УДК 681.142.

ПРИМЕНЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ И ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

М.И. Соболевский

(Ленинград)

Как показывает практика, одним из распространенных способов организации вычислительных систем (ВС) является комплектование систем из универсальных цифровых вычислительных машин (УЦВМ) (см. обзор и литературу в работе [I]).

При этом одной из основных проблем является:

- выбор рационального вида взаимных связей между функциональными устройствами различных УЦВМ;
- выбор аппаратурного состава ВС;
- выбор способа организации вычислительного процесса (ВП) при различных потоках задач и заданном составе ВС с тем, чтобы указанные параметры обеспечили определенные значения показателей эффективности функционирования ВС.

В предлагаемой работе влияние различных вариантов связей, состава ВС и способов организации ВП на показатели эффективности функционирования ВС исследуются путем представления ВС в виде стохастической сети. Узлы сети соответствуют устройствам ВС, которые рассматриваются далее как приборы системы массового обслуживания (СМО).

В такой сети каждой связи между узлами ставится в соответствие число $0 \le \theta_{ij} \le 1$, удовлетворяющее условию $\sum_{j \in \Gamma_i} \theta_{ij} = 1 \ (i,j = 1,2,\ldots)$. θ_{ij} означает вероятность того, что от узла i передача идет в узел j. Здесь случай $\theta_{ij} = 0$ для всех $j \in \Gamma_i$ означает, что узел j может быть исключен из сети, что позволяет исследовать ВС с различным составом оборудования.

Структура сети выбирается такой, что устройства ВС (узлы графа) одного функционального назначения, но в общем случае с различными возможностями (емкостью ЗУ, быстродействием и др.) размещены в столбцы. Каждый столбец представляет собой группу устройств ВС, обеспечивающих определенную фазу обслуживания заявки.

Состав ВС и исследуемый способ организации связей между устройствами различных УЦВМ однозначно определяются структурой стохастической сети и представляющей ее матрицей передач $\theta = \|\theta_{ij}\|$.

Принимается следующая упрощенная модель работы диспетчерской программы (ДП): ДП, при распределении задач, учитывает некоторое множество $X = \{x_n\}$ факторов, определяющих состояние ВС и требований к ней в данный момент, по методике, рассмотренной в работе [2]. При этом решается задача оптимального распределения работ между устройствами ВС на данном этапе.

Если учесть влияние совокупности различных факторов на распределение через величины θ_{ij}, то в первом приближении значения θ_{ij} могут быть получены, например, следующим образом. Пусть для всех элементов $\gamma_i \in \Gamma_m (i = 1,2, \ldots, n$, где n – число элементов отображения элемента m) известны их технические возможности b_i (например, быстродействие, емкость, надежность и т.д.).

Условно расположим элементы γ_i в ряд так, чтобы первым стал элемент с максимальной величиной характеристики b_i, а последующие элементы ряда имели бы величины b_i не больше предыдущих. Тогда получим упорядоченное множество (кортеж) $\gamma_j \in \Gamma_m$, для которого справедливы следующие неравенства:

$$b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_j \ge b_{j+1} \ge \ldots \ge b_n \quad , \quad (1)$$

где $j = 1,2,\ldots, n$ – номер места в ряду; n – количество элементов сети, соединенных с m.

Очевидно, для случая, когда любое из устройств может обеспечить потребности любой из задач, разумно распределить вероятности передачи от элемента m к элементу $\gamma_j \in \Gamma_m$ так, чтобы удовлетворить условие

$$\theta_{m,\gamma_j} \geq \theta_{m,\gamma_{j+1}}. \tag{2}$$

При определении конкретной величины можно, например, задавать ее так, чтобы соблюдалось условие пропорциональности

$$\frac{\theta_{m,\gamma_{j+1}}}{\theta_{m,\gamma_j}} = B \frac{b_{j+1}}{b_j}, \tag{3}$$

где B – коэффициент пропорциональности. При этом должно соблюдаться условие

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_{m,\gamma_j} = 1. \tag{4}$$

Таким образом, для ВС исследуемой структуры и предполагаемого состава имеем структуру стохастической сети, для которой известны элементы θ_{ij} матрицы передач.

