УДК 519.95

АБСТРАКТНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

А.Н. Мелихов, Л.С. Берштейн
(Таганрог)

1. Введение

Изучение свойств формальных операций над абстрактными автоматами, задаваемых на языке теории графов, имеет большое значение в теории автоматов. В работе [1] показано, что любой абстрактный автомат может быть построен из элементарных абстрактных автоматов, в качестве которых можно выбрать автоматы с любым простым числом состояний, используя две формальных операции – умножение автоматов и запреты переходов. С содержательной точки зрения этот результат означает, что произвольный автомат может быть представлен параллельной работой более простых автоматов с некоторым числом связей между ними, при помощи которых реализуются запреты переходов.

В данной работе предлагается простой алгоритм декомпозиции произвольного абстрактного автомата на элементарные абстрактные автоматы. Решается задача декомпозиции, при которой число связей между элементарными автоматами, представляющими работу произвольного автомата, минимально. Это приводит к более простым функциям возбуждения элементарных автоматов и, следовательно, к упрощению комбинационной части автомата.

Предлагаемая методика абстрактной декомпозиции автоматов позволяет решить задачу размещения состояний автомата на абстрактном уровне и свести этап структурного синтеза к непосредственной записи функций возбуждения по матрицам соединений абстрактных элементарных автоматов.

2. Правильные клеточные матрицы соединений автоматов

В этом разделе мы сформулируем и докажем теорему о необходимом и достаточном условии представления автомата параллельной независимой работой двух более простых автоматов. Другими словами, рассмотрим частный случай декомпозиции автоматов – параллельную декомпозицию с раздельными входами.

Пусть $G_1 = (V, v_1 \in V, F(x \in X))$ и $G_2 = (W, w_1 \in W, P(y \in Y))$ – произвольные автоматы Мура без выходов, где V и W – соответственно множества состояний, v_1 и w_1 – начальные состояния, X и Y – входные алфавиты, а F и P – отображения множеств состояний V и W в себя по буквам входных алфавитов X и Y.

Автомат $G = (Q, q_1 \in Q, U(z \in Z))$ является произведением автоматов G_1 и G_2, если

$$Q = V \times W, \qquad Z = X \times Y,$$

$$Uq = Fx \times Py,$$

причем $(v,w) = q \in Q$, $q_1 = (v_1, w_1)$ – начальное состояние автомата G, а $(x,y) = z \in Z$. Автомат G соответствует параллельной независимой работе G_1 и G_2.

Операцию умножения автоматов удобно задавать в матричной форме. Если матрица соединений автомата G_1:

$$R_1 = \| r_{\alpha\beta}(x) \|,$$

где

$$r_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} x, \text{ если } v_\beta \in Fv_\alpha & \text{по букве } x \in X \\ 0, \text{ если } v_\beta \notin Fv_\alpha, & \alpha, \beta \in A = \{1,2,\dots,k\}, \end{cases}$$

а матрица соединений автомата G_2

$$R_2 = \| r_{\gamma\delta}(y) \|,$$

где

$$r_{\gamma\delta}(y) = \begin{cases} y, \text{ если } w_\delta \in Pw_\gamma & \text{по букве } y \in Y \\ 0, \text{ если } w_\delta \notin Pw_\gamma, & \gamma, \delta \in B = \{1,2,\dots,l\}, \end{cases}$$

то матрица соединений R автомата G с числом состояний $n=kl$ будет иметь вид

$$R = R_1 \times R_2 = \left\| \begin{matrix} r_{11}(x)R_2 & r_{12}(x)R_2 & \dots & r_{1k}(x)R_2 \\ r_{21}(x)R_2 & r_{22}(x)R_2 & \dots & r_{2k}(x)R_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1}(x)R_2 & r_{k2}(x)R_2 & \dots & r_{kk}(x)R_2 \end{matrix} \right\| =$$

$$\left\| \begin{matrix} R_{11}(z) & R_{12}(z) & \dots & R_{1k}(z) \\ R_{21}(z) & R_{22}(z) & \dots & R_{2k}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{k1}(z) & R_{k2}(z) & \dots & R_{kk}(z) \end{matrix} \right\| = \| R_{\alpha\beta}(z) \|, \qquad (2.I)$$

где $R_{\alpha\beta}(z)$ – клетки порядка l $(\alpha,\beta \in A)$.

