УДК 517.392

СХОДИМОСТЬ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА РАЗЛИЧНЫХ КЛАССАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С.Л. Соболев

§ 1. Сходимость кубатурных формул на фиксированных элементах $\tilde{L}_2^{(m)}$

В книге автора [1] дано точное значение нормы функционала погрешности оптимальных кубатурных формул для периодических функций (см. формулу (XУ1.2.13)). Этот функционал погрешности имеет вид

$$\ell_h = 1 - \varnothing_0 (h^{-1} H^{-1} x). \qquad (1)$$

(Для числа h, очевидно, пригодны только значения вида $h = \frac{1}{N}$, так как на периодах должно укладываться целое число узлов формулы.)

При каждом N функционал погрешности достигает своего максимального значения на элементе $u_{\frac{1}{N}}(x)$ единичной сферы из $\tilde{L}_2^{(m)}$

$$u_{\frac{1}{N}}(x) = N^{-m} u_1(x). \qquad (2)$$

Считая объём фундаментальной области периодов $|\Omega_0| = 1$, имеем для этого значения:

$$\max_{\|\varphi|\tilde{L}_2^{(m)}\|=1} \left|\left(\ell_{\frac{1}{N}}, \varphi\right)\right| = \|\ell_{\frac{1}{N}}(x)|\tilde{L}_2^{(m)*}\| \cdot \|u_{\frac{1}{N}}(x)|\tilde{L}_2^{(m)}\|. \qquad (3)$$

Множество экстремальных функций, отвечающих всевозможным N, некомпактно. Более того, в этом множестве нет ни одного предельного элемента.

В соответствии с этим при $h \to 0$ в оценке

$$|(\ell_h, \varphi)| \leq \|\ell_h|\tilde{L}_2^{(m)*}\| \cdot \|\varphi|\tilde{L}_2^{(m)}\| \qquad (4)$$

строгое равенство недостижимо. Мы сейчас покажем, что на любом фиксированном элементе $\varphi \in \tilde{L}_2^{(m)}$ стремление $|(\ell_h, \varphi)|$ к нулю оказывается более быстрым, чем это следует из (4). Выражение $h^{-m}|(\ell_h(x), \varphi(x))|$ для каждого такого φ будет стремиться к нулю, причём быстрота этой сходимости зависит от m.

Обозначим

$$g_\varphi[N] = h^{-m}\left|(\ell_h(x), \varphi(x))\right|\Big|_{h=\frac{1}{N}} = N^m \left|\left(\ell_{\frac{1}{N}}(x), \varphi(x)\right)\right|. \qquad (5)$$

Имеют место следующие две теоремы.

Теорема 1. При $m > n$ последовательность $g_\varphi[N]$, $N = 1, 2, \dots$, принадлежит ℓ_2. Более точно:

$$|g_\varphi|\ell_2| = \left\{\sum_{N=1}^{\infty} g_\varphi^2[N]\right\}^{1/2} \le \mathcal{K}(m)|\varphi|\tilde{L}_2^{(m)}|, \qquad (6)$$

где $\mathcal{K}(m)$ не зависит от φ.

Теорема 2. При $\frac{n}{2} < m \le n$ последовательность $g_\varphi[N]$ принадлежит пространству ℓ_{q+0}, где

$$\frac{1}{q} = \frac{m}{n} - \frac{1}{2}.$$

Более точно: каково бы ни было число $q^* > q$, справедливо неравенство

$$|g_\varphi[N]|\ell_{q^*}| = \left\{\sum_{N=1}^{\infty} g_\varphi^{q^*}[N]\right\}^{1/q^*} \le \mathcal{K}(m, q^*)|\varphi|\tilde{L}_2^{(m)}|, \qquad (7)$$

где $\mathcal{K}(m, q^*)$ не зависит от φ.

Докажем теорему 1. Для простоты выкладок ограничимся случаем, когда матрица H единичная. Общность от этого не пострадает.

Разложим функцию $\varphi(x)$ в ряд Фурье, который для удобства запишем в виде

$$\varphi(x) = \sum_{\beta \ne 0} \frac{c[\beta]}{|\beta|^m} e^{2\pi i \beta^* x}. \qquad (8)$$

Норма в $\tilde{L}_2^{(m)}$ функции $\varphi(x)$, представимой в виде (8), была вычислена в главе ХП книги [1]. Она выражается равенством

$$|\varphi|\tilde{L}_2^{(m)}| = (2\pi)^m \left\{\sum_{\beta \ne 0} |c[\beta]|^2\right\}^{1/2}. \qquad (9)$$

Сходимость ряда в правой части (9), очевидно, равносильна принадлежности φ к $\tilde{L}_2^{(m)}$.

Подсчитаем теперь величину погрешности оптимальной кубатурной формулы на функции $\varphi(x)$, выражаемой рядом (8). Функционал $\ell_{\frac{1}{N}}(x)$ выражается

$$\ell_{\frac{1}{N}}(x) = 1 - \phi_0(Nx) = 1 - N^{-n} \sum_{\varkappa} \delta\left(x - \frac{\varkappa}{N}\right), \qquad (10)$$

где $\varkappa$ — целочисленный вектор-столбец: $\varkappa = \uparrow(\varkappa_1, \dots, \varkappa_n)$. Для интегрирования произведения $\ell_{\frac{1}{N}}(x)\varphi(x)$ по кубу $0 \le x_j < 1$ вычислим сначала

$$\left(\ell_{\frac{1}{N}}(x), e^{2\pi i \beta^* x}\right) = -N^{-n} \sum_{\substack{0 \le \varkappa_j \le N-1 \\ j = 1, \dots, n}} e^{2\pi i \sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{\varkappa_j}{N}} = -N^{-n} \prod_{j=1}^{n} \sum_{\varkappa_j = 0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{\beta_j \varkappa_j}{N}}.$$

Внутренняя сумма равна нулю, если β_j не кратно N, $\forall j$, и равна N^n в противном случае. Отсюда имеем:

$$\left(\ell_{\frac{1}{N}}(x), e^{2\pi i\beta^* x}\right)=\begin{cases}-1\ , \text{ если } \left\{\frac{\beta_j}{N}\right\}=0 \quad \forall j,\\ 0\ , \text{ если } \exists j^*: \left\{\frac{\beta_{j^*}}{N}\right\}\neq 0.\end{cases} \tag{11}$$

Или, возвращаясь к погрешности от функции $\varphi(x)$,

$$N^m\cdot\left(\ell_{\frac{1}{N}}(x),\ \varphi(x)\right)=-\sum_{\beta\neq 0}\frac{c[N\beta]}{|\beta|^m}\ . \tag{12}$$

В условиях теоремы 1 при $m>n$, применяя неравенство Коши, получим

$$g_\varphi^2[N]=\left(\sum_{\beta\neq 0}\frac{c[N\beta]}{|\beta|^{m/2}}\cdot\frac{1}{|\beta|^{m/2}}\right)^2\leq\left(\sum_{\beta\neq 0}\frac{|c[N\beta]|^2}{|\beta|^m}\right)\left(\sum_{\beta\neq 0}\frac{1}{|\beta|^m}\right).$$

Полагая

$$\mathcal{K}_1(m)=\sum_{\beta\neq 0}\frac{1}{|\beta|^m},$$

будем иметь, в силу неравенства $m>n$, $\mathcal{K}_1(m)<\infty$ и

$$g_\varphi^2[N]\leq\mathcal{K}_1(m)\left(\sum_{\beta\neq 0}\frac{|c[N\beta]|^2}{|\beta|^m}\right). \tag{13}$$

Введём обозначение $\lambda=N\beta$, после несложных выкладок получим

$$\sum_{N=1}^{\infty}|g_\varphi[N]|^2\leq\mathcal{K}_1(m)\sum_{\lambda}|c[\lambda]|^2\sum_{\beta_j|\lambda_j}\frac{1}{|\beta|^m}. \tag{14}$$

Усилим неравенство (14), проведя суммирование по всем целым β_j. Мы будем иметь

$$\sum_{N=1}^{\infty}g_\varphi^2[N]\leq\mathcal{K}_1(m)\sum_{\lambda}|c[\lambda]|^2\sum_{\beta\neq 0}\frac{1}{|\beta|^m}=\mathcal{K}_1^2(m)(2\pi)^{-2m}\left|\varphi|\tilde{L}_2^{(m)}\right|^2,$$

откуда сразу следует (6). Теорема 1 доказана.

