УДК 517.947

HOMOGENEISATION ET PERTURBATIONS SINGULIERES

par A.Bensoussan et J.L.Lions (Paris)

En Hommage au Professeur S.L.SOBOLEV

INTORDUCTION

Par "homogénéisation", on désigne la technique - souvent utilisée en Mécanique et en Physique - consistant à remplacer un opérateur elliptique à coefficients très rapidement oscillants par un opérateur "plus simple" dit <u>homogénéisé</u> (cela intervient, par exemple, dans les <u>milieux composites</u> de la Mécanique).

On considère ici des opérateurs d'évolution de la forme :

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + A^{\varepsilon} \tag{1}$$

où A^{ε} est un opérateur elliptique du 2ème ordre (pour fixer les idées) en les variables d'espace, à coefficients très oscillants - la "période" d'oscillation étant de l'ordre de ε et où $\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}$ fait apparaître un phénomène de <u>perturbation singulière</u>.

On va montrer ici que l'opérateur (1) se comporte "à peu près" comme l'opérateur $\mathcal{a}$ homogénéisé de A^{ε} .

Une étude systématique de questions de ce genre sera donnée dans le livre BENSOUSSAN-LIONS-PAPANICOLAOU [4] .

Le plan est le suivant :

1. POSITION DU PROBLEME. ENONCE DU RESULTAT PRINCIPAL

1.1. Notations.

On se donne dans $\mathbb{R}^n$ un pavé $Y = \prod_j]o,y_j^o[$ et des fonctions a_{ij} de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telles que :

(1.1)
$$\left| \begin{array}{l} a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^n) , \\ a_{ij} \text{ est } Y\text{ - périodique (i.e. de période } y_j^o \text{ en } y_j) , \\ \Sigma\, a_{ij}(y)\, \xi_i \xi_j = a_{ij}(y)\xi_i\xi_j{}^{1)} \geqslant \alpha\, \xi_i\xi_i \ ; \ \alpha > 0 , \\ \text{p.p. dans } \mathbb{R}^n \ ; \end{array} \right.$$

1) On adopte la convention que l'on somme par rapport à un indice apparaissant deux fois.

(1.2) $\qquad a_o \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, Y-périodique, $a_o(y) \geqslant \alpha_o \geqslant 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^n$.

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on considère l'opérateur A^ε donné par :

(1.3)
$$A^\varepsilon\varphi = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) + a_o\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi$$

et la forme bilinéaire associée sur un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$

(1.4)
$$a^\varepsilon(u,v) = \int_\Omega a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega a_o uv\,dx$$
$$\forall\, u,v \in H^1(\Omega)\ ^{1)}\ .$$

1.2. Le problème asymptotique.

On considère :

- . $H_o^1(\Omega)$ = sous espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur le bord Γ de Ω ;
- . un espace de Hilbert V avec :

(1.5)
$$H_o^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)\ ;$$

pour fixer les idées,

(1.6)
$$V = \{v \mid v \in H^1(\Omega)\ ,\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \subset \Gamma\}\ ;$$

si $\Gamma_1 = \emptyset$ (resp. $\Gamma_1 = \Gamma$) on a donc $V = H^1(\Omega)$ (resp. $V = H_o^1(\Omega)$).
On désigne par u_ε **la** solution de l'équation d'évolution suivante :

(1.7)
$$\left|\begin{array}{l} u_\varepsilon \in L^2(0,T\ ;\ V)\ ^{2)}\ , \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0,T\ ;\ V')\ ^{3)}\ , \end{array}\right.$$

---

1) Espace de Sobolev [11] construit sur $L^2(\Omega)$ d'ordre 1.

2) Espace des (classes des) fonctions de carré sommable sur $[0,T]$ à valeurs dans V.

3) L'espace V' est le dual de V lorsque $L^2(\Omega)$ est identifié à son dual.

