УДК 681.142.352.3
519.27

СПОСОБ И УСТРОЙСТВО ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Г.И. Кавалеров, Э.П. Тихонов
(Ленинград)

В последнее время значительный интерес проявляется к методу стохастической аппроксимации [I,2] . С помощью данного метода решается большое число задач оптимизации и нахождения нулей функции регрессии при малой начальной информации. Я.З.Цыпкин в своей работе [I]привел ряд примеров решения практических задач с использованием методов стохастической аппроксимации. Здесь рассматривается применение одного из методов стохастической аппроксимации для определения автокорреляционной функции (АКФ) квазистационарного (в широком смысле) случайного процесса.

Пусть имеется случайный квазистационарный процесс $\xi(t)$. Образуем разность

$$\varepsilon(\tau) = |\xi(t) - \xi(t + \tau)| , \qquad (I)$$

где τ - временной сдвиг.

Тогда $\varepsilon(\tau)$ есть случайная величина,функция распределения которой $F(\varepsilon/\tau)$ зависит от параметра τ .Если предположить существование функции регрессии $R_\varepsilon(\tau)$ случайной величины ε относительно τ , то мы сразу же попадем в условия, определенные методом стохастической аппроксимации: то есть при заданном вещественном ε_0 уравнение $R_\varepsilon(\tau) = \varepsilon_0$ имеет единственное решение τ_0 , которое отыскивается с помощью рекуррентного соотношения

$$\tau_{n+1} = \tau_n + a_n [\varepsilon_0 - \varepsilon(\tau_n)] , \qquad (2)$$

где a_n – последовательность положительных вещественных чисел такова, что существуют такие c' и $c''> 0$, при которых справедливо неравенство

$$\frac{c'}{n} \le a_n \le \frac{c''}{n}.$$

Последовательность a_n выбирается такой, чтобы τ_n сходилось к τ_0 с вероятностью I. Нас интересует случай, когда коэффициент равен малой постоянной величине Δ. При этом, как было показано в работе [4], в результате n – кратной подстройки при определенных достаточно широких условиях τ_n будет флюктуировать около τ_0, а вероятность неравенства $\varepsilon(\tau_n) > \varepsilon_0$ при $\Delta \to 0$ равна вероятности противоположного события. Это равенство вероятностей и используется для определения нормированной АКФ случайного процесса. Перепишем упомянутое равенство в следующем виде:

$$\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} w[\varepsilon(\tau)]d\varepsilon \cong \int_{\varepsilon_1}^{\infty} w[\varepsilon(\tau)]d\varepsilon + \int_{-\infty}^{-\varepsilon_1} w[\varepsilon(\tau)]\, d\varepsilon, \qquad (3)$$

где $w[\varepsilon(\tau)]$ – плотность распределения разности (I) ε_i

$i = 1, 2, \ldots, k$ – заданные величины.

Пусть $\xi(t)$ представляет собой гауссовский процесс, тогда плотность вероятности $w[\varepsilon(\tau)]$ имеет вид:

$$w[\varepsilon(\tau)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{2[1 - r(\tau)]}} \exp\left(e^{-\frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2[1 - r(\tau)]}}\right), \qquad (4)$$

где $r(\tau)$ – нормированная АКФ $\xi(t)$,

σ – дисперсия $\xi(t)$.

Подставляя значение $w[\varepsilon(\tau)]$ в уравнение (3), после преобразования получим уравнение

$$\Phi\left[\frac{\varepsilon_1}{\sigma\sqrt{2[1 - r(\tau)]}}\right] = \frac{1}{4}, \qquad (5)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа. Отсюда легко получить формулу для определения нормированной АКФ:

$$r(\tau_i) = 1 - \frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma^2 A^2}, \tag{6}$$

где

$$A = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{4}\right), \qquad i = 0, 1, \dots, k.$$

Дисперсия σ определяется из выражения:

$$\sigma = \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{2}A}, \tag{7}$$

когда $r(\tau) = 0$. Здесь ε_k – заданная разность, при которой интервал квантования непрерывно увеличивается при возрастании числа шагов n независимо от ε_k.

Подставляя значение дисперсии (6) в формулу (5), находим выражение для определения нормированной АКФ через разности $(i = 0, 1, \dots, k)$.

$$r(\tau_i) = 1 - \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k}\right)^2. \tag{8}$$

Покажем, что формулой (7) можно пользоваться и для процессов, отличных от гауссовских. Накладываются только следующие ограничения на плотность распределения:

1) Она является одномодальной;

2) По обе стороны от модального значения она имеет ветви, достаточно быстро приближающиеся к нулю при возрастании абсолютного значения аргумента.

