УДК 512.813.52+517.548.2+517.518.23

ПРОДОЛЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ЗА ГРАНИЦУ ОБЛАСТИ НА ГРУППАХ КАРНО*)

А. В. Грешнов

Пусть $\mathbb{X}$ — некоторое топологическое пространство, $\mathscr{D} \subset \mathbb{X}$ — произвольная область в $\mathbb{X}$, $F(\mathscr{D})$ — нормированное функциональное пространство, элементами которого являются функции, определенные на $\mathscr{D}$. Для данного функционального пространства задача о продолжении за границу области определения состоит в том, чтобы установить существование непрерывного оператора

$$\operatorname{ext}\colon F(\mathscr{D}) \to F(\mathbb{X})$$

такого, что для любой функции $u \in F(\mathscr{D})$ существует функция $\widetilde{u} = \operatorname{ext} u \in F(\mathbb{X})$, сужение которой на $\mathscr{D}$ совпадает с исходной функцией u.

Для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ отметим следующие результаты о продолжении функций пространств Соболева W_p^l. В работах [1, 2] было доказано утверждение о том, что если плоская ограниченная односвязная область $\mathscr{D}$ является (ε, δ)-областью, то существует непрерывный оператор продолжения $\operatorname{ext}\colon W_2^1(\mathscr{D}) \to W_2^1(\mathbb{R}^2)$; там же установлено, что геометрическое условие на область определения пространства $W_2^1(\mathscr{D})$ является не только достаточным, но и необходимым. Позже в работе П. Джонса [3] была предложена универсальная конструкция построения оператора продолжения, единого для всей шкалы пространств Соболева, реализация которой обеспечивалась следующим условием: если область $\mathscr{D}$ является (ε, δ)-областью, то существует непрерывный оператор продолжения $\operatorname{ext}\colon W_p^l(\mathscr{D}) \to W_p^l(\mathbb{R}^n)$, $l \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$. Задача о продолжении пространств Соболева рассматривалась также другими авторами (см., например, [4, 5]).

Данная работа посвящена распространению изложенных выше результатов на группы Карно. *Стратифицированной однородной группой* [6] или, в другой терминологии, *группой Карно* [7] называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой разлагается в прямую сумму векторных пространств $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ таких, что $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $1 \leqslant k \leqslant m-1$ и $[V_1, V_m] = \{0\}$. Величина $\nu = \sum\limits_{i=1}^{m} i \dim V_i$ называется Хаусдорфовой размерностью $\mathbb{G}$. В работе мы будем использовать следующее описание группы Карно, известное как *группалгебра* (см. [8]). Элементы алгебры Ли V отождествим с элементами группы $\mathbb{G}$ посредством экспоненциального отображения, которое в конструкции группалгебры является тождественным. Введем следующие обозначения: $e_i = \{e_{i1}, \dots, e_{im_i}\}$ — базис подпространства V_i в единице группы $(i = 1, \dots, m)$, $e = e_1 \cup \dots \cup e_m$ — базис алгебры Ли V в единице группы. Пусть элементы базиса e стандартным образом связаны между собой в единице группы

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-228) и Международного научного фонда (грант RAT 000).

операцией умножения, т. е.

$$[e_{ki}, e_{lj}] = \sum_{r=1}^{m_{k+l}} C_{ij}^r e_{k+l,r},$$

где C_{ij}^r — структурные константы. Любая точка $x \in \mathbb{G}$ записывается как $x = (x_1, \dots, x_m) = (x_{11}, \dots, x_{1m_1}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mm_m})$. Действие группы растяжений δ_t определяется следующим образом: $\delta_t x = (t^i x_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant m_i}$. Определив умножение базисных векторов в единице группы, мы тем самым однозначно задаем (при помощи формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа) операцию умножения $x \cdot y$ для любых двух элементов $x, y \in \mathbb{G}$. Далее, используя линейную (относительно точки x, например) часть формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа (см. [8])

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{n=m-1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum{}' \frac{1}{q_1! \dots q_m!} - \sum{}'' \frac{1}{q_1! \dots q_{m-1}!} \right) (-1)^n [y, x]_n, \tag{1}$$

где $[y, x]_n = [y \dots [y, x] \dots]$ — n раз взятый коммутатор, суммирование в $\sum'$ происходит по всем наборам таких целых чисел $q_1, q_2, \dots, q_m$ и $q_1 + q_2 + \dots + q_m = n$, а в $\sum''$ — таких целых чисел $q_1, q_2, \dots, q_{m-1}$, что $q_1 \geqslant 1, q_2 \geqslant 1, \dots, q_{m-1} \geqslant 1$ и $q_1 + q_2 + \dots + q_{m-1} = n - 1$, определим левоинвариантный *горизонтальный* базис (базис пространства V_1) в каждой точке группы $\mathbb{G}$. Для этого полагаем в формуле (1) $y = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m_i} x_{ij} e_{ij}$ и $x = e_{1k}$, $k = 1, \dots, m_1$, и тогда получаем явное выражение левоинвариантных горизонтальных базисных векторных полей X_{1k} в любой точке y группы $\mathbb{G}$:

$$X_{1k} = \sum_{l=1}^{m} C_l [y, e_{1k}]_l,$$

где C_l — некоторый набор констант, зависящий только от констант из формулы (1).

Абсолютно непрерывная кривая $\sigma(s) = (\sigma_{11}(s), \dots, \sigma_{1m_1}(s), \dots, \sigma_{m1}(s), \dots, \sigma_{mm_m}(s))$ называется *горизонтальной*, если ее производная $\dot\sigma(s)$ почти в каждой точке принадлежит пространству V_1, т. е. найдутся такие непрерывные коэффициенты $\alpha_{1k}(s)$, что почти всюду будет верно $\dot\sigma(s) = \sum\limits_{k=1}^{m_1} \alpha_{1k}(s) X_{1k}(\sigma(s))$. Используя тот факт, что $X_{1k} = e_{1k} + \dots$, мы находим, что $\alpha_{1k}(s) = \dot\sigma_{1k}(s)$. Напомним следующую важную теорему.

Теорема Рашевского — Чоу [9]. *Любые две точки на группе Карно можно соединить кусочно-гладкой горизонтальной кривой конечной длины (относительно стандартного риманова тензора длины (g_{ij}) группы Карно).*

Имея в виду данный факт, определим на группе Карно внутреннюю в смысле А. Д. Александрова (см. [10]) метрику d, основанную на горизонтальных кривых, — *метрику Карно — Каратеодори*. Стандартной процедурой показывается, что любые два элемента x, y группы Карно соединяются (относительно метрики Карно — Каратеодори) абсолютно непрерывной горизонтальной кривой, имеющей наименьшую длину среди длин всех горизонтальных кривых, соединяющих x и y, называемой в дальнейшем *кратчайшей* (см., например, [11]).

После того, как нами определены метрика d и соответствующая топология на $\mathbb{G}$, введем понятия пространств Соболева на группах Карно. Пусть $\mathscr{D} \subset \mathbb{G}$ — открытое связное множество. Функция f имеет обобщенные производные первого порядка вдоль горизонтальных левоинвариантных векторных полей X_{1k},

$k = 1, \ldots, m_1$, на $\mathscr{D}$, если существуют локально интегрируемые функции (обозначаемые $X_{1k}f$, $k = 1, \ldots, m_1$) такие, что

$$\int\limits_{\mathscr{D}} f \cdot (X_{1k}\varphi)\, d\mu = -\int\limits_{\mathscr{D}} (X_{1k}f) \cdot \varphi\, d\mu$$

для всех C^∞-функций φ, имеющих компактный носитель в $\mathscr{D}$; интегрирование здесь производится по биинвариантной мере Хаара, совпадающей в случае групп Карно с мерой Лебега. Пространство Соболева $W_p^1(\mathscr{D})$ состоит из функций, имеющих горизонтальные обобщенные производные первого порядка вдоль векторных полей X_{1k}, $k = 1, \ldots, m_1$, на $\mathscr{D}$ и конечную норму

$$\|f\|_{W_p^1(\mathscr{D})} = \|f\|_{L_p(\mathscr{D})} + \sum_{i=1}^{m_1} \|X_{1i}f\|_{L_p(\mathscr{D})} < \infty.$$

Однородное пространство Соболева $\mathscr{L}_p^1(\mathscr{D})$ состоит из локально суммируемых функций, имеющих горизонтальные обобщенные производные первого порядка вдоль векторных полей X_{1i}, $i = 1, \ldots, m_1$, на $\mathscr{D}$ и конечную полунорму

$$\|f\|_{\mathscr{L}_p^1(\mathscr{D})} = \sum_{i=1}^{m_1} \|X_{1i}f\|_{L_p(\mathscr{D})} < \infty.$$

В данной работе рассматривается задача о продолжении для пространств $W_p^1(\mathscr{D})$ и $\mathscr{L}_p^1(\mathscr{D})$, определенных на некоторой области $\mathscr{D} \subset \mathbb{G}$. Так же, как и в евклидовом случае, результаты о продолжении связаны с понятием (ε, δ)-области. Для произвольного метрического пространства $\mathbb{X}$ с внутренней по А. Д. Александрову метрикой d область $\mathscr{D} \subset \mathbb{X}$ называется *(ε, δ)-областью*, если для любых $x, y \in \mathscr{D}$ таких, что $d(x, y) < \delta$, найдется кривая $\gamma \subset \mathscr{D}$ конечной длины ($l(\gamma) < \infty$) с концевыми точкам x и y такая, что выполняются следующие соотношения ((ε, δ)-условия):

$$\begin{cases} l(\gamma) \leqslant \dfrac{d(x_1, x_2)}{\varepsilon}, & \\ d(z, \partial\mathscr{D}) \geqslant \dfrac{\varepsilon d(x, z) d(z, y)}{d(x, y)}, & z \in \gamma. \end{cases}$$

Если $\delta = \infty$, то область называется *равномерной*. Области, называемые здесь равномерными, интенсивно исследовались в связи с различными вопросами анализа (см., например, [12–14]).

Результаты данной работы естественно разделяются на две части. В § 1, 2 нами доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{D}$ есть (ε, δ)-область на группе Карно. Тогда существует непрерывный оператор продолжения*

$$\operatorname{ext}\colon W_p^1(\mathscr{D}) \to W_p^1(\mathbb{G}),\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

норма которого зависит только от ε, δ, p, ν.

Так же, как и в классическом случае (см. [3]), конструкция оператора продолжения основана на методе Уитни продолжения и свойствах квазигиперболической внутренней метрики области определения продолжаемого пространства. Напомним, что для произвольного метрического пространства $\mathbb{X}$ с внутренней по А. Д. Александрову метрикой d для области $\mathscr{D} \subset \mathbb{X}$ величина $k_{\mathscr{D}}(x, y) = \inf\limits_{\gamma} \int\limits_0^1 \frac{ds}{d(\gamma(s), \partial\mathscr{D})}$ называется *квазигиперболическим расстоянием* между точками x и y, где инфимум берется по всем кривым конечной длины, принадлежащим области $\mathscr{D}$ и соединяющим x и y. Отметим, что если мы зафиксируем ε, δ, p, ν и устремим $\operatorname{diam}\mathscr{D}$ к нулю, норма оператора продолжения (конструкция которого описывается ниже) также устремится к нулю (см. оценки леммы 12 настоящей работы). Поэтому здесь мы доказываем теорему 1 в предположении, что $\operatorname{diam}\mathscr{D} \geqslant 1$ и $\delta < 1$. Данные ограничения естественны и могут быть преодолены тем же способом, что и в $\mathbb{R}^n$ (см. [3]). В § 3 доказываются результаты, связанные с продолжением пространств $\mathscr{L}_p^1(\mathscr{D})$. Отметим, что доказательства сформулированных там теорем являются несложными модификациями доказательства теоремы 1. В § 4 мы рассматриваем необходимые условия для существования ограниченного оператора продолжения пространств Соболева, обобщающие соответствующие классические результаты из [15–19]. Рассмотрение таковых условий важно, поскольку в $\mathbb{R}^2$, например, лишь при $lp = 2$ (ε, δ)-условие является не только достаточным, но и необходимым [20]; более того, при $p \neq 2$ в $\mathbb{R}^n$ существуют примеры областей, не удовлетворяющих (ε, δ)-условию, для которых построены операторы продолжения для конкретного набора параметров из шкалы пространств $W_p^1(\mathscr{D})$ [20–22].

Второй круг рассматриваемых в работе задач связан с геометрией групп Карно. § 5–8 настоящей работы посвящены доказательству того, что на группах Карно существуют равномерные области. Наличие конкретных примеров равномерных областей важно в ряде вопросов анализа (см., например, работу [23]). Нами будет доказана следующая

Теорема 2. *Шар в метрике Карно — Каратеодори на группе Карно — равномерная область.*

Отметим, что метод доказательства теоремы 2 есть непосредственное применение общего приема, изложенного в работе [14], где, в частности, показано, что задача о том, является ли шар в произвольном метрическом пространстве $\mathbb{X}$ с внутренней по А. Д. Александрову метрикой равномерной областью, может быть сведена к ответу на следующие вопросы: можно ли данную точку $x \in \mathbb{X}$ соединить единственной кратчайшей с некоторой фиксированной точкой y, какие точки $x \in \mathbb{X}$ соединяются более чем одной кратчайшей с некоторой фиксированной точкой y и сколькими способами это можно сделать (будем говорить, что все такие точки образуют *множество неединственности* для точки y), что представляет собой множество точек неединственности (в частности, какова его топологическая коразмерность). На группах Карно кратчайшая может быть определена как кривая, на которой достигается минимум функционала длины (или энергии) при наличии определенных дифференциальных связей, возникающих из условий горизонтальности кривой, что упрощает (по сравнению с общим метрическим пространством) рассуждения при ответах на сформулированные выше вопросы. Ключевым результатом при доказательстве теоремы 10 является следующее предложение (см. результаты § 7): *топологическая коразмерность множества точек неединственности для единицы группы больше 1, т. е. множество точек неединственности для единицы группы не разбивает никакой шар в метрике Карно — Каратеодори на несвязные между собой части.* В доказательстве теоремы 2 существенную роль играют свойства экстремалей уравнений Эйлера — Лагранжа, связанных с вариационной задачей на условный минимум интеграла энергии. Мы особо выделяем двуступенчатые ($m = 2$) группы Карно (§ 5, 6). Это связано с тем, что уравнения Эйлера — Лагранжа в этом случае линейны, т. е. имеют вид $\ddot{x} = A\dot{x}$, где A — числовая матрица. Для групп этого типа получен следующий результат, который является обобщением теоремы 5 работы [14].