Исследуется несколько видов организации связей между устройствами ВС. Для каждого вида имеется своя матрица передач, отличная от других. Исследование проводится методом стохастического моделирования. Для примера коротко рассмотрим некоторые варианты эксперимента.

Вариант I. Для каждой i-й заявки определяются узлы сети, через которые она пройдет в каждой ϕ-фазе ($\phi = 1,2,\ldots,k$) обслуживания (путь заявки). Далее модель пути принимается как k-фазная СМО и определяются следующие характеристики процесса обслуживания i-й заявки (далее i будем опускать).

I) Вероятность того, что ϕ – фаза свободна и не имеет очереди (для случая разомкнутой СМО)

$$P_\phi = \left\{ \sum_{k_1=1}^{\phi} \sigma \prod_{\tau=1}^{k_1} \beta_\tau^{n_\tau} \prod_{l=k_1+2}^{\phi} (\sigma+\beta_l)^{n_l} \left[\prod_{i=1}^{\phi} (\sigma+\beta_i) - \sigma \prod_{i=1}^{\phi} \beta_i \right]^{-1} \right\}^{-1}, \tag{5}$$

где $i = 1,2,\ldots,\phi$; $\tau = 1,2,\ldots,k_1$; $l = k_1+2,\ldots,\phi$;

$k_1 \le k$ – номер фазы, после которой следует занятая фаза;

$$n_\tau = \begin{cases} 1, \text{ если } 1 \le \tau < k_1, \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$$n_i = 1 - n_\tau \quad .$$

Вероятность того, что прибор ϕ-й фазы занят $(n_\phi = 1)$

$$P(n_\phi = 1) = \sigma \prod_{\tau=1}^{k_1} \beta_\tau \prod_{i=k_1+2}^{\phi} (\sigma + \beta_i)^{n_i} \left[\prod_{i=1}^{\phi} (\sigma + \beta_i) - \sigma \prod_{i=1}^{\phi} \beta_i \right]^{-1} P_0 . \quad (5а)$$

Вероятность того, что в ϕ-й фазе имеется n_ϕ заявок $(n_\phi \ge 1)$

$$P(n_\phi) = \prod_{\tau=1}^{k_1} \beta_\tau^{n_\tau} \prod_{i=k_1+2}^{\phi} (\sigma + \beta_i)^{n_i} \left[\sum_{n_\phi} \prod_{\tau=1}^{k_1} \beta_\tau \prod_{i=k_1+2}^{\phi} (\sigma + \beta_i)^{n_i} \right]^{-1} . \quad (5б)$$

Для случая замкнутой СМО

$$P_\phi = \frac{\sum_{\pi_i} \lambda_1^{r_1} \cdot \lambda_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_k^{r_k}}{\sum_{\pi} \lambda_1^{r_1} \cdot \lambda_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_k^{r_k}} , \quad (5в)$$

где $\lambda_\phi = 1/\beta_\phi$, β_ϕ – параметр показательного закона распределения длительности обслуживания заявки в ϕ – фазе;

$\sum_\pi$ – означает суммирование по всем наборам неотрицательных целых чисел r_ϕ, таких что $\sum r_\phi = R$, где R – число задач в ВС. $\sum_{\pi_i}$ – означает суммирование по всем наборам целых чисел, таких что $r_\phi = 0$ и $\sum r_\phi = R$.

Выражения (5, 5а,б,в) получены при решении системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние k – фазной СМО.

2) Доля времени загрузки прибора ϕ – фазы

$$\delta_\phi = 1 - P_\phi . \quad (6)$$

3) Среднее количество требований, обслуживаемых ϕ – прибором в единицу времени

$$И_{ср} = (1 - P_\phi)\, \lambda_\phi . \quad (7)$$

4) Среднее время решения задачи на ВС

$$\tau_{ср} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} \sum\limits_{\phi=1}^{k} \tau_{\phi}^{(n)}}{N}, \qquad (8)$$

где N – число реализаций при эксперименте;

n – текущий номер реализации;

$\tau_{\phi}^{(n)}$ – время, включающее обработку задачи на ϕ – приборе при n – реализации и время ожидания в очереди ($\tau_{\phi}^{(n)}$ фиксируется в модели).

