ такие, что $h_{i,j} - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\omega_i \cap D_j, \overline{(\partial D_j \cup \partial\omega_i) \cap \Omega}; \mu)$. Продолжим $h_{i,j}$ на всю область Ω с сохранением свойства непрерывности, полагая функцию $h_{i,j} = 1$ на $(\Omega \setminus D_j) \cup K_1$ и $h_{i,j} = 0$ в $(\Omega \setminus \omega_i) \cup K_0$. Согласно первой лемме о склейке $h_{i,j}$ является $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической функцией в ω_i. По принципу сравнения $h_{i,j} \leqslant h_{i+1,j} \leqslant 1$, а из теоремы Гарнака о сходимости следует, что функция $h_j = \lim\limits_{i\to\infty} h_{i,j}$ является $\mathscr{A}^\sigma$-гармонической в D_j. Кроме того, функция h_j, как предел возрастающей последовательности $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических в Ω функций, является $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической функцией в Ω. Более того, $h_j = 1$ на $(\Omega \setminus D_j) \cup K_1$ и, следовательно,

$$h_j \geqslant \widehat{R}_{K_1}^1(\widetilde{\Omega}_1) = u.$$

В силу [5, неравенство (2.5)] справедливо неравенство

$$\int\limits_{\omega_i\cap D_j} |\nabla_{\mathscr{L}} h_{i,j}|^p \, d\mu \leqslant c \int\limits_{\Omega\setminus K_1} |\nabla_{\mathscr{L}} \varphi|^p \, d\mu.$$

Поэтому последовательность $h_{i,j} - \varphi$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D_j, \overline{(\partial D_j \cap \Omega)} \cup K_0; \mu)$. Значит, предельная функция $h_j - \varphi$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D_j, \overline{(\partial D_j \cap \Omega)} \cup K_0; \mu)$ [5]. Далее, так как функции h_j — $\mathscr{A}^\sigma$-гармонические, то последовательность $\{h_j\}$ убывает к $\mathscr{A}^\sigma$-гармонической функции h в $\Omega \setminus K_1$ такой, что $h - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K_1; \mu)$. Для того чтобы закончить доказательство, покажем, что $h = u$ в $\Omega \setminus K_1$. Из того, что $h_j \geqslant u$ в D_j, следует, что $h \geqslant u$ в $\Omega \setminus K_1$. Докажем обратное неравенство. Для этого выберем функцию $v \in \Phi_{K_1}^1$ и зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда на $\partial D_j \cap \Omega$ для некоторого j выполняется неравенство $(1+\varepsilon)v \geqslant 1$ Значит, на соответствующих множествах выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
(1+\varepsilon)v &\geqslant h_{i,j} && \text{на} \quad \omega_i \cap D_j,\\
(1+\varepsilon)v &\geqslant h_j && \text{на} \quad \Omega \cap D_j,\\
(1+\varepsilon)v &\geqslant h && \text{на} \quad \Omega \setminus K_1.
\end{aligned}$$

В силу произвольности ε заключаем, что $v \geqslant h$ в $\Omega \setminus K_1$, поэтому $R_{K_1}^1 \geqslant h$ в $\Omega \setminus K_1$. Согласно лемме 8.2 $u = R_{K_1}^1$ в $\Omega \setminus K_1$. Следовательно, $u \geqslant h$. Откуда окончательно получаем, что $u = h$. Лемма доказана.

Лемма 8.4. *Предположим, что K — компактное подмножество множества $\widetilde{\Omega}_1$, а функция $u = \widehat{R}^1_K$ — $\mathscr{A}^\sigma$-потенциал K в $\widetilde{\Omega}_1$. Тогда*

$$\operatorname{cap}\bigl(K, W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)\bigr) \leqslant \int\limits_{\Omega} |\nabla_{\mathscr{L}} u|^p \, d\mu + \int\limits_{\Omega} |u|^p \, d\mu.$$

Доказательство. Пусть функция $\varphi \in C(\widetilde{\Omega}_1)$ такова, что $\varphi = 1$ на K и $\varphi = 0$ на некотором множестве $K_0 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus K$. Так как $u - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\widetilde{\Omega}_1, K_0 \cup K;\mu)$, то по лемме 8.3 функция u может быть аппроксимирована в $W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$ допустимыми для конденсатора (K, K_0) функциями, откуда следует требуемое неравенство. Доказательство закончено.

В случае, когда $\mathscr{A}(x,\xi) = w(x)|\xi|^{p-2}\xi$, функцию $\widehat{R}^1_K(\widetilde{\Omega}_1)$ будем называть (p,μ)-*потенциалом*.

Лемма 8.5. *Пусть K — компактное подмножество $\widetilde{\Omega}_1$. Тогда равенство $\widehat{R}^1_K(\widetilde{\Omega}_1) = 1$ верно квазивсюду на K.*

Доказательство. Пусть $V = \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K) > \alpha\}$. Тогда по лемме 2.6 точки множества $\partial V \cap \Omega$ регулярны. Фиксируем $\gamma \in (0,1)$. Тогда множество

$$K_\gamma = \{x \in K : \widehat{R}^1_K \leqslant \gamma\}$$

компактно и на множестве K_γ справедливы неравенства

$$v_\gamma = \widehat{R}^1_{K_\gamma} \leqslant \widehat{R}^1_K \leqslant \gamma.$$

Так как точки множества $\partial V \cap \Omega$ регулярны, то для всех точек $x \in \partial V \cap \Omega$ выполняется

$$\lim_{\substack{\rho(x,y)\to 0\\ y \in V}} v_\gamma/\gamma = 0.$$

Заметим, что v_γ/γ — $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция в $(\Omega \setminus \overline{V}) \setminus K_\gamma$ относительно K_γ и $\overline{\partial V \cap \Omega}$. Кроме того, $\varphi - v_\gamma \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\widetilde{\Omega}_1, K_\gamma \cup \overline{V};\mu)$ для некоторой гладкой функции φ такой, что $\varphi = 1$ на K_γ и $\varphi = 0$ на $\overline{V}$ (лемма 8.3). Кроме того, $v_\gamma/\gamma \leqslant 1$. Значит, из принципа сравнения следует, что $v_\gamma/\gamma \leqslant s$ в Ω для любой функции $s \in \Phi^1_{K_\gamma}$. Следовательно, $v_\gamma/\gamma \leqslant v_\gamma$, что возможно лишь в случае, когда $v_\gamma \equiv 0$. Тогда из леммы 8.4 следует, что

$$\operatorname{cap}\bigl(K_\gamma, W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)\bigr) = 0.$$

Окончательно в силу счетной субаддитивности емкости получаем, что

$$\operatorname{cap}\bigl(\{x \in K : \widehat{R}^1_K(x) < 1\}, W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)\bigr) = 0.$$

Лемма доказана.

Следствие 8.1. *Пусть $K \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ — компакт и $B(x,r)$ — некоторый шар во внутренней метрике такой, что его пересечение с компактом K не пусто. Тогда*

$$\lim_{\substack{\rho(x,y)\to 0\\ x \in \Omega}} \widehat{R}^1_{\overline{B}\cap K}(2B)(x) = 0$$

для всех точек $y \in \partial 2B \cap \Omega$.

Доказательство этого следствия вытекает из теоремы 8.3, если принять следующие обозначения: $K_1 = \overline{B} \cap K$, $K_0 = \overline{\partial 2B \cap \Omega}$. Функцию φ выбираем следующим образом: $\varphi = 1$ на K_1 и $\varphi = 0$ на K_0.

Лемма 8.6. *Пусть K — относительно замкнутое подмножество $\widetilde{\Omega}_1$, имеющее положительную емкость* $\operatorname{cap}(K, W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu))$. *Пусть B — шар, содержащий множество K, и u — неотрицательная $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в шаре B относительно K и $\overline{\partial B \cap \Omega}$. Тогда*

$$\lim_{\substack{\rho(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} \widehat{R}_K^u(B)(x) = 0$$

для всех точек $y \in \partial B \cap \Omega$.

Доказательство. Пусть $v \in \Phi_K^u(B)$, и пусть $B_0 \Subset B$ — открытый шар в смысле внутренней метрики, содержащий множество K. Обозначим через D множество $B \setminus B_0$. Можно считать, что на $\partial B_0 \cap \Omega$ функция v ограничена, т. е. $v < M < \infty$. Если это не так, то в окрестности ∂B_0 функцию v можно заменить ее модификацией Пуассона $P(v, D, (\partial B_0 \cap \Omega) \cup (\partial B \cap \Omega))$.

Пусть h — $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция в D с граничным значением 0 на $\partial B \cap \Omega$ и M на $\partial B_0 \cap \Omega$. Тогда $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция

$$s = \begin{cases} v & \text{в} \quad \overline{B}_0, \\ \min(v,h) & \text{в} \quad B \end{cases}$$

по лемме 2.8 принадлежит классу $\Phi_K^u(B)$. Значит, $0 \leqslant \widehat{R}_K^u \leqslant s$ в B, и, переходя к пределу, получаем требуемое равенство.

Теорема 8.1. *Предположим, что x_0 — внутренняя точка компактов K_0 или K_1, принадлежащих несобственной границе $\partial\widetilde{\Omega}_1$. Если для любого шара B с рациональными центром и радиусом выполняется равенство*

$$\widehat{R}^1_{\overline{B}\cap\partial\widetilde{\Omega}_1}(2B)(x_0) = 1, \qquad x_0 \in B,$$

то точка x_0 регулярна в смысле Соболева.

Доказательство. Пусть функция $\theta \in W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$ непрерывна в Ω вплоть до компактов K_0 и K_1, а $h \in \mathscr{H}(\Omega, K_0 \cup K_1)$ такова, что $h - \theta \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1;\mu)$. Без ограничения общности можно считать, что $\theta(x_0) = 0$ и $\max|\theta| \leqslant 1$ в $\widetilde{\Omega}_1$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем шар $B(x,r)$ с рациональными центром и радиусом так, чтобы $x_0 \in B(x,r)$, а также чтобы $|\theta| < \varepsilon$ на шаре $B(x,2r)$. Определим функцию u равенством

$$u = \begin{cases} 1 - \widehat{R}^1_{\overline{B}\cap\partial\widetilde{\Omega}_1}(2B) + \varepsilon & \text{в} \quad 2B, \\ 1+\varepsilon & \text{в} \quad \Omega\setminus 2B. \end{cases}$$

На основании следствия 8.1 и первой леммы о склейке заключаем, что u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω относительно $\overline{B} \cap \partial\widetilde{\Omega}_1$ и $K_0 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus 2B$ и $u \geqslant \theta$ в Ω. Из того, что $h - \theta \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1;\mu)$, можно сделать вывод, что функция

$$\min(h-\theta, u-\theta) = \min(h,u) - \theta$$

принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1;\mu)$. Так как u — суперрешение, то по принципу сравнения $u \geqslant h$ почти всюду в Ω, а так как функции u и h непрерывны, то это неравенство выполняется всюду в Ω. Отсюда делаем вывод, что

$$\varlimsup_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} h(x) \leqslant \lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) = \varepsilon.$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к тому, что $-u \leqslant h$ в Ω, а значит,

$$\varliminf_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} h(x) \geqslant -\lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) = -\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε имеем равенство $\lim\limits_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} h(x) = 0 = \theta(x_0)$, что и требовалось доказать.

Лемма 8.7. *Множество иррегулярных внутренних точек компактов K_0 и K_1, $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, где $\partial\widetilde{\Omega}_1$ — несобственная граница ограниченного открытого множества Ω, имеет емкость нуль.*

Доказательство. Пусть $E \Subset K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ — множество всех не регулярных граничных точек. На основании теоремы 8.1 можно выбрать счетное множество шаров B_i таких, что каждая точка x из E принадлежит некоторому шару B_i и выполняется неравенство

$$\widehat{R}^1_{\overline{B_i}\cap\partial\widetilde{\Omega}_1}(2B_i)(x) < 1.$$

Тогда E есть подмножество счетного объединения

$$\bigcup_i \{x \in \overline{B}_i \cap \partial\widetilde{\Omega}_1 : \widehat{R}^1_{\overline{B_i}\cap\partial\widetilde{\Omega}_1}(2B_i)(x) < 1\}$$

множеств, имеющих емкость нуль (лемма 8.5), а значит, имеет емкость нуль.

Лемма 8.8. *Предположим, что функция u — неотрицательная и $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в Ω и $K \subset \widetilde{\Omega}_1$ — компакт. Тогда множество*

$$S = \{x \in \widetilde{\Omega}_1 : \widehat{R}^u_K(x) < R^u_K(x)\}$$

имеет емкость нуль.

Доказательство. Покажем, что каждая точка $x \in S$ содержится в шаре $B = B(x,r)$ с рациональными центром и радиусом и при этом выполняется неравенство

$$\widehat{R}^1_{\overline{B}\cap K}(2B)(x) < 1.$$

Так как на $\Omega \setminus K$ выполняется равенство $\widehat{R}^u_K = R^u_K$, то множество S содержится в K.

Зафиксируем точку $x \in S$ и выберем число λ так, чтобы

$$\widehat{R}^u_K(x) < \lambda < u(x).$$

Так как функция u полунепрерывна снизу, то точка x содержится в шаре B, где B — шар относительно внутренней метрики с рациональными центром и радиусом такой, что в $2B \subset \Omega$ выполняется неравенство $u \geqslant \lambda$. Это означает, что

$$\lambda \widehat{R}^1_{\overline{B}\cap K}(2B)(x) = \widehat{R}^\lambda_{\overline{B}\cap K}(2B)(x) \leqslant \widehat{R}^u_K < \lambda.$$

То есть $\widehat{R}^1_{\overline{B}\cap K}(2B)(x) < 1$, что и требовалось получить.

Теорема 8.2. *Пусть E — произвольное подмножество $\widetilde{\Omega}_1$, и пусть u — неотрицательная $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция. Тогда $\widehat{R}^u_E = R^u_E$ квазивсюду на множестве E.*

Доказательство. Введем обозначения $\hat{s} = \widehat{R}^u_E$ и $s = R^u_E$. Покажем, что $\hat{s} = s$ квазивсюду. Семейство Φ^u_E является направленным вниз, поэтому, применяя топологическую лемму Шоке [13], можно считать, что Φ^u_E содержит убывающую последовательность функций $s_i \in \Phi^u_E$, имеющую предел $s = \lim\limits_{i\to\infty} s_i$. Так как емкость обладает свойством субаддитивности, достаточно доказать, что множество

$$S_j = \{x \in \Omega : \hat{s}(x) + 1/j < s(x)\}$$

имеет емкость нуль для каждого положительного целого j.

Зафиксируем j. Пусть $K \subset S_j$ — компакт. Так как S_j — борелевское множество, значит, оно измеримо по емкости [5] и достаточно показать, что

$$\operatorname{cap}\big(K, W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)\big) = 0.$$

Пусть $V \subset \Omega$ — открытая окрестность компакта K. Заметим, что каждая функция s_i принадлежит $\Phi^{\hat{s}+1/j}_K(V)$, следовательно, в V верно равенство $\widehat{R}^{\hat{s}+1/j}_K(V) = \hat{s}$. Отсюда имеем следующие соотношения:

$$\widehat{R}^{\hat{s}+1/j}_K(V) = \hat{s} < \hat{s} + 1/j = R^{\hat{s}+1/j}_K(V) \quad \text{на} \quad K.$$

Из леммы 8.8 вытекает, что компакт K имеет емкость $\operatorname{cap}\big(K, W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)\big)$, равную нулю. Доказательство закончено.

Следствие 8.2. *Предположим, что E — произвольное подмножество $\widetilde{\Omega}_1$. Тогда $\widehat{R}^1_E(\widetilde{\Omega}_1) = 1$ квазивсюду на E.*

Лемма 8.9. *Предположим, что существует $\mathscr{A}^\sigma$-субгармоническая функция v на открытом множестве $D \subset \Omega$ относительно $\overline{\partial D \cap \Omega}$ такая, что $\psi \leqslant v \leqslant R^\psi(\widetilde{\Omega}_1)$ в D. Тогда выметание $\widehat{R}^\psi(\widetilde{\Omega}_1)$ есть $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция на множестве D относительно $\overline{\partial D \cap \Omega}$ и совпадает на нем с $R^\psi(\widetilde{\Omega}_1)$.*

Доказательство. Пусть $V = \{x \in D : d_\Omega(x, \partial D \cap \Omega) > \alpha\}$. Тогда $V \subset D$ — открытое множество и по лемме 2.6 точки $y \in \partial V \cap D$ регулярны. Выберем убывающую последовательность функций $u_j \in \Phi^\psi(\widetilde{\Omega}_1)$, которые сходятся к функции u таким образом, чтобы $\hat{u} = \widehat{R}^\psi(\widetilde{\Omega}_1)$. Это возможно в силу топологической леммы Шоке [13].

Так как в области V выполняется неравенство $\psi \leqslant v \leqslant P(u_j, V)$, то модификации Пуассона $P(u_j, V)$ принадлежат семейству $\Phi^\psi(\widetilde{\Omega}_1)$ и убывают к $\mathscr{A}^\sigma$-гармонической функции h в области V. Кроме того, в V верны неравенства $\hat{u} \leqslant h \leqslant u$. Ввиду непрерывности функции h получаем равенство $h = \hat{u}$. Лемма доказана.