Теорема 3. *Единица двуступенчатой группы Карно и любая точка вида $x = (a, b)$, где $a \neq 0$ — первые m_1 координат точки x (m_1 — топологическая размерность порождающего группу Карно пространства V_1), соединяются единственной кратчайшей в метрике Карно — Каратеодори.*

Из теоремы 3 и работы [14] вытекает результат теоремы 2 для двуступенчатых групп Карно (теорема 10 настоящей работы). В § 5 мы устанавливаем также некоторые общие свойства кратчайших на произвольных группах Карно (их принадлежность классу C^∞ и условие неналегания кратчайших).

§ 1. Вспомогательные утверждения

На протяжении первых трех параграфов символом C ($C(\alpha, \beta, \ldots)$) обозначаем различные константы, зависящие от ε, δ, p, ν (от ε, δ, p, ν, α, $\beta, \ldots$). Эти константы могут различаться даже в одной цепочке оценок.

Наши рассмотрения будут связаны с разбиением Уитни для области на группах Карно шарами в метрике Карно — Каратеодори.

Теорема 4 [24]. *Пусть $(\mathbb{X}, d)$ — метрическое пространство со следующим условием «однородности»: для каждого $x \in \mathbb{X}$ и каждого $r > 0$ существует не более чем N (абсолютная константа, не зависящая от x и r) точек $\{x_i\}$ множества $B(x, r) = \{z \in \mathbb{X} \mid d(z, x) \leqslant r\}$ таких, что $d(x_i, x_j) \geqslant r/2$ при $i \neq j$. Тогда каждое открытое множество G из $\mathbb{X}$ с непустой границей может быть представлено в виде*

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, r_k)$$

так, что каждая точка $z \in G$ содержится не более чем в $C(N)$ шарах $B(x_k, r_k)$ и для каждого k

$$2r_k \leqslant d(B(x_k, r_k), \partial\mathscr{D}) \leqslant 8r_k.$$

Известно, что группы Карно удовлетворяют условию «однородности». Покрытие для $\mathscr{D}$, описанное в условии теоремы 1, называется *разбиением Уитни*, и далее символами $E_\mathscr{D}$ и $E'_\mathscr{D}$ будут соответственно обозначаться разбиения Уитни для области $\mathscr{D}$ и дополнительной области $\mathscr{D}^c = \mathbb{G} \setminus \overline{\mathscr{D}}$. Без труда устанавливается следующий факт.

Лемма 1. *Пусть B_1, $B_2 \in E_\mathscr{D}$ такие шары, что $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$. Тогда*

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{\operatorname{rad} B_1}{\operatorname{rad} B_2} \leqslant 4.$$

Отметим некоторые свойства (ε, δ)-областей.

Лемма 2. *Если $\mathscr{D}$ является (ε, δ)-областью, то $|\partial\mathscr{D}| = 0$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \partial\mathscr{D}$ и $y \in \mathscr{D}$, $d(x_0, y) < \delta$ — некоторые точки. Обозначим через B шар с центром в x_0 и радиуса $\operatorname{rad} B = d(x_0, y)/2$. Выберем точку $x \in \mathscr{D}$, для которой верно $d(x_0, x) \leqslant \operatorname{rad} B/8$, и соединим точки x, y кривой γ, удовлетворяющей (ε, δ)-условиям для точек x, y. Если $z \in \gamma$ — точка, для которой выполняется $d(z, x) = \operatorname{rad} B/8$, то $d(z, \partial\mathscr{D}) \geqslant C(\varepsilon) \operatorname{rad} B$. Поэтому верно $|\mathscr{D} \cap B| \geqslant C(\varepsilon)\,|B|$, откуда вытекает, что граница $\partial\mathscr{D}$ не имеет точек плотности 1. Следовательно, ее мера не может быть положительной.

Обозначим через W следующую совокупность шаров из разбиения Уитни дополнительной области $\mathscr{D}^c$:

$$W = \{B_j \in E'_\mathscr{D} \mid \operatorname{rad} B_j \leqslant \beta\},$$

где $\beta = \beta(\varepsilon, \delta)$ — некоторая константа, выбор которой будет уточнен ниже. Пусть $B_j \in W$ — произвольный шар. Полагаем $c_1 = d(B_j, \partial\mathscr{D})$. Выберем некоторую точку $x_0 \in \mathscr{D}$, удовлетворяющую условию $d(B_j, x_0) = 2c_1$. Теперь пусть $y_0 \in \mathscr{D}$ такая точка, что для нее выполняется $d(x_0, y_0) = 40c_1/\varepsilon^3 < \delta$ (выберем константу β таким образом, чтобы для произвольного шара $B_j \in W$ точки x_0 и y_0 нашлись; это, очевидно, можно сделать). Соединим точки x_0

и y_0 кривой γ, для которой выполняются (ε,δ)-условия. Пусть $z\in\gamma$ — точка, делящая γ на две равные по длине части. Тогда имеем

$$d(z,\partial\mathscr{D})\geqslant\frac{\varepsilon d(x_0,z)d(z,y_0)}{d(x_0,y_0)}\geqslant\frac{\varepsilon^2 d(x_0,z)l(\gamma(z,y_0))}{l(\gamma(x_0,y_0))}$$
$$\geqslant\frac{\varepsilon^2 d(x_0,z)}{2}\geqslant\frac{\varepsilon^3 l(\gamma(x_0,y_0))}{4}\geqslant\frac{\varepsilon^3 d(x_0,y_0)}{4}=10c_1$$

и

$$d(x_0,z)\leqslant l(\gamma(z,x_0))\leqslant\frac{d(x_0,y_0)}{\varepsilon}.$$

Используя свойства разбиения Уитни и неравенство треугольника, из приведенных выше рассуждений получаем следующую лемму.

Лемма 3. *Для любого шара B_j из W найдется шар $B'_j\in E_{\mathscr{D}}$ такой, что $1\leqslant\operatorname{rad}B'_j/\operatorname{rad}B_j\leqslant 4$ и $d(B'_j,B_j)\leqslant C\operatorname{rad}B_j$.*

С каждым шаром B_j из W ассоциируем некоторый шар $B_j^*\in E_{\mathscr{D}}$, удовлетворяющий условиям леммы 3 для B_j, и чтобы при этом расстояние $d(B_j,B_j^*)$ было наименьшим из возможных. В связи с этим приведем без доказательств (поскольку таковые являются простыми применениями неравенства треугольника и свойств разбиения Уитни области) несколько лемм, показывающих, что если для данного $B_j\in W$ мы имеем несколько шаров, подходящих на роль B_j^*, то, вообще говоря, не имеет значения, какой из них выбирать.

Лемма 4. *Если $B_j\in W$ и B_1, $B_2\in E_{\mathscr{D}}$ удовлетворяют условиям леммы 3, то $d(B_1,B_2)\leqslant C(N)\operatorname{rad}B_j$.*

Лемма 5. *Если $B_0\in E_{\mathscr{D}}$, то существует не более $C(N)$ шаров $B_j\in W$ таких, что $B_0=B_j^*$.*

Лемма 6. *Если B_j, $B_k\in W$ и $B_j\cap B_k\neq\varnothing$, то $d(B_j^*,B_k^*)\leqslant C(N)\operatorname{rad}B_j$.*

Пусть B_1, $B_2\in W$ и $B_1\cap B_2\neq\varnothing$. Предположим, что $B_1^*\cap B_2^*=\varnothing$. Рассмотрим всевозможные наборы шаров (*цепочки*) $\{\tilde B_1=B_1^*,\dots,\tilde B_k=B_2^*\mid \tilde B_i\cap\tilde B_{i+1}\neq\varnothing\}$ из $E_{\mathscr{D}}$; число k назовем *длиной цепочки*. Выберем из всех возможных цепочек ту, которая имеет наименьшую длину. Обозначим ее через $F_{1,k}$. Длина $F_{1,k}$ эквивалентна квазигиперболической метрике $k_{\mathscr{D}}(x,y)$, где x и y — центры шаров B_1^* и B_2^* (см. работу [14]). Соединим x и y кривой γ, для которой выполняются (ε,δ)-условия (существование таковой обеспечивается выбором β). Так как $\operatorname{rad}B_1^*$, $\operatorname{rad}B_2^*\geqslant\operatorname{rad}B_1$, то, используя (ε,δ)-условия, легко получить $d(z,\partial\mathscr{D})\geqslant C\operatorname{rad}B_1$ для любой точки $z\in\gamma$. По лемме 6 имеем $d(B_1^*,B_2^*)\leqslant C\operatorname{rad}B_1$. Так как $l(\gamma)\leqslant C\operatorname{rad}B_1$, то не более C шаров из $E_{\mathscr{D}}$ пересекают γ. Таким образом, получена следующая

Лемма 7. *Если B_k, $B_j\in W$ и $B_k\cap B_j\neq\varnothing$, то длина кратчайшей цепочки, соединяющей B_j^* и B_k^*, и отношение наибольшего и наименьшего радиусов шаров в этой цепочке ограничены константой $C(N)$, не зависящей от выбора B_k, B_j.*

Лемма 8. *Пусть $B\subset\mathbb{G}$ — шар и E, $F\subset\mathbb{G}$ — два измеримых множества таких, что $|E|$, $|F|\geqslant C|B|$ для некоторой константы C. Тогда $|E|\leqslant C^{-1}|F|$.*

Введем обозначение $\nabla_{\mathscr{L}}f=(X_{11}f,\dots,X_{m_1}f)$.

Лемма 9 [25, 26]. *Пусть $B\subset\mathbb{G}$ — некоторый шар и $f\in C^\infty(\mathscr{D})$. Тогда существует константа c такая, что для $1\leqslant p\leqslant\infty$ верно*

$$\|f-f_B\|_{L_p(B)}\leqslant c\operatorname{rad}B\|\nabla_{\mathscr{L}}f\|_{L_p(B)},$$

где $f_B=\frac{1}{|B|}\int\limits_B f\,d\mu$.

Следствие 1. *Пусть B_1 и B_2 — два шара из $\mathscr{D}$ таких, что $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$,*

$$c_1|B_i| \leqslant |B_1 \cap B_2| \leqslant c_2|B_i|, \quad i = 1, 2,$$

для некоторых констант c_1, c_2, и

$$\|f - f_{B_i}\|_{L_p(B_i)} \leqslant A, \quad i = 1, 2,$$

для некоторой константы A, где $f \in C^\infty(\mathscr{D})$ — произвольная функция. Тогда

$$\|f - f_{B_i}\|_{L_p(B_1 \cup B_2)} \leqslant cA, \quad i = 1, 2,$$

где $c = c(c_1, c_2)$ — некоторая константа.

Доказательство. Из соображений симметрии достаточно рассмотреть случай $i = 1$. По неравенству Минковского имеем

$$\|f_{B_1} - f_{B_2}\|_{L_p(B_1 \cap B_2)} \leqslant \sum_{i=1}^{2} \|f - f_{B_i}\|_{L_p(B_1 \cap B_2)} \leqslant 2A.$$

Следовательно,

$$\|f - f_{B_1}\|_{L_p(B_1 \cup B_2)} \leqslant \|f - f_{B_1}\|_{L_p(B_1)} + \|f - f_{B_2}\|_{L_p(B_2)} + \|f_{B_1} - f_{B_2}\|_{L_p(B_1 \cap B_2)} \cdot \frac{|B_2|}{|B_1 \cap B_2|} \leqslant cA.$$

§ 2. Оператор продолжения

В этом параграфе будет доказана теорема 1. Построим непрерывный оператор продолжения

$$\operatorname{ext}\colon W_p^1(\mathscr{D}) \to W_p^1(\mathbb{G}), \ 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

норма которого зависит только от ε, δ, p, ν.

Для этого рассмотрим некоторое разбиение единицы, подчиненное W, т. е. для каждого шара $B_j \in W$ определим ограниченную функцию $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{G})$ такую, что $\operatorname{supp} \varphi_j \subset cB_j$ (cB_j — шар, концентричный B_j, радиуса $c \operatorname{rad} B_j$, $c > 1$ — некоторая константа), $0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1$, $\sum\limits_{B_j \in W} \varphi_j = 1$ на $\bigcup\limits_{B_j \in W} B_j$, и кроме того,

$$|X_{1k}\varphi_j| \leqslant C(\operatorname{rad} B_j)^{-1}, \ k = 1, \dots, m_1.$$

Берем произвольную функцию $f \in W_p^1(\mathscr{D})$. Для каждого шара $B_j \in W$ положим $P_{B_j} = f_{B_j^*}$. Оператор продолжения ext определяем как

$$\operatorname{ext} f = \begin{cases} \sum\limits_{B_j \in W} P_{B_j} \cdot \varphi_j & \text{на} \quad \mathscr{D}^c, \\ f & \text{на} \quad \mathscr{D}. \end{cases}$$

Как видно из построения, оператор ext линейный, определен почти всюду на $\mathbb{G}$. Проверим его ограниченность. Обозначим через kB_i, $k \in \mathbb{N}$, шар, концентричный B_i, радиуса в k раз больше исходного.