Докажем теперь теорему 2. Применяя неравенство Гёльдера для произведения трех функций с показателями $\frac{1}{p_1}=\frac{1-\mu}{2};\ \frac{1}{p_2}=\frac{\mu}{2};\ \frac{1}{p_3}=\frac{1}{2}$ в формуле (12), учитывая (5), будем иметь

$$|g_\varphi[N]|\leq\left(\sum_{\beta\neq 0}|c[N\beta]|^2\right)^{\frac{1-\mu}{2}}\left(\sum_{\beta\neq 0}\frac{|c[N\beta]|^2}{|\beta|^{(m-\frac{n}{2}-\varepsilon)\cdot 2/\mu}}\right)^{\frac{\mu}{2}}\left(\sum_{\beta\neq 0}\frac{1}{|\beta|^{n+2\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Заметим теперь, что

$$\sum_{\beta\neq 0} |c[N\beta]|^2 \leqslant (2\pi)^{-2m} \| \varphi | \tilde{L}_2^{(m)} \|^2 \tag{15}$$

и

$$\mathcal{K}_2(n,\varepsilon) = \sum_{\beta\neq 0} \frac{1}{|\beta|^{n+2\varepsilon}} < \infty, \tag{16}$$

откуда

$$|g_\varphi[N]|^2 \leqslant \mathcal{K}_2(n,\varepsilon)(2\pi)^{-2m(1-\mu)} \| \varphi | \tilde{L}_2^{(m)} \|^{2(1-\mu)} \left(\sum_{\beta\neq 0} \frac{|c[N\beta]|^2}{|\beta|^{(m-\frac{n}{2}-\varepsilon)\frac{2}{\mu}}} \right)^{\mu}. \tag{17}$$

Положим

$$\frac{n+\varepsilon}{m-\frac{n}{2}-\varepsilon} = q^* \quad \text{и} \quad \frac{2}{\mu} = q^*. \tag{18}$$

При этом, как легко проверить,

$$\varepsilon = \frac{(\frac{m}{n}-\frac{1}{2})(q^*-q)\cdot n}{1+q^*}.$$

Суммируя (17) по всем значениям N, будем иметь

$$\| g_\varphi[N] | \ell_{q^*} \|^q = \sum_{N=1}^{\infty} |g_\varphi[N]|^q = \mathcal{K}_3(m,q^*) \| \varphi | \tilde{L}_2^{(m)} \|^{2\frac{1-\mu}{\mu}} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\beta\neq 0} \frac{|c[N\beta]|^2}{|\beta|^{n+\varepsilon}}.$$

Вводя, как и раньше, вместо N переменную суммирования λ и осуществляя внутреннее суммирование по всем целым значениям β_j вместо $\beta_j \in \mathcal{D}(\lambda_j)$, отчего неравенство только усилится, получим:

$$\sum_{N=1}^{\infty} |g_\varphi[N]|^{q^*} \leqslant \mathcal{K}_4(m,q^*) \| \varphi | \tilde{L}_2^{(m)} \|^{q^*}, \tag{19}$$

откуда сразу следует (7). Теорема 2 доказана.

§ 2. Классы функций $H(\varkappa, A, \lambda)$ и $C(\varkappa, A, \lambda)$

В книге [1] (см. гл. XУШ) были рассмотрены вопросы сходимости кубатурных формул на классах бесконечно дифференцируемых функций $\Phi(\beta, A)$, характеризуемых скоростью роста производных порядка α, в зависимости от α. Сейчас нам будет полезно рассмотреть несколько другие классы, близкие к $\Phi(\beta, A)$.

Будем говорить, что функция $\varphi(x)$, заданная в области $\bar{\Omega}$ и бесконечно дифференцируемая в $\bar{\Omega}$, принадлежит там классу $H(\varkappa, A, \lambda)$, $\varkappa \geqslant 0$, если ее норма в $L_2^{(m)}(\Omega)$ удовлетворяет неравенству

$$\| \varphi | L_2^{(m)} | \Omega \| \leqslant \mathcal{K} m^{\varkappa m} A^m m^{\lambda} \qquad \forall m > 0 \tag{20}$$

с некоторой постоянной $\mathcal{K}$, зависящей от φ.

Очевидны вложения:

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0:\ H(\varkappa,\mathcal{A},\lambda-\varepsilon) \subset H(\varkappa,\mathcal{A},\lambda),\\ \forall \lambda_1,\lambda_2,\varepsilon > 0:\ H(\varkappa,\mathcal{A}-\varepsilon,\lambda_1) \subset H(\varkappa,\mathcal{A},\lambda_2),\\ \forall \lambda_1,\lambda_2,\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\varepsilon > 0:\ H(\varkappa-\varepsilon,\mathcal{A}_1,\lambda_1) \subset H(\varkappa,\mathcal{A}_2,\lambda_2).\end{gathered} \tag{21}$$

Мы иногда будем пользоваться естественными обозначениями

$$H(\varkappa,\mathcal{A}) = \bigcup_{\lambda} H(\varkappa,\mathcal{A},\lambda). \tag{22}$$

Вместе с классами $H(\varkappa,\mathcal{A},\lambda)$ естественно рассмотреть еще классы $C(\varkappa,\mathcal{A},\lambda)$ функций, для которых справедливы неравенства

$$|\varphi|C^{(m)}|\Omega| = \max_{\bar{\Omega}}\left\{\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\left(\mathcal{D}^{\alpha}\varphi\right)^2\right\}^{1/2} \leq \mathcal{K}m^{\varkappa m}\mathcal{A}^m m^{\lambda} \tag{23}$$

с вложениями, подобными (21), и классы $C(\varkappa,\mathcal{A})$, определяемые равенством

$$C(\varkappa,\mathcal{A}) = \bigcup_{\lambda} C(\varkappa,\mathcal{A},\lambda). \tag{24}$$

Неравенство (23) позволяет получить очевидную оценку каждой производной порядка m от φ. Мы будем иметь для $\varphi \in C(\varkappa,\mathcal{A},\lambda)$

$$\sqrt{\frac{m!}{\alpha!}}\left|\mathcal{D}^{\alpha}\varphi\right| \leq \mathcal{K}m^{\varkappa m}\mathcal{A}^m m^{\lambda}. \tag{25}$$

Обратно, для любой функции $\varphi(x)$, заданной в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющей (25), получим элементарным путем

$$|\varphi|C^{(m)}|\bar{\Omega}|^2 \leq \left(\mathcal{K}m^{\varkappa m}\mathcal{A}^m m^{\lambda}\right)^2\sum_{|\alpha|=m}1,$$

или

$$|\varphi|C^{(m)}|\bar{\Omega}| \leq \mathcal{K}m^{\varkappa m}\mathcal{A}^m m^{\lambda}\left(\frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}\right)^{1/2}. \tag{26}$$

Поскольку $\dfrac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$ есть многочлен от m степени $n-1$, значит, функции $\varphi(x)$, удовлетворяющие (26), принадлежат $C\left(\varkappa,\mathcal{A},\lambda+\frac{n-1}{2}\right)$.