Лемма 8.10. *Если функция ψ непрерывна в $\widetilde{\Omega}_1$, то $\widehat{R}^\psi$ непрерывна на Ω и $\widehat{R}^\psi \geqslant \psi$ в $\widetilde{\Omega}_1$. Более того, $\widehat{R}^\psi$ — $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция на открытом множестве $\{\widehat{R}^\psi > \psi\}$.*

Доказательство. Очевидно, что $\widehat{R}^\psi \geqslant \psi$ в $\widetilde{\Omega}_1$. Докажем непрерывность, для этого зафиксируем точку $x_0 \in \Omega$ и число $\varepsilon > 0$. Так как $\widehat{R}^\psi(x_0) \geqslant \psi(x_0)$, то можно выбрать шар $B = B(x_0, r_0) \Subset \Omega$ такой, что $\widehat{R}^\psi + \varepsilon \geqslant \psi(x_0) + \varepsilon/2 \geqslant \psi$ на замыкании шара B. Пусть $v = P(\widehat{R}^\psi + \varepsilon, B)$. Так как функция v $\mathscr{A}$-гармоническая в шаре B, то из принципа минимума следуют неравенства $v \geqslant \psi(x_0) + \varepsilon/2 \geqslant \psi$. С другой стороны, так как $\widehat{R}^\psi \geqslant \psi$ в Ω, получаем, что $v \geqslant \psi$ в Ω, значит, $v \in \Phi^\psi$. Тогда $v \geqslant \widehat{R}^\psi$ в Ω, откуда следуют неравенства

$$\varlimsup_{\substack{\rho(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \widehat{R}^\psi(x) \leqslant \lim_{\substack{\rho(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} v(x) = v(x_0) \leqslant \widehat{R}^\psi(x_0) + \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, а выметание $\widehat{R}^{\psi}$ полунепрерывно снизу, то $\widehat{R}^{\psi}$ непрерывно в точке x_0.

Если $\widehat{R}^{\psi}(x_0) > \psi(x_0)$, то существует $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $\widehat{R}^{\psi} > \lambda > \psi$ в окрестности точки x_0. Тогда по лемме 8.9 $\widehat{R}^{\psi}$ — $\mathscr{A}^{\sigma}$-гармоническая в этой окрестности. Доказательство закончено.

Лемма 8.11. *Предположим, что u — $\mathscr{A}^{\sigma}$-супергармоническая функция в области Ω относительно компактов K_0 и K_1. Тогда существует возрастающая последовательность непрерывных $\mathscr{A}^{\sigma}$-супергармонических функций u_i в Ω относительно тех же компактов такая, что $u = \lim\limits_{i\to\infty} u_i$. Более того, каждая функция u_i есть суперрешение уравнения (2.1) относительно K_0 и K_1.*

Доказательство. Доопределим функцию u на $\partial\widetilde{\Omega}_1$ ее нижним пределом. Пусть f_i — возрастающая к u последовательность непрерывных на $\widetilde{\Omega}_1$ функций. Тогда согласно лемме 8.10 и следствию 3.2 $u_i = \widehat{R}^{f_i}(\widetilde{\Omega}_1)|_{\Omega}$ есть требуемая последовательность непрерывных $\mathscr{A}^{\sigma}$-супергармонических функций.

§ 9. Решение Перрона

Метод Перрона — это метод решения задачи Дирихле на данном открытом множестве с произвольными граничными данными.

Определение 9.1. Пусть дана функция $f\colon \partial\widetilde{\Omega}_1 \to [-\infty;+\infty]$. *Верхний класс* $\mathscr{U}_f$ функции f состоит из всех функций u таких, что выполнены следующие условия:

(1) функция u — $\mathscr{A}^{\sigma}$-супергармоническая в Ω относительно компактов K_0 и K_1,

(2) функция u ограничена снизу,

(3) $\varliminf\limits_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) \geqslant f(y)$ для всех точек $y \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$.

Нижний класс определяется аналогично предыдущему. Функция v принадлежит $\mathscr{L}_f$, если

(1) v — $\mathscr{A}^{\sigma}$-субгармоническая функция в Ω относительно компактов K_0 и K_1,

(2) функция v ограничена сверху,

(3) $\varlimsup\limits_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} v(x) \leqslant f(y)$ для всех точек $y \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$.

Очевидно, что функция v принадлежит $\mathscr{L}_f$ тогда и только тогда, когда $-v$ принадлежит $\mathscr{U}_{-f}$.

Определение 9.2. Функция

$$\overline{H}_f^{\sigma} = \overline{H}_f(\Omega, K_0 \cup K_1) = \inf\{u : u \in \mathscr{U}_f\}$$

называется *верхним решением Перрона в области Ω относительно компактов K_0 и K_1 функции f*, а функция

$$\underline{H}_f^{\sigma} = \underline{H}_f(\Omega, K_0 \cup K_1) = \sup\{u : u \in \mathscr{L}_f\} \text{ —}$$

нижним решением Перрона в Ω относительно компактов K_0 и K_1 функции f, определенной на $\partial\widetilde{\Omega}_1$. Если $\mathscr{U}_f = \varnothing$ (или $\mathscr{L}_f = \varnothing$), то мы естественно полагаем $\overline{H}_f^{\sigma} = \infty$ (и $\underline{H}_f^{\sigma} = -\infty$).

Приведем некоторые свойства решений Перрона:

$$\underline{H}_f^{\sigma} = -\overline{H}_{-f}^{\sigma}.$$

Из принципа сравнения следует, что $\underline{H}_f^\sigma \leqslant \overline{H}_f^\sigma$. Если $f \leqslant g$, значит, $\overline{H}_f^\sigma \leqslant \overline{H}_g^\sigma$. Для $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняются следующие равенства:

$$\overline{H}_\lambda^\sigma = \lambda = \underline{H}_\lambda^\sigma, \quad \overline{H}_{f+\lambda}^\sigma = \overline{H}_f^\sigma + \lambda \quad \text{и} \quad \underline{H}_{f+\lambda}^\sigma = \underline{H}_f^\sigma + \lambda.$$

Если $\lambda > 0$ или если $\lambda \geqslant 0$, а f принимает конечные значения, то

$$\overline{H}_{\lambda f}^\sigma = \lambda \overline{H}_f^\sigma, \quad \underline{H}_{\lambda f}^\sigma = \lambda \underline{H}_f^\sigma \quad \text{и} \quad \overline{H}_{-\lambda f}^\sigma = -\lambda \underline{H}_f^\sigma.$$

Следующий результат является фундаментальным фактом в теории потенциала.

Лемма 9.1. *Для функции $\overline{H}_f^\sigma$ (и соответственно $\underline{H}_f^\sigma$) существуют лишь следующие возможности:*

(1) *$\overline{H}_f^\sigma$ ($\underline{H}_f^\sigma$) — $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция в Ω относительно компактов K_0 и K_1;*

(2) *$\overline{H}_f^\sigma$ ($\underline{H}_f^\sigma$) $\equiv \infty$ в Ω;*

(3) *$\overline{H}_f^\sigma$ ($\underline{H}_f^\sigma$) $\equiv -\infty$ в Ω.*

Доказательство. Очевидно, что если множество $\mathscr{U}_f$ не пусто, то функции $\min(u,v)$ и $P(u,D)$ принадлежат верхнему классу $\mathscr{U}_f$, где $D \subset \Omega$ — открытое множество такое, что $\Omega \setminus \overline{D}$ содержит непересекающиеся окрестности U_0 и U_1 компактов K_0 и K_1 и точки $y \in \partial D \cap \Omega$ регулярны. Тогда на основании топологической леммы Шоке [13] можно считать, что существует убывающая последовательность функций $u_j \in \mathscr{U}_f$, сходящаяся к функции u и такая, что полунепрерывная снизу регуляризация функции u совпадает с $\overline{H}_f^\sigma$ в D. Рассмотрим модификации Пуассона $P(u_j, D)$, которые принадлежат верхнему классу $\mathscr{U}_f$. По теореме о сходимости Гарнака предельная функция $\lim\limits_{j\to\infty} P(u_j, D)$ есть либо $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция в D относительно $\overline{\partial D \cap \Omega}$, либо тождественно равна $-\infty$ в D, откуда следует вывод теоремы.

Теорема 9.1. *Предположим, что F — убывающее вниз семейство полунепрерывных сверху на $K_0 \cup K_1$ функций $f\colon \partial\widetilde{\Omega}_1 \to [-\infty;\infty)$. Если $g = \inf F$, то $\overline{H}_g^\sigma = \inf\{\overline{H}_f^\sigma : f \in F\}$.*

Доказательство. Введем обозначение: $h = \inf_F \overline{H}_f^\sigma$. Так как неравенство $g \leqslant f$ верно для любой функции f из F, имеем, что $\overline{H}_g^\sigma \leqslant h$ в Ω. Для того чтобы установить обратное неравенство, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем произвольную функцию u из верхнего класса $\mathscr{U}_g$. Так как функции из F полунепрерывны сверху на $K_0 \cup K_1$, то множества

$$\Big\{ y \in K_i \subset \partial\widetilde{\Omega}_1,\ i = 0,1 : \varliminf_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) + \varepsilon > f(y) \Big\}, \quad f \in F,$$

образуют открытые покрытия компактов K_0 и K_1. Ввиду того, что семейство F является убывающим вниз, то найдется функция $f \in F$ такая, что неравенство $\varliminf\limits_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) + \varepsilon > f(y)$ будет верно для всех $y \in K_i$, $i = 0, 1$. Таким образом, функция $u + \varepsilon$ принадлежит верхнему классу $\mathscr{U}_f$ и, следовательно, $u + \varepsilon \geqslant \overline{H}_f^\sigma \geqslant h$, откуда вытекает неравенство $\overline{H}_g^\sigma + \varepsilon \geqslant h$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $\overline{H}_g^\sigma \geqslant h$, что и требовалось доказать.

Следствие 9.1. *Пусть $f_j : \partial\widetilde{\Omega}_1 \to [-\infty;\infty)$ — убывающая последовательность полунепрерывных сверху на компактах $K_i \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, $i = 0,1$, функций и $f = \lim\limits_{j\to\infty} f_j$. Тогда $\overline{H}_f^\sigma = \lim\limits_{j\to\infty} \overline{H}_{f_j}^\sigma$.*

§ 10. $\mathscr{A}^\sigma$-Регулярные граничные точки

Определение 10.1. Внутренняя точка x_0, принадлежащая множеству $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, где $\partial\widetilde{\Omega}_1$ — несобственная граница открытого множества Ω, называется *$\mathscr{A}^\sigma$-регулярной*, если

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \overline{H}^\sigma_f(x) = f(x_0)$$

для каждой непрерывной на компактах K_0 и K_1 функции $f\colon \partial\widetilde{\Omega}_1 \to \mathbb{R}$. В дальнейшем, говоря об *$\mathscr{A}^\sigma$-регулярных* точках, мы всегда предполагаем, что они суть внутренние для рассматриваемых компактов. Точка x_0 *$\mathscr{A}^\sigma$-иррегулярна*, если и только если она не $\mathscr{A}^\sigma$-регулярна.

Так как $\overline{H}^\sigma_f = -\underline{H}^\sigma_{-f}$, мы вправе в определении 10.1 верхнее решение Перрона $\overline{H}^\sigma_f$ заменить на нижнее решение Перрона $\underline{H}^\sigma_f$.

Теорема 10.1. *Внутренняя точка x_0 компактов $K_i \in \partial\widetilde{\Omega}_1$, $i = 0, 1$, $\mathscr{A}^\sigma$-регулярна тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \overline{H}^\sigma_f(x) = f(x_0)$$

для каждой ограниченной на K_i, $i = 0, 1$, функции $f\colon \partial\widetilde{\Omega}_1 \to \mathbb{R}$, непрерывной в точке x_0.

Доказательство. Достаточность следует из определения. Докажем необходимость. Пусть, например, $x_0 \in K_0 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ — $\mathscr{A}^\sigma$-регулярная точка. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть V — открытая окрестность точки x_0 такая, что $|f - f(x_0)| < \varepsilon$ на $V \cap K_0$. Выберем непрерывную на компактах K_0 и K_1 функцию $g\colon \partial\widetilde{\Omega}_1 \to [f(x_0) + \varepsilon, \sup\limits_{x\in K_0\cup K_1} |f| + \varepsilon]$ такую, чтобы $g(x_0) = f(x_0) + \varepsilon$ и $g = \sup |f| + \varepsilon$ на $K_0 \setminus V$ и на K_1. Тогда из неравенства $g \geqslant f$ на $K_0 \cup K_1$ следует, что

$$\varlimsup_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \overline{H}^\sigma_f(x) \leqslant \lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \overline{H}^\sigma_g(x) = g(x_0) = f(x_0) + \varepsilon.$$

Аналогично можно показать, что

$$\varliminf_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \overline{H}^\sigma_f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon,$$

откуда приходим к заключению, что

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \overline{H}^\sigma_f(x) = f(x_0).$$

Теорема доказана.

§ 11. Барьеры

Определение 11.1. Функция u называется *барьером* (относительно Ω) во внутренней для компактов $K_i \in \partial\widetilde{\Omega}_1$, $i = 0, 1$, точке x_0, если выполнены следующие условия:

(1) функция u $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в Ω относительно K_0 и K_1;

(2) $\varliminf\limits_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) > 0$ для всех $y \in (K_0 \cup K_1) \setminus \{x_0\}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0 \\ x\in\Omega}} u(x) = 0.$

Согласно принципу минимума барьер всегда неотрицателен, более того, если u — строго положительный барьер относительно Ω в точке x_0 и V — открытое подмножество Ω такое, что $x_0 \in \partial\widetilde{\Omega}_1 \cap V$, то функция u — барьер относительно V.

Теорема 11.1. *Пусть точка x_0 принадлежит $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$. Если в точке x_0 существует барьер относительно Ω, то точка x_0 $\mathscr{A}^\sigma$-регулярна.*

Доказательство. Пусть функция u есть барьер в точке x_0. Тогда по принципу минимума $u > 0$ в Ω. Пусть $f\colon \partial\widetilde{\Omega}_1 \to \mathbb{R}$ — непрерывная на компактах K_0 и K_1 функция, и без ограничения общности можно предположить, что в точке $x_0 \in K_0$ выполняется равенство $f(x_0) = 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем открытую окрестность V точки x_0 такую, чтобы $|f| < \varepsilon$ в $V \cap K_0$. Пусть $\lambda > \max\limits_{x\in K_0\cup K_1} |f|$. Введем функцию

$$v = \begin{cases} \lambda & \text{в} \quad \Omega\setminus V, \\ \frac{\lambda}{m}\min(u,m) & \text{в} \quad V, \end{cases}$$

где $m = \inf\{u(x) : x \in \partial V \cap \Omega\} > 0$. Тогда согласно первой лемме о склейке v — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω относительно множеств K_0 и K_1. Более того, $v + \varepsilon$ принадлежит $\mathscr{U}_f$, следовательно,

$$\varlimsup_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0 \\ x\in\Omega}} \overline{H}^\sigma_f(x) \leqslant \varlimsup_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0 \\ x\in\Omega}} v(x) + \varepsilon = \varepsilon.$$

Аналогично показывается, что $-(v+\varepsilon) \in \mathscr{L}_f$, и мы получаем

$$\varliminf_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0 \\ x\in\Omega}} \overline{H}^\sigma_f(x) \geqslant \varliminf_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0 \\ x\in\Omega}} \underline{H}^\sigma_f(x) \geqslant \varliminf_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0 \\ x\in\Omega}} (-v(x) - \varepsilon) = -\varepsilon.$$

Ввиду того, что ε произвольно, имеем

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0 \\ x\in\Omega}} \overline{H}^\sigma_f(x) = 0 = f(x_0),$$

что и требовалось получить.

По ходу доказательства теоремы 11.1 мы фактически доказали следующее

Предложение 11.1. *Пусть $U \subset \Omega$ — открытое множество, и пусть точка $x_0 \in U \cap \partial\widetilde{\Omega}_1$ такова, что равенство $V \cap U = V \cap \Omega$ верно для некоторой открытой окрестности V точки x_0. Барьер в точке x_0 относительно Ω существует тогда и только тогда, когда существует барьер в точке x_0 относительно U.*

Для метрического пространства $\widetilde{\Omega}_1$ существует счетное всюду плотное множество $\widetilde{\omega}$. В следующей теореме шары $B = B(x,r)$ рассматриваются с центрами в точках $x \in \widetilde{\omega}$.

Теорема 11.2. *Внутренняя точка $x_0 \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ является $\mathscr{A}^\sigma$-регулярной, если*

$$\widehat{R}^1_{B\cap\partial\widetilde{\Omega}_1}(2B)(x_0) = 1$$

для любого шара $B = B(x,r)$, $x \in \widetilde{\omega}$, содержащего точку x_0.

Доказательство этой теоремы полностью воспроизводит доказательство теоремы 8.1 с той лишь разницей, что необходимо функцию $\theta \in W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$, непрерывную в области Ω вплоть до компактов K_0 и K_1, заменить на функцию f, непрерывную на компактах $K_i \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, $i = 0, 1$, а функцию $h \in \mathscr{H}^\sigma(\Omega)$ заменить на $\overline{H}^\sigma_f$ и заметить, что построенная в доказательстве функция u принадлежит $\mathscr{U}_f$, а $-u \in \mathscr{L}_f$.

Теорема 11.3. *Множество $\mathscr{A}^\sigma$-иррегулярных граничных точек, лежащих внутри компактов $K_i \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, $i = 0, 1$, где $\partial\widetilde{\Omega}_1$ — несобственная граница открытого множества Ω, имеет емкость нуль.*

Доказательство этой теоремы следует схеме доказательства леммы 8.7.

Теорема 11.4. *Пересечение $B(x,\delta) \cap \partial\widetilde{\Omega}_1$, где $B(x,\delta)$ — шар в метрическом пространстве $(G, \rho(x,y))$, содержит точку $x_0 \in \partial\widetilde{\Omega}_1$, $\mathscr{A}^\sigma$-регулярную относительно Ω.*

Доказательство теоремы 11.4 вытекает из теоремы 11.3, а также из предложения 6.10 и леммы 6.9 [5].