Лемма 10. *Пусть $F = \{B_1, \dots, B_m\}$ — ограниченная по длине цепочка шаров из $E_{\mathscr{D}}$. Тогда*

$$\|P_{B_1} - P_{B_m}\|_{L_p(B_1)} \leqslant C(m) \operatorname{rad} B_1 \|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(\cup 2B_i)}.$$

Доказательство. Рассмотрим шары, концентричные шарам из F в два раза большего радиуса. Обозначим такой набор через $2F$. Из свойств разбиения Уитни следует, что $2F \subset \mathscr{D}$. Понятно, что для любых двух шаров B_i, $B_{i+1} \in F$

мера множества $2B_i \cap 2B_{i+1}$ будет сравнима с мерой шара $2B_i$ (или $2B_{i+1}$). Тогда, используя следствие 1 леммы 9 и лемму 8, имеем

$$\begin{aligned}
\|P_{B_1} - P_{B_m}\|_{L_p(B_1)} &\leqslant \sum_{r=1}^{m-1} \|P_{B_r} - P_{B_{r+1}}\|_{L_p(B_1)} \\
&\leqslant C(m) \sum_{r=1}^{m-1} \|P_{B_r} - P_{B_{r+1}}\|_{L_p(B_r)} \leqslant \sum_{r=1}^{m-1} C(m)(\|P_{B_r} - f\|_{L_p(B_r)} \\
&+ C(m)\|f - P_{2B_r\cup 2B_{r+1}} + P_{2B_r\cup 2B_{r+1}} - P_{B_{r+1}}\|_{L_p(2B_r\cup 2B_{r+1})} \\
&\leqslant \sum_{r=1}^{m-1} C(m)\|P_{B_r} - f\|_{L_p(B_r)} + C(m)\|f - P_{2B_r\cup 2B_{r+1}}\|_{L_p(2B_r\cup 2B_{r+1})} \\
&+ C(m)\|P_{2B_r\cup 2B_{r+1}} - P_{B_{r+1}}\|_{L_p(B_{r+1})} \\
&\leqslant \sum_{r=1}^{m-1} C(m)\|P_{B_r} - f\|_{L_p(B_r)} + C(m)\|f - P_{2B_r\cup 2B_{r+1}}\|_{L_p(2B_r\cup 2B_{r+1})} \\
&+ C(m)\|f - P_{B_{r+1}}\|_{L_p(B_{r+1})} \leqslant C(m) \sum_{r=1}^{m-1} \operatorname{rad} B_r \|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(2B_r\cup 2B_{r+1})} \\
&\leqslant C(m) \operatorname{rad} B_1 \|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(\cup 2B_r)}.
\end{aligned}$$

Для шаров B_j, $B_k \in W$ таких, что $B_j \cap B_k \neq \varnothing$, обозначим через $F_{j,k}$ некоторую возможную кратчайшую цепочку (см. лемму 7) и положим

$$F_{B_j} = \bigcup_{\substack{B_k \in W \\ B_j \cap B_k \neq \varnothing}} F_{j,k}.$$

По лемме 7 имеем

$$\Bigl\| \sum_{\substack{B_k \in W \\ B_j \cap B_k \neq \varnothing}} \chi_{\cup F_{j,k}} \Bigr\|_{L_\infty(\mathbb{G})} \leqslant C(N) \tag{2}$$

для любого $B_j \in W$ (χ_A — характеристическая функция множества A). Кроме того,

$$\Bigl\| \sum_{B_j \in W} \chi_{\cup F_{B_j}} \Bigr\|_{L_\infty(\mathbb{G})} \leqslant C(N). \tag{3}$$

Введем следующее обозначение. Пусть $\alpha = (i_1, \dots, i_{m_1})$ — последовательность чисел (мультииндекс), каждое из которых равно 0 или 1, причем если какое-то $i_k = 1$, то все остальные члены последовательности равны 0. Обозначим множество всех таких мультииндексов через I. Пусть $l(\alpha) = \sum_{j=1}^{m_1} i_j$ есть длина мультииндекса. Для мультииндекса $\alpha = (i_1, \dots, i_{m_1})$, $i_k = 1$, полагаем $D^\alpha f = X_{1k} f$. Если $l(\alpha) = 0$, то полагаем $D^\alpha f = f$.

Лемма 11. *Если $B_0 \in W$, то*

$$\|D^\alpha \operatorname{ext} f\|_{L_p(B_0)} \leqslant C\|D^\alpha f\|_{L_p(B_0^*)} + C(\operatorname{rad} B_0)^{1-l(\alpha)}\|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(\cup 2F_{B_0})}.$$

Доказательство. Имеем оценку

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha \operatorname{ext} f\|_{L_p(B_0)} = \Bigl\|D^\alpha \sum P_{B_j} \cdot \varphi_j\Bigr\|_{L_p(B_0)} &\leqslant \|D^\alpha P_{B_0}\|_{L_p(B_0)} \\
&+ \Bigl\|D^\alpha \sum (P_{B_j} - P_{B_0})\varphi_j\Bigr\|_{L_p(B_0)} = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Оценим отдельно величины I_1 и I_2. Очевидно, что слагаемое I_1 достаточно оценить только при $l(\alpha)=0$. Используя леммы 8 и 9, получаем

$$I_1 \leqslant C\|P_{B_0}\|_{L_p(B_0^*)} \leqslant C\|f\|_{L_p(B_0^*)} + C\|f-P_{B_0}\|_{L_p(B_0^*)} \leqslant C\|f\|_{L_p(B_0^*)} + C\operatorname{rad} B_0\|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(B_0^*)}.$$

По свойствам разбиения Уитни не более C шаров B_j из W пересекают B_0 и при этом выполняется $1/4 \leqslant \operatorname{rad} B_j/\operatorname{rad} B_0 \leqslant 4$. Следовательно, $|D^\alpha \varphi_j| \leqslant C(\operatorname{rad} B_0)^{-l(\alpha)}$ для любого горизонтального левоинвариантного базисного векторного поля, если $\varphi_j \neq 0$ на B_0. Используя лемму 10, для каждого такого j получаем

$$\begin{aligned}\|(P_{B_j}-P_{B_0})D^\alpha\varphi_j\|_{L_p(B_0)} &\leqslant C(\operatorname{rad} B_0)^{-l(\alpha)}\|P_{B_j}-P_{B_0}\|_{L_p(B_0)}\\ &\leqslant C(\operatorname{rad} B_0)^{-l(\alpha)}\|P_{B_j}-P_{B_0}\|_{L_p(B_0^*)} \leqslant C(\operatorname{rad} B_0)^{-l(\alpha)}(\operatorname{rad} B_0^*)\|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(\cup 2F_{0,j})}\\ &\leqslant C(\operatorname{rad} B_0^*)^{1-l(\alpha)}\|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(\cup 2F_{0,j})}.\end{aligned} \tag{4}$$

Суммируя по j и учитывая (2), (3), приходим к оценке

$$I_2 \leqslant C(\operatorname{rad} B_0)^{1-l(\alpha)}\|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(\cup 2F_{B_0})}.$$

Лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Если $B_0 \in (E'_{\mathscr{D}} \setminus W)$, то*

$$\|D^\alpha \operatorname{ext} f\|_{L_p(B_0)} \leqslant \|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(\cup 2F_{B_k})} + \|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(B_j^*)} + \|f\|_{L_p(B_j^*)}.$$

Доказательство. Если некоторая функция φ_k не равна 0 на B_0, то, следовательно, существует шар $B_k \in W$ такой, что $B_k \cap B_0 \neq \varnothing$ и $\operatorname{rad} B_k \geqslant \operatorname{rad} B_0/4 \geqslant C(\beta)$. Зафиксируем шар B_k. Тогда на B_0 имеем

$$\begin{aligned}|D^\alpha \operatorname{ext} f| &\leqslant C\Bigg|\sum_{\substack{B_j\in W\\ B_j\cap B_0\neq\varnothing}} D^\alpha\varphi_j\, P_{B_k}\Bigg| + C\Bigg|\sum_{\substack{B_j\in W\\ B_j\cap B_0\neq\varnothing}} D^\alpha\varphi_j(P_{B_j}-P_{B_k})\Bigg|\\ &\leqslant C(\beta^{-1})|P_{B_k}| + \sum_{\substack{B_j\in W\\ B_j\cap B_0\neq\varnothing}} |P_j-P_k|.\end{aligned}$$

Так как $B_k\cap B_0\neq\varnothing$, то, используя леммы 8 и 9, получаем

$$\begin{aligned}\|P_{B_k}\|_{L_p(B_0)} &\leqslant C\|P_{B_k}\|_{L_p(B_k^*)} \leqslant C\|f\|_{L_p(B_k^*)} + C\|f-P_{B_k}\|_{L_p(B_k^*)}\\ &\leqslant \|f\|_{L_p(B_k^*)} + C(\beta)\|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(B_k^*)}.\end{aligned}$$

Оценка для второго слагаемого получается тем же способом, что и оценка (4) в лемме 11:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{B_j\in W\\ B_j\cap B_0\neq\varnothing}} \|P_j-P_k\|_{L_p(B_0)} &\leqslant C\sum_{\substack{B_j\in W\\ B_j\cap B_0\neq\varnothing}} \|P_j-P_k\|_{L_p(B_k^*)}\\ &\leqslant C(\operatorname{rad} B_k)\|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(\cup 2F_{j,k})}.\end{aligned}$$

Суммируя по j, устанавливаем справедливость леммы 12.

Отметим, что

$$\Bigg\|\sum_{B_j\in E'_{\mathscr{D}}\setminus W}\ \sum_{\substack{B_k\in W\\ B_j\cap B_k\neq\varnothing}} \chi_{B_k^*}\Bigg\|_{L_\infty(\mathfrak{G})} \leqslant C(N). \tag{5}$$

Используя леммы 11, 12 и неравенства (2), (3), (5), получаем следующее

Утверждение 1.

$$\|\operatorname{ext} f\|_{W_p^1(\mathscr{D}^c)} \leqslant C\|f\|_{W_p^1(\mathscr{D})}.$$

Покажем, что $\operatorname{ext} f$ имеет обобщенные производные первого порядка. Для этого достаточно показать, что $\operatorname{ext} f$ является локально липшицевой на $\mathbb{G}$. Полагаем, что f есть некоторая функция класса $W^1_\infty(\mathscr{D})$, удовлетворяющая условию

$$\|D^\alpha \operatorname{ext} f\|_{L_\infty(\mathscr{D})} \leqslant M, \quad \alpha \in I,$$

для некоторой константы M (ниже мы поясним, используя аппроксимацию, почему возможно такое допущение).

Лемма 13. Функция $\operatorname{ext} f$ *является локально липшицевой на* $\mathbb{G}$.

Доказательство. Введем следующее обозначение:

$$\tilde{f} = f\chi_{\bar{\mathscr{D}}} + \operatorname{ext} f\chi_{\mathscr{D}^c}.$$

Поскольку $\mu(\partial\mathscr{D}) = 0$, достаточно показать, что функция $\tilde{f}$ локально липшицева на $\mathbb{G}$. Используя леммы 11, 12 и свойства функции f, получаем

$$\|D^\alpha \operatorname{ext} f\|_{L_\infty(\mathscr{D}^c)} \leqslant CM, \quad \alpha \in I.$$

Покажем, что $\tilde{f}$ является локально липшицевой в $\mathscr{D}$. Для этого введем в рассмотрение класс $\operatorname{Lip}(\mathscr{D})$ непрерывных в $\mathscr{D}$ функций g, имеющих конечную норму

$$\|g\|_{C(\mathscr{D})} + \sup_{\substack{x,y\in\mathscr{D}\\ x\neq y}} \frac{|g(x)-g(y)|}{d_{\mathscr{D}}(x,y)},$$

где через $d_{\mathscr{D}}$ обозначена внутренняя относительно области $\mathscr{D}$ метрика, которая определяется как

$$d_{\mathscr{D}}(x,y) = \inf_\gamma\{l(\gamma) \mid \gamma \subset \mathscr{D}\},$$

где γ — горизонтальная кривая, соединяющая точки x и y, принадлежащие области $\mathscr{D}$. Покажем, что $\operatorname{Lip}(\mathscr{D}) = W^1_\infty(\mathscr{D})$. Возьмем произвольную g из $\operatorname{Lip}(\mathscr{D})$. Любая точка $x \in \mathscr{D}$ является центром некоторого шара в метрике Карно — Каратеодори $B \subset \mathscr{D}$, в котором g удовлетворяет условию Липшица. Отсюда следует, что g имеет ограниченные обобщенные производные первого порядка. Таким образом, доказана ограниченность вложения

$$\operatorname{Lip}(\mathscr{D}) \to W^1_\infty(\mathscr{D}).$$

Теперь докажем непрерывность обратного вложения. Пусть $g \in W^1_\infty(\mathscr{D})$ и $\|g\|_{W^1_\infty(\mathscr{D})} = 1$. Для доказательства непрерывности вложения требуется установить неравенство

$$|g(x) - g(y)| \leqslant Cd_{\mathscr{D}}(x,y),$$

где константа C не зависит от выбора функции g. Соединим точки x, y ломаной, состоящей из отрезков γ_i интегральных линий векторных полей X_{1j}, $j = 1, \dots, m$, лежащей в $\mathscr{D}$ (полагаем, не уменьшая общности, что g абсолютно непрерывна на γ_i). Тогда имеем

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \sum_{i=1}^k |g(x_i) - g(x_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^k d(x_i, x_{i-1}).$$

Минимизируя правую часть последнего неравенства, получаем требуемую оценку (схема приведенного доказательства взята из [15]). Функция f принадлежит пространству $W^1_\infty(\mathscr{D})$, поэтому верно $f \in \mathrm{Lip}(\mathscr{D})$. Но поскольку область $\mathscr{D}$ удовлетворяет (ε, δ)-условиям, f будет липшицевой в $\mathscr{D}$. Напомним, что по предположению f непрерывна в $\mathscr{D}$. Поэтому при помощи предельного перехода можно показать, что существует константа C_1 такая, что $|\tilde f(x) - \tilde f(y)| \leqslant C_1 d(x,y)$ для любых точек x, y, $d(x,y) \leqslant \delta$, принадлежащих $\overline{\mathscr{D}}$.

