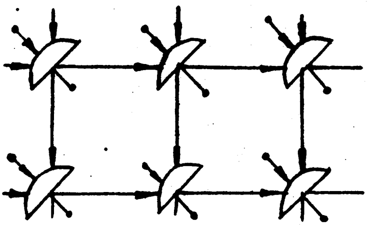
УДК.519.95

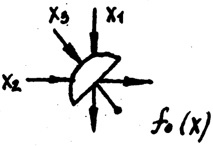
# О ФУНКЦИЯХ, РЕАЛИЗУЕМЫХ В ОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЕ

*В.Д. Малюгин*
(Москва)

Под однородной структурой будем понимать объединение одинаковых конечных автоматов, соединенных между собой геометрически одинаковым образом. Пренебрегая явлением запаздывания при передаче сигналов, отнесем структуру к комбинационному типу, если автоматы, образующие структуру, реализуют лишь булевые функции (БФ). Комбинационную структуру считаем универсальной от заданного количества аргументов, если для нее существуют конечные размеры, при которых на структуре можно реализовать любую БФ от этих аргументов. Ограничимся рассмотрением однородных структур, образованных функциональными элементами, расположенными в узлах прямоугольной решетки (рис. Iа).



а)



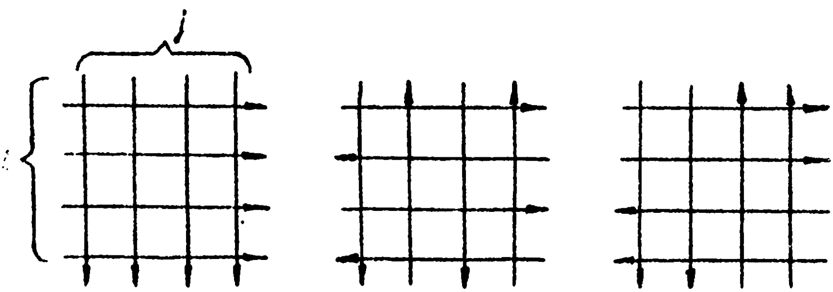

б)

Рис. I.

Очевидно, что функция, реализуемая отдельным элементом, должна образовывать базис полной системы. Например, в качестве такой функции можно выбрать функцию (рис.1б)

$$f_0 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 .$$

Сопоставим конечным автоматам (функциональным элементам) структуры вершины, а связям – дуги некоторого ориентированного графа, тогда однородная структура будет решеткой из горизонтальных и вертикальных линий со стрелками, указывающими направление передачи сигналов (рис. 2 а,б,в).



а) б) в)

Рис. 2.

Для случая 2а решетка размера $s \times s$ реализует ( $n$, $m$ )-полюсник, где

1) $n = s^2$ при подаче переменных только в узлы решетки;

2) $n = s^2 + 2s$ при подаче переменных как в решетку, так и с "боков".

Все $m = s^2$ выходных функций можно разбить на $k$ ($k \le m$) инвариантных классов, относя в один класс функции, отличающиеся лишь нумерацией переменных.

Обозначим переменную, поданную в узел с координатами ( $i$, $j$ ), через $x_{ij}$ ( $1 \le i,\ j \le s$ ), а функцию, реализуемую в данном узле от переменных структуры, часть из которых могут быть несущественными, через $f_{ij}(x_{11}, \ldots, x_{ss}) = f_{ij}$.

Для решетки, представленной рис. 2а, реализуемая функция определяется из системы следующих рекуррентных булевых выражений:

$$f_{ij} = \bar{f}_{(i-1),j} \cdot \bar{f}_{i,(j-1)} \cdot x_{ij} \qquad (1а)$$

$$f_{1j} = \overline{f}_{1,(j-1)} \cdot x_{1j}, \tag{Iб}$$

$$f_{i1} = \overline{f}_{(i-1),1} \cdot x_{i1}, \tag{Iв}$$

$$f_{11} = x_{11} \qquad 1 \le i,j \le s. \tag{Iг}$$

Легко показать, что рассматриваемая структура является универсальной в классе БФ.