Прежде чем перейти к доказательству следующей теоремы, докажем лемму о продолжении $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций.

Лемма 11.1. *Предположим, что функция u — $\mathscr{A}$-супергармоническая в окрестности U замкнутого шара $\overline{B} \subset \widetilde{\Omega}_1$. Тогда существует $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция u' в области Ω относительно $K_0 = \partial\widetilde{\Omega}_1 \cap \overline{B}$ и некоторого компакта $K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus U$, содержащего хотя бы одну регулярную точку, такая, что $u' = u$ в шаре B и функция u' ограничена снизу.*

Доказательство. Пусть B_0 — шар во внутренней метрике, содержащий исходный шар B такой, что $\partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus B_0 \neq \varnothing$, и пусть функция u — $\mathscr{A}$-супергармоническая в нем. Можно предполагать, что $u > 0$ в B_0, поэтому вместо функции u рассмотрим ее выметание $v = \widehat{R}^u_{\overline{B}}(B_0)$. Тогда $v = u$ в B и $\lim\limits_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} v(x) = 0$ для всех точек $y \in \partial B_0 \cap \Omega$ (см. лемму 8.6). Пусть $m = \min\limits_{\overline{B}} v$, тогда множество

$$K = \{x \in B_0 : v(x) \geqslant m\}$$

компактно и содержит $\overline{B}$. Построим функцию

$$s = \begin{cases} \overline{H}^\sigma_f & \text{в} \quad \Omega \setminus K, \\ m & \text{в} \quad K, \end{cases}$$

где $f = m$ в K, $f = 0$ на $\partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus K$ и $\overline{H}^\sigma_f$ — решение Перрона в $\Omega \setminus K$ относительно K и K_1. Для того чтобы показать, что $\lim\limits_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} s(x) = m$ для всех точек $y \in K$, выберем представитель $\tilde{s} \in \mathscr{U}_f$. Тогда $\tilde{s} \geqslant 0$ в Ω и согласно принципу сравнения $\tilde{s} \geqslant v$ в $B_0 \setminus K$. Кроме того, v — $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция в $B_0 \setminus \overline{B}$. Тогда для всех точек $y \in \partial K \cap \Omega$ выполняется неравенство $\varliminf\limits_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} s(x) \geqslant m$, и, следовательно, $\lim\limits_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} s(x) = m$ для всех точек $y \in K$. По лемме 2.8 функция s $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая в $\Omega \setminus K$ относительно K и K_1 и $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в Ω относительно K_0 и K_1. На K_1 существует $\mathscr{A}^\sigma$-регулярная точка. Значит, из принципа максимума следует, что $0 < s < m$ на ∂B_0.

Если через M обозначить $\max\limits_{\partial B_0} s$, то величина $\delta = m/(m - M)$ положительна и для всех точек $z \in \partial B_0 \cap \Omega$ выполнены соотношения $\delta(s - m) \leqslant -m = v - m$. Так как для всех точек $x \in K$ $s = m$ и $v(x) \geqslant m$, то по принципу сравнения получаем, что неравенство $\delta(s - m) \leqslant v - m$ выполнено всюду в $B_0 \setminus K$. Используя лемму 2.8, замечаем, что функция

$$u' = \begin{cases} v & \text{в} \quad K, \\ \delta(s - m) + m & \text{в} \quad \Omega \setminus K \end{cases}$$

есть требуемое $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническое расширение функции u.

Заметим, что если $K_0 = \varnothing$, т. е. $B \Subset \Omega$, то роль компакта K_1 играет несобственная граница $\partial\widetilde{\Omega}_1$ и доказательство в этом случае есть очевидное обобщение доказательства из [2, лемма 9.14].

Теорема 11.5. *Если граничная точка $x_0 \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ открытого множества Ω $\mathscr{A}^\sigma$-регулярна, то существует барьер в точке x_0 относительно области Ω.*

Доказательство. Предположим, что точка x_0 $\mathscr{A}^\sigma$-регулярна и $\overline{H}_f^\sigma = f(x_0) = 0$.

Выберем шар достаточно малого радиуса $B(\pi(x_0), r_0)$, $\pi : \widetilde{\Omega}_1 \to \overline{\Omega}$, такой, что $\overline{\Omega \cup 2B} \subset G$, где замыкание рассматривается в метрическом пространстве $(G, \rho(x, y))$. Определим функцию f равенством

$$f(x) = \frac{(r_0 - \rho(x - x_0))^+}{r_0}$$

и введем обозначение $v = \widehat{R}^f(2B)$. Тогда по лемме 8.10 функция v непрерывна, $0 \leqslant v \leqslant 1$, и на границе шара $2B \cap \Omega$ принимает нулевые значения [2, лемма 8.8]. Более того, так как v — $\mathscr{A}$-гармоническая функция на множестве $\{f < v\}$, из принципа максимума следует, что $v = 1$ только в точке x_0.

Используя замечание к лемме 11.1 и лемму 2.8, покажем, что существует ограниченная $\mathscr{A}$-супергармоническая функция v' в $\Omega \cup 2B$ такая, что $v' = v$ в шаре B и $v' \leqslant 1 - \varepsilon < 1$ в $(\Omega \cup 2B) \setminus \overline{B}$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Доопределим функцию v' по правилу

$$v'(y) = \varliminf_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} v'(x),$$

где $y \in \partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus 2B$. Поэтому функция $\omega = 1 - \overline{H}_{v'}^\sigma$ — $\mathscr{A}$-гармоническая в Ω и

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \omega(x) = 0$$

по теореме 10.1 для случая, когда $K_0 = \varnothing$. Кроме того, так как $v' \in \mathscr{U}_{v'}$, имеем $\omega \geqslant 1 - v'$. Следовательно,

$$\varliminf_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} \omega(x) > 0$$

для всех точек $y \in \partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus \{x_0\}$, значит, функция $\omega(x)$ есть барьер в точке x_0 относительно Ω.

Замечание 11.1. Ввиду того, что $\rho(x, y) \leqslant d_\Omega(x, y)$, построенный в теореме 11.5 барьер является также и барьером в смысле определения 11.1.

Теорема 11.5 и предложение 11.1 показывают, что свойство $\mathscr{A}^\sigma$-регулярности — это локальное свойство. Сформулируем два следствия.

Следствие 11.1. *Пусть U и H — открытые подмножества Ω и $x_0 \in \partial H \cap \partial U$. Если существует открытая окрестность V точки x_0 такая, что $V \cap H = V \cap U$, то точка x_0 $\mathscr{A}^\sigma$-регулярна относительно H, если и только если она $\mathscr{A}^\sigma$-регулярна относительно U.*

Следствие 11.2. *Предположим, что $D \subset \Omega$ — открытое подмножество и точка x_0 принадлежит пересечению $\partial\widetilde{\Omega}_1 \cap \partial D$. Если точка x_0 $\mathscr{A}^\sigma$-регулярна относительно Ω, то точка x_0 $\mathscr{A}^\sigma$-регулярна относительно D.*

Теорема 11.6. *Пусть точка $x_0 \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ такова, что* $\operatorname{cap}\{x_0\} = 0$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) Точка x_0 — $\mathscr{A}^\sigma$-регулярная.

(2) Существует барьер в точке x_0 относительно множества Ω.

(3) Пусть $U \Subset V$ — открытые окрестности граничной точки $x_0 \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$. Тогда

$$\widehat{R}^u_{\overline{U}\cap\partial\widetilde{\Omega}_1}(V)(x_0) = \varliminf_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} u(x)$$

для любой неотрицательной $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической функции u.

(4) Для всех шаров $B(x,r)$, содержащих точку x_0, выполняется

$$\widehat{R}^1_{\overline{B}\cap\partial\widetilde{\Omega}_1}(2B)(x_0) = 1.$$

Доказательство. Эквивалентность утверждений (1) и (2) есть следствие теорем 11.1 и 11.5 и замечания 11.1. Докажем, что из утверждения (1) следует утверждение (3). Доопределим функцию u на $\partial\widetilde{\Omega}_1$ ее нижним пределом, и пусть f_j — возрастающая последовательность функций, непрерывных на множестве $\widetilde{\Omega}_1$ и таких, что $\lim f_j = u$ в U и $f_j = 0$ на $\partial V \cap \Omega$. Зафиксируем j и определим функции

$$g_j = \begin{cases} \overline{H}_{f_j}(V \setminus (\overline{U} \cap \partial\widetilde{\Omega}_1), (\overline{U} \cap \partial\widetilde{\Omega}_1) \cup (\overline{\partial V \cap \Omega})) & \text{в } V \setminus (\overline{U} \cap \partial\widetilde{\Omega}_1), \\ f_j & \text{в } \overline{U} \cap \partial\widetilde{\Omega}_1. \end{cases}$$

Согласно следствию 11.1

$$f_j(x_0) = \lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} g_j(x) \leqslant \varliminf_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} R^u_{\overline{U}\cap\partial\widetilde{\Omega}_1}(V)(x) = \widehat{R}^u_{\overline{U}\cap\partial\widetilde{\Omega}_1}(V)(x_0),$$

$$\varliminf_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} u(x_0) = \lim_{j\to\infty} f_j(x_0) \leqslant \widehat{R}^u_{\overline{U}\cap\partial\widetilde{\Omega}_1}(V)(x_0).$$

Обратное неравенство тривиально. Импликация (3) $\to$ (4) очевидна. Тот факт, что из утверждения (4) следует утверждение (1), доказан в теореме 11.2.

Теорема 11.7. *Точка x_0, внутренняя для компактов $K_i \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, $i = 0, 1$, $\mathscr{A}^\sigma$-регулярна тогда и только тогда, когда она регулярна в смысле Соболева.*

Доказательство. Согласно теореме 11.6 достаточно показать, что точка $x_0 \in K_i \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, $i = 0, 1$, регулярна в смысле Соболева тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\widehat{R}^1_{\overline{B}\cap\partial\widetilde{\Omega}_1}(2B)(x_0) = 1$ для любого шара B, содержащего точку x_0. Тот факт, что из этого условия следует регулярность в смысле Соболева, доказан в теореме 8.1. Пусть теперь точка x_0 регулярна в смысле Соболева. По лемме 8.3 имеем

$$\widehat{R}^1_{\overline{B}\cap\partial\widetilde{\Omega}_1}(2B)(x_0) = \lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \widehat{R}^1_{\overline{B}\cap\partial\widetilde{\Omega}_1}(2B)(x) = 1.$$

Теорема доказана.

§ 12. $\mathscr{A}^\sigma$-Разрешимость

Определение 12.1. Функция $f\colon \partial\widetilde{\Omega}_1 \to [-\infty; +\infty]$ называется *$\mathscr{A}^\sigma$-разрешимой* относительно компактов K_0 и K_1, если верхнее и нижнее решения Перрона $\overline{H}^\sigma_f$ и $\underline{H}^\sigma_f$ совпадают и хотя бы одно из них есть $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция в Ω относительно компактов K_0 и K_1.

$\mathscr{A}^\sigma$-Разрешимость функции f не означает, что

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} \overline{H}_f^\sigma(x) = f(y)$$

для $y \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$. Однако можно утверждать, что если существует ограниченная $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция h в области Ω относительно компактов K_0 и K_1 такая, что равенство

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} h(x) = f(y)$$

выполняется для всех точек $y \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, то из принципа сравнения следует, что функция f является $\mathscr{A}^\sigma$-разрешимой. В частности, если все точки $y \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ регулярны, то непрерывные на $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ функции являются $\mathscr{A}^\sigma$-разрешимыми. Если имеются нерегулярные точки, то $\mathscr{A}^\sigma$-разрешимость непрерывных на компактах $K_i \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, $i = 0, 1$, функций не очевидна.

Теорема 12.1. *Пусть K_0 и K_1 — некоторые фиксированные компактные множества из $\partial\widetilde{\Omega}_1$, и пусть функция f непрерывна в Ω вплоть до K_0 и K_1. Тогда функция $u = \widehat{R}^f(\widetilde{\Omega}_1)$ непрерывна в Ω, $u \geqslant f$ и*

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) = f(x_0)$$

для любой регулярной граничной точки $x_0 \in K_0 \cup K_1$. Если, кроме того, $f \in W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$, то $u \in W_p^1(\Omega;\mu)$, $u - f \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1;\mu)$ и

$$\int\limits_\Omega \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\, dx \geqslant 0$$

для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1;\mu)$, непрерывной в области Ω вплоть до компактов K_0 и K_1 и такой, что неравенство $\varphi \geqslant f - u$ выполняется почти всюду.

Доказательство. Так как функция f непрерывна и ограничена, то по лемме 8.10 функция u также непрерывна и ограничена.

Докажем предельное соотношение на границе. Пусть функция s — барьер в точке x_0. Фиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть V — окрестность точки x_0 такая, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех точек $x \in V$. Ввиду того, что $\inf\{s(x) : x \in \partial V \cap \Omega\} > 0$, существует число $\lambda > 0$ такое, что функция

$$v(x) = \begin{cases} \min(\lambda s(x) + \varepsilon + f(x_0),\ \sup|f|), & x \in V,\\ \sup|f|, & x \in \Omega\setminus V \end{cases}$$

полунепрерывна снизу и, следовательно, по первой лемме о склейке $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в Ω относительно компактов K_0 и K_1. Кроме того, она удовлетворяет неравенству $v \geqslant f$ в Ω. Значит,

$$\varlimsup_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) \leqslant \lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} v(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon.$$

С другой стороны, $u \geqslant f$, значит, имеем равенство

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) = f(x_0),$$

что и требовалось получить.

Далее предположим, что функция f принадлежит $W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$, и пусть $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset \widetilde{\Omega}_1$ — регулярные открытые множества такие, что $D_i = \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_0) > \alpha\} \cap \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_1) > \alpha\}$, $\bigcup\limits_i D_i = \Omega$ (лемма 2.6). Далее, пусть u_i — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническое решение задачи с препятствием в D_i с препятствием и граничным значением, равным f. Так как $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$ и $u \geqslant f$, то согласно [5, лемма 2.3] имеем неравенства $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u$. Тогда предел $v = \lim\limits_{i\to\infty} u_i$ — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω относительно K_0 и K_1 и, кроме того, $u \geqslant v \geqslant f$.

С другой стороны, из определения выметания следует, что $u \leqslant v$, поэтому получаем равенство $u = v$. Полагая $u_i = f$ на $\Omega \setminus D_i$, имеем $u_i - f \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1;\mu)$. Согласно [5, неравенство (2.5)] справедливы неравенства

$$\int\limits_{D_i} |\nabla_{\mathscr{L}} u_i|^p\, d\mu \leqslant c \int\limits_{D_i} |\nabla_{\mathscr{L}} f|^p\, d\mu \leqslant c \int\limits_{\Omega} |\nabla_{\mathscr{L}} f|^p\, d\mu < \infty.$$

Значит, можно сделать вывод о том, что $\nabla_{\mathscr{L}} u_i - \nabla_{\mathscr{L}} f$ сходится слабо к $\nabla_{\mathscr{L}} u - \nabla_{\mathscr{L}} f$ в $L_p(\Omega;\mu)$ и поэтому $u - f \in \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1;\mu)$ [5, теорема 1.6]. Кроме того, $L_p(\Omega;\mu)$-нормы функций $u_i - f$ равномерно ограничены, значит, $u - f \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1;\mu)$.

Зафиксируем функцию $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1;\mu)$, непрерывную в области Ω вплоть до компактов K_0 и K_1 и такую, что $\varphi \geqslant f - u$ почти всюду в Ω. Если φ_j — последовательность функций, равных нулю на $K_0 \cup K_1$, сходящаяся к φ в $W_p^1(\Omega;\mu)$, то функции $\eta_j = \max(\varphi_j, f - u)$ принадлежат $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1;\mu)$ и непрерывны в Ω вплоть до K_i, $i = 0, 1$. Более того, $\eta_j \to \varphi$ в $W_p^1(\Omega;\mu)$ [5, лемма 1.4]. Зафиксируем j и выберем индекс i_j так, чтобы носитель функции η_j принадлежал множеству D_{i_j}. Так как функция u есть решение задачи с препятствием в $K_{f,u}(D_{i_j}, \overline{\partial D_{i_j} \cap \Omega})$ [5, теорема 5.5], имеем

$$\int\limits_{\Omega} \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}\eta_j\, dx = \int\limits_{D_{i_j}} \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}\eta_j\, dx \geqslant 0.$$

Ввиду того, что $u \in W_p^1(\Omega;\mu)$ и $\eta_j \to \varphi$ в $W_p^1(\Omega;\mu)$, получаем

$$\int\limits_{\Omega} \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}\varphi\, dx = \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} u)\nabla_{\mathscr{L}}\eta_j\, dx \geqslant 0,$$

что и требовалось.