В этом случае плотность $w_1[\varepsilon(\tau)]$ можно разложить в ряд по ортогональным полиномам Чебышева-Эрмита [3], которая для рассматриваемого случая имеет вид:

$$w_1[\varepsilon(\tau)] = w[\varepsilon(\tau)]\left[1 + \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n!} \frac{b_n}{\sigma_1^n} H_n\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_1}\right)\right], \tag{9}$$

где $w[\varepsilon(\tau)]$ - нормальная плотность вероятностей;

$$\sigma_1^2 = 2\,\sigma^2\,[\,1 - r(\tau)\,]\,;$$

$H_n(x)$ -полиномы Чебышева-Эрмита;

b_n - квазикомпоненты, определяемые по формуле:

$$b_n = \sigma_1^n \int_{-\infty}^{\infty} w_1\,[\varepsilon(\tau)]\,H_n\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_1}\right)d\varepsilon. \tag{10}$$

Подставляя значение $w_1[\varepsilon(\tau)]$ в уравнение (3), получим

$$\Phi\left[\frac{\varepsilon_1}{\sigma\sqrt{2[\,1 - r(\tau_1)\,]}}\right] = \frac{1}{4} - M\quad, \tag{11}$$

где

$$M = \frac{1}{4}\left\{-\int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} w\,[\varepsilon(\tau)]\sum_{n=3}^{N}\left[\frac{1}{n!}\;\frac{b_n}{\sigma_1^n}\;H_n\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_1}\right)\right]d\varepsilon\;+\right.$$
$$\left.+\int_{-\infty}^{-\varepsilon_0} w\,[\varepsilon(\tau)]\sum_{n=3}^{N}[\cdot]\,d\varepsilon + \int_{\varepsilon_0}^{\infty} w\,[\varepsilon(\tau)]\sum_{n=3}^{N}[\cdot]\,d\varepsilon\right\}. \tag{12}$$

От выражения (11) легко перейти к формуле (7).

Процедура определения нормированной АКФ сводится к следующему. Устанавливается заданная величина разности (1) ε_1 . В соответствии с формулой (2) отыскивается значение аргумента τ_1 , при котором выполняется равенство:

$$P\left(\varepsilon(\tau_1) > \varepsilon_1\right) = P\left(\varepsilon(\tau_1) < \varepsilon_1\right).$$

Далее устанавливается новое значение ε_{i+1} и т.д.до тех пор , пока не находится минимальное значение ε_k , при котором интервал τ увеличивается независимо от ε_k, то есть итерационный процесс (2) расходится.Зная величины ε_i , τ_i ($i = 0,1,..,k$) и ε_k , по формуле (8) находится нормированная АКФ. Погрешность определения АКФ по данному методу зависит:

1) от неточности определений ε_k,

2) от неточности определения τ_1 (за счет того, что берется конечная величина Δ),

3) от неточности равенства (3) (точное равенство (3) имеет вид: $P[\varepsilon(\tau_1) > \varepsilon_1] = P[\varepsilon(\tau + \Delta\tau) < \varepsilon_1]$

Характер погрешностей определения АКФ по данному методу отличается от погрешностей определения АКФ по известному методу (5). Сюда не входят в явном виде погрешности, обусловленные квантованием реализаций случайных функций по амплитуде и конечной областью наблюдений. Однако косвенным образом погрешность, вызванная конечной областью наблюдений, например, входит в определение величин τ_1 и ε_k.

Погрешности (1) и (2) имеют вероятностный характер, и их математические ожидания совпадают с истинными значениями τ_1 и ε_k. Поэтому они могут быть уменьшены путем многократного считывания с последующим усреднением. Пусть абсолютная погрешность определения величины ε_k равна $\Delta\varepsilon$ (с вероятностью P). Тогда, подставляя данное значение ε_k в формулу (7), после преобразования получим следующее выражение для определения относительной погрешности определения АКФ

$$\eta = \frac{\Delta\varepsilon\ \varepsilon_1^2 [\pm 2\varepsilon_k - \Delta\varepsilon]}{(\varepsilon_k - \varepsilon_1)^2 (\varepsilon_k \pm \Delta\varepsilon)^2} \cdot 100\% .$$