5) Производительность ВС

$$П = \frac{1}{T} \sum\limits_{y=1}^{Y} \frac{b_y}{\tau_{ср.\,y}}, \qquad (9)$$

где b_y – число, показывающее сколько раз за время T решалась на ВС задача данного типа $y \in Y'$; Y – число типов решаемых на ВС задач.

Все перечисленные характеристики определяются для каждого из видов связи и для двух случаев: когда одноименные устройства (узлы столбца стохастической сети) с одинаковыми и разными техническими характеристиками.

Вариант П. Группа приборов одного функционального назначения (столбец стохастической сети) представляется как СМО из S параллельных каналов с одинаковыми или различными приборами. Для каждой i -й заявки, обслуженной в ϕ -фазе, определяются характеристики состояния системы и заявок в ней.

Для примера рассмотрим случай одинаковых устройств. Решая систему дифференциальных уравнений, описывающих состояние S – линейной СМО, можно получить следующие характеристики.

Вероятность того, что в ϕ -фазе находится m – требований,

$$P_m = P_0 \frac{S^m \rho^m}{m!} \quad \text{при} \quad 1 \le m \le S, \qquad (10)$$

$$P_m = P_0 \frac{S^s \rho^m}{s!} \quad \text{при} \quad m > s, \qquad (11)$$

где P_0 – вероятность того, что в ϕ- фазе заявок нет;

$\rho = \frac{\sigma}{\sum\limits_{i}^{s} \beta_i}$ – суммарный коэффициент использования;

σ – интенсивность поступления заявок на вход ϕ – фазы.

Учитывая условие

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m = 1, \qquad (12)$$

можно получить

$$P_0 = \frac{1}{\frac{S^s \rho^s}{S!(1-\rho)} + \sum_{m=0}^{s-1} \frac{S^m \rho^m}{m!}} . \qquad (13)$$

Зная P_0 и P_m, можно получить ряд характеристик ϕ – фазы.

а) Среднее число требований в фазе

$$l_{cp} = \sum_{m=0}^{M} mP_m . \qquad (14)$$

б) Средняя продолжительность пребывания заявки в ϕ -фазе (в очереди и на обслуживании)

$$t_{cp} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{s} \beta_i} \left[\frac{S^s \rho^s}{S!(1-\rho)^2} P_0 + S \right] . \qquad (15)$$

в) Среднее число обслуживаемых требований

$$\alpha_{cp} = \sum_{m=0}^{s} mP_m . \qquad (16)$$

г) Среднее число свободных элементов в фазе

$$\varepsilon_{cp} = \sum_{m=0}^{s} (S-m)P_m . \qquad (17)$$

д) Среднее число требований в очереди

$$\nu_{cp} = \sum_{m=s+1}^{M} (m - S)P_m ,$$

и после преобразования

$$\nu_{cp} = \frac{S^s \rho^{s+1}}{S!(1-\rho)^2} P_0 . \qquad (18)$$

Перечисленные характеристики, а также ряд других, которые могут быть определены и влияют на величину показателей эффективности ВС, определяются для различных способов организации связей между устройствами ВС, при различных вариантах состава ВС и способах организации ВП.

Экспериментально исследуется модель ВС, состоящая из 3÷7 ВМ; наборов ЗУ 2÷4 видов; управляющего органа; авторегистратора состояния [2] и других устройств.

Статистический материал анализа ВС из УЦВМ может быть широко использован не только в целях проектирования конкретных ВС из УЦВМ, но и для разработки высокоэффективных макроструктурных ВС как с жесткой, так и с переменной структурой (в смысле [3]), в том числе однородных и неоднородных.

Литература

1. М.И. Соболевский. Принципы организации вычислительных систем. Моделирование на ЭВМ процессов организации, планирования и управления. Л., Изд-во ЛВИКА им.А.Ф. Можайского, 1967.
2. М.И. Соболевский. Некоторые вопросы организации отображения состояния многопрограммных вычислительных систем. Доклад на НТК ЛВИКА им. А.Ф. Можайского, X-1966 (вып. 7).
3. Э.В. Евреинов, Ю.Г. Косарев. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, 1966.