Между классами C и H имеют место соотношения вложения. Первое из них очевидно

$$C(\varkappa,\mathcal{A},\lambda) \subset H(\varkappa,\mathcal{A},\lambda). \tag{27}$$

Обратное дается теоремой.

Т е о р е м а 3. Справедливо вложение

$$H(\varkappa,\mathcal{A},\lambda) \subset C(\varkappa,\mathcal{A},\lambda+k\varkappa), \tag{28}$$

где $k = \left[\frac{n}{2}\right]+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуя выражение нормы для φ в $L_2^{(m)}$, получим после небольшой выкладки, которую мы здесь не приводим:

$$|\varphi| L_2^{(m+k)} |\Omega|^2 = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\mathcal{D}^\alpha \varphi| L_2^{(k)} |\Omega|^2 . \tag{29}$$

Из первой теоремы вложения при $k=\left[\frac{n}{2}\right]+1$ имеем, с другой стороны, $|\mathcal{D}^\alpha\varphi|^2 \leqslant \mathcal{K}\left[|\mathcal{D}^\alpha\varphi| L_2^{(k)} |\Omega|^2 + |\mathcal{D}^\alpha\varphi| L_2 |\Omega|^2\right]$, откуда

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(\mathcal{D}^\alpha\varphi\right)^2 \leqslant \mathcal{K}\left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\mathcal{D}^\alpha\varphi| L_2^{(k)} |\Omega|^2 + |\varphi| L_2^{(m)} |\Omega|^2\right].$$

Пользуясь этим, будем иметь при достаточно большом m для произвольной функции из $H(\varkappa, \mathcal{A}, \lambda)$

$$\|\varphi| C^{(m)} |\bar{\Omega}|^2 = \max_{x\in\bar{\Omega}} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(\mathcal{D}^\alpha\varphi\right)^2 \leqslant \mathcal{K}(m+k)^{2\varkappa(m+k)} \mathcal{A}^{2(m+k)} (m+k)^{2\lambda} . \tag{30}$$

Оценим последнее выражение. Очевидно, $(m+k)^{2\lambda} \leqslant \mathcal{K} m^{2\lambda}$. Далее,

$$(m+k)^{\varkappa(m+k)} = m^{\varkappa(m+k)}\left[\left(1-\frac{k}{m+k}\right)^{m+k}\right]^{-\varkappa} \leqslant m^{\varkappa(m+k)} e^{k\varkappa(1+\varrho)},$$

где ϱ сколь угодно мало при большом m . Отсюда можно получить

$$|\varphi| C^{(m)} |\bar{\Omega}| \leqslant \mathcal{K} m^{\varkappa m} \mathcal{A}^m m^{\lambda+\varkappa k},$$

что и требовалось доказать. Из включения (27) и доказанной теоремы 3 вытекает совпадение классов $H(\varkappa, A)$ и $C(\varkappa, A)$.

По самому определению классы $H(\varkappa,\mathcal{A},\lambda)$ сохраняются при любых ортогональных преобразованиях координат. Однако при произвольной линейной замене, например, при изменении масштаба, как нетрудно проверить, инвариантным остаётся только $\varkappa$, а числа $\mathcal{A}$ и λ меняются. В книге [1] классы $\Phi(\beta,\mathcal{A})$, близкие к классам H и C , охарактеризованы подробно. Здесь мы приведем без доказательства ряд свойств H и C при различных значениях параметров.

Важным свойством классов $H(\varkappa,\mathcal{A})$ является то, что множество

$$H(\varkappa) = \bigcup_{\mathcal{A},\lambda} H(\varkappa, \mathcal{A}, \lambda), \tag{31}$$

совпадающее с $C(\varkappa)$, при фиксированном $\varkappa$ образует алгебру. Сумма двух элементов из $H(\varkappa)$, очевидно, снова есть элемент $H(\varkappa)$. Справедлива

Т е о р е м а 4. Произведение любых двух элементов класса $C(\varkappa)=H(\varkappa)$ является снова элементом этого класса.

Функции классов $H(\varkappa,\mathcal{A},\lambda)$ и $C(\varkappa,\mathcal{A},\lambda)$ удовлетворяют некоторому условию инвариантности при замене переменных. Отметим, прежде всего, что замена $x=\mathcal{K}y$ – изменение масштаба – переводит класс $C(\varkappa,\mathcal{A},\lambda)$ по x в класс $C(\varkappa,\mathcal{A}_1,\lambda)$ по y , где $\mathcal{A}_1=\mathcal{K}\mathcal{A}$. Имеют место

Т е о р е м а 5. При $\varkappa > 1$ аналитическая вплоть до границы области замена переменных $x = \chi(y)$ переводит класс $C(\varkappa, A_1, \lambda_1)$ в $C(\varkappa, A_2, \lambda_2)$.

Разберем теперь подробнее свойства классов $H(\varkappa, A, \lambda)$, отвечающих различным $\varkappa$. Рассмотрим отдельно четыре случая: 1) $\varkappa > 1$; II) $\varkappa = 1$; III) $0 < \varkappa < 1$ IV) $\varkappa = 0$.

Т е о р е м а 6. При $\varkappa > 1$ функцию $\varphi(x) \in H(\varkappa, A, \lambda)$ можно продолжить с области Ω, ограниченной аналитическим контуром, на любую область Ω_1 финитным образом так, чтобы она была в Ω_1 элементом некоторого $H(\varkappa, A_1, \lambda_1)$.

Эта теорема выражает основное для нас свойство класса $H(\varkappa)$. Из этой теоремы вытекает как следствие, что значения $\varphi(x) \in H(\varkappa)$ в двух гладких аналитических непересекающихся областях Ω_1 и Ω_2 можно задавать независимыми, поскольку задаваемые в Ω_1 и Ω_2 значения можно продолжить с сохранением класса на сколь угодно малую окрестность каждой из этих областей.

Т е о р е м а 7. Класс $H(1, A)$ представляет собою класс аналитических функций. Ряд Тейлора для $\varphi(x) \in H(\ell, A)$ будет сходиться при

$$|x| < \frac{\ell}{A}. \tag{32}$$

Т е о р е м а 8. При $\varkappa < 1$ классы $C(\varkappa, A, \lambda)$ состоят из целых функций.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что целая функция $\varphi(x)$ от n переменных принадлежит классу $\Psi(\rho, \sigma, \mu)$, если существует такая постоянная K, что для всех комплексных x

$$|\varphi(x)| \leq K r^{\mu} e^{\sigma r^{\rho}}, \tag{33}$$

где $r^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = |x|^2$.

Величины ρ и σ принято называть порядком и типом роста целой функции. Справедлива

Т е о р е м а 9. Если целая функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $\Psi(\rho, \sigma, \mu)$, где $\rho > 0$, $\sigma > 0$, то в любой конечной области

$$\varphi(x) \in C(\varkappa, A, \lambda), \tag{34}$$

где $\varkappa = 1 - \frac{1}{\rho}$; $A = (\sigma\rho e)^{\frac{1}{\rho}}$,

$$\lambda = \frac{3}{4} n - \frac{1}{4} + \frac{\mu}{\rho}. \tag{35}$$

Справедлива теорема, в некотором смысле обратная теореме 9.

Т е о р е м а 10. Если целая функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $C(\varkappa, A, \lambda)$, то она служит также элементом класса $\Psi(\rho, \sigma, \mu)$, где

$$\varkappa = \left(1 - \frac{1}{\rho}\right), \quad (\sigma\rho e)^{\frac{1}{\rho}} = A; \quad \mu = \frac{1}{2}\rho + \rho\lambda. \tag{36}$$

Как видно, $\varkappa$ и $\mathcal{A}$ связаны с ρ и σ той же зависимостью, что и в теореме 9, а в показателе λ теряется $\frac{3n+1}{4}$.