Теперь покажем, что для любой точки z' границы области $\mathscr{D}$ найдется окрестность, в которой $\tilde f$ липшицева. Для этого вначале установим непрерывность $\tilde f$ в окрестности $\partial\mathscr{D}$. Достаточно доказать, что

$$\|\operatorname{ext} f - f_{B_j^*}\|_{L_\infty(B_j)} \to 0$$

при условии $\operatorname{rad} B_j \to 0$ ($B_j \in W$). Используя оценку (4) из леммы 11, получаем

$$\Big\|\sum_k (P_{B_k} - P_{B_j})\varphi_k\Big\|_{L_\infty(B_j)} \leqslant C(\operatorname{rad} B_j)\|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_\infty(\cup 2F_{B_j})}.$$

Тогда

$$\|\operatorname{ext} f - f_{B_j^*}\|_{L_\infty(B_j)} = \Big\|\sum_k P_{B_k}\varphi_k - P_{B_j}\Big\|_{L_\infty(B_j)}$$
$$\leqslant C(\operatorname{rad} B_j)\|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_\infty(\cup 2F_{B_j})} \leqslant CM \operatorname{rad} B_j \to 0$$

при $\operatorname{rad} B_j \to 0$. Таким образом, непрерывность доказана. Проверим, что шар $B(z', \delta/2)$ является окрестностью, в которой $\tilde f$ липшицева. Для непосредственной проверки условия Липшица рассмотрим возможные случаи расположения произвольной пары точек x, y, принадлежащих $B(z', \delta/2)$. Пусть $x \in \overline{\mathscr{D}}$, $y \in \mathscr{D}^c$. Соединим x и y кратчайшей в метрике Карно — Каратеодори кривой γ. Пусть z — ближайшая к y точка, принадлежащая множеству $\gamma \cap \partial\mathscr{D}$ (такая найдется, поскольку $\overline{\mathscr{D}}$ замкнутое множество, а $\mathscr{D}^c$ — открытое). Из точек множества $\gamma \cap \mathscr{D}^c$ выберем такую точку z_1, что верно $|\operatorname{ext} f(z) - \operatorname{ext} f(z_1)| \leqslant d(x,y)$ (таковая найдется в силу непрерывности $\operatorname{ext} f$). Тогда

$$|\operatorname{ext} f(x) - \operatorname{ext} f(y)| = |f(x) - \operatorname{ext} f(y)| \leqslant |f(x) - f(z)|$$
$$+ |f(z) - \operatorname{ext} f(z_1)| + |\operatorname{ext} f(z_1) - \operatorname{ext} f(y)| \leqslant C_1 d(x,z)$$
$$+ d(x,y) + CMd(z_1,y) \leqslant (2CM+1)d(x,y).$$

В случае, когда $x \in \mathscr{D}^c$, $y \in \mathscr{D}^c$, аналогично приведенному выше рассуждению доказывается существование константы C_2, не зависящей от выбора точек x, y, такой, что верно $|\tilde f(x) - \tilde f(y)| \leqslant C_2 d(x,y)$. Локальная липшицевость $\tilde f$ в дополнительной области $\mathscr{D}^c$ очевидна. Таким образом, лемма доказана.

Аппроксимация C^∞-гладкими функциями. Рассмотрим случай, когда $f \in W^1_p(\mathscr{D})$ и $1 \leqslant p < \infty$. Фиксируем достаточно малое число $\eta > 0$. Построим функцию $g \in C^\infty(\mathbb{G})$ такую, что $\|f - g\|_{W^1_p(\mathscr{D})} \leqslant C\eta$ и $|D^\alpha g| \leqslant M$, где $\alpha \in I$ и M — некоторая константа.

Введем вспомогательное понятие. Совокупность шаров B_i радиуса r называется *r-упаковкой* на $\mathbb{G}$, если $\mathbb{G} = \cup B_i$, а шары, концентричные B_i, радиуса r/K, где $K > 4$ — некоторая фиксированная константа, не пересекаются. Существование r-упаковок на группах Карно является частным случаем более общего результата, доказанного в работе [14].

Пусть r — некоторое достаточно малое положительное число. Из всех шаров, принадлежащих r-упаковке, которые содержатся в области $\mathscr{D}$, выделим те шары $B(x_j, r)$, для которых верно соотношение

$$d(x_j, \partial\mathscr{D}) \geqslant c_1 r$$

для некоторой фиксированной константы $c_1 > 1$. Обозначим данную совокупность через M_r. Пусть $c_2 > c_1$ — некоторая константа, для которой верно

$$\mathscr{D} \subset \bigcup_{B(x_j,r)\in M_r} B(x_j, c_2 r).$$

Лемма 14. *Константы c_1 и c_2 могут быть определены таким образом, что для любых шаров $B_a = B_a(x_a, r)$ и $B_b = B_b(x_b, r) \in M_r$ таких, что $B_a(x_a, 100c_2r) \cap B_b(x_b, 100c_2r) \neq \varnothing$, найдется некоторая цепочка*

$$G_{1,k} = \{B_1 = B(x_a, r), \dots, B_k = B(x_b, r),\ B_i \cap B_{i+1} \neq \varnothing\}$$

шаров из M_r такая, что ее длина k ограничена некоторой константой $K_1 = K_1(\varepsilon, \delta)$, не зависящей от выбора B_a и B_b.

Доказательство. Поскольку $B_a \cap B_b \neq \varnothing$, имеем $d(x_a, x_b) \leqslant 200c_2r$. Выбираем c_1, c_2 и r таким образом, чтобы $200c_2r \leqslant \delta$. Используя (ε, δ)-условия для области $\mathscr{D}$, стандартными рассуждениями получаем требуемый результат.

Пусть P_i обозначает подходящую константу для f на $B_i \in M_r$.

Лемма 15. *Если $B_i \in M_r$, то*

$$\|P_i\|_{L_p(\tilde{B}_i)} \leqslant C\|f\|_{L_p(B_i)} + C\,r\|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(B_i)}$$

для $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Лемма 15 является следствием применения неравенства треугольника, лемм 8, 9. Также, используя лемму 14 и оценки леммы 11, устанавливаем справедливость следующего утверждения.

Лемма 16. *Пусть $B_1 = B_1(x_1, r)$, $B_2 = B_2(x_2, r) \in M_r$ такие шары, что $B_1(x_1, 100c_2r) \cap B_2(x_2, 100c_2r) \neq \varnothing$. Тогда*

$$\|P_1 - P_2\|_{L_p(B_1)} \leqslant r\,C\|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(\cup 2G_{1,2})}.$$

Пусть функции $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{G})$, образуют следующее разбиение единицы для области $\bigcup_{B(x_j,r)\in M_r} B(x_j, 100c_2r)$:

$$\operatorname{supp}\varphi_i \subset \tilde{B}(x_i, 100c_2r), \quad 0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1, \quad \sum_{B_i\in M_r} \varphi_i \leqslant 1,$$

$$\sum_{B_i\in M_r} \varphi_i = 1 \quad \text{на} \quad \bigcup_{B_i\in M_r} B(x_j, c_2r), \ \sum_{B_i\in M_r} |D^\alpha \varphi_i| \leqslant C\,r^{-l(\alpha)}, \quad \alpha \in I.$$

Положим

$$g_0 = \sum_{B_i\in M_r} P_i\,\varphi_i.$$

Для некоторого числа $s > 0$ введем в рассмотрение следующее множество:

$$\mathscr{D}_s = \{x \in \mathscr{D} \mid d(x, \partial\mathscr{D}) \geqslant s\}.$$

Выберем s так, чтобы выполнялось неравенство $\|f\|_{W^1_p(\mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_{s/2})} \leqslant \eta$. Пусть ψ, ξ, ξ_t, $f * \xi_t$ суть некоторые гладкие функции, удовлетворяющие условиям

$$0 \leqslant \psi \leqslant 1,\ \psi = 1 \quad \text{на} \quad \mathscr{D}_s,\ \psi = 0 \quad \text{на} \quad \mathbb{G}\setminus\mathscr{D}_{s/2},\ |D^\alpha \psi| \leqslant Cs^{-1},\ l(\alpha) = 1,$$

$$\operatorname{supp}\xi \subset B(0,1), \quad \int_{\mathbb{G}} \xi\, d\mu = 1, \quad \xi_t(x) = t^{-\nu}\xi(\delta_{t^{-1}}x) \quad \text{для} \quad t > 0,$$

$$f * \xi_t(x) = t^{-\nu} \int_{\mathbb{G}} f(y^{-1}x)\xi_t(y)dy.$$

Выберем $t \in (0, s/2)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|f - f * \xi_t\|_{W_p^1(\mathscr{D}_{s/2})} \leqslant s\eta.$$

Рассмотрим функции $g_1 = g_0(1-\psi)$ и $g_2 = (f * \xi_t)\psi$. Покажем, что в качестве g мы можем взять $g_1 + g_2$. Действительно, по построению $g_1, g_2 \in C^\infty(\mathbb{G})$, а по лемме 15 существует константа M такая, что $|D^\alpha g_i| \leqslant M$ для $\alpha \in I$, $i = 1, 2$. Докажем оценку

$$\|D^\alpha(f - g_1 - g_2)\|_{L_p(\mathscr{D})} \leqslant C\eta, \quad \alpha \in I.$$

Для этого достаточно показать, что выполняется

$$\|D^\alpha(f - g_1 - g_2)\|_{L_p(\mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_{s/2})} \leqslant C\eta,$$

поскольку

$$\|D^\alpha(f - g_1 - g_2)\|_{L_p(\mathscr{D}_s)} = \|D^\alpha(f - g_2)\|_{L_p(\mathscr{D}_s)} \leqslant C\eta.$$

Рассмотрим случай $l(\alpha) = 1$. Имеем

$$D^\alpha(f - g_1 - g_2) = D^\alpha\psi \cdot (f - f * \xi_t) + \psi D^\alpha(f - f * \xi_t)$$
$$+ D^\alpha(1-\psi)(f - g_0) + (1-\psi)D^\alpha(f - g_0) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Слагаемые I_1, I_2 оцениваются элементарно:

$$\|I_1\|_{L_p(\mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_s)} = \|I_1\|_{L_p(\mathscr{D}_{s/2}\setminus\mathscr{D}_s)} \leqslant C\eta, \ \|I_2\|_{L_p(\mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_s)} = \|I_2\|_{L_p(\mathscr{D}_{s/2}\setminus\mathscr{D}_s)} \leqslant Cs\eta.$$

Полагаем далее, что константа c_1 подбиралась таким образом, чтобы $100c_1 r \leqslant s/2$. Отметим, что если $B_0 = B(x_0, r), B_1 = B(x_1, r)$ такие шары из M_r, что

$$B_0 \cap (\mathscr{D} \setminus \mathscr{D}_s) \neq \varnothing, B_1 \cap (\mathscr{D} \setminus \mathscr{D}_s) \neq \varnothing, B(x_0, 100c_2 r) \cap B(x_1, 100c_2 r) \neq \varnothing,$$

то найдется такое число $k = k(\varepsilon, \delta) > 1$, не зависимое от выбора B_0, B_1, что цепочка шаров $2G_{0,1}$ будет целиком содержаться в области $\mathscr{D} \setminus \mathscr{D}_{ks}$. Тогда, используя леммы 15 и 16, имеем

$$\|I_3\|_{L_p(\mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_s)} = \|I_3\|_{L_p(\mathscr{D}_{s/2}\setminus\mathscr{D}_s)} \leqslant \sum_{\substack{B_i \in M_r \\ B_i \cap (\mathscr{D}_{s/2}\setminus\mathscr{D}_s) \neq \varnothing}} \|I_3\|_{L_p(B_i)}$$
$$\leqslant Cs^{-1} \sum_{\substack{B_i \in M_r \\ B_i \cap (\mathscr{D}_{s/2}\setminus\mathscr{D}_s) \neq \varnothing}} \|f - g_0\|_{L_p(B_i)}$$
$$\leqslant Cs^{-1} \sum_{\substack{B_i \in M_r \\ B_i \cap (\mathscr{D}_{s/2}\setminus\mathscr{D}_s) \neq \varnothing}} \Big(\|f - P_i\|_{L_p(B_i)} + \Big\|\sum_j \varphi_j(P_i - P_j)\Big\|_{L_p(B_i)}\Big)$$
$$\leqslant Crs^{-1} \sum_{\substack{B_i \in M_r \\ B_i \cap (\mathscr{D}_{s/2}\setminus\mathscr{D}_s) \neq \varnothing}} \Big(\|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(B_i)} + \sum_j \|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(\cup 2G_{i,j})}\Big)$$
$$\leqslant C(K_1, N) r s^{-1} \|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(\mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_{ks})}.$$

Аналогично оценивается I_4:

$$\|I_4\|_{L_p(\mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_s)} = \|I_4\|_{L_p(\mathscr{D}_{s/2}\setminus\mathscr{D}_s)} \leqslant \sum_{\substack{B_i \in M_r \\ B_i \cap (\mathscr{D}_{s/2}\setminus\mathscr{D}_s) \neq \varnothing}} \|I_3\|_{L_p(B_i)}$$
$$\leqslant \sum_{\substack{B_i \in M_r \\ B_i \cap (\mathscr{D}_{s/2}\setminus\mathscr{D}_s) \neq \varnothing}} \Big(\|D^\alpha(f - P_i)\|_{L_p(B_i)} + \Big\|D^\alpha\Big(\sum_j \varphi_j(P_j - P_i)\Big)\Big\|_{L_p(B_i)}\Big)$$
$$\leqslant C(K_1, N) r \|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(\mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_{ks})}.$$

Выбирая s достаточно малым по отношению к r, получаем требуемую оценку в случае $l(\alpha) = 1$. Оценки в случае $l(\alpha) = 0$ производятся аналогично разобранному случаю. Таким образом, нами доказано следующее

Утверждение 2. *При $1 \leqslant p < \infty$ верно соотношение*

$$\|f - g_1 - g_2\|_{W^1_p(\mathscr{D})} \leqslant C(K_1, N)\eta.$$

Для $p = \infty$ аппроксимация проводится традиционным способом. Таким образом, теорема 1 доказана.