Из (2.I) следует, что R может содержать следующие типы клеток:

I) если $r_{\alpha\beta}(x) = 0$, то $R_{\alpha\beta}(z) = R_0$, где R_0 – нулевая матрица порядка l ;

2) если $r_{\alpha\beta}(x) \neq 0$, то существуют такие элементы $r_{\alpha\beta}(x_i) = x_i$ и $r_{\alpha\beta}(x_j) = x_j$, что матрицы

$$R_{\alpha\beta}(z_i) = \left\| \begin{matrix} x_i r_{11}(y) & x_i r_{12}(y) & \dots & x_i r_{1l}(y) \\ x_i r_{21}(y) & x_i r_{22}(y) & \dots & x_i r_{2l}(y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_i r_{l1}(y) & x_i r_{l2}(y) & \dots & x_i r_{ll}(y) \end{matrix} \right\|$$

и

$$R_{\alpha\beta}(z_j) = \left\| \begin{matrix} x_j r_{11}(y) & x_j r_{12}(y) & \dots & x_j r_{1l}(y) \\ x_j r_{21}(y) & x_j r_{22}(y) & \dots & x_j r_{2l}(y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_j r_{l1}(y) & x_j r_{l2}(y) & \dots & x_j r_{ll}(y) \end{matrix} \right\|$$

либо равны (в случае $x_i = x_j$), либо между буквами $z_i \in Z_i \subset Z$ и $z_j \in Z_j \subset Z$, $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ можно установить взаимно однозначное соответствие.

Матрицу соединений вида (2.I) назовем <u>правильной клеточной матрицей соединений</u> (п.к.м.с.).

Сформулируем теперь следующее предложение.

Теорема I. Автомат G с $n=k\cdot l$ состояниями представим произведением автоматов G_1 и G_2 соответственно с k и l состояниями (параллельной независимой работой двух автоматов), если и только если матрица соединений R автомата G имеет вид правильной клеточной матрицы соединений.

Необходимость следует из определения правильной клеточной матрицы соединений автомата.

Проведем доказательство достаточности. Пусть матрица соединений R автомата G является п.к.м.с. По матрице R_1строим матрицы соединений R_1 и R_2 автоматов G_1 и G_2 следующим образом. Матрица R_1 порядка k (алфавит состояний V с начальным состоянием v_1) имеет столько переходов, сколько содержится ненулевых клеток порядка l в матрице R. Переходам, соответствующим различным клеткам матрицы R, приписываем различные буквы $x \in X$, а одинаковым клеткам - одинаковые буквы $x \in X$ входного алфавита. Матрица R_2 порядка l (алфавит состояний W с начальным состоянием w_1) совпадает с любой ненулевой клеткой порядка l матрицы R, если заменить различные буквы $z \in Z$ различными буквами $y \in Y$, а одинаковые - одинаковыми буквами $y \in Y$. Легко видеть, что $G_1 \times G_2 = G$. Теорема доказана.

3. Правильные клеточные матрицы соединений с запретами

Известно, что число автоматов, обладающих п.к.м.с., т.е. таких, которые можно представить параллельной независимой работой двух более простых автоматов, невелико по сравнению со всем множеством автоматов.

Поэтому введем понятие п.к.м.с. с запрещенными переходами, которую можно построить для произвольного конечного автомата. Это позволяет любой автомат представить параллельной работой двух более простых автоматов с некоторым числом связей между ними, которые реализуют введенные запреты. Такая форма представления автомата является наиболее общим случаем декомпозиции.

Пусть R - матрица соединений произвольного автомата G, причем R не является п.к.м.с. Если число состояний $n = k\cdot l$, то разобьем матрицу R на k^2 клеток порядка l. Если n -простое число, то, добавляя изолированные состояния, получим $n=k\cdot l$.