Погрешность определения аргумента τ (2) вызвана тем, что значению АКФ в точке $\tau + \Delta\tau$ приписывается значение АКФ в точке τ (с вероятностью P). Поэтому относительная погрешность определения АКФ из-за неточности определения имеет вид:

$$j = \frac{r'(\tau)\,\Delta\tau}{r(\tau)} \cdot 100\% . \qquad (15)$$

Для определения АКФ с учетом равенства (12) имеем:

$$r(\tau_1) = 1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_k}\right)^2 \frac{A^2}{B^2} , \qquad (16)$$

где

$$B = \Phi^{-1}\left\{\frac{1}{4} + \Phi'\left[\frac{\varepsilon_0}{\sigma\sqrt{2[1 - r(\tau)]}}\right]\frac{\varepsilon_0\, r(\tau)\,\Delta\tau}{\sigma\, 2\sqrt{2}\,[1 - r(\tau)]^{3/2}}\right\},$$

$$A = \Phi^{-1}\left[\frac{1}{4}\right].$$

Относительная погрешность δ определения АКФ в этом случае имеет вид:

$$\delta = \frac{(B^2 - A^2)\,\varepsilon_1^2}{\varepsilon_k A^2 - \varepsilon_1^2 B^2}\cdot 100\% \qquad (17)$$

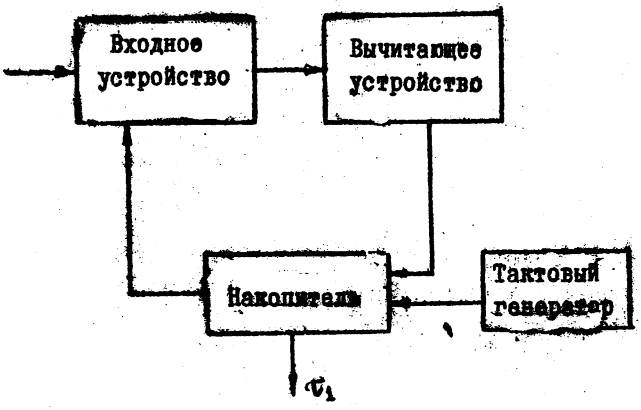
при малых значениях $\Delta\tau$ и ε_0, $B \approx A$ и $\delta = 0$.

Структурная схема устройства, реализующего данный алгоритм, состоит из четырех блоков. Входное устройство преобразует входной сигнал в форму, удобную для его дальнейшей обработки (в двоичный код, либо во временной интервал). Вычитающее устройство определяет разность между текущим значением сигнала в момент времени $t + \tau$ и предыдущим значением сигнала, измеренным в момент времени t, и сравнивает её с заданной величиной ε_1. В зависимости от знака сравнения на накопитель подается положительный или отрицательный сигнал, соответствующий величине $\Delta\tau$. Назначение накопителя состоит в том, что на нем накапливается число, пропорциональное времени задержки (аргументу АКФ) τ. Тактовый генератор синхронизирует работу всего устройства.

В качестве входного устройства можно использовать преобразователь аналог-код либо компенсационного типа, либо время-импульсный. В зависимости от вида преобразователя применяется соответствующее вычитающее устройство. В качестве накопителя может быть выбран реверсивный счетчик либо любой другой элемент, который может быть использован для сложения и вычитания импульсов. Функции такого элемента может выполнять, например, мемистор. Малые габариты, простота управления, высокая надежность делает их особенно перспективными для подобных схем.

Предложенный способ определения нормированной АКФ имеет следующие преимущества:

1) Исключается операция умножения для определения ординат



Блок-схема устройства для определения автокорреляционной функции

АКФ;

2) Может быть значительно повышена точность определения АКФ без увеличения объема используемой аппаратуры;

3) С помощью данного устройства можно квантовать по времени входной сигнал [4] .

К недостаткам следует отнести то, что с прибора нельзя непосредственно снимать значения ординат АКФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я.З. Цыпкин. Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах. - Автоматика и телемеханика, № I, 1966.
2. И.В. Логинов. Методы стохастической аппроксимации. - Автоматика и телемеханика, № 4, 1966.
3. В.И. Тихонов. Статистическая радиотехника, Изд-во "Сов. радио", 1966.
4. З.П. Тихонов. Некоторые вопросы сжатия информации с использованием самообучающегося автомата. Тезисы докладов конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений. Новосибирск, 1966.
5. А.Н. Домарацкий, Л.Н.Иванов, Е.Н.Карышев, Б.С.Синицын. Дискретная измерительная корреляционная система (ДИКС). Изд-во "Наука", г. Новосибирск, Сиб. отд., 1965.