§ 3. О продолжении функций пространств Соболева $\mathscr{L}^1_p$

Рассмотрим задачу о продолжении для пространства $\mathscr{L}^1_p(\mathscr{D})$. Нам понадобится следующее разбиение единицы для $\mathscr{D}^c$: для каждого шара $B_j \in E'_{\mathscr{D}}$ выбираем функцию $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{G})$ такую, что $\operatorname{supp}\varphi_j \subset cB_j$, где $c > 1$ — некоторая константа, $0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1$, $\sum\limits_{B_j \in E'_{\mathscr{D}}} \varphi_j = 1$ на $\bigcup\limits_{B_j \in E'_{\mathscr{D}}} B_j$, и, кроме того,

$$|X_{1k}\varphi_j| \leqslant M(\operatorname{rad} B_j)^{-1}, \quad k = 1, \dots, m_1,$$

где M — некоторая константа.

Определим оператор продолжения $\operatorname{ext}\colon \mathscr{L}^1_p(\mathscr{D}) \to \mathscr{L}^1_p(\mathbb{G})$ в предположении, что наша область является ограниченной (ε, δ)-областью, следующим образом. Берем произвольную функцию $f \in \mathscr{L}^1_p(\mathscr{D})$. Полагаем

$$\operatorname{ext} f = \begin{cases} f & \text{на } \mathscr{D}, \\ \sum\limits_{B_j \in E'_{\mathscr{D}}} P_{B_j} \cdot \varphi_j & \text{на } \bigcup\limits_{B_j \in W} B_j, \\ P_{B_k} \cdot \sum\limits_{B_j \in E'_{\mathscr{D}}} \varphi_j & \text{на } \mathscr{D}^c \setminus \bigcup\limits_{B_j \in W} B_j, \end{cases}$$

где P_{B_k} — подходящая константа для какого-то произвольного фиксированного шара $B_k \in W$.

Теперь пусть $\mathscr{D}$ есть неограниченная равномерная область. Для таких областей также существует оператор продолжения, который можно определить следующим образом:

$$\operatorname{ext} f = \begin{cases} f & \text{на } \mathscr{D}, \\ \sum\limits_{B_j \in E'_{\mathscr{D}}} P_{B_j} \cdot \varphi_j & \text{на } \bigcup\limits_{B_j \in E'_{\mathscr{D}}} B_j. \end{cases}$$

Как видно из построений, оба оператора линейны, определены почти всюду на $\mathbb{G}$. Для проверки их ограниченности достаточно использовать ту же схему, что и при доказательстве ограниченности оператора продолжения теоремы 1. Таким образом, справедливы следующие теоремы.

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{D}$ есть ограниченная (ε, δ)-область на группе Карно. Тогда существует непрерывный оператор продолжения*

$$\operatorname{ext}\colon \mathscr{L}^1_p(\mathscr{D}) \to \mathscr{L}^1_p(\mathbb{G}),\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

норма которого зависит только от ε, δ, p, ν, $\operatorname{diam}\mathscr{D}$.

Теорема 6. *Пусть $\mathscr{D}$ есть неограниченная (ε, ∞)-область на группе Карно. Тогда существует непрерывный оператор продолжения*

$$\operatorname{ext}\colon \mathscr{L}^1_p(\mathscr{D}) \to \mathscr{L}^1_p(\mathbb{G}),\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

норма которого зависит только от ε, δ, p, ν.

§ 4. Необходимые условия продолжения пространств Соболева

Так же, как и в лемме 13 из § 2, $d_{\mathscr{D}}$ — внутренняя относительно области $\mathscr{D}$ метрика. Если существует число $\kappa > 0$ такое, что для всех точек $x, y \in \mathscr{D}$ выполняется

$$d_{\mathscr{D}}(x,y) \leqslant M(\kappa) d(x,y),$$

как только $d(x,y) < \kappa$, то будем говорить, что внутренняя метрика $d_{\mathscr{D}}(x,y)$ *локально эквивалентна исходной метрике* $d(x,y)$ (здесь $M(\kappa)$ — наименьшая константа, не зависящая от точек $x, y \in \mathscr{D}$, для которых выполняется приведенное неравенство).

Введем величину

$$M_{\mathscr{D}} = \lim_{\kappa \to 0} M(\kappa).$$

Если в области $\mathscr{D}$ метрики $d_{\mathscr{D}}(x,y)$ и $d(x,y)$ локально эквивалентны, то величина $M_{\mathscr{D}}$ ограничена, и наоборот.

Следующая теорема является частным случаем классического результата (см. [15]).

Теорема 7. *Если существует ограниченный оператор продолжения*

$$\mathrm{ext}\colon W^1_\infty(\mathscr{D}) \to W^1_\infty(\mathbb{G}),$$

то в области $\mathscr{D}$ метрика $d_{\mathscr{D}}$ локально эквивалентна метрике Карно — Каратеодори.

Докажем следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть $\mathscr{D}$ — область на группе Карно. Если существует ограниченный оператор продолжения*

$$\mathrm{ext}\colon W^1_p(\mathscr{D}) \to W^1_p(\mathbb{G}), \quad \nu < p < \infty,$$

то в области $\mathscr{D}$ метрика $d_{\mathscr{D}}$ локально эквивалентна метрике Карно — Каратеодори.

Для доказательства теоремы 8 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 17. *Для любых двух точек $x, y \in \mathscr{D}$ существует такая функция $f \in W^1_\infty(\mathscr{D})$, что*

1) $0 \leqslant f(u) \leqslant 1$, $u \in \mathscr{D}$, $f(x) = 1$, $f(y) = 0$;
2) $|f(u) - f(v)| \leqslant d_{\mathscr{D}}(u,v)/d_{\mathscr{D}}(x,y)$, $u, v \in \mathscr{D}$;
3) $\operatorname{supp} f \subset B(x, d_{\mathscr{D}}(x,y)) = B(x,R)$;
4) $|\nabla_{\mathscr{L}} f| \leqslant 1/d_{\mathscr{D}}(x,y)$.

Доказательство. Требуемая функция определяется формулой

$$f(u) = d_{\mathscr{D}}(u, \mathscr{D}_x)/d_{\mathscr{D}}(x,y), \quad u \in \mathscr{D},$$

где $\mathscr{D}_x = \{v \in \mathscr{D} \mid d_{\mathscr{D}}(x,v) \geqslant d_{\mathscr{D}}(x,y)\}$, а $d_{\mathscr{D}}(u, \mathscr{D}_x) = \inf\{d_{\mathscr{D}}(u,v) \mid v \in \mathscr{D}_x\}$. Свойства 1, 2 очевидны; свойство 4 следует из того факта, что пространство $W^1_\infty(\mathscr{D})$ совпадает с пространством липшицевых функций на $\mathscr{D}$. Проверим свойство 3. Если u не принадлежит $B(x, d_{\mathscr{D}}(x,y))$, то $d_{\mathscr{D}}(x,y) \leqslant d_{\mathscr{D}}(x,u)$, откуда и следует требуемое.

Пространство гельдеровых функций H^β_∞, $\beta \in (0,1)$, на группе Карно определяется как пространство непрерывных функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{H^\beta_\infty(\mathbb{G})} = \|f\|_{C(\mathbb{G})} + \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{G} \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\beta}.$$

Лемма 18. *Пусть $1 < p < \infty$ и $\alpha > \nu/p$. Тогда $W^\alpha_p(\mathbb{G}) \subset H^\beta_\infty(\mathbb{G})$ и $\|\cdot\|_{H^\beta_\infty} \leqslant \|\cdot\|_{W^\alpha_p}$, где $\beta = \alpha - (\nu/p)$.*

Лемма 18 является обобщением известной теоремы Соболева о вложении и доказана в работе [27, теорема 5.15].

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 8. Берем функцию f из леммы 17. Очевидно, что $f \in W_p^1(\mathscr{D})$. Используя свойства упомянутой функции, получаем

$$\|f\|_{W_p^1(\mathscr{D})} \leqslant \min\{|\mathscr{D}|, |B(0,R)|^{1/p}\} + R^{(\nu/p)-1}.$$

По условию теоремы оператор продолжения ext ограничен, поэтому

$$\|f\|_{W_p^1(\mathbb{G})} \leqslant \|\operatorname{ext}\| \cdot \|f\|_{W_p^1(\mathscr{D})}.$$

По лемме 18 имеем оценку

$$\frac{C}{d(x,y)^{1-(\nu/p)}} \leqslant \|f\|_{W_p^1(\mathbb{G})}.$$

Тогда получаем

$$Cd(x,y)^{(\nu/p)-1} \leqslant \|\operatorname{ext}\|(\min\{|\mathscr{D}|, |B(0,R)|^{1/p}\} + R^{(\nu/p)-1}). \tag{6}$$

Докажем теперь, что

$$\varlimsup_{r\to 0}\{d_{\mathscr{D}}(x,y) \mid d(x,y) < r,\ x,y \in \mathscr{D}\} = 0. \tag{7}$$

Предположим противное. Тогда существуют последовательности точек $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ в области $\mathscr{D}$ такие, что $d(x_k,y_k) \to 0$ при $k \to \infty$ и $\varliminf d_{\mathscr{D}}(x_k,y_k) > 0$. Для каждой пары точек x_k, y_k возьмем функции f_k, удовлетворяющие условиям 1–4 леммы 17, и подставим их в (6). Переходя к пределу, получим противоречие, если только мера области $\mathscr{D}$ конечна. В случае $|\mathscr{D}| = \infty$ вместо последовательности функций f_k следует рассмотреть последовательность $g_k(u) = f_k \cdot \varphi_k(u)$, $u \in \mathscr{D}$, где $\varphi_k(u)$ есть ограничение на $\mathscr{D}$ функции $\varphi(ux_k^{-1})$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{G})$, $\varphi(u) = 0$ при $u \in B(0,2)$. Для функции g_k имеем $g_k(x_k) = 1$, $g_k(y_k) = 0$, и, кроме того, ввиду $\operatorname{supp} g_k \subset B(x_k, 2)$ нормы $\|g_k\|$ ограничены в совокупности. Отсюда вместо (6) имеем неравенство

$$Cd(x_k,y_k)^{(\nu/p)-1} \leqslant \|\operatorname{ext}\|,$$

приводящее к противоречию с предположением. Таким образом, (7) доказано. Умножив обе части (6) на $d_{\mathscr{D}}^{1-(\nu/p)}(x,y)$ и перейдя к пределу при $d(x,y) \to 0$, с учетом (7) получим $CM_{\mathscr{D}}^{1-(\nu/p)} \leqslant \|\operatorname{ext}\|$, что и доказывает теорему 8.

Область $\mathscr{D} \in \mathbb{G}$ будем называть *регулярной в точке* $x \in \overline{\mathscr{D}}$, если существуют положительные константы $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$ такие, что для любого шара $B(x,r)$, $r \leqslant C_1$, выполнено неравенство $|B(x,r) \cap \mathscr{D}| \geqslant C_2|B(x,r)|$. Область $\mathscr{D}$ называется *регулярной*, если она регулярна во всех своих точках и константы C_1 и C_2 не зависят от выбора x.

Теорема 9. *Пусть $\mathscr{D} \in \mathbb{G}$ — область на группе Карно, и пусть*

$$\operatorname{ext}\colon W_p^1(\mathscr{D}) \to W_p^1(\mathbb{G}), \quad \nu < p < \infty,$$

есть ограниченный оператор продолжения. Тогда область $\mathscr{D}$ регулярна.

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма 19. *Пусть $\mathscr{D} \in \mathbb{G}$ — область на группе Карно и для любой функции $f \in W_p^1(\mathscr{D})$, $p > \nu$, справедливо неравенство*

$$\sup_{\substack{u,v\in\mathscr{D}\\ u\neq v}} \frac{|f(u)-f(v)|}{d(u,v)^{1-(\nu/p)}} \leqslant C\|f\|_{W_p^1(\mathscr{D})}, \tag{8}$$

где константа C не зависит от выбора функции f. Тогда область $\mathscr{D}$ регулярна.

Доказательство. Фиксируем произвольную гладкую функцию φ, равную 1 в некоторой окрестности 0, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ для всех точек $x \in \mathscr{D}$, носитель которой содержится в шаре $B(0,1)$. Пусть $x \in \overline{\mathscr{D}}$, $y \in \mathscr{D}$, $r = d(x,y)$. Положим $f(z) = \varphi((x^{-1}z)/r)$. Тогда функция $f(z)$ равна 1 в окрестности точки x, $f(y) = 0$ и $|\nabla_{\mathscr{L}} f| \leqslant a/r$, где a — некоторая константа. Подставляя функцию f в соотношение (8), получаем

$$|B(x,r)|^{1/p}r^{-1} = cd(x,y)^{(\nu/p)-1} \leqslant cC\|f\|_{W_p^1(\mathscr{D})} \leqslant cC|B(x,r)\cap\mathscr{D}|^{1/p}(1+ar^{-1}),$$

откуда $|B(x,r)| \leqslant (a+r)^p|B(x,r)\cap\mathscr{D}|/(cC)^p$, что и доказывает лемму 19.

Перейдем к доказательству теоремы 7. Пусть f — функция из предыдущей леммы. Подставляя ее в неравенство $\|f\|_{W_p^1(\mathbb{G})} \leqslant \|\operatorname{ext}\|\cdot\|f\|_{W_p^1(\mathscr{D})}$ и используя лемму 18, получаем

$$|B(x,r)|^{1/p}r^{-1} \leqslant C\|\operatorname{ext}\|\cdot\|f\|_{W_p^1(\mathscr{D})}(1+ar^{-1}) \leqslant C\|\operatorname{ext}\|\cdot|B(x,r)\cap\mathscr{D}|^{1/p},$$

что и доказывает теорему 9.