Все ненулевые клетки порядка 1 объединим до универсальной клетки R_1 порядка 1, элементы которой являются дизъюнктивным объединением букв входного алфавита, стоящих на соответствующих местах каждой клетки. Каждую ненулевую клетку матрицы R дополним через дизъюнкцию по буквам входного алфавита до R_1. В этом случае получим матрицу соединений R' с запрещенными переходами. Под запрещенными переходами, отмеченными на матрице соединений квадратиками, имеем в виду те переходы, которые нарушают условия автоматности. Матрицу соединений вида R' будем называть п.к.м.с. с запретами.

Предположим, что $R' = \|r_{\mu\nu}(x)\|$, где $\mu,\nu \in M = \{1,2,\ldots,n\}$ – п.к.м.с. с запрещенными переходами для автомата G. На основании теоремы I представим матрицу соединений R' в виде произведения матриц R'_1 и R'_2 с отмеченными переходами. Получим

$$R' = \|r_{\mu\nu}(z)\| = \|r_{\alpha\beta}(x)\| \times \|r_{\gamma\delta}(y)\| = R'_1 \times R'_2,$$

где

$$r_{\mu\nu}(z) = (r_{\alpha\beta}(x), r_{\gamma\delta}(y)), \quad \mu = (\alpha,\gamma), \quad \nu = (\beta,\delta),$$

$$\alpha,\beta \in A = \{1,2,\ldots,k\}, \quad \gamma,\delta \in B = \{1,2,\ldots,l\}.$$

Для фиксирования отмеченных переходов в матрицах R'_1 и R'_2 введем k^2 различных меток.

Если переход $r_{\mu\nu}(z)$ в матрице R' помечен квадратиком, т.е. является запрещенным по букве $z \in Z$, то соответствующие переходы $r_{\alpha\beta}(x)$ по букве $x \in X$ в матрице R'_1 и $r_{\gamma\delta}(y)$ по букве $y \in Y$ в матрице R'_2 такие, что $(x,y) = z$ необходимо отметить одной и той же меткой. С содержательной точки зрения это означает, что в автоматах G_1 и G_2 не могут одновременно совершаться переходы, отмеченные одной и той же меткой, тогда как переходы, отмеченные различными метками допустимы.

Пример I. Пусть дан автомат G, заданный таблицей переходов (табл. I). Представим матрицу соединений R автомата G произведением двух матриц с отмеченными переходами.

По таблице I строим матрицу соединений R автомата G и переходим к п.к.м.с. с запрещенными переходами R', которая имеет вид

$$
\left\|\begin{array}{ccc:ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & z_1 \vee z_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & z_1 & z_2 & \boxed{z_1} \vee \boxed{z_2} \\
0 & 0 & 0 & \boxed{z_1} & z_1 \vee z_2 & 0 \\
\hdashline
0 & z_1 \vee \boxed{z_2} & 0 & 0 & \boxed{z_1} \vee z_2 & 0 \\
\boxed{z_1} & \boxed{z_2} & z_1 \vee \boxed{z_2} & \boxed{z_1} & \boxed{z_2} & \boxed{z_1} \vee z_2 \\
z_1 & \boxed{z_1} \vee \boxed{z_2} & 0 & \boxed{z_1} & \boxed{z_1} \vee z_2 & 0
\end{array}\right\| .
$$

Таблица I

Q \ Z	z_1	z_2
q_1	q_5	–
q_2	q_4	q_5
q_3	q_5	–
q_4	q_2	q_5
q_5	q_3	q_6
q_6	q_1	q_5