Т е о р е м а 11. Всякая периодическая функция $\varphi(x)$ с матрицей периодов H порядка роста $\rho=1$ и типа σ представляет собою тригонометрический многочлен вида

$$\varphi(x)=\sum_{|H^{-1*}\alpha|\leq\frac{\sigma}{2\pi}} a[\alpha]\, e^{2\pi i\alpha^* H^{-1}x}. \tag{37}$$

§ 3. Сходимость кубатурных формул на периодических функциях из $C(\varkappa,\mathcal{A})$

Рассмотрим поведение функционала погрешности для классов функций $H(\varkappa,\mathcal{A},\lambda)$ периодических с матрицей периодов H при различных $\varkappa$, $\mathcal{A}$ и λ в фундаментальной области единичного объема. Этот функционал может быть оценен для каждого m:

$$|(\ell,\varphi)|\leq\|\varphi|\tilde{L}_2^{(m)}\|\cdot\|\ell|\tilde{L}_2^{(m)*}\|\leq\mathcal{K}m^{\varkappa m}\mathcal{A}^m m^{\lambda}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^m\sqrt{\zeta(H^{-1*}|2m)}. \tag{38}$$

При больших m для функции $\zeta(H^{-1*}|2m)$ будет верна оценка

$$|\zeta(H^{-1*}|2m)|\leq\frac{K}{\tau_{min}^{2m}}, \tag{39}$$

где τ_{min} – кратчайшее расстояние между узлами решетки H^{-1*}, а $K=\mathcal{K}_0(1+\varepsilon)$, где $\mathcal{K}_0$ – число узлов, самых близких к началу координат. Пользуясь этим, будем иметь

$$|(\ell,\varphi)|\leq\mathcal{K}\left(\frac{\mathcal{A}h}{2\pi\tau_{min}}\right)^m m^{\varkappa m+\lambda}. \tag{40}$$

Оценки (40) выполнены все одновременно. Воспользуемся той, у которой достигается минимум $\left(\frac{\mathcal{A}h}{2\pi\tau_{min}}\right)^m m^{\varkappa m}$.

Обозначим $\frac{\mathcal{A}h}{2\pi\tau_{min}}=B$. Пусть ещё $B^{1/\varkappa}m=y$, т.е. $m=yB^{-1/\varkappa}$.

Неравенство (40) перепишется в виде

$$|(\ell,\varphi)|\leq\mathcal{K}y^{\varkappa B^{-1/\varkappa}y}m^{\lambda}=\mathcal{K}(y^y)^{\varkappa B^{-1/\varkappa}}m^{\lambda}. \tag{41}$$

Пользуясь тем, что $\min y^y=e^{-1/e}$ и достигается при $y_0=\frac{1}{e}$, т.е.

$m_0=\left(\frac{2\pi\tau_{min}}{\mathcal{A}}\right)^{1/\varkappa}\cdot\frac{1}{e}\cdot h^{-1/\varkappa}$, видим, что

$$|(\ell,\varphi)|\leq\mathcal{K}\exp\left[-\frac{\varkappa}{e}\left(\frac{2\pi\tau_{min}}{\mathcal{A}}\right)^{1/\varkappa}\cdot h^{-1/\varkappa}\right]m_0^{\lambda}=\mathcal{K}_1\exp\left[-\frac{\varkappa}{e}\left(\frac{2\pi\tau_{min}}{\mathcal{A}}\right)^{1/\varkappa}h^{-1/\varkappa}\right]h^{-\frac{\lambda}{\varkappa}}. \tag{42}$$

При $\varkappa = 0$ оценки получаются проще. Мы будем иметь из (40)

$$|(\ell,\varphi)| \leq \mathcal{K}\left(\frac{\mathcal{A}h}{2\pi\tau_{min}}\right)^m m^\lambda, \tag{43}$$

и, значит, при $h < \frac{2\pi\tau_{min}}{\mathcal{A}}$ величина погрешности будет сколь угодно мала при достаточно большом m. Это означает, что формула становится точной при достаточно малом h. Как следует из теоремы 11, при этом $\varphi(x)$ – тригонометрический многочлен.

Приведенные оценки быстроты сходимости кубатурных формул для бесконечно дифференцируемых функций из классов $C(\varkappa, \mathcal{A}, \lambda)$ почти совпадают с теми, которые приведены в книге [1].

Неулучшаемость оценки (42) для аналитических функций была впервые показана С.Ю.Прищепионком (не опубликовано). Покажем, что эта оценка является почти неулучшаемой во всех случаях.

Покажем сначала, что в целом для всего класса $H(\varkappa, \mathcal{A})$ неравенство это не может быть улучшено. В самом деле, при каждом m существует экстремальная функция $\varphi(x) \in \widetilde{L}_2^{(m)}$, периодическая с матрицей периодов H, для которой погрешность интегрирования по фундаментальной области в точности выражается равенством

$$|(\ell,\varphi)| = \|\ell\,|\widetilde{L}_2^{(m)*}\|\,\|\varphi\,|\widetilde{L}_2^{(m)}\|. \tag{44}$$

Удержим в разложении Фурье функции $\varphi(x)$ конечное число слагаемых, достаточно большое для того, чтобы $|(\ell,\varphi_S)|$ и $\|\varphi_S\,|\widetilde{L}_2^{(m)}\|$, где φ_S – отрезок ряда Фурье, при заданном h сколь угодно мало отличались от $|(\ell,\varphi)|$ и $\|\varphi\,|\widetilde{L}_2^{(m)}\|$, отбросив остальные. Величина $|(\ell,\varphi)|$ для такой функции будет, очевидно, сколь угодно близка к оценке (44). Однако поскольку φ_S – тригонометрический полином, то при $h \to 0$ именно на этой функции (ℓ,φ), начиная с некоторого значения, будет тождественным нулем, и для неё эта оценка будет слишком груба.

Мы дадим пример функции $\varphi_*(x)$, у которой при любом m норма $\|\varphi_*\,|\widetilde{L}_2^{(m)}\|$ подчинена неравенству

$$\|\varphi_*\,|\widetilde{L}_2^{(m)}\| \leq \mathcal{K} m^{\varkappa m} \mathcal{A}^m m^\lambda \tag{45}$$

и для которой при любом m имеет место оценка

$$|(\ell_h,\varphi_*)| > \mathcal{K}\exp\left[-\frac{\varkappa}{e}\left(\frac{\mathcal{A}}{2\pi\tau_{min}}\right)^{-1/\varkappa} h^{-1/\varkappa}\right]\cdot h^{-\left(\frac{\lambda}{\varkappa}-\frac{n}{2}+\min\left(\frac{1}{4\varkappa},\frac{1}{2}\right)\right)}, \tag{46}$$

отличающаяся от (42) лишь степенью h. Мы покажем далее, что для произвольной кубатурной формулы с любыми коэффициентами при тех же узлах среди функций вида $\varphi_0(x+x_0)$, где x_0 – переменный параметр, найдутся такие, для которых справедлива оценка снизу (46). Для простоты выкладок ограничимся

случаем кубической решётки и фундаментальной области Ω_0 – единичным кубом. Рассмотрим пока в общем виде функцию $\varphi(x)$, задаваемую рядом

$$\varphi(x) = \sum_\beta a\,[|\beta|]\,e^{2\pi i \beta^* x} . \tag{47}$$

Подсчитаем норму этой функции в $\widetilde{L}_2^{(m)}$. В силу ортогональности $e^{2\pi i\beta^* x}$ с различными β в смысле скалярного произведения

$$(\varphi,\psi) = \int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \mathcal{D}^\alpha \varphi \mathcal{D}^\alpha \bar{\psi} dx \tag{48}$$