(1.8) $$\varepsilon(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t},v) + a^\varepsilon(u_\varepsilon,v) = (f,v) \quad \forall\, v \in V$$ [1]

(1.9) $$u_\varepsilon(o) = 0 ,$$

où

(1.10) $$f \in L^2(0,T\ ;\ V') .$$

Pour l'existence et l'unicité de u_ε solution de (1.7)(1.8)(1.9) sous l'hypothèse (1.1) (l'hypothèse (1.2) est <u>pour l'instant</u> inutile, i.e. pour chaque $\varepsilon > 0$ <u>fixé</u>), cf. par exemple LIONS [8]. ∎

<u>Remarque 1.1.</u>

L'équation (1.8) <u>s'interprète comme suit</u> (si $f \in L^2(0,T\ ;\ L^2(\Omega))$) :

(1.11) $$\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + A^\varepsilon u_\varepsilon = f \quad \text{dans} \quad Q = \Omega \times]0,T[,$$

(1.12) $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_{A^\varepsilon}} = 0 \quad \text{sur} \ (\Gamma/\Gamma_1) \times]0,T[, \\[2ex] u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \ \Gamma_1 \times]0,T[. \end{array}\right.$$ [2] ∎

<u>Le problème que l'on étudie est celui du comportement de</u> u_ε <u>lorsque</u> $\varepsilon \to 0$.

C'est un <u>problème asymptotique</u> qui comporte <u>deux aspects</u> :

(i) le comportement de A^ε lorsque $\varepsilon \to 0$; c'est la question de l'<u>homogénéisatio</u>

(ii) la <u>perturbation singulière</u> correspondant au terme $\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}$. ∎

<u>Remarque 1.2.</u>

Si $f \in L^2(0,T;\ V')$ est donné par :

(1.13) $$(f\,;v) = \int_\Omega f_o v \, dx + \int_{\Gamma/\Gamma_1} g\, v\, d\Gamma ,$$

---

1) $(\ ,\ )$ = produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

2) $\frac{\partial}{\partial \nu_{A^\varepsilon}}$ = dérivée conormale de u_ε par rapport à A^ε.

où

(1.14) $$f_o \in L^2(Q) \ , \ \ g \in L^2(0,T \ ; \ L^2(\Gamma/\Gamma_1))$$

alors (1.11)(1.12) deviennent

(1.15) $$\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_A \varepsilon} + A^\varepsilon u_\varepsilon = f_o \quad \text{dans} \quad Q,$$

(1.16) $$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_{A^\varepsilon}} = g \ \text{ sur } \ (\Gamma/\Gamma_1) \times \ ]0,T[. \\ u_\varepsilon \ = \ 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1 \times \ ]0,T[. \end{array} \right.$$ ■

1.3. Opérateur homogénéisé.

On introduit

(1.17) $W(Y)$ = espace des fonctions $\psi \in H^1(Y)$, "périodiques", i.e. prenant des valeurs égales sur les faces opposées de Y,

(1.18) $$\left| \begin{array}{l} a_y^*(\varphi,\psi) = \displaystyle\int_Y a_{ij}^*(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \, dy \ , \\ a_{ij}^*(y) = a_{ji}(y) \ , \end{array} \right.$$

et on définit χ^j dans $W^\cdot(Y) = W(Y)/\mathbb{R}$ par

(1.19) $$a_Y^*(\chi^j - y_j,\psi) = 0 \quad \forall \ \psi \in W(Y)$$

(où y_j désigne la fonction $y \to y_j$).

Si $|Y|$ = volume de Y, on pose alors

(1.20) $$\left| \begin{array}{l} q_{ij} = \dfrac{1}{|Y|} \, a_Y^*(\chi^i - y_i, \ \chi^j - y_j) \ , \\ \mathcal{A}\varphi \ = - \ q_{ij} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \ + \ \mathcal{M}(a_o)\varphi \ , \end{array} \right.$$

où

(1.21) $$\mathcal{M}(a_o) = \frac{1}{|Y|} \int_Y a_o(y) \, dy.$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est dit homogénéisé de A^ε.

On démontre (SPAGNOLO [12], de GIORGI-SPAGNOLO [7]) que si u_ε (resp. u) désigne le solution de

$$(1.22) \qquad a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = (f, v) \quad \forall\, v \in V, \ f \in V', \ u_\varepsilon \in V,$$

(resp. de

$$(1.23) \qquad \mathcal{a}(u, v) = (f, v) \quad \forall\, v \in V, \ u \in V,$$

où

$$(1.24) \qquad \mathcal{a}(u, v) = \int_\Omega q_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega \overline{a_o}\, u\, v\, dx)$$

alors $u_\varepsilon \to u$ __dans__ V __faible lorsque__ $\varepsilon \to 0$.