Представим матрицу R' произведением матриц R'_1 и R'_2 так, как это сделано в доказательстве достаточности теоремы I, и одинаковыми метками из набора ($\sim$, $\circ$, $\bullet$) отметим те переходы в матрицах R'_1 и R'_2, совместная работа которых образует запрещенные переходы в матрице R'. Заметим, что при разложении автомата G входной алфавит Z представляется как $Z = X \cdot Y$. Но так как $X=\{x\}$ то между алфавитами Z и Y можно установить взаимно однозначное соответствие. Это позволяет вместо букв алфавита Y использовать буквы алфавита Z . Получим

$$
R'_1 = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}
\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \left\|\begin{array}{c} 0 \\ \underset{\circ}{x} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} \underset{\sim}{x} \\ \underset{\bullet}{x} \end{array}\right\| \end{array} ,
\qquad
R'_2 = \begin{array}{ccc}
w_1 & w_2 & w_3 \\
\end{array}
\left\|\begin{array}{ccc}
0 & \underset{\bullet}{z_1} \vee \underset{\circ}{z_2} & 0 \\
\underset{\circ\bullet}{z_1} & \underset{\circ\bullet}{z_2} & \underset{\tilde{\bullet}}{z_1} \vee \underset{\tilde{\circ}}{z_2} \\
\underset{\tilde{\bullet}}{z_1} & \underset{\circ\bullet}{z_1} \vee \underset{\circ}{z_2} & 0
\end{array}\right\| .
$$

Перейдем теперь от матриц R'_1 и R'_2 с отмеченными переходами к матрицам R_1 и R_2, которые учитывают направление и число связей, существующих между автоматами G_1 и G_2 . Заметим,

что связь от автомата G_2 к G_1 идет в том случае, когда в матрице R'_1 нарушена автоматность. Аналогично, если имеет место нарушение автоматности в матрице R'_2, то связь идет от автомата G_1 к автомату G_2.

Пусть $r_{\alpha\beta}(x)$ - отмеченный переход в матрице R'_1. Выбираем в матрице R'_2 все те переходы $r_{\gamma\delta}(y)$ которые не помечены данной меткой. Так как переход $r_{\alpha\beta}(x)$ возможен одновременно только с переходами $r_{\gamma\delta}(y)$, то вместо перехода $r_{\alpha\beta}(x)$ вводим его конъюнкцию с переходами $r_{\gamma\delta}(y)$.

Аналогично поступаем с отмеченными переходами в матрице R'_2.

В результате получаем матрицы соединений R_1 и R_2, учитывающие связи между автоматами G_1 и G_2.

Пример 2. Введем связи в матрицы R'_1 и R'_2 примера I.

Для того, чтобы ввести связи в матрицу R'_1, вначале выпишем переходы матрицы R'_1, не отмеченные меткой $\sim$.

Имеем

$$w_1 z_1 \vee w_1 z_2 \vee w_2 z_1 \vee w_2 z_2 \vee w_3 z_1 \vee w_3 z_2 =$$
$$= (w_1 \vee w_2 \vee w_3) z_1 \vee (w_1 \vee w_2 \vee w_3) z_2 = z_1 \vee z_2,$$

т.к. $w_1 \vee w_2 \vee w_3 = 1$, т.е. образует тождественно истинный набор состояний.

Вместо перехода x в матрице R'_1 запишем $x(z_1 \vee z_2)$. Поскольку алфавит X состоит из одной буквы и, следовательно, любой переход по этой букве тождественно истинен, то в дальнейшем будем ее опускать.

Аналогично запишем переходы

$$\underset{\circ}{x} = w_1 z_1 \vee w_2 z_1 \vee w_3 z_1 = z_1,$$
$$\underset{\bullet}{x} = w_1 z_2 \vee w_2 z_2 \vee w_3 z_2 = z_2.$$

После введения связей в матрицу соединений R'_2 получим

$$R_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 0 & z_1 \vee z_2 \\ z_1 & z_2 \end{Vmatrix} \end{array}, \qquad R_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 0 & z_1 \vee z_2 & 0 \\ v_1 z_1 & v_1 z_2 & v_2 z_1 \vee v_2 z_2 \\ v_2 z_1 & v_1 z_1 \vee z_2 & 0 \end{Vmatrix} \end{array}.$$