§ 5. Равномерные области на двуступенчатых группах Карно

Напомним, что абсолютно непрерывная кривая

$$\sigma(s) = (\sigma_1(s),\dots,\sigma_m(s)), \quad \text{где} \quad \sigma_i(s) = (\sigma_{i1}(s),\dots,\sigma_{im_i}(s)),\ i = 1,\dots m,$$

называется *горизонтальной*, если ее производная $\dot\sigma(s)$ почти в каждой точке удовлетворяет соотношению $\dot\sigma(s) = \sum\limits_{k=1}^{m_1}\dot\sigma_{1k}(s)X_{1k}(\sigma(s))$. Расписывая эти соотношения покоординатно, мы получим следующие условия «горизонтальности» кривой:

$$\begin{aligned}
\dot\sigma_2(s) &= C_2[\sigma_1(s);\dot\sigma_1(s)],\\
\dot\sigma_3(s) &= C_3[\sigma_1(s);[\sigma_1(s);\dot\sigma_1(s)]] + C_3[\sigma_2(s);\dot\sigma_1(s)],\\
\dot\sigma_4(s) &= C_4[\sigma_1(s);[\sigma_1(s);[\sigma_1(s);\dot\sigma_1(s)]]]\\
&+ C_4[\sigma_3(s);\dot\sigma_1(s)] + C_4[\sigma_2(s);[\sigma_2(s);\dot\sigma_1(s)]] + C_4[\sigma_2(s);[\sigma_1(s);\dot\sigma_1(s)]],\dots\\
\dot\sigma_i(s) &= \sum_{\sum k_j = i-1} C_i[\sigma_{k_l}(s)\dots[\sigma_{k_1}(s);\dot\sigma_1(s)]\dots],\dots
\end{aligned}$$

Таким образом, зная только σ_1, мы можем полностью (исходя из вышеприведенных соотношений) «восстановить» горизонтальную кривую σ. Пусть σ — кривая, компоненты которой удовлетворяют условиям «горизонтальности» и которая параметризована длиной дуги. Ее длина по определению есть

$$\begin{aligned}
l(\sigma) &= \int\limits_0^{s_0}\left(\sum_{i=1}^{m_1+\dots+m_m}\sum_{j=1}^{m_1+\dots+m_m} g_{ij}\dot\sigma_i(s)\dot\sigma_j(s)\right)^{1/2} ds\\
&= \int\limits_0^{s_0}\left(\sum_{i=1}^{m_1}\dot\sigma_{1i}^2(s)\right)^{1/2} ds, \qquad (9)
\end{aligned}$$

где (g_{ij}) — стандартный риманов тензор длины группы Карно. Очевидно, что если кривая γ — кратчайшая, она же является *сильным минимумом* (в принятой терминологии, см., например, [28]) функционала длины (9) или функционала энергии

$$E(\gamma) = \int\limits_0^{s_0}\left(\sum_{i=1}^{m_1}\dot\gamma_i^2(s)\right)ds = \int\limits_0^{s_0} f(\gamma,\dot\gamma)ds$$

при наличии краевых условий $\gamma(0) = a$, $\gamma_1(s_0) = b_1$ и определенных связях, вытекающих из условий «горизонтальности», а именно

$$\gamma_2(s_0) = \int_0^{s_0} C_2[\gamma_1(s); \dot\gamma_1(s)]ds = b_2,$$

$$\gamma_3(s_0) = \int_0^{s_0} (C_3[\gamma_1(s); [\gamma_1(s); \dot\gamma_1(s)]] + C_3[\gamma_2(s); \dot\gamma_1(s)])ds = b_3,$$

$$\gamma_4(s_0) = \int_0^{s_0} (C_4[\gamma_1(s); [\gamma_1(s); [\gamma_1(s); \dot\gamma_1(s)]]] + C_4[\gamma_3(s); \dot\gamma_1(s)]$$

$$+ C_4[\gamma_2(s); [\gamma_2(s); \dot\gamma_1(s)]] + C_4[\gamma_2(s); [\gamma_1(s); \dot\sigma_1(s)]])ds = b_4, \dots$$

$$\gamma_i(s_0) = \int_0^{s_0} \sum_{\sum k_j = i-1} C_i[\gamma_{k_l}(s) \dots [\gamma_{k_1}(s); \dot\gamma_1(s)] \dots]ds = b_i, \dots$$

Будем предполагать, что кратчайшая относительно метрики Карно — Каратеодори на группе Карно принадлежит классу C^1 (в § 8 мы поясним это допущение). Тогда задача о нахождении кратчайшей γ относительно метрики Карно — Каратеодори, соединяющей две произвольные точки a, b группы Карно, сводится к задаче о нахождении среди всех кривых класса C^1, соединяющих a и b и удовлетворяющих условиям «горизонтальности», кривой, дающей *сильный минимум* (или же, что безразлично в нашем случае, *слабый минимум*) функционалу длины (или функционалу энергии) [29]. В дальнейшем всюду для удобства мы будем считать (это, очевидно, не уменьшит общности), что $\gamma(0) = a = 0$, т. е. мы будем рассматривать кратчайшие, одним из концов которых является единица группы. Применяя правило множителей Лагранжа (см. [29]), мы можем утверждать, что найдутся некоторые наборы констант $\lambda_j = (\lambda_{j1}, \dots \lambda_{jm_j})$ такие, что кривая σ будет экстремалью функционала

$$\int_0^{s_0} \left(\sum_{i=1}^{m_1} \dot\sigma_{1i}^2(s) + \sum_{j=2}^{m} \lambda_j \dot\sigma_j(s) \right) ds = \int_0^{s_0} L(\sigma(s), \dot\sigma(s))ds, \tag{10}$$

где под $\dot\sigma_j(s)$ подразумеваются соответствующие выражения из условий «горизонтальности», а $\lambda_j \dot\sigma_j(s)$ обозначает соответствующее покомпонентное умножение. Выясним некоторые свойства экстремалей функционала (10). Необходимым условием того, чтобы данная кривая σ была экстремалью функционала (10), является то, что она удовлетворяет соответствующим уравнениям Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_{ji}} - \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot\sigma_{ji}} = 0.$$

Поскольку для того, чтобы определить горизонтальную кривую, нам достаточно знать только σ_1 (остальные компоненты достраиваются из условий «горизонтальности»), в дальнейшем будем рассматривать только уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_{1i}} - \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot\sigma_{1i}} = 0. \tag{11}$$

Замечая, что функция L является бесконечно гладкой по всем переменным, устанавливаем следующее утверждение.

Лемма 20. *Решения σ_1 уравнений Эйлера — Лагранжа* (11) *являются бесконечно гладкими.*

Доказательство. Докажем, что σ_1 имеет непрерывную вторую производную (см. [29]). Действительно, в силу уравнений (11) имеем $dL_{\dot\sigma_{1i}}/ds = \dot L_{\sigma_{1i}}$, $i = 1, \ldots, m_1$. Мы можем написать

$$\dot L_{\sigma_{1i}} = \ddot L_{\dot\sigma_{1i}s} + \sum \dot\sigma_{kl}\ddot L_{\dot\sigma_{1i}\sigma_{kl}} + \sum \ddot\sigma_{kl}\ddot L_{\dot\sigma_{1i}\dot\sigma_{kl}} = \ddot L_{\dot\sigma_{1i}s} + \sum \dot\sigma_{kl}\ddot L_{\dot\sigma_{1i}\sigma_{kl}} + 2\ddot\sigma_{1i},$$

откуда следует, в силу существования и непрерывности $\ddot L_{\dot\sigma_{1i}s}$, $\ddot L_{\dot\sigma_{ji}\sigma_{kl}}$, существование и непрерывность $\ddot\sigma_{1i}$. Из существования и непрерывности $\ddot\sigma_{1i}$ и условий «горизонтальности» следует, что существуют и непрерывны $\ddot\sigma_{ji}$. Дифференцируя последнее равенство, получаем

$$\ddot L_{\sigma_{1i}s} = \dddot L_{\dot\sigma_{1i}ss} + \sum \ddot\sigma_{kl}\ddot L_{\dot\sigma_{1i}\sigma_{kl}} + \sum \dot\sigma_{kl}\dddot L_{\dot\sigma_{1i}\sigma_{kl}s} + \cdots + \ddot\sigma_{1i}\dddot L_{\dot\sigma_{1i}\dot\sigma_{1i}s} + 2\dddot\sigma_{1i},$$

откуда следует, что $\dddot\sigma_{1i}$ существуют и непрерывны и т. д., откуда, таким образом, следует, что σ_1 есть бесконечно гладкие.

Следствие 2 [30]. *Слабый минимум σ функционала* (10) *есть аналитическая кривая.*

Следствие 3. *Для групп Карно верно условие неналегания кратчайших (в смысле А. Д. Александрова* [10]).

Доказательство. Пусть $\gamma(s)$, $s \in [0, s_0]$, — некоторая кратчайшая, соединяющая единицу группы и произвольную точку $x = \gamma(s_0)$. Пусть найдется число $\tilde s \in (0, s_0)$ такое, что единица группы и точка $\tilde x = \gamma(\tilde s)$ соединяются кратчайшей $\gamma_1(s)$, отличной от $\gamma(s)$. Тогда кривая

$$\gamma_2(s) = \begin{cases} \gamma_1(s), & s \in [0, \tilde s], \\ \gamma(s), & s \in (\tilde s, s_0], \end{cases}$$

будет кратчайшей, соединяющей единицу группы и точку x, отличной от $\gamma(s)$. Поскольку $\gamma(s)$, $\gamma_2(s)$ — кратчайшие, они будут реализовывать сильный минимум вариационной изопериметрической задачи и поэтому будут аналитическими. Таким образом, мы имеем две аналитические кривые, совпадающие на интервале $(\tilde s, s_0]$, и поэтому из теоремы единственности для аналитических функций следует, что $\gamma(s) \equiv \gamma_2(s)$ на $[0, s_0]$.

Под двуступенчатой группой Карно мы подразумеваем такую группу, алгебра Ли V которой разлагается в прямую сумму векторных подпространств $V = V_1 \oplus V_2$. В этом случае функционал (10) имеет вид

$$\int_0^{s_0} \sum_{i=1}^{m_1} \dot\sigma_{1i}^2 + \lambda \left[\sum_{i=1}^{m_1} \sigma_{1i}e_i ; \sum_{i=1}^{m_1} \dot\sigma_{1i}e_i \right] ds, \tag{12}$$

где под λ подразумеваются множители Лагранжа $(\lambda_{21}, \ldots, \lambda_{2m_2})$. Известны достаточные условия (см. [29]), выполнение которых для σ_1 гарантирует то, что эта кривая будет реализовывать сильный минимум для функционала (12):

1) σ_1 есть решение соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа;

2) матрица $(\ddot L_{\dot\sigma_{1i}\dot\sigma_{1j}}(x, y, z))$ для любых конечных z и любых y, принадлежащих некоторой области, содержащей экстремаль σ_1, положительно определена;

3) отрезок $[0, s_0]$ не содержит точек, сопряженных с 0.

Напомним, что точка s_0 называется *сопряженной* с точкой 0 (см. [29]), если уравнения Эйлера — Лагранжа, соответствующие квадратичному функционалу, представляющему собой вторую вариацию функционала (12), имеют решение, не равное нулю тождественно, обращающееся в нуль при $s = 0$ и при $s = s_0$.

Зададим граничные условия $\sigma(s_0) = (\sigma_1(s_0), \sigma_2(s_0)) = (a, b)$, где $\sigma_2(s) = C\int\limits_0^s [\sigma_1(t); \dot\sigma_1(t)]dt$ и $C = (C_{21}, \dots, C_{2m_2})$ — некоторые константы из формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа, и найдем кривую, соединяющую единицу группы с точкой (a, b), удовлетворяющую условиям 1–3. Для этого составим уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала (12). Они имеют вид $\ddot\sigma_1 = A\dot\sigma_1$, где A — кососимметрическая матрица с нулевой диагональю, остальные элементы которой есть множители Лагранжа, взятые с соответствующим знаком. Сначала рассмотрим случай, когда $a \neq 0$. Ищем решение в виде

$$\sigma_1(s) = \left(Es + \frac{As^2}{2!} + \frac{A^2s^3}{3!} + \dots\right)\sigma_1^0 = \tilde A(\lambda, s)\sigma_1^0,$$

где σ_1^0 есть касательный к кривой σ вектор в единице группы. Известно, что когда $b = 0$, тогда $A \equiv 0$, т. е. множители Лагранжа в этом случае определяются единственным образом (они есть нули), и экстремаль есть однопараметрическая подгруппа $\sigma_1(s) = Es\sigma_1^0$, где $\sigma_1^0 = a/s_0$. Непосредственное вычисление дает

$$\det\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_1^0}\right)(a/s_0, 0) = s_0^{m_1} > 0,$$

и поэтому по теореме о неявной функции $\sigma_1^0(\lambda) = a\tilde A^{-1}(\lambda, s_0)$ есть однозначное и аналитическое отображение в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$. Найдем множители Лагранжа. Они определяются из соотношений

$$C\int\limits_0^{s_0}[\tilde A(\lambda, s)\tilde A^{-1}(\lambda, s_0)a; \dot{\tilde A}(\lambda, s)\tilde A^{-1}(\lambda, s_0)a]\, ds = b.$$

Проверим, что $\sigma_1(s)$ удовлетворяет условиям 2, 3. Условие 2 выполняется, так как $(\ddot L_{\dot\sigma_{1i}\dot\sigma_{1j}}) = 2E$. Для того чтобы проверить условие 3, введем некоторые обозначения: $P = \frac{1}{2}(\ddot L_{\dot\sigma_{1i}\dot\sigma_{1j}}) = E$,

$$Q = \frac{1}{2}\left(\ddot L_{\sigma_{1i}\sigma_{1j}} - \frac{d\ddot L_{\sigma_{1i}\dot\sigma_{1j}}}{ds}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим квадратичный функционал, представляющий собой вторую вариацию функционала (12), определенный на всех непрерывно дифференцируемых вектор-функциях $h(s)$ таких, что $h(0) = h(s_0) = 0$:

$$\int\limits_0^{s_0}(P\dot h, \dot h) - (Qh, h)ds = \int\limits_0^{s_0}(E\dot h, \dot h)ds.$$

Очевидно, что данный квадратичный функционал положительно определен, поэтому отрезок $[0, s_0]$ не содержит сопряженных точек. Таким образом, $\sigma_1(s)$ реализует слабый минимум функционала (12). Следовательно, $\det(\partial\sigma_1(s)/\partial\sigma_1^0) \neq 0$ для любого $s \in [0, s_0]$ (имеется в виду после того, как мы каким-то образом определили множители Лагранжа); в частности, это гарантирует возможность локального продолжения $\sigma_1(s)$ с сохранением перечисленных свойств (это влечет возможность локального продолжения кратчайшей). Из всего изложенного выше мы можем сделать вывод о том, что существуют некоторые области $\mathscr{D}_\lambda$, $\mathscr{D}_{\sigma_1^0}$ такие, что $\sigma_1^0 : \mathscr{D}_\lambda \to \mathscr{D}_{\sigma_1^0}$ есть однозначное аналитическое отображение, и при этом $\sigma(\sigma_1^0, \lambda, s_0)$ устанавливает взаимно-однозначное непрерывное соответствие между областью $(\mathscr{D}_{\sigma_1^0}, \mathscr{D}_\lambda)$ и многообразием $M_a = \{(a, b) \mid b$ — произвольное$\}$. Таким образом, нами доказана теорема 3.