Теорема 12.2. *Если f принадлежит $W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$ и непрерывна в Ω вплоть до $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, то функция f $\mathscr{A}^\sigma$-разрешимая относительно K_0 и K_1 и $\overline{H}{}_f^\sigma - f \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1;\mu)$. В частности, верхнее решение Перрона $\overline{H}{}_f^\sigma$ — единственная $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция с граничными значениями, равными f на множествах K_0 и K_1.*

Доказательство. Пусть $u = \widehat{R}^f(\widetilde{\Omega}_1)$, и пусть D_i — элементы исчерпания Ω открытыми регулярными множествами такими, что $K_0 \cup K_1 \subset \Omega \setminus \overline{D}$ и точки $y \in \partial D_i \cap \Omega$ регулярны (см. лемму 2.6). Обозначим через u_i модификацию

Пуассона $P(u, D_i, \partial D_i \cap \Omega)$ функции u в D_i. Тогда $u \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant \overline{H}_f^\sigma$ и, следовательно, предельная функция $h^* = \lim u_i$ $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая в Ω относительно K_0 и K_1 и такая, что $h^* \geqslant \overline{H}_f^\sigma$. Согласно [5, неравенство (2.5)] и теореме 12.1 имеем

$$\int\limits_{D_i} |\nabla_{\mathscr{L}} u_i|^p \, d\mu \leqslant c \int\limits_{D_i} |\nabla_{\mathscr{L}} u|^p \, d\mu \leqslant c \int\limits_{\Omega} |\nabla_{\mathscr{L}} u|^p \, d\mu < \infty.$$

Значит, $\nabla_{\mathscr{L}} u_i$ сходятся слабо к $\nabla_{\mathscr{L}} h^*$ в $L_p(\Omega; \mu)$, следовательно, $f - h^* \in \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1; \mu)$. Так как нормы функций $u_i - f$ равномерно ограничены в $L_p(\Omega; \mu)$, то $f - h^* \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1; \mu)$. Та же самая конструкция, примененная к $\mathscr{A}^\sigma$-субгармонической функции $v = -\widehat{R}^{-f}$, приводит нас к тому, что для $\mathscr{A}^\sigma$-гармонической функции h_* в области Ω выполняется цепочка неравенств

$$v \leqslant h_* \leqslant \underline{H}_f^\sigma \leqslant \overline{H}_f^\sigma \leqslant h^*$$

и $f - h_* \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1; \mu)$. Так как $h^* - h_* \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1; \mu)$, имеем

$$\int\limits_{\Omega} (\mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} h^*) - \mathscr{A}(x, \nabla_{\mathscr{L}} h_*)) \cdot (\nabla_{\mathscr{L}} h^* - \nabla_{\mathscr{L}} h_*) \, dx = 0.$$

Из строгой монотонности оператора $\mathscr{A}$ следует, что $h^* = h_* + c$, где c — некоторая константа.

Для того чтобы закончить доказательство, необходимо показать, что $c = 0$. Существует регулярная граничная точка (теорема 11.4) x_0, принадлежащая одному из компактов K_i, $i = 0, 1$, следовательно, по теореме 12.1 имеем оценки

$$\begin{aligned} \varlimsup_{\substack{d_\Omega(x, x_0) \to 0 \\ x \in \Omega}} h_*(x) &\leqslant \varlimsup_{\substack{d_\Omega(x, x_0) \to 0 \\ x \in \Omega}} h^*(x) \leqslant \lim_{\substack{d_\Omega(x, x_0) \to 0 \\ x \in \Omega}} u(x) = f(x_0) \\ &= \lim_{\substack{d_\Omega(x, x_0) \to 0 \\ x \in \Omega}} v(x) \leqslant \varliminf_{\substack{d_\Omega(x, x_0) \to 0 \\ x \in \Omega}} h_*(x) \leqslant \varliminf_{\substack{d_\Omega(x, x_0) \to 0 \\ x \in \Omega}} h^*(x). \end{aligned}$$

Это показывает, что константа $c = 0$. Доказательство закончено.

Заметим, что можно привести альтернативное доказательство. Пусть h — некоторая $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция в области Ω относительно компактов K_0 и K_1 такая, что $h - f \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega, K_0 \cup K_1; \mu)$. Согласно лемме 8.7 равенство $\lim\limits_{\substack{d_\Omega(x, y) \to 0 \\ x \in \Omega}} h(x) = f(y)$ выполняется для квазивсех внутренних точек множества $K_0 \cup K_1$. Поэтому лемма 5.4 гарантирует, что для любой функции u из верхнего класса $\mathscr{U}_f$ неравенство $h \leqslant u$ выполняется во всей области Ω. Аналогичные рассуждения приводят к тому, что для любой функции v из нижнего класса $\mathscr{L}_f$ в области Ω верно неравенство $h \geqslant v$. Это означает, что $h \leqslant \overline{H}_f = \underline{H}_f \leqslant h$.

Лемма 12.1. *Если $f_i : \partial\widetilde{\Omega}_1 \to [-\infty; +\infty]$ — действительнозначные $\mathscr{A}^\sigma$-разрешимые функции относительно K_0 и K_1, $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, такие, что значения f_i сходятся к функции f равномерно на K_0 и K_1, то функция f также $\mathscr{A}^\sigma$-разрешима относительно компактов K_i, $i = 0, 1$, и $\lim\limits_{i \to \infty} \overline{H}_{f_i}^\sigma = \overline{H}_f^\sigma$ для всех точек $x \in K_0 \cup K_1$.*

Доказательство. Для данного положительного ε имеем, что для всех внутренних точек $x \in K_0 \cup K_1$ и для достаточно больших номеров i выполняется неравенство $|f_i - f| < \varepsilon$, следовательно,

$$\underline{H}_f^\sigma - \varepsilon \leqslant \overline{H}_f^\sigma - \varepsilon \leqslant \overline{H}_{f_i}^\sigma = \underline{H}_{f_i}^\sigma \leqslant \underline{H}_f^\sigma + \varepsilon \leqslant \overline{H}_f^\sigma + \varepsilon.$$

Отсюда получаем, что $\lim\limits_{i\to\infty} \overline{H}_{f_i}^\sigma = \underline{H}_f^\sigma = \overline{H}_f^\sigma$, и так как функция $\overline{H}_f^\sigma$ конечная, то она также и $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая относительно компактов K_0 и K_1, тем самым доказательство закончено.

Теорема 12.3. *Каждая непрерывная на $K_0 \cup K_1$ функция $f\colon \partial\widetilde{\Omega}_1 \to \mathbb{R}$ является $\mathscr{A}^\sigma$-разрешимой относительно K_0 и K_1.*

Доказательство. Известно, что в метрическом пространстве функцию, непрерывную на компакте, можно продолжить на все пространство таким образом, чтобы продолжение было непрерывно. Поэтому можно считать, что функция $f\colon \partial\widetilde{\Omega}_1 \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\partial\widetilde{\Omega}_1$. Аппроксимируем функцию f липшицевыми функциями. Для этого разобьем множество значений функции f на n частей и положим

$$c_i = \min_{x\in\partial\widetilde{\Omega}_1} f(x) + \frac{i}{n} \operatorname*{osc}_{\partial\widetilde{\Omega}_1} f(x),$$

где $\operatorname*{osc}\limits_{\partial\widetilde{\Omega}_1} f(x)$ есть колебание функции f на несобственной границе $\partial\widetilde{\Omega}_1$. Рассмотрим множества

$$A_i = \{x \in \partial\widetilde{\Omega}_1 : f(x) \leqslant c_i\}, \quad B_i = \{x \in \partial\widetilde{\Omega}_1 : f(x) \geqslant c_{i+1}\}.$$

Тогда $\partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus (A_i \cup B_i)$ есть открытое множество. Определим на $\partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus (A_i \cup B_i)$ функцию

$$\varphi_i = \min\biggl((c_{i+1} - c_i)\frac{d_\Omega(A_i, x)}{d_\Omega(A_i, B_i)}, c_{i+1} - c_i\biggr).$$

Сумма $\varphi_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \varphi_i + c_0$ обладает следующими свойствами:

$$\varphi_n = \begin{cases} c_0 & \text{на} \quad A_0, \\ c_n & \text{на} \quad B_{n-1}, \end{cases}$$

и $c_i \leqslant \varphi_n(x) \leqslant c_{i+1}$ при $x \in \partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus (A_i \cup B_i)$. Ввиду того, что $A_0 \bigcup B_{n-1} \bigcup\limits_{i=1}^{n-2} \partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus (A_i \cup B_i) = \partial\widetilde{\Omega}_1$, имеем $|\varphi_n - f| \leqslant 2/n$ на $\partial\widetilde{\Omega}_1$. Функции φ_n липшицевы на $\partial\widetilde{\Omega}_1$ и согласно [3] продолжаются до функций класса $W_\infty^1(\widetilde{\Omega}_1; \mu)$. Значит, по теореме 12.2 функции φ_n являются $\mathscr{A}^\sigma$-разрешимыми, следовательно, по лемме 12.1 функция f также $\mathscr{A}^\sigma$-разрешимая.

Предложение 12.1. *Пусть точки множества $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ $\mathscr{A}^\sigma$-регулярны. Если функция f ограничена и полунепрерывна снизу на $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, то она $\mathscr{A}^\sigma$-разрешима в Ω относительно K_0 и K_1.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\underline{H}_f^\sigma \geqslant \overline{H}_f^\sigma$, так как в обратную сторону неравенство очевидно. Пусть f_j — возрастающая последовательность непрерывных на $K_0 \cup K_1$ функций, сходящаяся к f на $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$. Так как точки $y \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ $\mathscr{A}^\sigma$-регулярны, то для них верны соотношения

$$\varliminf_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} \underline{H}_f^\sigma(x) \geqslant \lim_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} \underline{H}_{f_j}^\sigma(x) = f_j(y),$$

а так как $f_j \to f$, то неравенство

$$\varliminf_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} \underline{H}_f^\sigma(x) \geqslant f$$

верно для всех точек $y \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, т. е. $\underline{H}_f^\sigma \in \mathscr{U}_f$. Значит, $\underline{H}_f^\sigma \geqslant \overline{H}_f^\sigma$, что и требовалось доказать.

§ 13. Решение Перрона и $\mathscr{A}^\sigma$-потенциалы

Теорема 13.1. *Предположим, что E — относительно замкнутое подмножество Ω такое, что его дополнение $\widetilde{\Omega}_1 \setminus \overline{E}$ содержит хотя бы один из компактов K_i, $i = 0, 1$, а функция u неотрицательная и $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в Ω относительно K_0 и K_1. Пусть f — функция такая, что*

$$f = \begin{cases} u & \text{на } \partial E \cap \Omega, \\ 0 & \text{на } \partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus E. \end{cases}$$

Тогда $\widehat{R}_E^u(\widetilde{\Omega}_1) = \overline{H}_f^\sigma(\Omega \setminus E, K_0 \cup K_1 \cup (\overline{\partial E \cap \Omega}))$ в $\Omega \setminus E$. Если, кроме того, f принадлежит $W_p^1(\Omega;\mu)$ и непрерывна в Ω вплоть до K_0, K_1 и $\overline{\partial E \cap \Omega}$, то $\overline{H}_f^\sigma - f$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega \setminus E, K_0 \cup K_1 \cup (\overline{\partial E \cap \Omega}); \mu)$.

Доказательство. Из определения сразу следует, что $\overline{H}_f^\sigma \geqslant \widehat{R}_E^u$ в $\Omega \setminus E$. Чтобы доказать обратное неравенство, выберем $v \in \mathscr{U}_f$ и определим функцию

$$s = \begin{cases} \min(u, v) & \text{на } \Omega \setminus E, \\ u & \text{на } E. \end{cases}$$

Согласно леммам 2.8 и 2.9 функция s $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в области Ω относительно компактов K_0 и K_1. Значит, $s \geqslant \widehat{R}_E^u$ и, следовательно, $v \geqslant \widehat{R}_E^u$ в $\Omega \setminus E$, откуда получаем неравенство $\overline{H}_f^\sigma \geqslant \widehat{R}_E^u$.

Второе утверждение следует из теоремы 12.1.

Теорема 13.2. *Предположим, что u — неотрицательная и $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω относительно компактов $K_0 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ и $K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, и пусть множество $E \subset \Omega$ такое, что его дополнение $\widetilde{\Omega}_1 \setminus E$ содержит хотя бы один из компактов K_i, $i = 0, 1$. Тогда*

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \widehat{R}_E^u(x) = 0$$

для любой регулярной граничной точки $x_0 \in K_i \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, где $K_i \cap \overline{E} = \varnothing$, $i = 0, 1$. В частности,

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \widehat{R}_E^u(x) = 0$$

квазивсюду на $K_i \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, где $K_i \cap \overline{E} = \varnothing$, $i = 0, 1$.

Доказательство. Пусть $\alpha < d_\Omega(K_i, E)$, где K_i — компакт, который не пересекается с $\overline{E}$. Если же $\overline{E}$ не пересекается с обоими компактами, то возьмем $\alpha < \min(d_\Omega(K_0, E), d_\Omega(K_1, E))$. Пусть $D \subset \Omega$ — открытое множество такое, что $D = \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_0) > \alpha\} \cap \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_1) > \alpha\}$, если $\overline{E} \cap (K_0 \cup K_1) = \varnothing$. Если же $\overline{E} \cap (K_0 \cup K_1) \neq \varnothing$, то $D = \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_i) > \alpha\}$, где K_i тот из компактов, который не пересекается с $\overline{E}$. Тогда E содержится в множестве D. Если функция u не ограничена, то устроим модификацию Пуассона в окрестности ∂D

и найдем функцию $v \in \Phi^u_E(\Omega)$ такую, чтобы v была ограничена на ∂D. Тогда $0 \leqslant \widehat{R}^u_E \leqslant \widehat{R}^v_{\overline{D}}$, чем доказано утверждение теоремы, так как из теоремы 13.1 следует, что

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} \widehat{R}^v_{\overline{D}}(x) = 0$$

для любой регулярной точки $y \in K_i \subset \partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus \overline{D}$, а из теоремы 11.3 следует, что квазивсе точки компакта $K_i \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, $i = 0, 1$, регулярны.

§ 14. $\mathscr{A}^\sigma$-Полярные множества

В предыдущих параграфах было показано, что множества нулевой емкости часто играют роль исключительных множеств. Такие множества затираемы для $\mathscr{A}^\sigma$-гармонических и $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций. Множество иррегулярных внутренних точек компактов $K_i \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, $i = 0, 1$, имеет емкость нуль. Кроме того, $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mu) = \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega \setminus E;\mu)$, когда E есть относительно замкнутое подмножество Ω, имеющее емкость нуль [5].

Определение 14.1. Множество E, либо компактно вложенное в объединение $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, либо относительно замкнутое в Ω, называется *$\mathscr{A}^\sigma$-полярным*, если существует $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция u в Ω относительно компактов K_0 и K_1 такая, что $\lim\limits_{r\to 0} \inf\limits_{B(y,r)} u(x) = +\infty$ для всех точек $y \in E$.

Если $E \Subset \Omega$, то необходимо рассматривать $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническую функцию u в области Ω. Как следует из леммы 2.9, $\mathscr{A}^\sigma$-полярное множество E, имеющее непустое пересечение с областью Ω, не может иметь внутренних точек. Более того, основной результат этого параграфа состоит в том, что множество $\mathscr{A}^\sigma$-полярно тогда и только тогда, когда оно имеет емкость нуль. В частности, $\mathscr{A}^\sigma$-полярность зависит только от p и μ. В дальнейшем предполагается, что если $E \cap \Omega = \varnothing$, то $E \Subset K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$.

Теорема 14.1. *Пусть E — множество в $\widetilde{\Omega}_1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество E — $\mathscr{A}^\sigma$-полярное;*
(2) *если u — неотрицательная и $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω относительно K_0 и K_1, то выметание $\widehat{R}^u_E(\widetilde{\Omega}_1) \equiv 0$;*
(3) *множество E имеет емкость $\operatorname{cap}(E, W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu))$, равную нулю;*
(4) *существует неотрицательная полунепрерывная снизу функция f такая, что $f \in W^1_p(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$ и $f = \infty$ на E.*

Доказательство теоремы 14.1 содержится в следующих леммах.

Лемма 14.1. *Предположим, что u — неотрицательная и $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω и $E \subset \widetilde{\Omega}$.*

(1) *Если множество E $\mathscr{A}^\sigma$-полярно, то существует открытая окрестность U множества E в смысле внутренней метрики $U \subset \Omega$ такая, что $R^u_E(U)$ принимает значение, равное нулю на каждой компоненте связности множества U.*
(2) *Если $R^u_E(\widetilde{\Omega}_1)(x) = 0$ для некоторой точки $x \in \Omega$, то $\widehat{R}^u_E(\widetilde{\Omega}_1) \equiv 0$ в области Ω.*

Доказательство. Так как $0 \leqslant \widehat{R}^u_E(\widetilde{\Omega}_1) \leqslant R^u_E(\widetilde{\Omega}_1)$, то из принципа минимума следует второе утверждение леммы 14.1. Для того чтобы доказать первое утверждение, предположим, что v — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω относительно K_0 и K_1 такая, что для всех точек $y \in E$ выполняется равенство $\lim\limits_{r\to 0} \inf\limits_{B(y,r)} v(x) = +\infty$. В качестве U выберем открытое множество $\{x \in \Omega :$

$v(x) > 0\}$. Функция λv принадлежит классу $\Phi^u_E(U)$, поэтому $\lambda v \geqslant R^u_E(V)$ для любого положительного λ. Ввиду того, что функция v не равна тождественно бесконечности на каждой компоненте множества U (лемма 2.10), получаем первое утверждение леммы 14.1.

Лемма 14.2. *Предположим, что u — положительная $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω и $E \subset \widetilde{\Omega}_1$. Если выметание $\widehat{R}^u_E(\widetilde{\Omega}_1) \equiv 0$, то*

$$\operatorname{cap}(E, W^1_p(\widetilde{\Omega}_1; \mu)) = 0.$$

Утверждение этой леммы сразу следует из теоремы 8.2.

Лемма 14.3. *Если $E \subset \widetilde{\Omega}_1$ имеет равную нулю емкость*

$$\operatorname{cap}(E, W^1_p(\widetilde{\Omega}_1; \mu)),$$

то существует неотрицательная полунепрерывная снизу функция f в $W^1_p(\widetilde{\Omega}_1; \mu)$ такая, что $f = \infty$ на множестве E.