Нами рассмотрена абстрактная декомпозиция произвольного автомата. Если исходный автомат G имеет п.к.м.с., в которой отсутствуют запрещенные переходы, то в результате декомпозиции получим автоматы G_1 и G_2, между которыми нет ни одной связи. Если матрица соединений R автомата G не является п.к.м.с., а при построении п.к.м.с. R' автомата G' не возникает запрещенных переходов, то автомат G' является эквивалентным продолжением автомата G и представим независимой работой автоматов G_1 и G_2. Если же при построении п.к.м.с. в R' возникнет хотя бы один запрещенный переход, то при декомпозиции это приведет к образованию связи между автоматами G_1 и G_2. Увеличение числа запрещенных переходов ведет к увеличению числа связей между автоматами G_1 и G_2. Возникновение новых связей, в свою очередь, приводит к появлению новых переменных в функциях возбуждения элементарных автоматов, т.е. к усложнению комбинационной части автомата. Отсюда следует, что нужно проводить декомпозицию автомата G на элементарные автоматы с минимальным числом связей между ними. Так как число связей зависит от числа запрещенных переходов в матрице соединений исходного автомата, то требуется таким образом изоморфно преобразовать матрицу соединений R автомата G, чтобы она содержала минимальное число запрещенных переходов.

Тривиальным алгоритмом нахождения п.к.м.с. с минимальным числом запретов является алгоритм полного перебора в классе эквивалентности по отношению изоморфизма алфавита состояний автомата. Он заключается в следующем.

После приведения матрицы R автомата G с n состояниями к виду п.к.м.с. подсчитываем число запрещенных переходов, которое обозначим через φ_1. Применим произвольную подстановку $t_1 \in T$ где T - симметрическая группа подстановок алфавита состояний, к матрице R и построим п.к.м.с. R'' с числом запретов φ_2. Сравним φ_1 и φ_2. Продолжая этот процесс, после $n!$ сравнений найдем п.к.м.с., число запретов в которой составляет φ_{min}. Правильную клеточную матрицу соединений с минимальным числом запрещенных переходов φ_{min} будем называть квазиправильной матрицей соединений.

Очевидно, что алгоритм полного перебора малоэффективен. Поэтому предложим эвристический прием, ведущий к существенному сокращению перебора при поиске квазиправильной матрицы соединений автомата.

Предварительно заметим, что каждая подстановка $t \in T$ определяется парой (π, ρ) разбиений множества состояний [2], где $\pi = \{\pi_\alpha\}, \alpha \in A = \{1,2,\ldots,k\}$, а $\rho = \{\rho_\gamma\}, \gamma \in B = \{1,2,\ldots,l\}$, причем $n = k \cdot l$.

Определим понятие состояний с тождественными переходами.

Два состояния автомата G q_i и q_j имеют тождественные переходы по букве входного алфавита x_i, если по этой букве они обладают следующие переходы:

а) q_i переходит в q_k и q_j переходит в q_k;

б) q_i переходит в q_k, а переход из q_j не определен или наоборот;

в) переход из q_i и q_j по букве x_i не определен;

г) q_i, q_j переходят в q_i, q_j или в такую пару состояний, для которых ранее были найдены тождественные переходы.

Понятие состояний с тождественными переходами дает возможность найти пару (π, ρ) разбиений, эквивалентную подстановке, переводящей матрицу соединений R автомата G с $n = k \cdot l$ состояниями в квазиправильную матрицу соединений следующим образом:

I) по таблице переходов определяем l классов ρ разбиения по k элементов в каждом классе. Для этого в один класс ρ_i включаем такие k состояний, которые имеют максимальное число тождественных переходов по всем буквам входного алфавита;

2) определяем k классов π разбиения по l элементов в каждом классе так, чтобы число тождественных переходов в каждом классе π разбиения было максимальным и $\pi_j \cap \rho_i = \{q\}$;

3) попарное пересечение классов ρ и π разбиений определяет подстановку t^{-1}, обратную подстановке, переводящей матрицу соединений R в квазиправильную матрицу соединений;

4) подстановку $t \in T$ применяем к матрице R.