получим для этой нормы выражение:

$$\| \varphi | \widetilde{L}_2^{(m)} \| = (2\pi)^m \left\{ \sum_{\beta\neq 0} a\,[|\beta|]^2 |\beta|^{2m} \right\}^{1/2} . \tag{49}$$

Пусть $a\,[|\beta|] = e^{-s|\beta|^{1/\varkappa}} |\beta|^\mu .$ (50)

Будем обозначать

$$\varphi_* (x) = \sum_\beta e^{-s|\beta|^{1/\varkappa}} |\beta|^\mu e^{2\pi i\beta^* x} . \tag{51}$$

Норма функции $\varphi_*(x)$ выражается формулой

$$\| \varphi_* (x) | \widetilde{L}_2^{(m)} \|^2 = (2\pi)^{2m} \sum_{\beta\neq 0} e^{-2s|\beta|^{1/\varkappa}} |\beta|^{2\mu+2m} , \tag{52}$$

и для её оценки сверху нужно научиться оценивать сумму по целым точкам, стоящую справа, т.е. сумму по целым точкам функции $e^{-q|\beta|^{1/\varkappa}} |\beta|^\nu$, где положено

$$q = 2s ; \quad \nu = 2m + 2\mu . \tag{53}$$

Найдем ещё выражение для погрешности приближенного выражения интеграла от $\varphi_*(x)$, полученного с помощью оптимальной кубатурной формулы при данной решетке:

$$(\ell_0 , \varphi_* (x)), \tag{54}$$

где $\ell_0 (x) = 1 - \varnothing_0 (Nx) = 1 - \varnothing_0 \left(\frac{x}{h}\right) .$

Эту погрешность нам нужно будет оценить снизу. Считая для удобства $a\,[0] = 0$, получим, как мы уже видели ранее (см. (11)),

$$(\ell_0 , \varphi_*) = -\sum_{\beta\neq 0} a\,[|N\beta|] = -N^\mu \sum_{\beta\neq 0} e^{-sN^{1/\varkappa}|\beta|^{1/\varkappa}} |\beta|^\mu . \tag{55}$$

Вычисление (ℓ_0, φ_*), так же как и вычисление $\| \varphi_* | \widetilde{L}_2^{(m)} \|$, сводится к вычислению суммы по целым точкам функции

$$\varphi(|x|) = e^{-q|x|^{1/\varkappa}} |x|^\nu \text{ при } q = sN^{1/\varkappa} , \ \nu = \mu . \tag{56}$$

Мы оценим эту функцию, сравнивая ее с интегралом

$$\mathcal{J}_n = \int\limits_{x_j>0} e^{-q\tau^{1/\text{æ}}}\tau^{\nu}dx,$$

где $\tau^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2$.

Этот интеграл с помощью простой замены

$$q\tau^{1/\text{æ}} = t$$

сводится к эйлерову интегралу для Γ-функции. Мы получим, после соответствующих выкладок,

$$\mathcal{J}_n = \frac{2^{1-n}\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \cdot \frac{\text{æ}\Gamma(\text{æ}(\nu+n))}{q^{\text{æ}(\nu+n)}} \quad . \tag{57}$$

Полезно подробнее исследовать поведение функции $e^{-q\tau^{1/\text{æ}}}\tau^{\nu}$. Из выражения для производной

$$\frac{d}{d\tau}\left(e^{-q\tau^{1/\text{æ}}}\tau^{\nu}\right) = \left(\nu - \frac{q\tau^{1/\text{æ}}}{\text{æ}}\right)\tau^{\nu-1}e^{-q\tau^{1/\text{æ}}}$$

заключаем, что при $\nu>0$ подынтегральная функция в $\mathcal{J}_n$, как функция от τ, монотонно возрастает при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_{max}$, где

$$\tau_{max} = \left(\frac{\text{æ}\nu}{q}\right)^{\text{æ}}, \tag{58}$$

и монотонно убывает при $\tau_{max} \leqslant \tau < \infty$. При этом

$$\psi(\tau_{max}) = max\left(e^{-q\tau^{1/\text{æ}}}\tau^{\nu}\right) = e^{-q\tau_{max}^{1/\text{æ}}} \cdot \tau_{max}^{\nu} = \left(\frac{\text{æ}\nu}{qe}\right)^{\text{æ}\nu}. \tag{59}$$

Поведение этой функции вблизи максимума существенно зависит от величины æ и будет разным для $\text{æ} \geqslant \frac{1}{2}$ и $\text{æ} < \frac{1}{2}$. Положим $\tau = \tau_{max} + \theta = \left(\frac{\text{æ}\nu}{q}\right)^{\text{æ}} + \theta$.

Представим функцию $\psi(\tau) = e^{-q\tau^{1/\text{æ}}}\tau^{\nu}$ в виде:

$$\psi(\tau) = e^{-q\tau^{1/\text{æ}}}\tau^{\nu} = \left(\frac{\text{æ}\nu}{q}\right)^{\text{æ}\nu}\left(1+\theta\left(\frac{q}{\text{æ}}\right)^{\text{æ}}\nu^{-\text{æ}}\right)^{\nu} exp\left[(-\text{æ}\nu)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\theta\left(\frac{q}{\text{æ}}\right)^{\text{æ}}\nu^{-\text{æ}}\right)^{1/\text{æ}}\right] = \left(\frac{\text{æ}\nu}{q}\right)^{\text{æ}\nu} e^{\nu\ln\left(1+\theta\left(\frac{q}{\text{æ}}\right)^{\text{æ}}\nu^{-\text{æ}}\right) - \text{æ}\nu\left(1+\theta\left(\frac{q}{\text{æ}}\right)^{\text{æ}}\nu^{-\text{æ}}\right)^{1/\text{æ}}}.$$

При достаточно больших ν можно разложить функции $\ln\left(1+\theta\left(\frac{q}{\text{æ}}\right)^{\text{æ}}\nu^{-\text{æ}}\right)$ и $\left(1+\theta\left(\frac{q}{\text{æ}}\right)^{\text{æ}}\nu^{-\text{æ}}\right)^{1/\text{æ}}$ в ряды Маклорена. Ограничиваясь первыми членами разложе-

ния, получим:

$$\psi(\tau)=\left(\frac{\varkappa\nu}{qe}\right)^{\varkappa\nu}\exp\left[-\left(\frac{q}{\varkappa}\right)^{2\varkappa}\frac{\theta^2}{2\varkappa}\nu^{1-2\varkappa}+O\left(\nu^{1-3\varkappa}\right)\right] \qquad (60)$$

или

$$\psi(\tau_{max}+\theta)=\psi(\tau_{max})\exp\left[-\left(\frac{q}{\varkappa}\right)^{2\varkappa}\frac{\theta^2}{2\varkappa}\nu^{1-2\varkappa}+O\left(\nu^{1-3\varkappa}\right)\right]=\psi(\tau_{max})\psi^*\left(\nu^{\frac{1}{2}-\varkappa}\theta\right)\exp\left[O(\nu^{1-3\varkappa})\right]. \qquad (61)$$

Функция $\psi^*\left(\nu^{\frac{1}{2}-\varkappa}\theta\right)$, как функция аргумента $\nu^{\frac{1}{2}-\varkappa}\theta$, при неограниченном возрастании ν стремится к плотности вероятности нормального закона распределения. Если $\varkappa=\frac{1}{2}$, то эта функция, и как функция от θ , будет иметь тот же вид. При $\varkappa>\frac{1}{2}$ кривая будет иметь все более острый максимум в точке $\theta=0$, а при $\varkappa<\frac{1}{2}$ будет иметь пределом единицу. Поэтому и способ оценки суммы $\varphi_*(x)$ по целым точкам будет различным в обоих случаях. Вернемся к этой оценке.

Нам удобно рассматривать некоторые множества целых точек в n-мерных пространствах.