Теперь рассмотрим случай, когда $a = 0$. Если бы для таких точек нашлись множители Лагранжа такие, что $\det \tilde{A}(\lambda, s_0) \neq 0$, то тогда мы бы получили $\sigma_1^0(\lambda) = a\tilde{A}^{-1}(\lambda, s_0) = 0$, чего не может быть. Таким образом, для точек вида $(0, b)$ (обозначим их объединение через V_1^0) множители Лагранжа должны удовлетворять условию $\det \tilde{A}(\lambda, s_0) = 0$, другими словами, $\det(\partial\sigma_1(s)/\partial\sigma_1^0) = 0$, т. е. данные λ находятся на границе области $\bigcup\limits_{(a,\cdot),a\neq 0} \mathscr{D}_\lambda$. Множество V_1^0 представляет собой пространство сопряженных точек изопериметрической вариационной задачи, определяемой функционалом (12). Поэтому в общем случае мы не можем сказать, что единица группы соединяется с точкой вида $(0, b)$ единственной кратчайшей.

Все изложенное выше позволяет нам доказать следующую теорему.

Теорема 10. *Шар в метрике Карно — Каратеодори на двуступенчатой группе Карно — равномерная область.*

Здесь мы не будем приводить доказательство теоремы 10, отметим только, что оно полностью идентично доказательству аналогичного утверждения на группе Гейзенберга (см. [14, теорема 6]).

§ 6. Об однозначности определения параметров, характеризующих экстремаль

Напомним следующий факт, отмеченный в предыдущем разделе. Рассмотрим точку вида $(a, 0)$. Тогда параметры σ_1^0, λ, определяющие экстремаль для этой точки, задаются однозначно; они равны a/s_0 и 0 соответственно. Выясним, равен якобиан $J(\sigma_1^0, \lambda) = \det\left(\frac{\partial\sigma}{\partial(\sigma_1^0,\lambda)}\right)$ нулю в точке $(a/s_0, 0)$ или нет. На группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1$, например, $J(a/s_0, 0) \neq 0$ (по поводу определения группы Гейзенберга см. [14, 31]). Сделаем проверку:

$$J(a/s_0, 0) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x_2s_0^2 \\ 0 & 1 & -2x_1s_0^2 \\ 0 & 0 & -(x_1^2 + x_2^2)s_0^2 \end{pmatrix} = -(x_1^2 + x_2^2)s_0^2 \neq 0,$$

где $\sigma_1^0 = (x_1, x_2) = (a_1/s_0, a_2/s_0)$. Однако в общем случае из однозначности определения параметров не следует, что $J(a/s_0, 0)$ не равен нулю. В качестве примера рассмотрим следующую двуступенчатую группу Карно N: пусть $e_1 = \{e_{11}, e_{12}, e_{13}\}$, $e_2 = \{e_{21}, e_{22}, e_{23}\}$ со структурным умножением $e_{21} = [e_{11}; e_{12}]$, $e_{22} = [e_{12}; e_{13}]$, $e_{23} = [e_{11}; e_{13}]$. Уравнения Эйлера — Лагранжа в этом случае имеют вид

$$\ddot{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} \ddot{\sigma}_{1,1} \\ \ddot{\sigma}_{1,2} \\ \ddot{\sigma}_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda_1 & 2\lambda_3 \\ -2\lambda_1 & 0 & 2\lambda_2 \\ -2\lambda_3 & -2\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{1,1} \\ \dot{\sigma}_{1,2} \\ \dot{\sigma}_{1,3} \end{pmatrix} = A_N\dot{\sigma}_1.$$

Непосредственно вычисляя, приходим к следующему результату:

$$J(a/s_0, 0) =$$
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_2s_0 & 0 & x_3s_0 \\ 0 & 1 & 0 & -x_1s_0 & x_3s_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x_2s_0 & -x_1s_0 \\ 0 & 0 & 0 & -(x_1^2 + x_2^2)s_0^2 & x_1x_3s_0^2 & -x_2x_3s_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1x_3s_0^2 & -(x_2^2 + x_3^2)s_0^2 & -x_1x_2s_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_2x_3s_0^2 & -x_1x_2s_0^2 & -(x_1^2 + x_3^2)s_0^2 \end{pmatrix} \equiv 0,$$

где $\sigma_1^0 = (x_1, x_2, x_3) = (a_1/s_0, a_2/s_0, a_3/s_0)$, и это связано с тем, что $\det A_N = 0$.

§ 7. Некоторые свойства множества сопряженных точек

Результаты данного параграфа относятся к общим группам Карно. Рассмотрим систему уравнений Эйлера — Лагранжа (11), соответствующую вариационному функционалу (10). Запишем эту систему в следующем виде:

$$\ddot{\sigma}_1 = A(\sigma, \lambda)\dot{\sigma}_1, \tag{13}$$

где матрица $A(\sigma, \lambda)$ — кососимметрическая с нулевой диагональю, элементами которой являются полиномы от компонент σ, λ. Общее решение системы (13) зависит от множителей Лагранжа λ и от вектора $\sigma_1^0 = (\sigma_{11}^0, \dots, \sigma_{1m_1}^0) = \dot{\sigma}_1(0) = \dot{\sigma}(0)$ (см., например, [28, 32]). Назовем точку (σ_1^0, λ), где

$$\sigma_1^0 = (\sigma_{11}^0, \dots, \sigma_{1m_1}^0), \quad \lambda = (\lambda_{21}, \dots, \lambda_{2m_2}, \dots, \lambda_{m1}, \dots, \lambda_{mm_m}),$$

допустимым набором параметров, если решения σ_1 системы (13) с начальными данными $\sigma_1^0 = \dot{\sigma}_1(0)$, $\sigma_1(0) = 0$ определяют экстремаль σ для некоторой точки

$$(a, b) = (a_{11}, \dots, a_{1m_1}, b_{21}, \dots, b_{2m_2}, \dots, b_{m1}, \dots, b_{mm_m}) = \sigma(s_0).$$

Множество сопряженных точек S системы (13) мы определяем как точки $y \in \mathbb{G}$ такие, что $y = \sigma(s_0, \sigma_1^0, \lambda)$ и

$$\det\left(\frac{\partial \sigma_1(s_0, \sigma_1^0, \lambda)}{\partial \sigma_1^0}\right) = 0, \quad \det\left(\frac{\partial \sigma_1(s, \sigma_1^0, \lambda)}{\partial \sigma_1^0}\right) \neq 0 \quad \text{при} \quad s \in [0, s_0),$$

где (σ_1^0, λ) — допустимые наборы параметров для y. Данное определение эквивалентно тому, которое использовалось в предыдущем параграфе (см. [28, 32]). Опишем некоторые свойства множества S. Очевидно, множество точек NE группы Карно, соединяющихся с единицей группы кратчайшей неединственным образом, принадлежит S. Единица группы также принадлежит S.

Лемма 21. *Множество S имеет пустую внутренность.*

Доказательство. Пусть найдется точка y, принадлежащая S вместе с некоторой своей окрестностью B. Соединим y и единицу группы кратчайшей γ. Тогда найдется точка $z \in \gamma$, $z \neq y$, $z \neq 0$ такая, что $z \in S$, но это противоречило бы тому, что γ — слабый минимум функционала (10) (см. [29]).

Замечание. Точно таким же способом, используя условие неналегания кратчайших, независимо от доказанной леммы можно показать, что NE — множество с пустой внутренностью.

Лемма 22. *Точки вида $(a, 0) = (a_{11}, \dots, a_{1m_1}, 0, \dots, 0)$ не являются сопряженными.*

Доказательство. С учетом условия «горизонтальности» общее решение системы (13) имеет вид $\sigma_1(s) = \big(Es + \tilde{A}(\sigma_1^0, \lambda, s)\big)\sigma_1^0$, где $\tilde{A}(\sigma_1^0, \lambda, s)$ — матрица, элементами которой являются полиномы, составленные из слагаемых типа

$$\lambda_{ij}^{r_{ij}} \dots \lambda_{lm}^{r_{lm}} (\sigma_{1f}^0)^{r_{1f}} \dots (\sigma_{1g}^0)^{r_{1g}} s^k, \quad (r_{ij}, \dots, r_{lm}) \neq (0, \dots, 0), \quad k > 1.$$

Опять используем тот факт, что для точки вида $(a, 0)$ параметры σ_1^0, λ определяются однозначно; они равны a/s_0 и 0 соответственно. Непосредственные вычисления дают

$$\det\left(\frac{\partial \sigma_1(s_0, \sigma_1^0, \lambda)}{\partial \sigma_1^0}\right)(a/s_0, 0) = s_0^{m_1} \neq 0,$$

что и доказывает утверждение леммы.

Введем некоторые обозначения. Пусть $x = (a, b) \in \mathbb{G}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ — некоторая точка и $\sigma(s)$, $s \in [0, s_0]$, — кратчайшая, соединяющая ее с единицей группы. Для каждого s из указанного промежутка рассмотрим *орбиту точки* $\sigma(s)$, т. е. кривую

$$\delta_t \sigma(s) = (\sigma_1(s)t, \sigma_2(s)t^2, \dots, \sigma_m(s)t^m), \quad t \in [0, \infty).$$

В результате получим некоторую непрерывную поверхность $\Gamma_\sigma(s, t)$.

Лемма 23. $\lim\limits_{s\to 0}\Gamma_\sigma(s,t)=\exp(t\dot\sigma(0))$.

Доказательство. Выберем некоторое число $\alpha>0$. Определим последовательности чисел (s_n) и (t_n) следующим образом:

1) $s_n\to 0$ — монотонная последовательность;

2) $\|\sigma_1(s_n)t_n\|=\alpha$.

Поскольку σ параметризована длиной дуги, из условия 2 настоящей леммы следует, что $t_n=\alpha/\|\sigma(s_n)\|\approx\alpha/s_n$. Тогда для $i=2,\ldots,m$ имеем

$$\sigma_i(s_n)(t_n)^i\approx\sigma_i(s_n)\frac{\alpha^i}{s_n^i}\to 0$$

при $s_n\to 0$; это является следствием работы [7], а именно доказанной там оценки $\sigma_i(s)=o(s^i)$ для $i=2,\ldots,m$ для любой горизонтальной кривой σ. Таким образом, на орбитах, образующих поверхность $\Gamma_\sigma(s,t)$, выбирается последовательность точек

$$\left(\frac{\sigma_1(s_n)\alpha}{s_n},\ldots,\frac{\sigma_m(s_n)\alpha^m}{s_n^m}\right)\to(\dot\sigma(0)\alpha,0,\ldots,0)$$

при $s_m\to 0$. Предельная точка однозначно определяет собой орбиту, а именно $\exp(\dot\sigma(0)t)$; в частности, при $t=\alpha$ имеем $\exp(\dot\sigma(0)t)=(\dot\sigma(0)\alpha,0,\ldots,0)$.

Лемма 24. *Множество S инвариантно относительно ортогональных преобразований горизонтального подпространства V_1, заданного в единице группы $(V_1|_0)$, и действия группы растяжений.*

Доказательство. Пусть $y\notin S$ и $\gamma_y(s)$, $s\in[0,s_0]$, есть единственная кратчайшая, соединяющая выделенную точку с единицей группы. Пусть найдется некоторое ортогональное преобразование φ пространства $V_1|_0$ такое, что для кривой $\varphi\gamma_y$ будет верно $\varphi\gamma_y(s_0)\in S$. Поскольку $y\notin S$, продолжим кратчайшую $\gamma_y(s)$ на некоторый интервал $(s_0,s_0+\varepsilon]$, где ε достаточно мало. В результате получим некоторую кривую $\widetilde\gamma_y(s)$, $s\in[0,s_0+\varepsilon]$, являющуюся кратчайшей, соединяющей точку $\gamma_y(s_0+\varepsilon)$ с единицей группы. Рассмотрим кривую $\varphi\widetilde\gamma_y$. Поскольку $\varphi\gamma_y(s_0)\in S$, точка $\varphi\widetilde\gamma_y(s_0+\varepsilon/2)$ соединяется с единицей группы некоторой кратчайшей $\overline\gamma_y(s)$, отличной от кривой $\varphi\gamma_y(s)$, $s\in[0,s_0+\varepsilon/2]$. Рассмотрим следующую кривую $\widehat\gamma_y(s)$, $s\in[0,s_0+\varepsilon]$, соединяющую единицу группы с точкой $\varphi\gamma_y(s_0+\varepsilon)$:

$$\widehat\gamma_y(s)=\begin{cases}\overline\gamma_y(s), & s\in[0,s_0+\varepsilon/2],\\ \varphi\gamma_y(s), & s\in(s_0+\varepsilon/2,s_0+\varepsilon].\end{cases}$$

Параметризуем $\widehat\gamma_y$ длиной дуги и рассмотрим кривую $\varphi^{-1}\widehat\gamma_y$. Поскольку ортогональные преобразования пространства $V_1|_0$ сохраняют длину горизонтальной кривой, кривая $\varphi^{-1}\widehat\gamma_y$ имеет длину, не большую длины кривой $\widetilde\gamma_y$, и те же концевые точки, что и $\widetilde\gamma_y$. Это противоречит тому, что кратчайшая $\widetilde\gamma_y$ является единственной кратчайшей, соединяющей свои концевые точки. Таким образом, показана инвариантность множества S относительно ортогональных преобразований подпространства $(V_1|_0)$. Инвариантность множества S (а также множества NE) относительно действия группы растяжений очевидна.