Доказательство. Так как множество $E \subset \widetilde{\Omega}_1$ имеет нулевую емкость $\operatorname{cap}(E, W^1_p(\widetilde{\Omega}_1; \mu))$, то существует открытая окрестность U_n множества E такая, что $\operatorname{cap}(U_n, W^1_p(\widetilde{\Omega}_1; \mu)) \leqslant 1/2^n$. Кроме того, существуют функции φ_n, равные квазивсюду единице на открытом множестве U_n и такие, что $\|\varphi_n \mid W^1_p(\widetilde{\Omega}_1; \mu)\| \leqslant 1/2^n$. Можно считать, что $\varphi_n = 1$ всюду на U_n [5, предложение 6.1], а $\hat{\varphi}_n$ — полунепрерывные снизу функции. Тогда функция $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}_n$ неотрицательна, полунепрерывна снизу, $\|f \mid W^1_p(\widetilde{\Omega}_1; \mu)\| < \infty$ и $f = \infty$ на E. Требуемая функция построена.

Мы доказали цепочку импликаций (1)$\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4). Для того чтобы закончить доказательство теоремы 14.1, понадобится следующая

Лемма 14.4. *Предположим, что $u \in W^1_p(\Omega; \mu)$ — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция относительно компактов K_0 и K_1. Пусть $M \in \mathbb{R}$, $E \subset \widetilde{\Omega}_1$ и*

$$v = \inf\{s \in W^1_p(\Omega; \mu) \cap S(\Omega, K_0 \cup K_1) : s \geqslant u \quad \text{в} \quad \Omega \setminus E,$$
$$\lim_{r \to 0} \inf_{B(y,r)} s(x) \geqslant M \quad \text{для всех точек} \quad y \in E\}.$$

Если существует неотрицательная полунепрерывная снизу функция f, принадлежащая пространству $W^1_p(\widetilde{\Omega}_1; \mu)$, такая, что $f = \infty$ на E, то полунепрерывная снизу регуляризация $\hat{v}$ функции v совпадает с u в области Ω.

Доказательство. Ясно, что $u \leqslant \hat{v}$ в Ω. Доопределим функцию u на $\partial\widetilde{\Omega}_1$ ее нижним пределом. Обозначим через ψ_j сумму $u + j^{-1} f$, $j = 1, 2, \ldots$, и пусть v_j — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническое решение задачи с препятствием в $\widetilde{\Omega}_1$ относительно K_0 и K_1 с препятствием и граничным значением, равным ψ_j. Тогда из полунепрерывности снизу функции ψ_j и свойства (3.1) $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций следует, что $v_j \geqslant \psi_j$ в $\Omega \setminus E$. В частности, $\lim\limits_{r \to 0} \inf\limits_{B(y,r)} v_j = \infty$ для всех точек $y \in E$, поэтому $v_j \geqslant v$ в области Ω и на множестве E.

Из [5, теорема 5.4] вытекает, что $v_0 = \lim\limits_{j \to \infty} v_j$ совпадает почти всюду с u и $\lim\limits_{r \to 0} \inf\limits_{B(y,r)} v_0 = +\infty$ для точек $x \in E$, следовательно, для каждой точки $x \in \Omega$ выполняются соотношения

$$u(x) = \operatorname{ess} \varliminf_{\rho(x,y) \to 0} u(y) = \operatorname{ess} \varliminf_{\rho(x,y) \to 0} v_0(y) \geqslant \varliminf_{\rho(x,y) \to 0} v(y) \geqslant \hat{v}(x).$$

Таким образом, $\hat{v} = u$. Лемма доказана.

Лемма 14.5. *Предположим, что существует неотрицательная полунепрерывная снизу функция f такая, что $f \in W_p^1(\widetilde{\Omega}_1;\mu)$ и $f = \infty$ на E, и пусть точка x_0 принадлежит $\Omega \setminus E$. Тогда существует $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая относительно компактов K_0 и K_1 функция u в Ω такая, что $\lim\limits_{r\to 0} \inf\limits_{B(y,r)} u(x) = \infty$ для всех точек $y \in E$ и $u(x_0) < \infty$ в точке $x_0 \in \Omega \setminus E$.*

Доказательство. Проведем построение требуемой $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической функции. Для этого выберем шар $B = B(x_0, r)$, и пусть $B_j = 2^{-j}B(x_0, r)$. Тогда $E_j = E \setminus B_j$, $j = 1, 2, \dots$, и $E = \bigcup\limits_j E_j$. Построим по индукции последовательность $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций u_j. Пусть $u_1 = 0$, а

$$\begin{aligned} v_2 = \inf\{ & s \in W_p^1(\Omega;\mu) \cap S(\Omega, K_0 \cup K_1) : u_1 \leqslant s \leqslant 2 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ & \lim_{r\to 0} \inf_{B(y,r)} s(x) = 2 \quad \text{для всех точек} \quad y \in E_2\}. \end{aligned}$$

Тогда по предыдущей лемме $\hat{v}_2 = u_1$ в Ω. Более того, так как u_1 — $\mathscr{A}$-гармоническая функция в B_2, то функция $v_2 = \hat{v}_2$ также $\mathscr{A}$-гармоническая в шаре B_2 (лемма 8.2). Теперь можно выбрать $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническую относительно K_0 и K_1 в Ω функцию u_2 такую, чтобы $u_1 \leqslant u_2 \leqslant 2$ в Ω, $\lim\limits_{r\to 0} \inf\limits_{B(y,r)} u_2 = 2$ для всех точек $y \in E_2$ и $u_2(x_0) < 1/4$. Кроме того, заменяя u_2 на модификацию Пуассона $P(u_2, B_3)$, можно выбрать функцию u_2 таким образом, чтобы она была $\mathscr{A}$-гармонической в B_3. Используя там, где это необходимо, срезку, можно предполагать, что функция $u_2 \leqslant 2$ и $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая во всей области Ω. Значит, $u_2 \in W_{p,\mathrm{loc}}^1(\Omega;\mu)$ (следствие 3.2).

Предположим теперь, что функции $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{j-1}$, $j \geqslant 3$, уже построены. Положим

$$\begin{aligned} v_j = \inf\big\{ & s \in W_p^1(\Omega;\mu) \cap S(\Omega, K_0 \cup K_1) : u_{j-1} \leqslant s \leqslant j \quad \text{в} \quad \Omega, \\ & \lim_{r\to 0} \inf_{B(y,r)} s(x) = j \quad \text{для всех точек} \quad y \in E_j\big\}. \end{aligned}$$

Так как $\hat{v}_j = u_{j-1}$ и функция u_{j-1} — $\mathscr{A}$-гармоническая в шаре B_j, найдем функцию u_j такую, чтобы u_j была $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонической в области Ω относительно K_0 и K_1, $u_{j-1} \leqslant u_j \leqslant j$ в области Ω, $\lim\limits_{r\to 0} \inf\limits_{B(y,r)} u_j(x) = j$ для всех точек $y \in E_j$ и $u_j(x_0) \leqslant u_{j-1}(x_0) + 2^{-j}$. Вновь заменяя u_j ее модификацией Пуассона в B_{j+1}, можно считать, что u_j — $\mathscr{A}$-гармоническая в шаре B_{j+1} и $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в области Ω. Кроме того, можно предполагать, что $u_j \leqslant j$ и поэтому $u_j \in W_{p,\mathrm{loc}}^1(\Omega;\mu)$.

Для того чтобы закончить доказательство, заметим, что $u_{j+k} \leqslant u_{j+k+1}$ в Ω, $k = 1, 2, \dots$, следовательно, предельная функция $u = \lim\limits_{j\to\infty} u_j$ — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в Ω. Более того, $\lim\limits_{r\to 0} \inf\limits_{B(y,r)} u(x) = \infty$ для всех точек $y \in E$ и

$$u(x_0) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} 2^j < \infty.$$

Лемма 14.5 и теорема 14.1 доказаны.

Теорема 14.2. *Если множество E $\mathscr{A}^\sigma$-полярно и $x_0 \in \Omega \setminus E$ — фиксированная точка, то существует неотрицательная $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция u в области Ω такая, что $\lim\limits_{r\to 0} \inf\limits_{B(y,r)} u(x) = \infty$ для всех точек $y \in E$ и $u(x_0) < \infty$.*

Теорема 14.2 есть следствие теоремы 14.1 и леммы 14.5.

Следствие 14.1. *$\mathscr{A}^\sigma$-полярность множества E зависит только от p и μ и не зависит от отображения $\mathscr{A}$.*

Следствие 14.2. *Счетное объединение $\mathscr{A}^\sigma$-полярных множеств есть снова $\mathscr{A}^\sigma$-полярное множество.*

Теорема 14.3. *Если u — $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в области Ω относительно компактов K_0 и K_1, то она квазинепрерывна.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что по теореме 14.1 функция u квазивсюду конечна. Можно предполагать, что функция u неотрицательна. Тогда, заменяя u на $\operatorname{arctg} u$, можно считать функцию u ограниченной (лемма 2.5), а поэтому принадлежащей $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$. Выберем возрастающую последовательность непрерывных $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций u_j в Ω, которые сходятся к u (лемма 8.10). Пусть $D = \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_0) > \alpha\} \cap \{x \in \Omega : d_\Omega(x, K_1) > \alpha\}$, $\alpha > 0$. Ввиду того, что функции u_j являются ограниченными суперрешениями, из оценок Каччиополли [5, лемма 2.5] следует, что последовательность u_j ограничена в $W^1_p(D;\mu)$. Следовательно, она сходится к u слабо в $W^1_p(D;\mu)$. Применяя лемму Мазура (см., например, [5, лемма 1.6]), найдем для каждого k последовательность выпуклых комбинаций $v_{j,k}$ функций u_j, $j \geqslant k$, такую, что функции $v_{j,k}$ сходятся к u в $W^1_p(D;\mu)$ при $j \to \infty$. Для фиксированного k можно выбрать функцию $\psi_k \in C(D) \cap W^1_p(D;\mu)$ такую, что $u_k \leqslant \psi_k \leqslant u$ и $\|\psi_k - u \,|\, W^1_p(D;\mu)\| < 1/k$. Так как функции ψ_k непрерывны, то из [5, теорема 6.3 и следствие 6.8] следует, что функция u квазинепрерывна.

§ 15. $\mathscr{A}^\sigma$-Гармонические меры

Гармонические меры — это важный инструмент в приложениях классической теории потенциала . В этом параграфе изучается похожая конструкция, называемая $\mathscr{A}^\sigma$-гармонической мерой. $\mathscr{A}^\sigma$-гармонические меры могут быть использованы для оценки $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонических функций.

Начнем с определения. Пусть E — множество, принадлежащее объединению компактов $K_0 \cup K_1$, где $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, и пусть χ_E — характеристическая функция множества E. Верхним классом $\mathscr{U}_E$ множества E назовем верхний класс $\mathscr{U}_{\chi_E}$ характеристической функции χ_E, который состоит из всех функций u таких, что

(1) функция u $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая в Ω относительно K_0 и K_1,

(2) $u \geqslant 0$,

(3) $\varliminf\limits_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) \geqslant \chi_E(y)$ для всех точек $y \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$.

Определение 15.1. Функция

$$\omega = \omega(E, \Omega; \mathscr{A}) = \overline{H}^\sigma_{\chi_E} = \inf \mathscr{U}_E$$

называется *$\mathscr{A}^\sigma$-гармонической мерой* множества E в области Ω.

Из того, что $1 \in \mathscr{U}_E$ и $u \geqslant 0$, а также учитывая, что верхнее решение Перрона есть $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция (лемма 9.1), заключаем, что функция ω — $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая в Ω относительно компактов K_0 и K_1, кроме того, $0 \leqslant \omega \leqslant 1$.

Введем следующие обозначения. Если $E \subset \widetilde{\Omega}_1$ и $E \cap \Omega$ относительно замкнутое подмножество области Ω, то пишем

$$\omega(E, \Omega; \mathscr{A}) = \omega(\partial E \cap \Omega, \Omega \setminus E; \mathscr{A}).$$

Если все точки $x \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ регулярны, а $E \subset K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ — замкнутое множество, то можно дать другую характеристику $\mathscr{A}^\sigma$-гармонической меры $\omega(E, \Omega; \mathscr{A})$.

Пусть $\mathscr{H}^\sigma(E,\Omega)$ обозначает класс всех неотрицательных функций u, непрерывных в Ω вплоть до компактов K_0 и K_1 и таких, что

(1) функции u $\mathscr{A}^\sigma$-гармонические в Ω относительно K_0 и K_1,

(2) $u \geqslant 1$ на $E \subset K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$.

Пусть $S^\sigma(E,\Omega)$ — класс функций, в котором вместо $\mathscr{A}^\sigma$-гармонических функций рассматриваются $\mathscr{A}^\sigma$-супергармонические функции в Ω относительно компактов K_0 и K_1.

Теорема 15.1. *Предположим, что все точки компактов $K_i \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, $i = 0,1$, регулярны. Если E — замкнутое подмножество компактов $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, то $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая мера $\omega = \omega(E,\Omega;\mathscr{A})$ может быть охарактеризована следующими тремя эквивалентными способами:*

(1) $\omega(E,\Omega;\mathscr{A}) = \inf\{u : u \in \mathscr{H}^\sigma(E,\Omega)\}$,

(2) $\omega(E,\Omega;\mathscr{A}) = \inf\{u : u \in S^\sigma(E,\Omega)\}$,

(3) $\omega(E,\Omega;\mathscr{A}) = \lim\limits_{i\to\infty} \overline{H}^\sigma_{f_i}$,

где сходимость равномерная на компактных подмножествах области Ω, а f_i — некоторая убывающая последовательность непрерывных функций, сходящихся поточечно к χ_E на $\partial\widetilde{\Omega}_1$.

Доказательство. Пусть $v_1 = \inf(\mathscr{H}^\sigma(E,\Omega))$, $v_2 = \inf(S^\sigma(E,\Omega))$ и $v_3 = \lim\limits_{i\to\infty} \overline{H}^\sigma_{f_i}$. Сначала заметим, что

$$\mathscr{H}^\sigma(E,\Omega) \subset S^\sigma(E,\Omega) \subset \mathscr{U}_E$$

и поэтому $\omega \geqslant v_2 \geqslant v_1$.

Далее, так как точки множества $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ регулярны, то каждая функция $\overline{H}^\sigma_{f_i}$ непрерывна в Ω вплоть до $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ и $\overline{H}^\sigma_{f_i} \geqslant 1$ на E. Поэтому $\omega \geqslant v_2 \geqslant v_1 \geqslant v_3$.

Согласно следствию 9.1 $\omega = v_3$ и последовательность сходится локально равномерно в Ω потому, что последовательность $\overline{H}^\sigma_{f_i}$ убывает и предельная функция ω непрерывна. Доказательство закончено.

Установим основные свойства $\mathscr{A}^\sigma$-гармонических мер.

Теорема 15.2. (1) *Если $E_1 \subset E_2 \subset K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, то*

$$\omega(E_1,\Omega;\mathscr{A}) \leqslant \omega(E_2,\Omega;\mathscr{A}).$$

(2) *Если $E \subset K_0 \cup K_1 \subset \partial D \cap \partial\widetilde{\Omega}_1$ и $D \subset \Omega$, то в области D выполняется соотношение*

$$\omega(E,D;\mathscr{A}) \leqslant \omega(E,\Omega;\mathscr{A}).$$

(3) *Если $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ замкнутые подмножества $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ и $C = \bigcap\limits_i C_i$, то*

$$\lim_{i\to\infty} \omega(C_i,\Omega;\mathscr{A}) = \omega(C,\Omega;\mathscr{A})$$

равномерно на компактных подмножествах Ω.

Доказательство. Свойство (1) немедленно вытекает из определения. Свойство (3) следует из теоремы 15.1.

Для доказательства второго пункта теоремы предположим, что функция u принадлежит верхнему классу $\mathscr{U}_E(\Omega)$ относительно Ω. Тогда сужение $u|_D$ принадлежит верхнему классу $\mathscr{U}_E(D)$ относительно D, значит, для любой точки $x \in D$ верны соотношения

$$\omega(E,D;\mathscr{A})(x) \leqslant \inf\{u(x) : u \in \mathscr{U}_E(\Omega)\} = \omega(E,\Omega;\mathscr{A})(x).$$

Тем самым неравенство доказано.

$\mathscr{A}^\sigma$-Гармоническая мера не обязательно субаддитивна, однако она хорошо ведет себя относительно дополнений.

Теорема 15.3. *Если $E \subset K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, то*

$$\omega(E,\Omega;\mathscr{A}) \geqslant 1-\omega((K_0 \cup K_1)\setminus E,\Omega;\mathscr{A}).$$

Более того,

$$\omega(E,\Omega;\mathscr{A}) = 1-\omega((K_0 \cup K_1)\setminus E,\Omega;\mathscr{A})$$

тогда и только тогда, когда характеристическая функция множества E $\mathscr{A}^\sigma$-разрешима в Ω относительно K_0 и K_1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = \chi_E$ — характеристическая функция множества E. Тогда

$$\omega((K_0 \cup K_1)\setminus E,\Omega;\mathscr{A}) = \overline{H}^\sigma_{1-f} = 1-\underline{H}^\sigma_f \geqslant 1-\overline{H}^\sigma_f = 1-\omega(E,\Omega;\mathscr{A})$$

и равенство возможно, если только $\overline{H}^\sigma_f = \underline{H}^\sigma_f$.