Pour l'origine physique de ce problème et de nombreuses remarques, cf. E. SANCHEZ-PALENCIA [10] ; cf. également BAKBALOV [6], BABUSKA [5], BENSOUSSAN-LIONS-PAPANICOLAOU [1] et la bibliographie de ces travaux.

1.4. Premier résultat asymptotique.

On désigne par u la solution de

$$(1.25) \qquad u \in L^2(0, T ; V),$$

$$(1.26) \qquad \mathcal{a}(u, v) = (f, v) \quad \forall\, v \in V.$$

__Remarque 1.3.__

Le temps t joue un __rôle de paramètre__ dans (1.26) ; pour presque tout t, $u(t) \in V$ est donnée par

$$(1.27) \qquad \mathcal{a}(u(t), v) = (f(t), v) \quad \forall\, v \in V. \qquad \blacksquare$$

On va démontrer au N° 2 ci-après le :

__Théorème 1.1__ __On suppose que__ (1.1)(1.2) __ont lieu, avec__ $\alpha_o > 0$ __dans le cas où__ $V = H^1(\Omega)$. __On désigne par__ u_ε __(resp.__ u) __la solution de__ (1.7)(1.8)(1.9) (__resp. de__ (1.25)(1.26)) __où__ $\mathcal{a}$ __est l'opérateur homogénéisé de__ A^ε. __Alors, lorsque__ $\varepsilon \to 0$

$$(1.28) \qquad u_\varepsilon \to u \ \underline{\text{dans}}\ L^2(0, T; V)\ \underline{\text{faible}}.$$

Remarque 1.4.

La fonction $u(t)$ n'est définie que p.p. en t, donc $u(o)$ n'est pas définie. Si l'on suppose, par exemple, que f est continue de $[0,T] \to L^2(\Omega)$, alors $u(o)$ est la solution de

(1.29) $$\mathcal{a}(u(o),v) = (f(o),v) \quad \forall\, v \in V\,, \quad u(o) \in V\,,$$

et - sauf si $f(o) = 0$ - $u(o)$ n'est pas nul, donc $u(o) \neq u_\varepsilon(o)$. Il n'y a donc pas convergence de $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$ vers $\frac{\partial u}{\partial t}$ par exemple dans $L^2(0,T;V')$. C'est le phénomène bien connu des perturbations singulières qui se présente déjà dans le cas - beaucoup plus simple des opérateurs.

(1.30) $$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + A\,, \quad A \text{ indépendant de } \varepsilon.$$

Cf., par exemple LIONS [9]. ∎

2. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.1

2.1. Estimations a priori.

Sous les hypothèses faites dans le Théorème 1.1, on a :

(2.1) $$a^\varepsilon(v,v) \geqslant \alpha_1 \|v\|^2\,, \quad \alpha_1 > 0\,, \quad \|\ \| = \text{norme dans } V.$$

On pose

(2.2) $$|\ | = \text{norme dans } L^2(\Omega).$$

Prenant $v = u_\varepsilon$ dans (1.8) et tenant compte de (1.9), on a

(2.3) $$\frac{\varepsilon}{2}|u_\varepsilon(t)|^2 + \int_0^t a^\varepsilon(u_\varepsilon,u_\varepsilon)ds = \int_0^t (f,u_\varepsilon)ds$$

d'où l'on déduit, avec (2.1), que

(2.4) $$\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant C\,,$$

(2.5) $$\sqrt{\varepsilon}\ |u_\varepsilon(t)| \leqslant C \text{ p.p. en } t,$$

où C = constantes indépendantes de ε.

On pose

$$(2.6) \qquad \xi_i^\varepsilon = a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \quad ; \quad a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}(x/\varepsilon) \ ,$$

et, d'après (2.4),

$$(2.7) \qquad \|\xi_i^\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq C.$$

On peut donc extraire une sous suite, encore notée u_ε, telle que

$$(2.8) \qquad u_\varepsilon \to \hat{u} \text{ dans } L^2(0,T\ ;\ V) \text{ faible,}$$

$$(2.9) \qquad \xi_i^\varepsilon \to \xi_i \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible.}$$

Il résulte de (1.11) (ou de (1.15), pourvu de remplacer f par f_o), que

$$(2.10) \qquad \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \xi_i^\varepsilon + a_o\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon = f \quad (\text{ou } f_o)$$

d'où à la limite

$$(2.11) \qquad -\frac{\partial}{\partial x_i} \xi_i + \mathcal{M}(a_o)\, \hat{u} = f \quad (\text{ou } f_o) \text{ dans } Q.$$

2.2. <u>Fonction adjointe</u>.