Если при определении классов π, ρ разбиений в каждом классе окажутся тождественными все переходы, то матрица соединений подстановкой t будет переведена в правильную клеточную матрицу соединений.

Покажем работу эвристического приема на примере автомата, заданного таблицей I.

Пример 3. Матрица соединений R автомата G имеет вид

$$R = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 \\ \hline 0 & z_1 & 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 & 0 & 0 & z_2 \\ z_1 & 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 \end{array} \right\|$$

и, как показано в примере I, после приведения к виду п.к.м.с. с запретами содержит I5 запрещенных переходов.

По таблице I построим классы ρ и π - разбиений множества состояний автомата G. Имеем

$$\rho = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}, \qquad \pi = \{\pi_1, \pi_2\},$$

$$\rho_1 = \{q_1, q_3\}, \quad \rho_2 = \{q_5, q_6\}, \quad \rho_3 = \{q_2, q_4\},$$

$$\pi_1 = \{q_1, q_4, q_5\}, \quad \pi_2 = \{q_2, q_3, q_6\}.$$

Пересекая классы π и ρ разбиений, получим подстановку

$$t^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \\ q_1 & q_5 & q_4 & q_3 & q_6 & q_2 \end{pmatrix}.$$

Применяя прямую подстановку

$$t = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \\ q_1 & q_6 & q_4 & q_3 & q_2 & q_5 \end{pmatrix}$$

к матрице R, получим матрицу R'. В результате приведения ее к виду п.к.м.с. с запретами приходим к матрице

$$R' = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & z_1 & 0 & 0 & \boxed{z_2} & 0 \\ \boxed{z_1} & \boxed{z_2} & 0 & z_1 & z_2 & 0 \\ 0 & z_2 & \boxed{z_1} & 0 & \boxed{z_2} & z_1 \\ \hline 0 & z_1 & 0 & 0 & z_1 & 0 \\ z_1 & z_2 & 0 & z_1 & z_2 & 0 \\ 0 & z_2 & z_1 & 0 & z_2 & z_1 \end{array} \right\| ,$$

которая содержит 5 запрещенных переходов.

4. Алгоритм абстрактной декомпозиции автоматов

Предложенная методика декомпозиции произвольного абстрактного автомата на два более простых автомата с минимальным числом связей между ними легко обобщается на случай декомпозиции автомата на элементарные абстрактные автоматы.

Сформулируем теперь алгоритм декомпозиции произвольного абстрактного автомата на элементарные автоматы с минимальным общим числом связей между ними.

1^0. Подсчитываем число n состояний автомата G. Если $n = 2l$ то переходим к 2^0. Если $n \neq 2l$ то добавляем одно состояние с неопределенными переходами и переходим к 2^0.

2^0. Записываем матрицу соединений R автомата G и разбиваем ее на 4 клетки порядка 1. Если матрица R является п.к.м.с., то переходим к 7^0. Если R не является п.к.м.с., то переходим к 3^0.

3^0. Используя эвриотический прием, по таблице переходов автомата G строим пару (π, ρ) разбиений, определяющую обратную t^{-1} и прямую t подстановки множества состояний автомата G. Переходим к 4^0.

4^0. Применяем подстановку t к матрице R и преобразуем полученную матрицу в квазиправильную матрицу соединений R'. Если $\varphi_{min} = 0$ то переходим к 7^0. Если $\varphi_{min} \neq 0$, то переходим к 5^0.

5^0. Представляем квазиправильную матрицу соединений R' произведением матриц R'_1 и R'_2 так, как это сделано в доказательстве достаточности теоремы I. Те переходы в матрицах R'_1

и R'_2 , которые образуют запрещенные переходы в матрице соединений R' , отметим одинаковой меткой. Переходим к 6^0.

6^0. В матрицах R'_1 и R'_2 вместо отмеченных переходов введем зависимости от состояний и входных букв автоматов G_1 и G_2 . Получаем матрицы соединений R_1 и R_2 ,учитывающие связи между автоматами G_1 и G_2 . Автомат G_1 представляет собой элементарный абстрактный автомат. Переходим к 8^0.