Следствие 15.1. *Если точки $x \in K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ регулярны и $e \subset K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ — компакт, то $\omega(e,\Omega;\mathscr{A}) = 1-\omega((K_0\cup K_1)\setminus e,\Omega;\mathscr{A})$.*

Часто $\mathscr{A}$-гармонические меры $\omega(E,\Omega;\mathscr{A})$ описывают как $\mathscr{A}$-гармонические функции с граничным значением, равным 1 на E и 0 на $\partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus E$. Это не совсем верно. Верна следующая

Теорема 15.4. *Пусть x_0 — регулярная граничная точка, принадлежащая $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$. Если точка x_0 имеет окрестность V такую, что $V \cap K_0 \cup K_1 \subset E$, то*

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \omega(E,\Omega;\mathscr{A})(x) = 1.$$

Если же точка x_0 имеет окрестность V такую, что $V \cap (K_0 \cup K_1) \cap E = \varnothing$, то

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \omega(E,\Omega;\mathscr{A})(x) = 0.$$

Действительно, в описанных в теореме случаях характеристическая функция χ_E непрерывна в точке x_0, следовательно, выполнено равенство

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \overline{H}^\sigma_{\chi_E} = \chi_E(x_0).$$

Исследуем взаимосвязь между $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническими мерами и $\mathscr{A}^\sigma$-потенциалами. Предположим, что E — относительно замкнутое подмножество Ω, и обозначим

$$\omega = \omega(E,\Omega;\mathscr{A}) = \omega(\partial E \cap \Omega, \Omega\setminus E;\mathscr{A}).$$

Положим $\omega(x) = 1$ для $x \in E$, и пусть $\widehat{\omega}$ — полунепрерывная снизу регуляризация функции ω в $\widetilde{\Omega}_1$. Зафиксируем компакт $K_1 \Subset \widetilde{\Omega}\setminus E$, а роль K_0 будет играть множество $\overline{E}$. Если функция u принадлежит верхнему классу множества E в $\Omega \setminus E$, то после доопределения функции u единицей на E из первой леммы о склейке следует, что $\min(u,1)$ есть $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция в Ω относительно K_0 и K_1. Из теоремы 13.1 получаем следующий результат.

Теорема 15.5. *Функция $\widehat{\omega}$ эквивалентна $\mathscr{A}^\sigma$-потенциалу $\widehat{R}^1_E$ множества E в Ω. В частности, $\omega = R^1_E$ в $\Omega \setminus E$.*

$\mathscr{A}^\sigma$-Гармоническая мера — наименьшая неотрицательная $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническая функция с «граничным значением», равным 1 на E. Это экстремальное свойство полезно в оценках других $\mathscr{A}^\sigma$-гармонических и $\mathscr{A}^\sigma$-субгармонических функций.

Теорема 15.6. *Предположим, что $E \subset K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, и пусть $\omega = \omega(E,\Omega;\mathscr{A})$. Если v — $\mathscr{A}^\sigma$-субгармоническая функция в Ω относительно K_0 и K_1, обладающая свойством*

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} v(x) \leqslant \begin{cases} M, & \text{если } y\in E,\\ m, & \text{если } y\in (K_0\cup K_1)\setminus E,\end{cases}$$

где $M < m$, то $v(x) \leqslant (M-m)\omega(x) + m$ для любой точки $x\in\Omega$.

Доказательство. Если $M = m$, то неравенство $v \leqslant M$ следует сразу из принципа сравнения.

Если $M > m$, то функция $v_1 = (v-m)(M-m)^{-1}$ $\mathscr{A}^\sigma$-субгармоническая в Ω относительно K_0 и K_1 и обладает свойством

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} v_1(x) \leqslant \begin{cases} 1, & \text{если } y\in E,\\ 0, & \text{если } y\in (K_0\cup K_1)\setminus E.\end{cases}$$

Поэтому если u — некоторая функция из верхнего класса $\mathscr{U}_E$, то для каждой точки $y\in K_0\cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ выполняется неравенство

$$\varlimsup_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} v_1(x) \leqslant \varliminf_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} u(x).$$

Тогда по принципу сравнения $v_1 \geqslant u$ в Ω для всех функций u из $\mathscr{U}_E$. Тем самым получаем требуемое неравенство $v_1 \geqslant \omega$.

Из теоремы 15.6 вытекает

Следствие 15.2. *Предположим, что v — $\mathscr{A}^\sigma$-субгармоническая функция в Ω относительно K_0 и K_1, ограниченная сверху в Ω. Если $\omega(E,\Omega;\mathscr{A}) = 0$ и*

$$\varlimsup_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} v(x) \leqslant m$$

для всех $y\in K_0\cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$, то $v\leqslant m$ в Ω.

Перейдем к рассмотрению множеств, имеющих $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническую меру нуль.

Определение 15.2. Множество $E\subset K_0\cup K_1\subset\partial\widetilde{\Omega}_1$ имеет $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническую меру нуль в области Ω, если

$$\omega = \omega(E,\Omega;\mathscr{A}) \equiv 0.$$

Теорема 15.7. *Множество $E\subset K_0\cup K_1\subset\partial\widetilde{\Omega}_1$ имеет $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническую меру нуль тогда и только тогда, когда оно $\mathscr{A}^\sigma$-полярно.*

Доказательство. Пусть множество E $\mathscr{A}^\sigma$-полярно в области Ω. Зафиксируем точку $x_0\in\Omega$. По теореме 14.2 существует неотрицательная $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция u в области Ω такая, что $\varliminf\limits_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} u(x) = \infty$ для точек $y\in E$ и $u(x_0) < \infty$. Тогда функция λu принадлежит верхнему классу $\mathscr{U}_E$ для любого числа $\lambda > 0$. Следовательно, $0 \leqslant \omega(x) \leqslant \lambda u(x)$. Ввиду произвольности числа λ получаем, что $\omega(x_0) = 0$. Далее, по принципу минимума получаем, что $\omega\equiv 0$ в области Ω.

Обратно, если $\omega(E,\Omega;\mathscr{A}) \equiv 0$, то по принципу максимума и из теоремы 15.6 имеем

$$0 < \widehat{R}^1_E = \widehat{\omega} \leqslant \omega \equiv 0$$

во всей области Ω. Следовательно, по теореме 14.1 можно сделать вывод, что множество E $\mathscr{A}^\sigma$-полярно.

Лемма 15.1. *Предположим, что все точки множества $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ регулярны и e — компакт. Свойство $\omega = \omega(e, \Omega; \mathscr{A}) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{x\in\Omega} \omega(x) < 1.$$

Доказательство. Введем обозначение $\lambda = \sup\limits_{x\in\Omega} \omega(x)$. Так как точки множества $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ регулярны, а e — компакт, то из теоремы 15.4 имеем, что для всех точек $y \in K_0 \cup K_1 \setminus e$ выполняется равенство $\lim\limits_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} \omega(x) = 0$. Применим теорему 15.6, полагая при этом $v = \omega$, $M = \lambda$ и $m = 0$. Получаем, что $\omega \leqslant \lambda\omega$. Если $\lambda < 1$, то это неравенство верно тогда и только тогда, когда $\omega = 0$. Доказательство закончено.

Теорема 15.8. *Предположим, что все точки множества $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ регулярны и E_0 и E_1 — замкнутые подмножества $K_0 \cup K_1 \subset \partial\widetilde{\Omega}_1$ $\mathscr{A}^\sigma$-гармонической меры нуль. Тогда если $E_0 \cap E_1 = \varnothing$, то сумма $E_0 \cup E_1$ вновь имеет $\mathscr{A}^\sigma$-гармоническую меру нуль.*

Доказательство. Обозначим через ω меру суммы $E_0 \cup E_1$, т. е. $\omega = \omega(E_0 \cup E_1, \Omega; \mathscr{A}) = 0$, и предположим, что $\omega > 0$.

Покажем, во-первых, что если множества E_0 и E_1 принадлежат одному компакту, скажем K_0, то невозможно, чтобы $E_0 \cup E_1 = K_0$. Выберем точку $x_0 \in E_0$. Так как множества E_0 и E_1 не пересекаются, то существует окрестность U точки x_0 такая, что $U \cap K_0 \subset E_0$, и, как следует из теоремы 15.4,

$$\lim_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \omega(E_0, \Omega; \mathscr{A}) = 1,$$

что противоречит предположению о том, что $\omega(E_0, \Omega; \mathscr{A}) = 0$, и поэтому $E_0 \cup E_1 \neq K_0$.

Для $0 < t < 1$ рассмотрим открытое множество

$$A_t = \{x \in \Omega : \omega > t\}.$$

По лемме 15.1 имеем, что $\sup\limits_{x\in\Omega} \omega(x) = 1$ и поэтому $A_t \neq \varnothing$. Ввиду того, что для любой точки $x_0 \in (K_0 \cup K_1) \setminus (E_0 \cup E_1)$ выполняется равенство $\lim\limits_{\substack{d_\Omega(x,x_0)\to 0\\ x\in\Omega}} \omega(x) = 0$, с учетом принципа максимума следует, что для t, достаточно близких к 1, существует представитель $A \subset A_t$ такой, что либо $\overline{A} \subset \Omega \cup E_0$, либо $\overline{A} \subset \Omega \cup E_1$. Предположим для определенности, что $\overline{A} \subset \Omega \cup E_0$. Введем функцию

$$v(x) = \begin{cases} \omega(x) - t, & \text{если} \quad x \in A, \\ 0, & \text{если} \quad x \in \Omega \setminus A. \end{cases}$$

По первой лемме о склейке функция v — $\mathscr{A}^\sigma$-субгармоническая в Ω относительно K_0 и K_1 и удовлетворяет следующим условиям:

$$\varlimsup_{\substack{d_\Omega(x,y)\to 0\\ x\in\Omega}} v(x) \leqslant \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \in (K_0 \cup K_1) \setminus E_0, \\ 1, & \text{если} \quad y \in E_0. \end{cases}$$

Применим теорему 15.6, полагая $M = 1$, $m = 0$. Имеем $v \leqslant \omega(E_1, \Omega; \mathscr{A}) = 0$. Это значит, что $A = \varnothing$. Получили противоречие. Следовательно, предположение, что $\omega(E_0 \cup E_1, \Omega; \mathscr{A}) > 0$, не верно. Теорема доказана.

Предложим некоторое обобщение леммы 15.1.

Теорема 15.9. *Предположим, что регулярные множества K_0 и K_1 принадлежат $\partial\widetilde{\Omega}_1$ и $e \subset K_0 \cup K_1$ — компакт. $\mathscr{A}^\sigma$-Гармоническая мера множества e равна нулю тогда и только тогда, когда существует последовательность окрестностей U_i множества e и константа $\lambda < 1$ такие, что*

(1) $\bigcap\limits_i U_i \cap \Omega = \varnothing$ и

(2) для каждого номера i и точки $x \in \Omega \cap \partial U_i$ верно неравенство $\omega(x) \leqslant \lambda$.

Доказательство. Так как доказательство необходимости этого условия очевидно, остановимся на доказательстве достаточности. По лемме 15.1 достаточно показать, что $\omega(x) \leqslant \lambda$ для каждой точки $x \in \Omega$. Зафиксируем $x_0 \in \Omega$ и выберем такой индекс i, чтобы $x_0 \notin U_i$. Если $x_0 \in \partial U_i$, то неравенство $\omega(x_0) \leqslant \lambda$ — это просто часть предположений теоремы 15.8, поэтому можно считать, что $x_0 \in \Omega \setminus \overline{U}_i$. Далее, пусть $V = \Omega \setminus \overline{U}_i$ и $y \in \partial V$. Если $y \in \Omega$, то $y \in \partial U_i$ и, следовательно, $\omega(y) \leqslant \lambda$. Если $y \notin \Omega$, то $y \in \partial\widetilde{\Omega}_1 \setminus e$, и по теореме 15.4 имеем, что $\lim\limits_{\substack{d_\Omega(z,y)\to 0\\ z\in\Omega}} \omega(z) = 0$ для любой точки $y \in K_0 \cup K_1 \setminus e$. Следовательно, для каждой точки $y \in K_0 \cup K_1 \setminus E$ верно неравенство $\lim\limits_{\substack{d_\Omega(z,y)\to 0\\ z\in\Omega}} \omega(z) \leqslant \lambda$. Значит, из принципа сравнения вытекает, что $\omega \leqslant \lambda$ в V. В частности, $\omega(x) \leqslant \lambda$. Теорема доказана.

§ 16. $\mathscr{A}$-Тонкие топологии

В этом параграфе представлены результаты по $\mathscr{A}$-тонким топологиям в геометрии рассматриваемых в работе векторных полей. Отметим, что для случая стандартных векторных полей большинство приводимых ниже определений и теорем превращаются в известные в литературе (см. [2, 13]) определения и результаты. Доказательства, помещенные ниже, хотя и имеют свою специфику, являются почти очевидными обобщениями известных результатов и приводятся здесь для полного и независимого изложения.

Определение 16.1. *$\mathscr{A}$-Тонкой* топологией в области Ω называется *слабейшая топология* в Ω, в которой все $\mathscr{A}$-супергармонические функции непрерывны в области Ω.

Так как $\mathscr{A}$-супергармонические функции полунепрерывны снизу и замкнуты относительно срезок, то $\mathscr{A}$-тонкая топология — это самая слабая топология в области Ω, в которой все локально ограниченные $\mathscr{A}$-супергармонические функции непрерывны. Таким образом, можно сказать, что $\mathscr{A}$-тонкая топология — это слабейшая топология в области Ω, в которой все суперрешения уравнения (2.1) непрерывны. В этом случае разумно рассматривать представители суперрешений, обладающие свойством (3.1).

Лемма 16.1. *$\mathscr{A}$-Тонкая топология тоньше евклидовой топологии.*

Доказательство. Зафиксируем шар $B = B(x_0, r) \Subset \Omega$ достаточно малого радиуса. Покажем, что шар B содержит непустое $\mathscr{A}$-тонко открытое множество U такое, что $x_0 \in U$. Поскольку $^1\!/_2\overline{B}$ — (p,μ)-плотное множество в каждой своей точке, то существует функция $v \in S(\Omega) \cup \mathscr{H}(\Omega \setminus {}^1\!/_2\overline{B})$ такая, что $v = 0$ на $^1\!/_2\overline{B}$ и $v < 0$ в дополнении к $^1\!/_2\overline{B}$ (лемма 4.1). Из принципа максимума следует, что $\mathscr{A}$-тонко открытая окрестность $\{x : v(x) > \max\limits_{\partial B} v\}$ точки x_0 содержится в шаре B.

Вообще говоря, $\mathscr{A}$-тонкая топология строго тоньше евклидовой топологии. Если множество $\{x_i\}$ сходится к x и при этом множество $\{x_i\} \subset \Omega$ имеет емкость, равную нулю, то согласно теореме 14.2 существует $\mathscr{A}^\sigma$-супергармоническая функция u в области Ω такая, что $u(x_i) = 1$ для всех значений i, а $u(x) = 0$. Значит, в точке x функция u терпит разрыв, откуда следует, что топология $\tau_{\mathscr{A}}$ строго тоньше евклидовой.

База топологии $\tau_{\mathscr{A}}$ состоит из пересечений конечного числа множеств вида $\{u > \lambda\}$ или $\{u < \lambda\}$, где u — $\mathscr{A}$-супергармоническая функция в области Ω, а λ — действительное число. Удобно также использовать базу окрестностей точки $x_0 \in \Omega$, состоящую из множеств

$$\bigcap_{i=1}^{k}\{x \in \overline{B} : u_i(x) \leqslant \lambda\}, \tag{16.1}$$

где $k \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, B — шар с центром в точке $x_0 \in \Omega$, а каждая функция u_i локально ограничена, $\mathscr{A}$-супергармонична в области Ω и такова, что $u_i(x_0) = 0$. Покажем, что множества вида (16.1) образуют базу окрестностей. Действительно, множества

$$\{x \in B : u_i(x) < \lambda\} = \{u_i < \lambda\} \cap B$$

$\mathscr{A}$-тонко открыты, поэтому формула (16.1) определяет $\mathscr{A}$-тонкую окрестность точки x_0. Обратно, если U — это $\mathscr{A}$-тонкая окрестность точки x_0, то существуют локально ограниченные $\mathscr{A}$-супергармонические функции v_j и константы $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, l$, такие, что $v_j(x_0) = 0$ и

$$x_0 \in \bigcap_{j=1}^{m}\{v_j < \lambda_j\} \bigcap \bigcap_{j=m+1}^{l} \{v_j > \lambda_j\} \subset U.$$

В связи с тем, что функции v_j полунепрерывны снизу, можно выбрать шар $B = B(x_0, r)$ такой, что $\overline{B} \subset \bigcap\limits_{j=m+1}^{l} \{v_j > \lambda_j\}$. Теперь, полагая $u_j = \lambda_j^{-1} v_j$, имеем, что $u_j(x_0) = 0$ и точка x_0 принадлежит множеству

$$\bigcap_{j=1}^{m}\{x \in \overline{B} : u_j(x) \leqslant 1/2\} \subset \bigcap_{j=1}^{m}\{v_j < \lambda_j\} \cap \bigcap_{j=m+1}^{l} \{v_j > \lambda_j\} \subset U,$$

что и требовалось показать.

Лемма 16.2. *Предположим, что $V \subset \Omega$ — открытое множество. Тогда топология, индуцированная топологией $\tau_{\mathscr{A}}$ на V, является слабейшей топологией в V, в которой все $\mathscr{A}$-супергармонические функции на множестве V непрерывны.*

Доказательство. Достаточно показать, что для $\mathscr{A}$-супергармонической функции u на множестве V множества $\{u < \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, являются $\mathscr{A}$-тонко открытыми. Зафиксируем точку $x \in \{u < \lambda\}$ и выберем шар $B \Subset V$ с центром в точке x. Согласно теореме 4.1 существует $\mathscr{A}$-супергармоническая функция в области Ω такая, что $v = u$ на шаре B. Поэтому верны включения $x \in \{v < \lambda\} \cap B \subset \{u < \lambda\}$. Лемма доказана.