Множество B^n всех целых точек n-мерного пространства разобьем на подмножества таких точек, у которых знаки всех координат одинаковы.

То множество, в котором координаты с номерами $j_1, j_2, j_3, \dots, j_s$ положительны, координаты с номерами $j_{s+1}, j_{s+2}, \dots, j_r$ отрицательны и координаты с номерами $j_{r+1}, j_{r+2}, \dots, j_n$ равны нулю , назовем $B^{(\rho^{(1)},\rho^{(2)},\rho^{(3)})}$, где $\rho^{(k)}$ $(k=1,2,3)$ - двоичные n-значные числа (мантиссы двоичных n-значных дробей). Число $\rho^{(1)}$ имеет единицы в разрядах с номерами $j_1, j_2, \dots, j_s$ и нули в остальных. Число $\rho^{(2)}$ имеет единицы в разрядах $j_{s+1}, j_{s+2}, \dots, j_r$ и нули в остальных, и, наконец, $\rho^{(3)}$ имеет единицы в разрядах $j_{r+1}, j_{r+2}, \dots$ $\dots, j_n$ и нули в остальных. Очевидно,

$$\rho^{(1)}\cup\rho^{(2)}\cup\rho^{(3)}=11\dots1=1-2^{-n};\ \rho^{(1)}\cap\rho^{(2)}=\rho^{(2)}\cap\rho^{(3)}=\rho^{(3)}\cap\rho^{(1)}=\varnothing. \qquad (62)$$

Вернемся к оценке сумм $\varphi_*(x)$ по целым точкам. Обозначим через Λ_n сумму:

$$\Lambda_n=\sum_{\beta\in B^{(1-2^{-n},0,0)}} e^{-q|\beta|^{1/\varkappa}}|\beta|^{\nu}, \qquad (63)$$

т.е. сумму значений $\psi(x)$ по всем внутренним точкам первого n-мерного ортанта.

Как доказано в добавлении,

$$\sum_{\beta} e^{-q|\beta|^{1/\varkappa}}|\beta|^{\nu}=\sum_{k=0}^{n}2^k\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\Lambda_k. \qquad (64)$$

Оценив, далее, Λ_k , мы получим оценку для искомой суммы $\psi[\beta]$ по всем целым точкам. Разобьем область интегрирования в интеграле J_n на кубики:

$$Q_\beta=\left\{x:\beta_j\leqslant x_j\leqslant\beta_j+1\right\}.$$

Мы будем иметь

$$J_n = \sum_{\beta\in\mathcal{X}_n} \int\limits_{Q_\beta} e^{-q r^{1/\varkappa}} r^{\nu} dx \geq \sum_{\beta\in\mathcal{X}_n} \min_{Q_\beta} \left(e^{-q r^{1/\varkappa}} r^{\nu}\right) \qquad (65)$$

где $\mathcal{X}_n$ обозначает множество всех целых точек с неотрицательными координатами в n-мерном пространстве. Посмотрим, в каких точках каждого кубика Q_β достигается минимум этой подынтегральной функции. Для этого проведем через все целые точки $\beta^{(0)}$ границы $\partial\mathcal{X}_n$ лучи

$$x_j = \beta_j^{(0)} + t, \quad t \geq 0. \qquad (66)$$

Каждая целая точка в $\mathcal{X}_n$ будет лежать на одном из лучей (66). Вдоль каждого такого луча функция $e^{-q r^{1/\varkappa}} r^{\nu}$ возрастает до точки $|x| = r_{max}$ и убывает при $|x| \geq r_{max}$. Этот луч пересекает некоторую цепочку кубиков Q_β, проходя через две противоположные вершины каждого из них, и состоит из диагоналей всех таких кубиков. Одна из этих диагоналей содержит внутри себя или на верхнем конце точку $|x| = r_{max}$ (см. рис. 1)

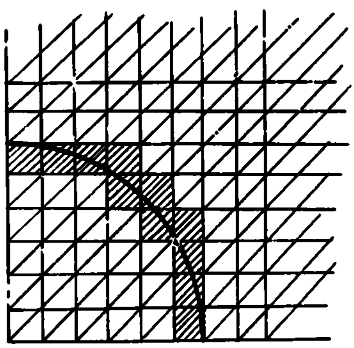

Рис. 1

Назовем соответствующий кубик экстремальным. На каждом луче, начинающемся в точке $\beta^{(0)}$, $|\beta^{(0)}| < r_{max}$ (назовем такие лучи внутренними), лежит диагональ одного и только одного экстремального кубика. На тех же лучах, где $|\beta^{(0)}| \geq r_{max}$ (их назовем внешними), экстремальных кубиков не будет. В кубиках Q_β, лежащих внутри шара $|x| = r_{max}$, минимальной точкой будет β -нижняя точка диагонали. Она лежит ближе всего к началу координат. Во внешних кубиках, лежащих вне этого шара (или имеющих с ним одну общую точку), минимум достигается в верхней точке диагонали: $\beta + E$, где $E_j = 1$. Наконец, в экстремальных кубиках положение минимума может быть различным. Если он достигается в двух точках такого кубика, условимся считать точкой минимума нижнюю его вершину $x = \beta$.

Каждая точка β множества $\mathcal{X}_n$ и каждая точка $\beta^{(0)}$ его границы $\partial\mathcal{X}_n$,

$|\beta^{(0)}| < r_{max}$, не принадлежащая экстремальному кубику, служат точками минимума в одном и только в одном кубике Q_β , где $\beta_j \geq 0$. Множество точек β, являющихся верхней или нижней вершинами одного из экстремальных кубиков, но не служащих точками минимума для $e^{-q r^{1/\varkappa}} r^\nu$ в этом кубике, обозначим через $B^{(экс)}$. Пусть B^- – множество точек, служащих точками минимума для $e^{-q r^{1/\varkappa}} r^\nu$ каждая в каком-нибудь кубике. Мы имеем:

$$B_- = \Big(B^{(1-2^{-n};\, 0,0)} \bigcup_{\substack{\rho^{(1)}>0;\, \rho^{(3)}\neq 0 \\ |\beta^{(0)}| < r_{max}}} B^{(\rho^{(1)};\, 0, \rho^{(3)})}\Big) \setminus B^{(экс)} . \tag{67}$$

Возвращаясь к формуле (65), будем иметь:

$$J_n \geq \sum_{\beta\in B^-} e^{-q|\beta|^{1/\varkappa}} |\beta|^\nu . \tag{68}$$

Отбрасывая в правой части (68) все точки $B^{(\rho^{(1)};\, 0,\rho^{(3)})}$ с $\rho^{(3)} \neq 0$ и добавляя к обеим частям сумму $e^{-q r^{1/\varkappa}} r^\nu$ по всем $B^{(экс)}$, получим, пользуясь (57),

$$\Lambda_n = \sum_{\beta\in B^{(1-2^{-n};\, 0,0)}} e^{-q|\beta|^{1/\varkappa}} |\beta|^\nu \leq \frac{2^{1-n}\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \varkappa \cdot \frac{\Gamma(\varkappa(\nu+n))}{q^{\varkappa(\nu+n)}} + \sum_{\beta\in B^{(экс)}} e^{-q|\beta|^{1/\varkappa}} |\beta|^\nu . \tag{69}$$

Число экстремальных кубиков совпадает с числом внутренних лучей (66) и равно числу N_n целых точек границы первого координатного угла, лежащих внутри шара радиуса r_{max} . Заменяя в правой части (69) каждое слагаемое максимальным значением $\varphi[\beta]$ и пользуясь тем, что число N_n выражается формулой (см. добавление, § 4)

$$N_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \mathcal{K}_{n-k}\,(r_{max}),$$