On utilise maintenant une technique introduite par L. TARTAR [13] dans le cas des problèmes d'homogénéisation stationnaires. Soit

$$(2.12) \qquad P = P(y) = \text{polynome homogène du 1er degré en } y\ ;$$

$$(2.13) \qquad \left|\begin{array}{l} w \text{ la solution de} \\ A_Y^* w = 0 \text{ dans } Y, \\ w - P \in W(Y). \end{array}\right.$$

Si $P(y) = y_j$, alors

$$(2.14) \qquad w = -(\chi^j - y_j).$$

On posera

(2.15) $$w - P = \chi$$

et on définit w_ε par

(2.16) $$w_\varepsilon(x) = \varepsilon\, w(\frac{x}{\varepsilon}) \quad ;$$

On vérifie - on a fait ce qu'il fallait pour cela - que

(2.17) $$\left|\begin{array}{l} (A_P^\varepsilon)^* w_\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega \,, \\ A_P^\varepsilon = - \dfrac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}^\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial x_j}) \,. \end{array}\right.$$

2.3. Passage à la limite.

Soit φ quelconque fonction C^∞ dans Ω et à support compact dans Ω. On considère s et t fixés quelconques dans $[0,T]$ et l'on pose

(2.18) $$m_\varepsilon = m_\varepsilon(x) = \int_s^t u_\varepsilon(\sigma)d\sigma.$$

On déduit de (1.11) (ou de (1.15)) que

(2.19) $$\varepsilon(u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(s)) + A^\varepsilon m_\varepsilon = \int_s^t f(\sigma)d\sigma = F.$$

On prend le produit scalaire de (2.19) (resp.(2.17)) avec φw_ε (resp. φm_ε) et l'on retranche ; il vient :

(2.20) $$X_\varepsilon + a^\varepsilon(m_\varepsilon, \varphi w_\varepsilon) - a_P^\varepsilon(\varphi m_\varepsilon, w_\varepsilon) = (F, \varphi w_\varepsilon) \,,$$ [1)]

où

(2.21) $$X_\varepsilon = \varepsilon(u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(s), \varphi w_\varepsilon).$$

On note que

---

1) $a_p^\varepsilon(u,v) = \int_\Omega a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx$ sans le terme d'ordre 0.

$$(2.22) \qquad w_\varepsilon \to P \text{ dans } L^2(\Omega) \ \underline{\text{fort}}$$

et que, d'après (2.5)

$$(2.23) \qquad |X_\varepsilon| \leqslant C\sqrt{\varepsilon} \ .$$

Un calcul simple montre que. si l'on pose

$$(2.24) \qquad \eta_i^\varepsilon = a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial m_\varepsilon}{\partial x_j} = \int_s^t \xi_i^\varepsilon(x,\sigma)d\sigma$$

alors

$$(2.25) \qquad \left| \begin{aligned} & a^\varepsilon(m_\varepsilon,\varphi w_\varepsilon) - a^\varepsilon(\varphi m_\varepsilon, w_\varepsilon) = \int_\Omega \eta_i^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} w_\varepsilon \, dx - \\ & - \int_\Omega a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} m_\varepsilon \, dx + \int_\Omega a_o^\varepsilon \, m_\varepsilon \, \varphi \, w_\varepsilon \, dx. \end{aligned} \right.$$

Mais d'après (2.9), on a :

$$(2.26) \qquad \left| \begin{aligned} & \eta_i^\varepsilon \to \eta_i \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible,} \\ & \eta_i \to \int_s^t \xi_i(x,\sigma)\, d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Donc, d'après (2.22), on a :

$$(2.27) \qquad \int_\Omega \eta_i^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} w_\varepsilon dx \to \int_\Omega \eta_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} P \, dx.$$

Par ailleurs

$$a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} = \left(a_{ij}(y) \frac{\partial w}{\partial y_i}(\varphi) \right)_{y=\frac{x}{\varepsilon}}$$

donc

$$a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \to \mathcal{M}(a_{ij} \frac{\partial w}{\partial y_i}) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