Далее, символ M_a обозначает множество точек вида

$$(a,b)=(a_{11},\ldots,a_{1m_1},b_{21},\ldots,b_{mm_m}),\ \text{где } a\neq 0,\ b\in\mathbb{R}^{m_2+\cdots+m_m}.$$

Лемма 25. *Множество точек $S\cap M_a$ есть замкнутое множество с пустой внутренностью, а множество $M_a\setminus S$ есть открытое связное множество (в топологии многообразия M_a).*

Доказательство. Рассмотрим точку $(a, 0)$. Из леммы 22 следует, что $(a, 0) \notin S \cap M_a$. Поэтому окрестности U_{a/s_0} и U_0 точек a/s_0 и $\lambda = 0$ такие, что между ними существует взаимно-однозначное аналитическое соответствие $\sigma_1^0 = \sigma_1^0(\lambda)$. Поэтому σ гомеоморфно (в силу неналегания кратчайших) отображает множество $U_{(a/s_0,0)} = \{(\sigma_1^0, \lambda) \mid \sigma_1^0(\lambda) \in U_{a/s_0}, \lambda \in U_0\}$ на некоторую окрестность $\widetilde{U} \subset M_a$ точки $(a, 0)$. Теперь пусть $y = (a, b) \notin S \cap M_a$, $b \neq 0$ — произвольная точка, и пусть (σ_1^0, λ) есть единственный допустимый набор параметров для этой точки. Тогда так же, как и для точки $(a, 0)$, укажем некоторую окрестность $\widetilde{U}_y \subset M_a$ такую, что найдется некоторая окрестность $U_{(\sigma_1^0,\lambda)}$ точки (σ_1^0, λ), что σ взаимно-однозначно и непрерывно отображает $U_{(\sigma_1^0,\lambda)}$ на $\widetilde{U}_y$. Покажем, что можно соединить точки $(a, 0)$ и y некоторой кривой $\widetilde{\gamma}_y \subset M_a$ такой, что $\widetilde{\gamma}_y \cap (S \cap M_a) = \varnothing$. Для этого соединим единицу группы и y кратчайшей γ_y, затем соединим единицу группы и каждую точку $\gamma_y(s)$, где $s \in [0, s_0]$, соответствующей орбитой. После этого «растянем» в $\tau > 1$ раз координаты точки $\gamma_y(s)$, $s \in [0, s_0)$, вдоль орбиты таким образом, чтобы $\|\tau a_{\gamma_y(s)}\| = \|a\|$ (где $a_{\gamma_y(s)}$ обозначает первые m_1 координат точки $\gamma_y(s)$), а затем ортогональным преобразованием добьемся того, чтобы точка $\delta_\tau \gamma_y(s)$ перешла в некоторую точку многообразия M_a. Из лемм 23, 24 следует, что в результате мы получим требуемую кривую $\widetilde{\gamma}_y \subset M_a$. Таким образом, множество точек многообразия M_a, не принадлежащих множеству $S \cap M_a$, представляет собой область, откуда следует замкнутость множества $S \cap M_a$. Теперь пусть некоторая точка $z \in S \cap M_a$ принадлежит множеству сопряженных точек многообразия M_a с некоторой (в соответствующей топологии) своей окрестностью. Тогда, соединяя, как и выше, точку z с точкой $(a, 0)$ кривой $\widetilde{\gamma}_z$, мы получили бы в силу леммы 24 противоречие с условием неналегания кратчайших. Таким образом, лемма доказана.

Следствие 4. *Множество* $\Big(S \cap \Big(\bigcup\limits_{a\neq 0} M_a\Big)\Big) \cup \Big(\mathbb{G} \setminus \Big(\bigcup\limits_{a \neq 0} M_a\Big)\Big)$ *— замкнуто.*

Лемма 26. *Топологическая коразмерность множества S больше чем 1.*

Доказательство. Напомним, что множество S есть объединение орбит, которое задается аналитическими условиями $y = \sigma(s_0, \sigma_1^0, \lambda)$ и

$$\det\Big(\frac{\partial \sigma_1(s_0, \sigma_1^0, \lambda)}{\partial \sigma_1^0}\Big) = 0, \quad \det\Big(\frac{\partial \sigma_1(s, \sigma_1^0, \lambda)}{\partial \sigma_1^0}\Big) \neq 0 \quad \text{при} \quad s \in [0, s_0),$$

где (σ_1^0, λ) — допустимые наборы параметров для y. Пусть найдется некоторый шар $B(x, r)$ достаточно малого радиуса r с центром в точке x такой, что множество S делит его на две несвязные между собой части. В силу аналитичности задания множества S можно считать, что $B(x, r) \cap S$ есть некоторая гиперповерхность, которая (см. [32]) неограниченно продолжается до некоторой гиперповерхности Γ в $\mathbb{G} \setminus 0$; единица группы будет особой точкой для Γ. Тогда $\Gamma \cup 0$ будет делить группу Карно на несвязные между собой части, и поэтому найдется многообразие M_a, которое гиперповерхность $\Gamma \cup 0$ делит на несвязные между собой части. Это противоречит результатам предыдущей леммы, т. е. наше изначальное допущение неверно. Лемма доказана.

Лемма 26 позволяет доказать теорему 2. Так же, как и в § 5, мы не будем приводить доказательство сформулированной теоремы, поскольку с учетом леммы 26 оно дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения из работы [14].

§ 8. О гладкости кратчайших на группах Карно

Лемма 27. *Кратчайшая в метрике Карно — Каратеодори, соединяющая произвольную точку $x_0 \notin S$ с единицей группы Карно, принадлежит классу C^1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \notin S$ такая точка, что кратчайшая γ_{x_0}, соединяющая x_0 с единицей группы, есть абсолютно непрерывная кривая, не принадлежащая классу C^1. Тогда (см. [33]) γ_{x_0} есть решение условной экстремальной задачи Лагранжа в понтрягинской форме и $\dot\gamma_{x_0}$ есть измеримая ограниченная вектор-функция. Пусть $\dot\gamma_{x_0,1}$ — первые m_1 компонент $\dot\gamma_{x_0}$. Аппроксимируем $\dot\gamma_{x_0,1}$ непрерывными ограниченными в совокупности вектор-функциями x_k так, чтобы x_k сходились к $\dot\gamma_{x_0,1}$ почти всюду на $[0, s_0]$. Тогда

$$y_{1,k}(s) = \int\limits_0^s x_k\,ds \to \int\limits_0^s \dot\gamma_{x_0,1}\,ds = \gamma_{x_0,1}(s)$$

равномерно на $[0, s_0]$. Достроим $y_{1,k}$, используя условия горизонтальности, до горизонтальной кривой y_k (см. § 5). Таким образом, получаем последовательность (y_k) горизонтальных кривых класса C^1, с началом в единице группы, сходящихся к γ_{x_0} поточечно и по длине. Поэтому мы всегда можем выбрать y_k таким образом, чтобы точка $y_k(s_0)$ была достаточно близка к x_0 и длина $l(y_k)$ была достаточно близка к $l(\gamma_{x_0})$.

Пусть для произвольной точки $z' \notin S$ кривая $\sigma_{z'}$ является слабым минимумом функционала (10) для некоторых множителей Лагранжа (см. § 6, 7). Предположим, что для некоторого $\delta \geqslant 0$ верно $l(\gamma_{x_0}) + \delta = l(\sigma_{x_0})$. Рассмотрим случай, когда $\delta > 0$. Поскольку $x_0 \notin S$, найдется такая окрестность $U_\varepsilon \subset \mathbb{G} \setminus S$ точки x_0, что для любой точки $z \in U_\varepsilon$ будет верно неравенство $|l(\sigma_{x_0}) - l(\sigma_z)| \leqslant \varepsilon$. Аппроксимируем $\dot\gamma_{x_0,1}$ функциями x_k таким образом, чтобы $|l(\gamma_{x_0}) - l(y_k)| \leqslant \delta/100$. Тогда $l(y_k) \leqslant \delta/100 + l(\gamma_{x_0})$. С другой стороны, поскольку $y_k \in C^1$, то $l(y_k) \geqslant l(\sigma_{x_0}) - \varepsilon$. Полагая $\varepsilon = \delta/200$, получаем противоречие. Если же $\delta = 0$, то, рассуждая аналогично разобранному случаю, нетрудно получить, что $x_0 \in S$, что также является противоречием.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из результатов работы [34] (см. гл. 3, § 25, гл. 4, § 31) вытекает, что гладкость кратчайшей в метрике Карно — Каратеодори обеспечивается гладкостью условий горизонтальности кривой и положительной определенностью матрицы $(\ddot f_{z_i z_j}(y, z))$ для любых конечных z и y, где $f(y, z)$ — подынтегральная функция функционала энергии $E(\gamma)$ (см. § 5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Латфуллин Т. Г.* Критерий продолжения функций класса L_2^1 из неограниченных плоских областей // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 2. С. 416–419.
2. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, вып. 1. С. 17–62.
3. *Jones P.* Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces // Acta Math. 1981. N 147. P. 71–88.
4. *Шварцман П. А.* Теоремы продолжения с сохранением локально-полиномиальных приближений / Ярослав. гос. ун-т. Ярославль, 1986. 153 с. Деп. в ВИНИТИ 04.09.86, № 6487-В86.
5. *Буренков В. И., Файн В. Л.* О продолжении функций из анизотропных пространств с сохранением класса // Докл. АН СССР. 1976. Т. 228, № 3. С. 525–528.
6. *Folland G. B., Stein I.* Hardy spaces on homogeneous groups // Math. Notes 28. Princeton Univ. Press, 1982. 284 p.
7. *Pansu P.* Métriques de Carnot — Carathéodory et quasiisométries des espacies symétriques de rang un // Ann. of Math. 1989. V. 129. P. 1–60.
8. *Постников М. М.* Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982. 447 с.
9. *Gromov M.* Carnot — Caratheodory spaces seen from within. Bures-sur-Yette, 1994. 221 p. (Preprint/IHES/M/94/6).
10. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Гостехиздат, 1948. 386 с.
11. *Strichards R.* Sub-Reimannian geometry // J. Differential Geometry. 1986. V. 24, N 2. P. 221–262.

12. *Gehring F., Osgood B.* Uniform domains and quasi-hyperbolic metric // J. Analyse Math. 1979. V. 36. P. 50–74.
13. *Jones P.* Extension theorems for BMO // Indiana Univ. Math. J. 1980. V. 29, N 1. P. 41–66.
14. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О продолжении функций ограниченной средней осцилляции на пространствах однородного типа с внутренней метрикой // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1015–1048.
15. *Водопьянов С. К.* Формула Тейлора и функциональные пространства. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1988. 96 с.
16. *Vodop'yanov S. K.* Boundary behavior of differentiable functions and related topics // Nonlinear Analysis, Function Spaces and Application. V. 4. (Proc. Spring School, Roudnice nad Labem, Checkoslovakia, May, 1990). TEUBNER—TEXTE zur Mathematik. Bd 119. Leipzig, 1990. P. 224–253 (English). MR 94b:46052.
17. *Водопьянов С. К.* Изопериметрические соотношения и условия продолжения дифференцируемых функций // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292, № 1. С. 11–15.
18. *Водопьянов С. К.* Внутренние геометрии и пространства дифференцируемых функций // Функциональный анализ и математическая физика. Новосибирск, 1987. С. 18–38.
19. *Vodop'yanov S. K.* Equivalent normalization of Sobolev and Nikol'ski spaces in domains. Boundary values and extension // Function Spaces and Applications: Proc. US-Swedish Sem. Lund, Sweden, June 1986. Berlin etc.: Springer, 1988. P. 397–409.
20. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Пространства Соболева и специальные классы отображений. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1981. 71 с.
21. *Мазья В. Г.* О продолжении функций из пространств С. Л. Соболева // Зап. науч. семинаров ЛОМИ / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. Ленингр. отд-ние. 1981. Т. 113. С. 231–236.
22. *Романов А. С.* О продолжении функций из пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 4. С. 149–152.
23. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* Продолжение дифференцируемых функций и квазиконформные отображения на группах Карно // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 1. С. 15–18.
24. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978. 200 с.
25. *Jerison D.* The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition // Duke Math. J. 1986. V. 53, N 2. P. 503–523.
26. *Lu G.* Weighted Poincaré and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmander's condition and applicatios // Rev. Mat. Iber. 1992. V. 8, N 3. P. 367–439.
27. *Folland G.* Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups // Ark. Mat. 1975. V. 13. N 2. P. 161–208.
28. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 424 с.
29. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: Наука, 1961. 228 с.
30. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 296 с.
31. *Korányi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. in Math. 1995. V. 111. P. 1–87.
32. *Бернштейн С. Н.* Об уравнениях вариационного исчисления // Успехи мат. наук. 1941. Вып. 8. С. 32–81.
33. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
34. *Ахиезер Н. И.* Лекции по вариационному исчислению. М.: Гостехиздат, 1955. 248 с.

г. Новосибирск *Статья поступила 21 марта 1994 г.*