получим окончательно

$$\Lambda_n = \sum_{\beta\in B^{(1-2^{-n};\, 0,0)}} e^{-q|\beta|^{1/\varkappa}} |\beta|^\nu \leq \frac{2^{1-n}\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \varkappa \frac{\Gamma(\varkappa(\nu+n))}{q^{\varkappa(\nu+n)}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \mathcal{K}_{n-k}(r_{max}) \left(\frac{\varkappa\nu}{qe}\right)^{\varkappa\nu} . \tag{70}$$

Т е о р е м а 12. <u>Число</u> Λ_n – <u>сумма по целым положительным точкам функции</u> $e^{-q r^{1/\varkappa}} r^\nu$ <u>удовлетворяет неравенству</u>

$$\Lambda_n < \mathcal{K}\left(\frac{\varkappa\nu}{qe}\right)^{\varkappa\nu} \nu^{\varkappa n + max\left(\frac{1}{2}, -\varkappa\right)} = \mathcal{K}\nu^{\varkappa\nu}\left(\frac{\varkappa}{qe}\right)^{\varkappa\nu} \nu^{\varkappa n + max\left(\frac{1}{2}, -\varkappa\right)} . \tag{71}$$

Для доказательства оценим каждое слагаемое формулы (70) по отдельности. В силу формулы Стирлинга

$$\Gamma(\varkappa(\nu+n))<\sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa(\nu+n)}}\left(1-\frac{n}{n+\nu}\right)^{-\varkappa(\nu+n)}\left(\frac{\varkappa}{e}\right)^{\varkappa(\nu+n)}\cdot\nu^{\varkappa(\nu+n)}\leqslant\mathcal{K}\nu^{\varkappa\nu}\left(\frac{\varkappa}{e}\right)^{\varkappa\nu}\nu^{\varkappa n-\frac{1}{2}}.$$

Оценивая затем с помощью (89) сумму во втором слагаемом (70) и замечая, что все члены этой суммы пренебрежимо малы по сравнению с первыми, получим:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\mathcal{K}_{n-k}(\tau_{max})\left(\frac{\varkappa\nu}{qe}\right)^{\varkappa\nu}\leqslant\mathcal{K}\left(\frac{\varkappa\nu}{qe}\right)^{\varkappa\nu}\cdot\left(\frac{\varkappa\nu}{q}\right)^{\varkappa(n-1)}\mathcal{K}_1\nu^{\varkappa\nu}\left(\frac{\varkappa}{qe}\right)^{\varkappa\nu}\nu^{\varkappa(n-1)}.$$

Возвращаясь к (70), получим формулу (71) - основное утверждение теоремы.

С л е д с т в и е. Функция $\varphi_*(x)$ принадлежит классу $H(\varkappa,A,\lambda)$ при $A=2\pi\left(\frac{\varkappa}{se}\right)^{\varkappa}$, $\lambda=\varkappa\left(\mu+\frac{n}{2}\right)+max\left(-\frac{1}{4},-\frac{\varkappa}{2}\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно формулам (52) и (64) норма функции $\varphi_*(x)$ определяется из равенства

$$\|\varphi_*|\tilde{L}_2^{(m)}\|^2=(2\pi)^{2m}\sum_{k=0}^{n}2^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\Lambda_k,$$

где Λ_k - сумма по целым положительным точкам k-мерного пространства функции $e^{-q|\beta|^{1/\varkappa}}|\beta|^{\nu}$ при $q=2s$, $\nu=2m+2\mu$.

Подставляя оценку (71) для Λ_k и пренебрегая всеми членами, кроме главного, будем иметь для $\|\varphi_*|\tilde{L}_2^{(m)}\|$ неравенство

$$\|\varphi_*|\tilde{L}_2^{(m)}\|\leqslant\mathcal{K}\left(\frac{\varkappa(m+\mu)}{se}\right)^{\varkappa(m+\mu)}(2\pi)^m[2(m+\mu)]^{\frac{\varkappa n}{2}+max\left(-\frac{1}{4},-\frac{\varkappa}{2}\right)}.$$

Из этого неравенства следует, подобно прежнему, что

$$s=\frac{\varkappa}{e}\left(\frac{A}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{\varkappa}};\ \mu=-\frac{n}{2}+\frac{\lambda}{\varkappa}+min\left(\frac{1}{4\varkappa},\frac{1}{2}\right),\tag{72}$$

$$\|\varphi_*|\tilde{L}_2^{(m)}\|\leqslant\mathcal{K}m^{\varkappa m}\left[2\pi\left(\frac{\varkappa}{se}\right)^{\varkappa}\right]^m m^{\varkappa\left(\frac{n}{2}+\mu\right)+max\left(-\frac{1}{4},-\frac{\varkappa}{2}\right)}.\tag{73}$$

Следствие доказано.

Вернемся теперь к оценке снизу суммы

$$N^{\mu}\sum_{\beta\neq0}e^{-q|\beta|^{1/\varkappa}}|\beta|^{\nu}$$

при $q=sN^{1/\varkappa}$ и $\nu=\mu$.

При достаточно большом N в этой сумме все слагаемые, кроме первых, отвечающих $\beta_j=1$, $\beta_s=0$, $s\neq j$; $j=1,2,\dots,n$, будут пренебрежимо малы-

ми по сравнению с первыми, и сумма выразится формулой:

$$\sum_{\beta} e^{-|N|^{1/x}|\beta|^{1/x}} N^{\mu}|\beta|^{\mu} \simeq h^{-\mu} e^{-\frac{x}{e}\left(\frac{A}{2\pi}\right)^{-1/x} h^{-1/x}} =$$

$$= h^{-\mu} exp\left[-\frac{x}{e} B^{-1} h^{-1/x}\right] h^{-\left(\frac{\lambda}{x}-\frac{n}{2}+\min\left(\frac{1}{4x},\frac{1}{2}\right)\right)} exp\left(-\frac{x}{e} B^{-1} h^{-1/x}\right), \qquad (74)$$

где $B = \left(\frac{A}{2\pi \tau_{min}}\right)^{1/x}$ (τ_{min} в данном примере равно 1). Откуда

$$|(\ell_h, \varphi_*)| > \mathcal{K} exp\left[-\frac{x}{e} B^{-1} h^{-\frac{1}{x}}\right] \cdot h^{-\left(\frac{\lambda}{x}-\frac{n}{2}+\min\left(\frac{1}{4x},\frac{1}{2}\right)\right)}. \qquad (75)$$

Сравнивая с (42), мы видим, что в классе $H(x,A)$ оценка погрешности является неулучшаемой более чем на множитель $h^{n/2-\min\left(\frac{1}{4x},\frac{1}{2}\right)}$ степенного роста.

Покажем еще неулучшаемость в том же смысле оценок (42) ни для каких формул с заданной решеткой узлов и любыми коэффициентами.

Т е о р е м а 13. Какова бы ни была кубатурная формула в кубе Ω_0, $0 \le x_j \le 1$, с узлами в точках решетки

$$\ell(x) = 1 - \sum_{h\gamma\in\Omega_0} h^n c[\gamma]\, \delta(x-h\gamma), \qquad (76)$$

где $\sum_{h\gamma\in\Omega_0} c[\gamma] = 1$, по крайней мере для одной из N^n функций $\varphi_\beta = \varphi_*(x-h\beta)$ погрешность при интегрировании будет по абсолютной величине больше, чем

$$\mathcal{K} h^{-\left(\frac{\lambda}{x}-\frac{n}{2}+\min\left(\frac{1}{4x},\frac{1}{2}\right)\right)} exp\left(-\frac{x}{e} B^{-1} h^{-\frac{1}{x}}\right). \qquad (77)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем рассматривать функции $\varphi_\beta(x)$ как заданные на единичном торе и рассмотрим среднее арифметическое погрешностей кубатурных формул для всех функций

$$\frac{1}{N^n}\sum_{\beta}(\ell, \varphi_\beta(x)) = \frac{1}{N^n}\sum_{\beta}(\ell(x+\beta h), \varphi_*(x)) = \left(\frac{1}{N^n}\sum_{\beta}(\ell(x+\beta h), \varphi_*(x))\right).$$

Поскольку $\sum_{\beta} \ell(x+\beta h) = N^n - \sum_{\beta,\gamma} h^n c[\gamma+\beta]\, \delta(x-h\gamma)$

и формула интегрирует постоянную точно, следовательно, $\sum_{\beta} c[\gamma+\beta] = N^n$, и, значит, $\frac{1}{N^n}\sum_{\beta}(\ell(x), \varphi_\beta(x)) = (\ell_h(x), \varphi(x))$, где ℓ_h – оптимальный функционал.