(où, comme dans (1.21), on a posé

$$\mathcal{M}(g) = \frac{1}{|Y|} \int_Y g(y)dy).$$

Mais d'après (2.8)

$$(2.28) \qquad m_\varepsilon = \int_s^t u_\varepsilon(\sigma)d\sigma \rightarrow \hat{m} = \int_s^t \hat{u}(\sigma)d\sigma \quad \text{dans} \quad V \text{ faible}$$

et comme l'injection de $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ est compacte, on a :

$$m_\varepsilon \rightarrow \hat{m} \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \underline{\text{fort}} \quad \text{et donc}$$

$$(2.29) \qquad \int_\Omega a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} m_\varepsilon \, dx \rightarrow \mathcal{M}(a_{ij} \frac{\partial w}{\partial y_i}) \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \hat{m} \, dx .$$

De ce résultat et de (2.27)(2.23)(2.22), on déduit, par passage à la limite dans (2.20) que :

$$(2.30) \qquad \int_\Omega \eta_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} P \, dx - \mathcal{M}(a_{ij} \frac{\partial w}{\partial y_i}) \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \hat{m} \, dx + \mathcal{M}(a_o) \int_\Omega \hat{m} \varphi \, P dx = (F, \varphi \, P).$$

Mais d'après (2.11) et (2.28) on a :

$$(2.31) \qquad - \frac{\partial \eta_i}{\partial x_i} + \mathcal{M}(a_o) \, \hat{m} = F$$

donc

$$(F, \varphi P) = (\eta_i , \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} P + \varphi \frac{\partial P}{\partial x_i}) + \mathcal{M}(a_o)(\hat{m}, \varphi P).$$

et (2.30) donne :

$$\mathcal{M}(a_{kj} \frac{\partial w}{\partial y_k}) \int_\Omega \varphi \frac{\partial \hat{m}}{\partial x_j} \, dx = (\eta_i , \varphi \frac{\partial P}{\partial x_i}) \quad \forall \varphi$$

donc

$$(2.32) \qquad \eta_i \frac{\partial P}{\partial x_i} = \mathcal{M}(a_{kj} \frac{\partial w}{\partial y_k}) \frac{\partial \hat{m}}{\partial x_j} .$$

Mais si l'on prend $P = y_i$ alors, d'après (2.14)

$$(2.33) \qquad \eta_i = \mathcal{M}(a_{kj} \frac{\partial}{\partial y_k}(y_i - \chi^i)) \frac{\partial \hat{m}}{\partial x_j} .$$

On vérifie que

$$(2.34) \qquad \mathcal{M}(a_{kj} \frac{\partial}{\partial y_k}(y_i - \chi^i)) = q_{ij}.$$

Donc

$$(2.35) \qquad \eta_i = q_{ij} \frac{\partial \hat{m}}{\partial x_j} .$$

On déduit de (2.19) que, $\forall\, v \in V$,

$$\varepsilon(u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(s), v) + a^\varepsilon(m_\varepsilon, v) = (F, v)$$

et comme $a^\varepsilon(m_\varepsilon, v) = \int_\Omega \eta_i^\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega a_0^\varepsilon u_\varepsilon v\, dx$, on en déduit, avec (2.26) et (2.35) que

$$\mathcal{a}(\hat{m}, v) = (F, v) \quad \forall\, v \in V$$

i.e.

$$\mathcal{a}\int_s^t \hat{u}(\sigma)d\sigma, v = \int_s^t f(\sigma)d\sigma, v \qquad \forall\, v \in V.$$

Comme s et t sont quelconques, on en déduit que

$$\mathcal{a}(\hat{u}(t), v) = (f(t), v) \quad \text{p.p. en } t$$

donc $\hat{u} = u$ et (1.8) donne alors le résultat désiré. ∎

2.4. Remarques.

De nombreuses variantes sont possibles. Le résultat précédent s'adapte facilement au cas où les coefficients a_{ij} sont de la forme :

$$a_{ij}(x, \frac{x}{\varepsilon}, t),$$

uniformément continue en x et t.

Ils s'adaptent aussi aux cas d'équations d'ordre > 2 en x et également de la forme $a_{ij}(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}, \ldots\ldots, \frac{x}{\varepsilon^N})$; pour le cas stationnaire, nous renvoyons à BENSOUSSAN-LIONS-PAPANICOLAOU [2]. ∎

Le résultat du Théorème 1.1 peut s'obtenir, au moins de manière formelle par la méthode des échelles multiples. Nous renvoyons pour cela au livre de BENSOUSSAN, LIONS, PAPANICOLAOU [4].