7^0. Представляем п.к.м.с. произведением матриц соединений R'_1 и R_2 автоматов G_1 и G_2 . Автомат G_1 представляет собой элементарный абстрактный автомат. Переходим к 8^0.

8^0. Если число состояний автомата G_2 равно $1 = 2$, то переходим к 9^0. Если $1 > 2$, то переходим к I^0 и проводим декомпозицию автомата G_2 так, как это сделано с автоматом G .

9^0. Учитывая примененные подстановки, закодируем соответствующие переходы в элементарных абстрактных автоматах наборами состояний элементарных автоматов и запишем матрицы соединений элементарных абстрактных автоматов с учетом перекодировки. Конец работы алгоритма.

Проиллюстрируем работу алгоритма на примере.

Пример 4. Проведем декомпозицию автомата G , заданного таблицей I, на элементарные абстрактные автоматы с минимальным числом связей между ними.

Квазиправильная матрица соединений R' автомата G найдена в примере 3. Представим ее произведением матриц R'_1 и R'_2. Получим

$$R'_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} \underset{-}{x} & \underset{\sim}{x} \\ \underset{o}{x} & 0 \end{array} \right\| \end{array}, \qquad R'_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} 0 & z_1 & 0 \\ z_1 & z_2 & 0 \\ 0 & z_2 & z_1 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Введем связи в матрицу R'_1 . Для этого запишем

$$\underset{-}{x} = w_1 z_1 \vee w_3 z_2 ,$$

$$\underset{\sim}{x} = w_2 z_1 \vee w_2 z_2 \vee w_3 z_1 = w_2 \vee w_3 z_1 ,$$

$$\underset{o}{x} = w_1 z_1 \vee w_2 (z_1 \vee z_2) \vee w_3 (z_1 \vee z_2) = w_1 z_1 \vee w_2 \vee w_3 .$$

Т.к. в матрице R'_2 нарушений автоматности нет, то переходы в ней не зависят от входной буквы и состояний матрицы R'_1 .По-

ну матрицы R_1 и R_2 автоматов G_1 и G_2 имеют следующий вид

$$R_1 = \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \end{array}$$
$$R_1 = \left\| \begin{array}{cc} w_1 z_1 \vee w_3 z_2 & w_2 \vee w_3 z_1 \\ w_2 \vee w_3 \vee w_1 z_1 & 0 \end{array} \right\|, \qquad R_2 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & z_1 & 0 \\ z_1 & z_2 & 0 \\ 0 & z_2 & z_1 \end{array} \right\|.$$

(столбцы R_1: v_1, v_2; столбцы R_2: w_1, w_2, w_3)

Таблица 2

W \ Z	z_1	z_2
w_1	w_2	–
w_2	w_1	w_2
w_3	w_3	w_3
w_4	–	–

Проведем декомпозицию автомата G_2. Дополним таблицу переходов автомата G_2 (табл. 2) состоянием с неопределенными переходами. Используя эвристический прием, по таблице 2 находим пару $(\pi' \; \rho')$ разбиений

$$\pi' = \{\pi'_1, \pi'_2\}, \qquad \rho' = \{\rho'_1, \rho'_2\},$$

$$\pi'_1 = \{w_1, w_4\}, \qquad \rho'_1 = \{w_1, w_2\},$$

$$\pi'_2 = \{w_2, w_3\}, \qquad \rho'_2 = \{w_3, w_4\},$$

которая эквивалентна подстановке

$$t_1^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ w_1 & w_4 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Применяя подстановку

$$t_1 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ w_1 & w_3 & w_4 & w_2 \end{pmatrix}$$

к матрице соединений автомата G_2 и вводя запрещенные переходы, получим

$$R''_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & z_1 \vee z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & z_1 \\ z_1 \vee \boxed{z_2} & 0 & \boxed{z_1} \vee z_2 & 0 \\ \boxed{z_2} & \boxed{z_1} & z_2 & z_1 \end{array} \right\|.$$