Для доказательства укажем способ (возможно не оптимальный) построения любой функции в структуре. Предварительно преобразуем $f(x)$, заданную в С.Д.Н.Ф., к виду:

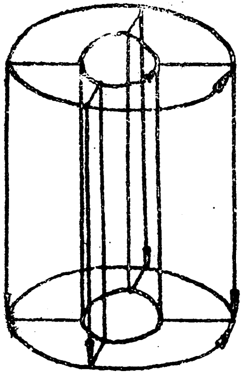
$$f(x) = \bigvee_{f(x)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} = \bigvee_{f(x)=1} \overline{x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}}. \tag{2}$$

Из (Iб), (Iв) следует, что внешнюю функцию разложения (2) вида $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \ldots \vee \overline{x}_n$ можно реализовать на строке (столбце) длиной $2n+1$, если положить $x_1 = 0$, а все $x_j = 1$, где $j$ - нечетные. Аналогично внутренняя функция разложения (дизъюнкция с произвольным числом инверсных членов) реализуется на двух строках, т.е. на решетке размером $2 \times (2n + I)$, следовательно, объединение соответствующих участков структуры даст возможность реализовать произвольную БФ.

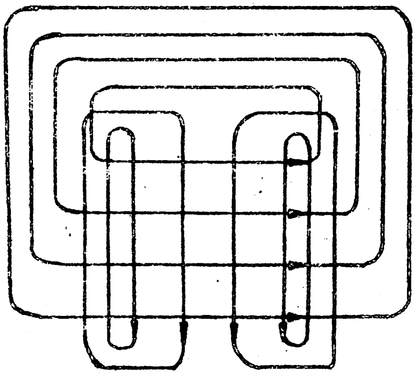
Конечные размеры ограничивают количество и вид фактически реализуемых функций. В однородной структуре размером $s \times s$ наиболее сложная функция от $s^2$ переменных реализуется в узле с координатами $(s, s)$, а в прочих узлах реализуются более простые функции от меньшего числа переменных.

При синтезе надежных избыточных схем, при построении адаптивных устройств и ряде других случаев может оказаться полезной структура, у которой на различных выходах реализуются инвариантные функции. В подобных устройствах было бы удобно производить "сдвиги", "повороты" участка структуры, на котором реализуется функция, путем перекоммутации входов. Подобное свойство не всегда выполняется на прямоугольном участке, ибо элементы, расположенные по периметру связаны с прочими элементами не так, как элементы, расположенные внутри структуры.

Поэтому однородной будет лишь структура, расположенная на замкнутой поверхности. С этой целью свернем решетку в тороид и соединим попарно крайние элементы (рис. 3а). На прак-



а)



б)

Рис. 3.

тике "свертыванию" соответствует соединение входов и выходов крайних элементов (рис. 3б). Теперь в каждом узле решетки может быть реализована одна и та же БФ (с точностью до обозначений) от числа переменных равного $(s - 1)^2$.

В тороидальной структуре уже нельзя реализовать функцию от $s^2$ аргументов, ибо теперь в каждой строке (столбце) можно реализовать функцию не более чем от $( s - 1 )$ аргумента. В противном случае возникнут замкнутые контуры и система станет конечным автоматом. Следовательно, в тороидальной структуре реализуется $s^2$ функций, инвариантных функции $f_{(s-1),(s-1)}$, из прямоугольной решетки.

Оценим эффект "сворачивания" структуры по средней сложности, определяемой числом аргументов реализуемых функций.

Для прямоугольной решетки сложность функции $f_{kl}$ не есть величина $L(kl) = k \cdot l$.

Следовательно, средняя сложность функций, реализуемых на решетке, равна:

Случай I.

$$L_{pI} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} i \cdot \sum\limits_{j=1}^{s} j}{s^2} = \frac{(s + 1)^2}{4} .$$

Сложность функции на тороиде равна:

$$L_T = (s - 1)^2.$$

Очевидно, свертывание в тороид целесообразно, если

$$L_T \geq L_{pI} ,$$

что справедливо при $s \geq 3$.

Случай П.

$$L_{pII} = L_{pI} + \frac{(s + 1)^2}{s^2} ,$$

$$L_T \geq L_{pII}, \quad \text{при} \quad s \geq 5 .$$

Итак, однородную структуру рассмотренного вида с непосредственным вводом и выводом в узлы, целесообразно размещать на тороиде, начиная с размера решетки 5 х 5 .