Исторически тонкие топологии использовались для характеристики регулярных граничных точек задачи Дирихле: точка $x \in \partial\Omega$ иррегулярна в классической теории потенциала тогда и только тогда, когда точка x является изолированной точкой для дополнения к области Ω в соответствующей тонкой топологии.

Теорема 16.1. *Пусть $x_0 \in V \subset \Omega$ — регулярная граничная точка такая, что $\mathrm{cap}_{p,\mu}\{x_0\} = 0$. Если u — $\mathscr{A}$-супергармоническая функция в окрестности точки x_0, то*

$$\varliminf_{\substack{\rho(x,x_0)\to 0 \\ x \in \complement V}} u(x) = u(x_0),$$

где $\complement V$ — дополнение к множеству V.

Доказательство. Предположим обратное: существует $\mathscr{A}$-супергармоническая функция u в окрестности точки x_0 такая, что

$$\varliminf_{\substack{\rho(x,x_0)\to 0\\ x\in \complement V}} u(x) > u(x_0).$$

Добавляя постоянную и используя операцию срезки, можно предполагать, что $u\in W^1_p(3B;\mu)$ для некоторого шара B с центром в точке x_0, а также что $u=1$ на множестве $\complement V\cap \overline{B}\setminus\{x_0\}$. Выберем функцию $f\in C^\infty(\Omega)$ такую, чтобы $f=1$ в шаре $\overline{B}$ и $f\leqslant u$ на сфере $\partial 2B$. Из обобщенного принципа сравнения следует, что $\overline{H}_f\leqslant u$ в $2B\setminus(\complement V\cap\overline{B})$, где $\overline{H}_f$ — решение Перрона на множестве $2B\setminus(\complement V\cap\overline{B})$. Поэтому имеем цепочку неравенств

$$1=\lim_{\substack{\rho(x,x_0)\to 0\\ x\in V}}\overline{H}_f\leqslant \varliminf_{\substack{\rho(x,x_0)\to 0\\ x\in V}} u(x)=u(x_0)<\varliminf_{\substack{\rho(x,x_0)\to 0\\ x\in \complement V}} u(x)=1,$$

где второе равенство следует из свойства (3.1). Получили противоречие, которое и доказывает теорему.

После доказательства теоремы 16.1 естественно дать следующее

Определение 16.2. Множество $E\Subset\Omega$ *$\mathscr{A}$-разреженно* в точке $x_0\notin E$, если существует $\mathscr{A}$-супергармоническая функция u в окрестности точки x_0 такая, что

$$\varliminf_{\substack{\rho(x,x_0)\to 0\\ x\in E}} u(x) > u(x_0).$$

Если $x_0\notin\overline{E}$, то нижний предел полагаем равным ∞. Ввиду теоремы 4.1 о продолжении можно считать, что $u\in S(\Omega)$.

Теорема 16.2. *Если множество E является $\mathscr{A}$-разреженным в точке $x_0\notin E$, то $\complement E$ есть $\mathscr{A}$-тонкая окрестность точки x_0.*

Доказательство. Выберем функцию $u\in S(\Omega)$ такую, чтобы выполнялись неравенства

$$\varliminf_{\substack{\rho(x,x_0)\to 0\\ x\in E}} u(x) > \gamma > u(x_0).$$

Тогда существует шар $B=B(x_0,r)$ такой, что $u(x)\geqslant\gamma$ для любой точки $x\in E\cap B$. Отсюда можно сделать вывод, что $\mathscr{A}$-тонкая окрестность $\{x\in B: u(x)<\gamma\}$ точки x_0 содержится в дополнении к множеству E.

Теорема 16.3. *Иррегулярная граничная точка множества $V\subset\Omega$ есть $\mathscr{A}$-тонко изолированная точка $\complement V$.*

Доказательство. Пусть $x_0\in\partial V$ — иррегулярная граничная точка. По теореме 11.2 найдется шар B такой, что $x_0\in B$ и

$$u=\widehat{R}^1_{\overline{B}\setminus V}(2B)(x_0)=1-\delta<1.$$

Более того, по теореме 8.2 множество $E=\{x\in\overline{B}\setminus V: u(x)<1\}\setminus\{x_0\}$ имеет емкость нуль. Тогда существует $\mathscr{A}$-супергармоническая функция v в области Ω, положительная в шаре B такая, что $v(x_0)<\delta$ и $\varliminf\limits_{\substack{\rho(x,y)\to 0\\ y\in E}} v(x)=\infty$ (теорема 14.2). Отсюда следует, что множество $\{x\in B: u(x)+v(x)<1\}$ есть $\mathscr{A}$-тонкая окрестность точки x_0, не пересекающая $\complement V\setminus\{x_0\}$.

Из доказательства ясно, что граничная точка положительной емкости может быть $\mathscr{A}$-тонко изолированной на $\complement V$, несмотря на то, что она регулярна.

Критерий Винера позволяет с другой точки зрения взглянуть на понятие разреженности множества.

Определение 16.3. Множество E называется (p,μ)-*разреженным* в точке x_0, если

$$\mathscr{W}_{p,\mu}(E,x_0)=\int\limits_0^1\left(\frac{\operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,t),B(x_0,2t))}{\operatorname{cap}_{p,\mu}(B(x_0,t),B(x_0,2t))}\right)^{1/p-1}\frac{dt}{t}<\infty.$$

Введем понятие суммы Винера

$$\mathscr{W}^{\Sigma}_{p,\mu}(E,x_0)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,2^{-j}),B(x_0,2^{1-j}))}{\operatorname{cap}_{p,\mu}(B(x_0,2^{-j}),B(x_0,2^{1-j}))}\right)^{1/p-1},$$

которая наряду с интегралом Винера также является очень удобным инструментом. Верна следующая

Лемма 16.3. *Существует константа $c=c(n,p,c_\mu)\geqslant 1$ такая, что*

$$c^{-1}\mathscr{W}_{p,\mu}(E,x_0)\leqslant\mathscr{W}^{\Sigma}_{p,\mu}(E,x_0)\leqslant c\big(\alpha_0^{1/p-1}+\mathscr{W}_{p,\mu}(E,x_0)\big)$$

для всех $E\subset\Omega$ и $x_0\notin E$, где

$$\alpha_0=\frac{\operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,1),B(x_0,2))}{\operatorname{cap}_{p,\mu}(B(x_0,1),B(x_0,2))}.$$

В частности, интеграл $\mathscr{W}_{p,\mu}(E,x_0)$ конечен тогда и только тогда, когда сумма $\mathscr{W}^{\Sigma}_{p,\mu}(E,x_0)$ конечна.

Доказательство. Если $t\leqslant s\leqslant 2t$, то по [5, леммы 6.7 и 6.6] имеем

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,t),B(x_0,2t))\approx\operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,t),B(x_0,2s))$$

и

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,t),B(x_0,2t))\approx\operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,s),B(x_0,2s)),$$

где константы эквивалентности зависят лишь от n, p и c_μ. Тогда для $2^{-1-j}\leqslant t\leqslant 2^{-j}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned}&\frac{\operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,t),B(x_0,2t))}{\operatorname{cap}_{p,\mu}(B(x_0,t),B(x_0,2t))}\\&\qquad\leqslant c\frac{\operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,2^{-j}),B(x_0,2^{1-j}))}{\operatorname{cap}_{p,\mu}(B(x_0,2^{-j}),B(x_0,2^{1-j}))}\\&\qquad\qquad\leqslant c\frac{\operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,2t),B(x_0,4t))}{\operatorname{cap}_{p,\mu}(B(x_0,2t),B(x_0,4t))}.\end{aligned}$$

Откуда следует

$$\begin{aligned}\mathscr{W}_{p,\mu}(E,x_0)&=\int\limits_0^1\left(\frac{\operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,t),B(x_0,2t))}{\operatorname{cap}_{p,\mu}(B(x_0,t),B(x_0,2t))}\right)^{1/p-1}\frac{dt}{t}\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{2^{-1-j}}^{2^{-j}}\left(\frac{\operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,t),B(x_0,2t))}{\operatorname{cap}_{p,\mu}(B(x_0,t),B(x_0,2t))}\right)^{1/p-1}\frac{dt}{t}\\&\leqslant c\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,2^{-j}),B(x_0,2^{1-j}))}{\operatorname{cap}_{p,\mu}(B(x_0,2^{-j}),B(x_0,2^{1-j}))}\right)^{1/p-1}=c\mathscr{W}^{\Sigma}_{p,\mu}(E,x_0).\end{aligned}$$

Аналогично

$$\mathscr{W}^{\Sigma}_{p,\mu}(E,x_0)\leqslant c\left(\frac{\operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,1),B(x_0,2))}{\operatorname{cap}_{p,\mu}(B(x_0,1),B(x_0,2))}\right)^{1/p-1}+c\mathscr{W}_{p,\mu}(E,x_0).$$

Доказательство закончено.

Лемма 16.4. *Предположим, что $E \subset \Omega$ и что $x_0 \notin E$.*

(1) *Если E — (p,μ)-разреженное в точке x_0 множество, то существует открытая окрестность U множества E такая, что U — (p,μ)-разреженное в точке x_0.*

(2) *Если E — борелевское множество, (p,μ)-плотное в точке x_0, то существует компактное множество $K \subset E \cup \{x_0\}$ такое, что K есть (p,μ)-плотное в точке x_0.*

Доказательство. (1) Пусть $B_j = B(x_0, 2^{1-j})$. Так как объединение $V_1 \cup V_2$ двух (p,μ)-разреженных в точке x_0 множеств V_1 и V_2 есть множество (p,μ)-разреженное, то можно предполагать, что $E \cap \partial B_j = \varnothing$. Пусть $U_0 = \Omega$, и для каждого $j = 1, 2, \ldots$ выбираем открытое множество $U_j \subset B_j \cap U_{j-1}$ такое, чтобы $E_j = E \cap B_j \subset U_j$ и

$$\left(\frac{\mathrm{cap}_{p,\mu}(U_j, B_{j-1})}{\mathrm{cap}_{p,\mu}(B_j, B_{j-1})}\right)^{1/p-1} \leqslant \left(\frac{\mathrm{cap}_{p,\mu}(E_j, B_{j-1})}{\mathrm{cap}_{p,\mu}(B_j, B_{j-1})}\right)^{1/p-1} + 2^{-j-1}.$$

Затем, полагая $U = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} (U_j \setminus \overline{B}_{j+1})$, имеем $E \subset U$, U — открыто, и

$$\mathscr{W}^{\Sigma}_{p,\mu}(U, x_0) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{cap}_{p,\mu}(U_j, B_{j-1})}{\mathrm{cap}_{p,\mu}(B_j, B_{j-1})}\right)^{1/p-1} \leqslant \mathscr{W}^{\Sigma}_{p,\mu}(E, x_0) + 1 < \infty.$$

Значит, U есть требуемая окрестность множества E.

(2) Пусть вновь $B_j = B(x_0, 2^{1-j})$. Так как множество $E \cap B_j$ — борелевское, то

$$\mathrm{cap}_{p,\mu}(E \cap B_j, B_{j-1}) = \sup \mathrm{cap}_{p,\mu}(K, B_{j-1}),$$

где верхняя грань берется по всем компактам $K \subset E \cap B_j$ [5, теорема 6.2].

Для каждого j выберем компакт $K_j \subset E \cap B_j$ такой, что

$$\left(\frac{\mathrm{cap}_{p,\mu}(E_j, B_{j-1})}{\mathrm{cap}_{p,\mu}(B_j, B_{j-1})}\right)^{1/p-1} \leqslant \left(\frac{\mathrm{cap}_{p,\mu}(K_j, B_{j-1})}{\mathrm{cap}_{p,\mu}(B_j, B_{j-1})}\right)^{1/p-1} + 2^{-j}.$$

Тогда $K = \bigcup\limits_j K_j \cup \{x_0\}$ — требуемое компактное множество.

Теорема 16.4. *Предположим, что $x_0 \notin E$. Если E — $\mathscr{A}$-разреженное в точке x_0, то E — (p,μ)-разреженное в точке x_0.*

Доказательство. Предположим, что $x_0 \in \overline{E}$. Так как E есть $\mathscr{A}$-разреженное в точке x_0, то существует функция $u \in S(\Omega)$ такая, что

$$\varliminf_{\substack{\rho(x,x_0)\to 0\\ x\in E}} u(x) > 1 > u(x_0) > 0.$$

Пусть $B = B(x_0, r)$ — шар такой, что $u > 0$ в шаре B и $u > 1$ на $E \cap B$.

Если $U = \{x \in B : u(x) > 1\}$ — открытое множество, то для $\mathscr{A}$-потенциала $v = \widehat{R}^1_{U \cap 1/2B}(B)$ имеем, что $0 < v(x_0) < 1$ и $v|_{U \cap 1/2B} = 1$. Введем обозначение $B_j = 2^{-j}B$, $j = 1, 2, \ldots$ Если $s_j = \widehat{R}^1_{U \cap B_j}(B_{j-1})$, то из оценок [4, лемма 5] имеем

$$s_j \geqslant c\alpha_j^{1/p-1} \geqslant 1 - \exp\bigl(-c\alpha_j^{1/p-1}\bigr) \tag{16.2}$$

в шаре B_j, $j = 1, 2, \ldots$ Здесь постоянная c зависит лишь от n, p, β/α и условий на p-допустимый вес,

$$\alpha_j = \frac{\mathrm{cap}_{p,\mu}(U \cap B_j, B_{j-1})}{\mathrm{cap}_{p,\mu}(B_j, B_{j-1})}.$$

Вводя обозначение $v_1 = 1 - v = 1 - s_1$, согласно (16.2) имеем, что $v_1 \leqslant \exp\bigl(-c\alpha_1^{1/p-1}\bigr)$ в B_1. Для $j = 2, 3, \ldots$ полагаем $v_j = \exp\bigl(c\alpha_{j-1}^{1/p-1}\bigr)v_{j-1}$, где c — постоянная из условия (16.2). Тогда $1 - v_j \in S(B_{j-1})$ неотрицательна в B_{j-1} и $1 - v_j = 1$ в $B_j \cap U$. Следовательно, $1 - v_j \geqslant s_j \geqslant 1 - \exp\bigl(-c\alpha_j^{1/p-1}\bigr)$ или $v_j \leqslant \exp\bigl(-c\alpha_j^{1/p-1}\bigr)$ в шаре B_j. Из этого следует, что $1 - v = v_1 \leqslant \exp\Bigl(-c\sum\limits_{k=1}^{j}\alpha_k^{1/p-1}\Bigr)$ в шаре B_j. Так как $1 - v(x_0) = \delta > 0$, имеем $\sum\limits_{k=1}^{j}\alpha_k^{1/p-1} \leqslant -c^{-1}\log\delta < \infty$ для каждого j. Устремляя $j \to \infty$, видим, что U, а значит, и E есть (p,μ)-разреженное множество в точке x_0. Теорема доказана.

Лемма 16.5. *Предположим, что $B = B(x_0, r)$ — шар и что $E \subset {}^1\!/_2B$ — открытое множество. Если $u = \widehat{R}^1_E(B)$ есть $\mathscr{A}$-потенциал множества E в шаре B, то*

$$\min_{\partial B(x_0,\rho)} u \leqslant c\left(\frac{\operatorname{cap}_{p,\mu}(E,B)}{\operatorname{cap}_{p,\mu}({}^1\!/_2B,B)}\right)^{1/p-1}$$

для любого $\rho \in (r/4; r/2)$, где $c = c(n,p,\beta/\alpha,c_\mu) > 0$.

Доказательство. Фиксируем $\rho \in (r/4; r/2)$ и полагаем $\gamma = \min\limits_{\partial B(x_0,\rho)} u$. Тогда из принципа минимума и [4, лемма 4] следует, что

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(B(x_0,\rho),B) \leqslant \operatorname{cap}_{p,\mu}(\{u \geqslant \gamma\},B) \leqslant (\alpha/\beta)^{p+1}\gamma^{1-p}\operatorname{cap}_{p,\mu}(E,B).$$

Ввиду того, что мера μ удовлетворяет условию удвоения,

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(B(x_0,\rho),B) \approx \operatorname{cap}_{p,\mu}({}^1\!/_2B,B),$$

где постоянные эквивалентности зависят лишь от n, p и c_μ [5, леммы 6.6 и 6.7]. Доказательство леммы закончено.

Теорема 16.5. *Множество U есть $\mathscr{A}$-тонкая окрестность точки x_0 тогда и только тогда, когда $x \in U$ и дополнение к множеству U (p,μ)-разреженно в точке x_0.*

Доказательство. Предположим, что U есть $\mathscr{A}$-тонкая окрестность точки x_0. Существуют $\mathscr{A}$-супергармонические функции $u_1, u_2, \ldots, u_k \in S(\Omega)$ и шар $B = B(x_0, r)$ такие, что

$$x_0 \in \bigcap_{j=1}^{k}\{x \in \overline{B} : u_j(x) < 1\} \subset U$$

и $u_j(x_0) = 0$.