Проводя разложение матрицы R''_2 и вводя связи в сомножители, приходим к матрицам соединений R_{21} и R_{22} элементарных автоматов G_{21} и G_{22}, которые имеют вид

$$R_{21} = \begin{array}{cc} m_1 & m_2 \\ \end{array} \begin{Vmatrix} 0 & z_1 \vee z_2 \\ n_1 z_1 & n_1 z_2 \vee n_2 \end{Vmatrix}, \qquad R_{22} = \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \\ \end{array} \begin{Vmatrix} z_1 \vee z_2 & 0 \\ z_2 & z_1 \end{Vmatrix}.$$

Учитывая подстановку t_1, перекодируем состояния автомата G_2 следующим образом $w_1 = (m_1, n_1)$, $w_2 = (m_2, n_1)$, $w_3 = (m_2, n_2)$, $w_4 = (m_1, n_2)$.

Тогда матрицу соединений R_1 элементарного автомата G_1 можно переписать в форме

$$R_1 = \begin{Vmatrix} m_1 n_1 z_1 \vee m_2 n_2 z_2 & m_2 n_1 \vee m_2 n_2 z_1 \\ m_2 n_1 \vee m_2 n_2 \vee m_1 n_1 z_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

5. Заключение

Нами рассмотрена методика абстрактной декомпозиции произвольных конечных автоматов на элементарные абстрактные автоматы с минимальным числом связей между элементарными автоматами, которая в результате структурного синтеза приводит к оптимальной комбинационной части автомата. Действительно, после декомпозиции произвольного автомата на абстрактные элементарные автоматы легко получить функции возбуждения конкретных элементарных автоматов, представляющих работу исходного автомата. Получение функций возбуждения элементарных автоматов, как известно, является заключительным этапом структурного синтеза. В результате декомпозиции структурный синтез выносится на абстрактный этап и сводится к записи функций возбуждения по матрицам соединений элементарных абстрактных автоматов.

Выберем в качестве элементарных автоматов триггеры с раздельными входами и построим для них функции возбуждения.

Для элементарного автомата, представляющего работу элементарного абстрактного автомата G_1 по матрице R_1 после минимизации получим

$$u_{11} = \overline{U}_1,$$

$$u_{10} = U_1 U_2 (U_3 \vee z_1),$$

где u_{11}, u_{10} – функции возбуждения триггера соответственно по единичному и нулевому входам, причем под U_1, U_2, U_3 будем понимать единичные состояния, а под $\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$, $\bar{U}_3$ – нулевые состояния триггеров. Здесь $v_1 \to U_1$, $v_2 \to \bar{U}_1$.

Далее

$$u_{21} = U_3 z_1, \qquad u_{31} = z_2,$$
$$u_{20} = U_2, \qquad u_{30} = \bar{U}_3 z_1,$$

причем $m_1 \to U_2$, $m_2 \to \bar{U}_2$, $n_1 \to U_3$, $n_2 \to \bar{U}_3$.

Если провести абстрактную декомпозицию автомата G на элементарные абстрактные автоматы без поиска квазиправильных матриц соединений так, как это сделано в примере 2.I на первом этапе, то после минимизации получаем следующие функции возбуждения элементарных автоматов

$$u_{11} = \bar{U}_1 z_1, \qquad u_{21} = \bar{U}_2, \qquad u_{31} = \bar{U}_3(z_1 \vee \bar{U}_1),$$
$$u_{10} = U_1, \qquad u_{20} = \bar{U}_1 U_2 \bar{U}_3, \qquad u_{30} = U_3(z_2 \vee U_1 \vee U_2).$$

Нетрудно видеть, что при построении структурной схемы автомата G для реализации комбинационной части в первом случае требуется 9 диодов, в то время как во втором случае – I4 диодов.

Литература

1. А.Н.Мелихов, Л.С.Берштейн, В.П.Карелин. О декомпозиции абстрактных автоматов. – Кибернетика, I968, № 5.
2. А.Н.Мелихов, Ю.А.Дворянцев. Разложение графов и конечных автоматов относительно операции умножения.– Кибернетика,I965, № 3.