3. CORRECTEURS

3.1. Position du problème.

Le problème général des correcteurs est de trouver, si possible, des fonctions θ_ε (les correcteurs) tels que :

$$u_\varepsilon - u - \theta_\varepsilon \to 0 \text{ "plus vite" que } u_\varepsilon - u,$$

ou dans une topologie plus fine que $L^2(0,T;V)$ faible.

Il y a visiblement deux types de correcteurs à introduire, l'un "spatial" (par exemple pour remplacer $L^2(0,T;V)$ faible par $L^2(0,T;V)$ fort) et un autre, "temporel" pour corriger la couche limite pour $t = 0$. Nous n'avons obtenu qu'un résultat très partiel pour le correcteur spatial.

3.2. Correcteur spatial.

On définit :

(3.1) $$\chi(x,y,t) = -\chi^j(y)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t), \quad \chi^j \text{ défini par } (1.19)$$

et

(3.2) $$\chi_\varepsilon = \chi_\varepsilon(x,t) = \chi(x, \frac{x}{\varepsilon}, t).$$

On fera les hypothèses supplémentaires suivantes (probablement superflues) :

(3.3) $$V = H^1(\Omega) \quad ,$$

(3.4) $$a^\varepsilon(u,v) = a^\varepsilon(v,u) \quad \forall\, u, v \text{ (symétrie de } A^\varepsilon).$$

On fait des hypothèses de régularité sur u :

(3.5) $$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(Q).$$

Si la frontière Γ de Ω est assez régulière, ces hypothèses sont satisfaites si

(3.6) $$f, \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(Q) .$$

On supposera aussi que

(3.7) $$\chi^j \in L^\infty(Y).$$

On a le

THEOREME 3.1. *On se place dans les conditions du Théorème 2.1 et on suppose en outre que (3.3) ... (3.7) ont lieu. Alors χ_ε étant donné par (3.2)(3.1), on a, lorsque $\varepsilon \to 0$:*

(3.8) $$z_\varepsilon = u_\varepsilon - u - \varepsilon\chi_\varepsilon \to 0 \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort}.$$

Démonstration.

C'est une variante de la méthode donnée dans BENSOUSSAN-LIONS-PAPANICOLAOU [3]. On définit

(3.9) $$\chi_e = \varepsilon \int_0^T \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, u_\varepsilon\right) dt + \int_0^T a^\varepsilon(z_\varepsilon)\, dt$$

où l'on écrit

$$a^\varepsilon(\varphi) = a^\varepsilon(\varphi,\varphi).$$

Comme $X_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}|u_\varepsilon(T)|^2 + \int_0^T a^\varepsilon(z_\varepsilon)dt$, tout revient à vérifier que $X_\varepsilon \to 0$.

Or, grâce à la symétrie (3.4) :

$$X_\varepsilon = \varepsilon \int_0^T \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, u_\varepsilon\right) dt + \int_0^T a^\varepsilon(u_\varepsilon)dt - 2\int_0^T a^\varepsilon(u_\varepsilon, u+\varepsilon\chi_\varepsilon)dt + Y_\varepsilon,$$

où

(3.10) $$Y_\varepsilon = \int_0^T a^\varepsilon(u+\varepsilon\chi_\varepsilon, u+\varepsilon X_\varepsilon)\, dt.$$

Utilisant (1.8), on en déduit

(3.11) $$X_\varepsilon = \int_0^T (f, u_\varepsilon)dt - 2\int_0^T (f, u+\varepsilon\chi_\varepsilon)dt - \varepsilon\int_0^T \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, u+\varepsilon\chi_\varepsilon\right)dt + Y_\varepsilon .$$

Mais $$\varepsilon \int_0^T \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, u+\varepsilon\chi_\varepsilon\right)dt = \varepsilon(u_\varepsilon(T), u+\varepsilon\chi_\varepsilon(T)) - \varepsilon\int_0^T \left(u_\varepsilon, \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial t}\right)dt ;$$

$$\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial t} = -\chi^j(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t}$$

et, d'après les estimations a priori sur u_ε et (3.5) on a donc

(3.12) $$\varepsilon\int_0^T \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, u+\varepsilon\chi_\varepsilon\right)dt \to 0.$$