Множество $\complement U \cap B$ содержится в конечном объединении $\bigcup\limits_{j=1}^{k}\{x \in B : u_j(x) \geqslant 1\}$ множеств, которые $\mathscr{A}$-разреженны в точке x_0. По теореме 16.4 каждое множество $\{x \in B : u_j(x) \geqslant 1\}$ является (p,μ)-разреженным в точке x_0, следовательно, их объединение также есть (p,μ)-разреженное множество в точке x_0 и можно сделать вывод, что $\complement U$ есть (p,μ)-разреженное множество в точке x_0. Доказательство первой части теоремы 16.5 закончено.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что $E = \complement U$ есть (p,μ)-разреженное множество в точке $x_0 \in U$. Можно предполагать, что $E \subset B(x_0, 1/2)$, и по лемме 16.4 можно считать, что E — открытое множество. Пусть

$$D = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigl((E \cap B(x_0, 2^{-j})) \setminus \overline{B}(x_0, {}^2\!/_3 2^{-j})\bigr)$$

и

$$D' = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigl((E \cap B(x_0, {}^{15}\!/_{11}2^{-j})) \setminus \overline{B}(x_0, {}^{10}\!/_{11}2^{-j})\bigr).$$

По построению D и D' — открытые множества, которые (p,μ)-разреженны в точке x_0, и $E \subset D \cup D'$. Построим $\mathscr{A}$-супергармоническую функцию v_0 в окрестности B_1 точки x_0 такую, что $v_0 = 1$ в $D \cap B_1$, и чтобы в точке x_0 выполнялось неравенство $v_0(x_0) < 1/2$. Тогда из теоремы 16.2 следует, что $\complement D$ есть $\mathscr{A}$-тонкая окрестность точки x_0. Аналогичная конструкция показывает, что множество $\complement D'$ также есть $\mathscr{A}$-тонкая окрестность точки x_0. Поэтому имеем $\complement D \cap \complement D' \subset \complement E = U$, что и доказывает теорему 16.7.

Начнем построение. Введем обозначения $B_j = B(x_0, 2^{-j})$, $D_j = D \cap B_j$, и пусть $u_j = \widehat{R}^1_{D_j}(B_{j-1})$ — $\mathscr{A}$-потенциал множества D_j в B_{j-1}, $j = 1, 2, \dots$ Если S_j — это сфера $\partial {}^7\!/_6 B_{j+1}$, то $S_j \subset B_j \setminus \overline{B}_{j+1}$ и

$$\frac{\operatorname{dist}(S_j, \overline{D})}{\operatorname{dist}(S_j, x_0)} \geqslant \frac{1}{7} > 0.$$

Значит, сферу S_j можно покрыть N шарами B' такими, что $2B'$ лежит в $B_j \setminus \overline{D}$ и число N зависит лишь от размерности пространства. Ввиду того, что u_j — $\mathscr{A}$-супергармоническая функция в $B_j \setminus \overline{D}$, из неравенства Гарнака и леммы 16.5 следует, что

$$u_j \leqslant c\left(\frac{\operatorname{cap}_{p,\mu}(E \cap B_j, B_{j-1})}{\operatorname{cap}_{p,\mu}(B_j, B_{j-1})}\right)^{1/p-1} = b_j \tag{16.3}$$

на сфере S_j с постоянной c, зависящей от n, p, β/α, и условий на p-допустимый вес. Выберем индекс j_0 достаточно большим так, чтобы $\sum\limits_{j=j_0}^{\infty} b_j < 1/2$. Для простоты обозначений предположим, что $j_0 = 1$. Покажем, что $v_0 = u_1 = \widehat{R}^1_{D_1}(B_0)$ — требуемая функция. Ввиду того, что множество $D_1 = D \cap B_1$ открыто, $u_1 = 1$ в D_1, достаточно показать, что $u_1(x_0) < 1/2$. Полагаем $v_1 = (u_1 - b_1)/(1 - b_1)$ и

$$s_1 = \begin{cases} \min(v_1, u_2) & \text{в} \quad {}^7\!/_6 B_2, \\ v_1 & \text{в} \quad B_0 \setminus {}^7\!/_6 B_2. \end{cases}$$

Согласно (16.3) $v_i \leqslant 0$ на сфере S_1 и функция s_1 полунепрерывна снизу, поэтому по замечанию 2.1 функция s_1 является $\mathscr{A}$-супергармонической в шаре B_0. Более того, v_1 есть минимальная $\mathscr{A}$-супергармоническая в шаре B_0 функция, лежащая выше $\psi_1 = (\psi_0 - b_1)/(1 - b_1)$, где ψ_0 — характеристическая функция множества D_1. Поэтому $s_1 \geqslant v_1$ в шаре B_0. В частности, $u_2 \geqslant v_1$ в ${}^7\!/_6 B_2$ и, следовательно, $v_0 - b_1 = (1 - b_1)v_1 \leqslant u_2 \leqslant b_2$ на сфере S_2. Строим следующую функцию $v_k = (v_{k-1} - b_k)/(1 - b_k)$, $k = 1, 2, \dots$ Тогда v_k есть минимальная $\mathscr{A}$-супергармоническая в шаре B_0 функция, лежащая выше $\psi_k = (\psi_{k-1} - b_k)/(1 - b_k)$. Так как $v_k \leqslant 0$ на сфере S_k, то функция

$$s_k = \begin{cases} \min(v_k, u_{k+1}) & \text{в} \quad {}^7\!/_6 B_{k+1}, \\ v_k & \text{в} \quad B_0 \setminus {}^7\!/_6 B_{k+1} \end{cases}$$

$\mathscr{A}$-супергармоническая и $s_k > v_k$ в B_0. Значит, $v_k \leqslant u_{k+1} \leqslant b_{k+1}$ на сфере S_{k+1}, следовательно, $v_{k-1} - b_k = (1 - b_k)v_k \leqslant b_{k+1}$ на сфере S_{k+1}. Из рекуррентных соотношений имеем $v_0 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k+1} b_j$ на сфере S_{k+1}, а из полунепрерывности снизу функции v_0 вытекают неравенства

$$v_0(x_0) \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\,(\inf_{S_k} v_0) \leqslant \sum_{j=1}^{k+1} b_j < 1/2,$$

что и требовалось показать.

Определим (p,μ)-*тонкую* топологию $\tau_{p,\mu}$ как объединение всех множеств U таких, что $\complement U$ суть (p,μ)-разреженные множества в каждой точке из U. Легко показать, что $\tau_{p,\mu}$ есть топология.

Теорема 16.6. *$\mathscr{A}$-Тонкая топология $\tau_{\mathscr{A}}$ совпадает с (p,μ)-тонкой топологией $\tau_{p,\mu}$. В частности, $\tau_{\mathscr{A}}$ зависит лишь от структуры оператора $\mathscr{A}$.*

Следствие 16.1. *Точка x_0 — $\mathscr{A}$-тонкая точка сгущения множества E тогда и только тогда, когда $E \setminus \{x_0\}$ есть (p,μ)-плотное множество в точке x_0.*

Следствие 16.2. *$\mathscr{A}$-Полярное множество $\mathscr{A}$-тонко изолированно.*

Следствие 16.3. *Предположим, что E — $\mathscr{A}$-тонко компактное множество. Тогда только конечное число точек множества E $\mathscr{A}$-полярно.*

Заметим, что следствие 16.2. можно получить из теоремы 10.2.

Если предельная точка x_0 множества E не полярна, можно доказать следующие эквивалентные характеристики.

Теорема 16.7. *Пусть $\operatorname{cap}_{p,\mu}\{x_0\} > 0$ и $E \subset \Omega$ такое множество, что $x_0 \notin E$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) E — $\mathscr{A}$-разреженное множество в точке x_0,

(2) $\complement E$ — $\mathscr{A}$-тонкая окрестность точки x_0,

(3) E — (p,μ)-разреженное множество в точке x_0.

Доказательство. Уже доказано, что из условия (1) следует (2), а из (2) следует (3) (теоремы 16.2 и 16.5 соответственно). Для того чтобы закончить доказательство, покажем, что из условия (3) следует (1). Можно предполагать, что $x_0 \in \overline{E}$. Выберем открытое множество U такое, чтобы $E \subset U$ и чтобы U было (p,μ)-разреженным в точке x_0 (лемма 16.4). Пусть u — $\mathscr{A}$-потенциал $u = \widehat{R}^1_{U\cap B_k}(B_{k-1})$, где $B_k = B(x_0, 2^{-k})$ и k — фиксированное целое положительное число. Покажем, что

$$1 = \varliminf_{\substack{\rho(x,x_0)\to 0\\ x\in U}} u(x) > u(x_0).$$

Если это соотношение не выполняется, то $u(x_0) = 1$, т. е. функция u непрерывна в точке x_0. В частности, функция u может быть аппроксимирована в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(B_{k-1};\mu)$ функциями, которые допустимы для оценки (p,μ)-емкости конденсатора $(\{x_0\}, B_{k-1})$. Отсюда следуют соотношения

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(\{x_0\}, B_{k-1}) \leqslant \int\limits_{B_{k-1}} |\nabla_{\mathscr{L}} u|^p\, d\mu \leqslant (\beta/\alpha)^p \operatorname{cap}_{p,\mu}(U\cap B_k, B_{k-1}),$$

где последнее неравенство вытекает из [2, теорема 9.38]. С другой стороны, так как U — (p,μ)-тонкое множество и так как $\{x_0\}$ — (p,μ)-плотное в точке x_0, то существует целое число k такое, что

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(\{x_0\}, B_{k-1}) > (\beta/\alpha)^p \operatorname{cap}_{p,\mu}(U\cap B_k, B_{k-1}).$$

Это противоречит предыдущему неравенству, тем самым теорема доказана.

Лемма 16.6. *Предположим, что множество E (p,μ)-разреженно в точке x_0. Если B — шар, содержащий точку x_0, то*

$$\lim_{r\to 0} \operatorname{cap}_{p,\mu}(E\cap B(x_0,r), B) = 0.$$

Доказательство. Так как

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(E \cap B(x_0,r), B) \leqslant \operatorname{cap}_{p,\mu}(\overline{B}(x_0,r), B) \to \operatorname{cap}_{p,\mu}(\{x_0\}, B) = 0$$

при $r \to 0$ [5, теорема 6.1], вывод очевиден, если $\operatorname{cap}_{p,\mu}\{x_0\} = 0$.

Предположим, что $\operatorname{cap}_{p,\mu}\{x_0\} > 0$. Тогда с учетом [5, лемма 6.7] достаточно найти несколько шаров B таких, что

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(E \cap B(x_0,r), B) \to 0.$$

Воспользуемся схемой доказательства теоремы 16.5. Несколько упростим ситуацию, считая, что E открыто, и для $r > 0$ введем обозначение

$$D(r) = \bigcup_{j=1}^{\infty}\left((E \cap B(x_0,r) \cap B(x_0,2^{-j})) \setminus \overline{B}(x_0, {}^2\!/\!{}_3 2^{-j})\right).$$

Заметим, что $D(1/2)$ — это множество D, построенное при доказательстве теоремы 16.5. Аналогично определяются множества $D'(r)$, соответствующие множествам D' из теоремы 16.5. Используя субаддитивность (p,μ)-емкости, получаем, что достаточно проверить равенство $\lim\limits_{r\to 0}\operatorname{cap}_{p,\mu}(D(r), B) = 0$ для нескольких шаров, содержащих точку x_0.

Для того чтобы показать это, обозначим через B шар B_0, построенный при доказательстве теоремы 16.5, и будем считать, что $u_j = \widehat{R}^1_{D(2^{-j})}(B)$.

Из доказательства теоремы 16.5 следует, что $u_j(x_0) \leqslant 1/2$ для всех $j = 1, 2, \dots$ Более того, функции u_j убывают к функции u, которая $\mathscr{A}$-гармонична на множестве $B\setminus\{x_0\}$. Ввиду того, что $u_j \leqslant 1/2$ равномерно в окрестности ∂B (см. [4, теорема 8] и лемму 8.5), из принципа максимума следует, что $u \leqslant 1/2$ в B. Так как $\operatorname{cap}_{p,\mu}\{x_0\} > 0$, то из теоремы 8.2 получаем, что функция u $\mathscr{A}$-супергармоническая во всем шаре B, поэтому функции u_j и u (p,μ)-квазинепрерывны в шаре B по теореме 14.3. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выбираем открытое множество $G \subset B$ такое, что $\operatorname{cap}(G, W^1_p(\widehat{\Omega}_1;\mu)) < \varepsilon$ и чтобы сужения на $B\setminus G$ функций u и u_j были непрерывны. Пусть $K = {}^1\!/\!{}_2\overline{B} \setminus G$. Тогда K — компактное подмножество множества $B\setminus G$ и непрерывные функции $u_j|_K$ убывают к непрерывной функции $u|_K$. Поэтому сходимость равномерна на компакте K. Так как $u_j - u \geqslant 1/2$ на $D(2^{-j})$, то $D(2^{-j}) \cap K = \varnothing$ для достаточно больших j и поэтому $D(2^{-j}) \subset G$. Далее, из [5, теорема 6.10] вытекает, что

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}(D(2^{-j}), B) \leqslant c\operatorname{cap}(G, W^1_p(\Omega;\mu)) < c\varepsilon,$$

где $c > 0$ не зависит от i и от ε. Доказательство закончено.

Лемма 16.7. *Если множества E_j, $j = 1, 2, \dots$, (p,μ)-разреженны в точке x_0, то существует последовательность радиусов $r_j > 0$ таких, что множество*

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}(E_j \cap B(x_0, r_j))$$

(p,μ)-разреженно в точке x_0.

Доказательство. Зафиксируем j и выберем i таким, чтобы для множеств $F_j = E_j \cap B_i$ выполнялось неравенство $\mathscr{W}^{\Sigma}_{p,\mu}(F_j, x_0) < 2^{-j}$, где $B_i = B(x_0, 2^{1-i})$, что возможно ввиду леммы 16.6. Из неравенства Гёльдера следует

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}\Big(\bigcup_j F_j \cap B_k, B_{k-1}\Big)^{1/p-1} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{cap}_{p,\mu}(F_j \cap B_k, B_{k-1})^{1/p-1},$$

если $p \geqslant 2$, и

$$\operatorname{cap}_{p,\mu}\Big(\bigcup_j F_j \cap B_k, B_{k-1}\Big)^{1/p-1}$$

$$\leqslant \Big(\sum_{j=1}^{\infty} j^{-\frac{1}{2-p}}\Big)^{\frac{2-p}{p-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \big(j \operatorname{cap}_{p,\mu}(F_j \cap B_k, B_{k-1})\big)^{1/p-1},$$

если $1 < p < 2$. Последовательность $r_j = 2^{1-i}$ построена. Лемма доказана.

Теорема 16.8. *Предположим, что множество E не (p,μ)-разреженно в точке $x_0 \notin E$ и задана функция $g\colon E \to [-\infty; +\infty]$. Тогда $\tau_{p,\mu}$-предел $\lim\limits_{\substack{\rho(x,x_0)\to 0\\ x\in E}} g(x)$ равен λ в том и только том случае, когда существует (p,μ)-тонкая окрестность V точки x_0 такая, что $\lim\limits_{\substack{\rho(x,x_0)\to 0\\ x\in E\cap V}} g(x) = \lambda$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты предположим, что $\lambda \in \mathbb{R}$. Если $\tau_{p,\mu}$-предел $\lim\limits_{\substack{\rho(x,x_0)\to 0\\ x\in E}} g(x)$ равен λ, то множество $E_j = \{x \in E : |g(x) - \lambda| \geqslant 1/j\}$ является (p,μ)-разреженным в точке x_0 для каждого $j = 1, 2, \dots$ По лемме 16.7 найдем последовательность радиусов r_j таких, что $E_\infty = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (E_j \cap B(x_0, r))$ — (p,μ)-разреженное множество в точке x_0. Тогда $V = \complement E_\infty$ есть требуемая (p,μ)-тонкая окрестность. Для того чтобы доказать обратное, зафиксируем $\varepsilon > 0$. Можно выбрать $\delta > 0$ таким, чтобы $|g(x) - \lambda| < \varepsilon$ для любых $x \in E \cap V \cap B(x_0, \delta)$. Доказательство закончено, так как $V \cap B(x_0, \delta)$ есть (p,μ)-тонкая окрестность точки x_0.

Следствие 16.4. *Функция $g\colon \mathbb{R}^n \to [-\infty; +\infty]$ (p,μ)-тонко непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует множество E, (p,μ)-разреженное в точке $x_0 \notin E$ и такое, что сужение $g|_{\complement E}$ непрерывно в точке x_0.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hörmander L.* Hypoelliptic second order differential equation // Acta Math. 1967. V. 119. P. 141–171.
2. *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonliner potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford etc.: Clarendon Press, 1993.
3. *Водопьянов С. К.* Внутренние геометрии и граничные значения дифференцируемых функций. 1 // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 2. С. 29–42.
4. *Водопьянов С. К.* Весовые пространства Соболева и граничное поведение решений вырождающихся гипоэллиптических уравнений // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 2. С. 278–300.
5. *Водопьянов С. К., Черников В. М.* Пространства Соболева и гипоэллиптические уравнения // Тр. Ин-та математики / РАН. Сиб. отд-ние. 1995. Т. 29: Линейные операторы, согласованные с порядком. С. 7–62.
6. *Водопьянов С. К., Маркина И. Г.* Исключительные множества для решений субэллиптических уравнений // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 4. С. 805–818.
7. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. P. 103–147.

8. *Capogna L., Danielli D., Garofalo N.* Embedding theorems and Harnack inequality for solutions of nonlinear subelliptic equations // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1993. T. 316. P. 809–814.
9. *Franchi B., Gallot S., Wheeden R.* Inéqalités isopérimetriques pour des métriques dégénerees // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1993. T. 317. P. 651–654.
10. *Jerison D.* The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition // Duke Math. J. 1986. V. 53, N 2. P. 503–523.
11. *Lu G.* Weighted Poincaré and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmander's condition and aplications // Rev. Mat. Iberoamericana. 1992. V. 8, N 3. P. 367–439.
12. *Hajłasz P., Koskela P.* Sobolev meets Poincaré // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1995. T. 320. P. 1211–1215.
13. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. М.: Мир, 1964.

г. Новосибирск *Статья поступила 21 марта 1994 г.*