Но если среднее арифметическое нескольких чисел больше их абсолютной величи-

ны, то по крайней мере одно из них больше этой величины, что и требовалось доказать.

§ 4. Добавление. Некоторые формулы для чисел целых точек внутри и на сторонах координатных углов

В предыдушем параграфе нами были введены множества $B^{(\rho^{(1)},\rho^{(2)},\rho^{(3)})}$. Займемся подсчетом числа точек в каждом из них, лежащих внутри шара $|\beta|< x$. Суммируя какую-нибудь функцию, зависящую только от $|\beta|$, по целым точкам, удобно вести подсчет отдельно по каждому множеству $B^{(\rho^{(1)},\rho^{(2)},\rho^{(3)})}$.

Имеем

$$\sum_{\beta\in B}\psi(|\beta|)=\sum_{\rho^{(1)},\rho^{(2)},\rho^{(3)}}\left[\sum_{\beta\in B^{(\rho^{(1)},\rho^{(2)},\rho^{(3)})}}\psi(|\beta|)\right].$$

Внутренние суммы, у которых размерности $\rho^{(3)}$ одинаковы, совпадают друг с другом. Обозначим сумму по τ-мерному многообразию $B^{(\rho^{(1)},\rho^{(2)},\rho^{(3)})}$, $\dim\rho^{(3)}=n-\tau$, через $\overset{\tau}{\sum}\psi(|\beta|)$. Принимая во внимание, что число всех множеств $B^{(\rho^{(1)},\rho^{(2)},\rho^{(3)})}$ при фиксированном $\rho^{(3)}$ равно 2^{τ}, и вводя обозначение

$$\overset{\tau}{\sum}\psi(|\beta|)=\sum_{\beta\in B^{(\rho^{(1)},\rho^{(2)},\rho^{(3)})}}\psi(|\beta|),$$

получим

$$\sum_{\beta\in B}\psi(|\beta|)=\sum_{k=0}^{n}2^{k}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\overset{k}{\sum}\psi(|\beta|)\tag{78}$$

и, в частности, (64). В качестве первого полезного примера рассмотрим функцию

$$\omega_x(y)=\begin{cases}1, & |y|<x,\\ 0, & |y|\geq x.\end{cases}\tag{79}$$

Пользуясь (78), мы сможем найти выражение для числа целых внутренних точек ортантов (координатных углов) разных размерностей, заключенных внутри шара $|y|<x$. Полагая $\overset{\tau}{\sum}\omega_x(y)=\mathcal{K}_\tau(x)$, будем иметь для $\mathcal{A}_n(x)$ – числа целых точек внутри n-мерного шара:

$$\mathcal{A}_n(x)=\sum_{k=0}^{n}2^{k}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\mathcal{K}_k(x).\tag{80}$$

Эти равенства можно рассматривать как систему уравнений относительно $\mathcal{K}_k(x)$.

Полагая

$$\frac{\mathcal{A}_n(x)}{n!}=z_n,\quad \frac{2^k\mathcal{K}_k(x)}{k!}=y_k,$$

преобразуем эту систему к виду:

$$z = \mathcal{A} y, \tag{81}$$

где $\mathcal{A}$ - треугольная матрица:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что умножение двух треугольных матриц вида

$$L = \begin{pmatrix} l_0 & 0 & 0 & \dots \\ l_1 & l_0 & 0 & \dots \\ l_2 & l_1 & l_0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & l_0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & 0 & \dots \\ m_1 & m_0 & 0 & \dots \\ m_2 & m_1 & m_0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & m_0 \end{pmatrix} \tag{82}$$

дает снова треугольную матрицу того же вида

$$LM = K = \begin{pmatrix} k_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_1 & k_0 & 0 & \dots & 0 \\ k_2 & k_1 & k_0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & k_0 \end{pmatrix}. \tag{83}$$

Приведем каждой матрице L и M в соответствие производящую функцию её коэффициентов

$$L(x) = \sum_{j=0}^{\infty} l_j x^j; \quad \mathcal{M}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} m_j x^j; \quad \mathcal{K}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} k_j x^j. \tag{84}$$

Имеет место соотношение

$$\mathcal{K}(x) = L(x)\mathcal{M}(x). \tag{85}$$

Производящей функцией для матрицы $\mathcal{A}$ является e^x. Следовательно, для $\mathcal{A}^{-1}$ производящая функция будет равна e^{-x}. Таким образом, получится

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{1!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & -\frac{1}{1!} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix},$$

и, значит, окончательно

$$\mathcal{K}_k(x) = \frac{k!}{2^k}\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{k-j}}{j!\,(k-j)!}\,\mathcal{A}_j(x). \tag{86}$$

Рассмотрим ещё множество точек замкнутого координатного ортанта $x_j \geqslant 0$. Это множество, очевидно, имеет вид

$$\overline{\mathcal{K}} = \bigcup B^{(\rho^{(1)}, 0, \rho^{(3)})}, \tag{87}$$

отсюда следует, что множество граничных точек $\overline{\mathcal{K}} \setminus \mathcal{K}$, которое будет нам полезно и в дальнейшем, представимо в виде:

$$\overline{\mathcal{K}} \setminus \mathcal{K} = \dot{\overline{\mathcal{K}}} \setminus B^{(1-2^{-n}, 0, 0)} = \bigcup_{\rho^{(3)} \neq 0} B^{(\rho^{(1)}, 0, \rho^{(3)})}.$$

Нам нужно будет оценить еще число $N_n(x)$ целых граничных точек, замкнутого координатного ортанта $x_j \geqslant 0$, лежащих внутри шара x. Мы будем иметь

$$N_n(x) = \sum_{\substack{\beta:\, \exists \beta_j = 0 \\ \rho^{(2)} = 0}} \omega_x(|\beta|) = \sum_{\rho_1, \rho_3 \neq 0} \sum_{\beta \in B^{(\rho^{(1)}, 0, \rho^{(3)})}} \omega_x(|\beta|).$$

Напомним, что число всех множеств $B^{(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \rho^{(3)})}$ данной размерности $n-k$ равно $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, а сумма по целым точкам:

$$\sum_{\beta \in B^{(\rho^{(1)}, 0, \rho^{(3)})}} \omega_x(|\beta|) = \mathcal{K}_{n-k}(x).$$

Мы будем иметь

$$N_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\mathcal{K}_{n-k}(x). \tag{88}$$

Формула (86) позволяет находить выражение для $\mathcal{K}_{n-k}(x)$ через хорошо изученную в [2, стр. 41] функцию $\mathcal{A}_k(x)$. Мы будем иметь с достаточной точностью

$$\mathcal{K}_n(x) = \frac{\pi^{n/2} x^n}{2^n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \tag{89}$$

Литература

1. С о б о л е в С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.,"Наука", 1974.
2. В а л ь ф и ш А.З. Целые точки в многомерных шарах. Тбилиси, 1959, 460 с.