Si l'on admet pour un instant que

(3.13) $$Y_\varepsilon \longrightarrow \int_0^T \mathcal{a}(u,u)dt$$

lorsque $\varepsilon \to 0$, alors (3.11)(3.12)(3.13) donnent

$$(3.14) \qquad X_\varepsilon \to -\int_0^T (f,u)dt + \int_0^T a(u,u)dt = 0.$$

Tout revient donc à montrer (3.13). On calcule explicitement Y_ε par (3.10). On a :

$$(3.15) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}(u+\varepsilon\chi_\varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial\chi^k}{\partial y_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} - \varepsilon\,\chi^k \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \quad .$$

Grâce à (3.5)(3.7), on voit donc que

$$(3.16) \qquad Y_\varepsilon = Z_\varepsilon + O(\varepsilon) ,$$

où

$$(3.17) \qquad Z_\varepsilon = \int_Q a_{ij}^\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial\chi^\ell}{\partial y_i}\frac{\partial u}{\partial x_\ell}\right) dx\,dt.$$

Mais en explicitant :

$$Z_\varepsilon = \int_Q \left(a_{ij}^\varepsilon - a_{ik}^\varepsilon \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k} - a_{\ell j}^\varepsilon \frac{\partial\chi^i}{\partial y_\ell} + a_{\ell k}^\varepsilon \frac{\partial\chi^j}{\partial y_k}\frac{\partial\chi^i}{\partial y_\ell}\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx\,dt.$$

Par conséquent

$$(3.18) \qquad Z_\varepsilon \to Z = \mathcal{M}\left(a_{ij} - a_{ik}\frac{\partial\chi^j}{\partial y_k} - a_{\ell j}\frac{\partial\chi^i}{\partial y_\ell} + a_{\ell k}\frac{\partial\chi^j}{\partial y_k}\frac{\partial\chi^i}{\partial y_\ell}\right)\int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx\,dt =$$

$$= \lambda_{ij}\int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx\,dt.$$

Mais $|Y|\lambda_{ij} = \int_Y \left(a_{ij} - a_{ik}\frac{\partial\chi^j}{\partial y_k} - a_{\ell j}\frac{\partial\chi^i}{\partial y_\ell}\right)dy + a_\varepsilon(\chi^j,\chi^i) =$

$$= a_Y(y_j,y_i) - a_Y(\chi^j,y_i) - a_Y(y_j,\chi^i) + a_Y(\chi^j,\chi^i) =$$

$$= a_Y(\chi^j - y_j, -y_i)$$

d'où (grâce à la symétrie de a_Y) $\lambda_{ij} = q_{ij}$, ce qui, avec (3.16) et (3.18) donne (3.13).

B i b l i o g r a p h y

1. B e n s o u s s a n A., L i o n s J.L., P a p a n i c o - l a o u G. Sur quelques phénomènes asymptotiques stationnaires. -" Note C.R.Ac.Sc.",1975, t.281, p.89-94.
2. B e n s o u s s a n A., L i o n s J.L., P a p a n i c o - l a o u G. Sur de nouveaux problèmes asymptotiques. -" Note C. R.Ac.Sc.", 1976, t.282, p.143-147.
3. B e n s o u s s a n A., L i o n s J.L., P a p a n i c o - l a o u G. Homogénéisation, correcteurs et problèmes non linéaires.-" Note C.R.Ac.Sc.", 1976, t.282.
4. B e n s o u s s a n A., L i o n s J.L., P a p a n i c o - l a o u G. Livre en preparation. A paraître à North-Holland.
5. B a b u s k a I. Technical report. Université de Maryland,1974.
6. B a k b a l o v N. S. Doklady Akad.Nauk, 1974, t.218, p.1046-1048.
7. D i G i o r g i E., S p a g n o l o S. Sulla convergenza... Boll. U.M.I.,1973, 8, p.391-411.
8. L i o n s J.L. Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Springer Grundelheren, 1961.
9. L i o n s J.L. Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en Contrôle optimal. Springer Verlag Lecture Notes in Mathematics, 1973,v.323.
10. S a n c h e z- P a l e n c i a E. Comportement local et macroscopique... Int.Sci.,1974, p.331-351.
11. S o b o l e v S.L. Applications de l'Analyse Fonctionnele aux problèmes de la Physique Mathématique. Léningrad, 1950.
12. S p a g n o l o S. Sulla convergenza di soluzioni... Ann.Scuola Normale Sup. di Pisa, 1968, 22,p.571-597.
13. T a r t a r L. A paraître.