УДК 517.946

ОБ ОБОБЩЕННОЙ РАЗРЕШИМОСТИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО АНАЛОГА ЗАДАЧИ ТРИКОМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

В. Н. Врагов (Новосибирск)

Рассмотрим уравнение смешанного типа:

$$Lu = k(z)u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + a(x,y,z)u = f, \tag{1}$$
$$k(z) = |z|^m \operatorname{sign} z, \quad m \geq 2,$$

в ограниченной, односвязной области $D \subset R^3$ с кусочно-гладкой границей Γ, состоящей при $z>0$ из поверхности σ, а при $z<0$ из поверхностей:

$$\gamma_1: \ (m+2)x = 2|z|^{\frac{m+2}{2}}, \qquad \gamma_3: \ n_1 = 0, \ n_2 < 0, \ n_3 \leq 0,$$
$$\gamma_2: \ (m+2)(1-x) = 2|z|^{\frac{m+2}{2}}, \qquad \gamma_4: \ n_1 = 0, \ n_2 > 0, \ n_3 \leq 0.$$

Поверхности γ_3, γ_4 проходят соответственно через прямые $z=0$, $y=h_1>0$; $z=0$, $y=h_2<0$, где через $n=(n_1,n_2,n_3)$ обозначен вектор внутренней нормали. Через P обозначим прямоугольник $P=\{0<x<1, \ h_2<y<h_1\}$, лежащий в плоскости $z=0$. Отметим, что поверхности γ_1, γ_2 являются характеристическими для уравнения (1).

З а д а ч а Т р и к о м и. Найти решение уравнения (1) в области D, принимающее наперед заданные значения на поверхностях $\sigma, \gamma_1, \gamma_3, \gamma_4$, т.е.

$$u|_\sigma = \varphi(x,y,z), \quad u|_{\gamma_1+\gamma_3+\gamma_4} = \psi(x,y,z). \tag{2}$$

Следует отметить, что задача (1)-(2) при $m=1$ изучалась в работах [1-2], где при некоторых, достаточно жестких ограничениях геометрического характера на поверхность σ была доказана единственность сильных решений и существование слабых решений задачи Трикоми из пространства $L_2(D)$.

В настоящей работе при некоторых предположениях на коэффициент $a(x,y,z)$ без ограничений геометрического характера на поверхность σ получены априорные оценки для решений задачи Трикоми с однородными граничными условиями, из которых следует единственность сильных решений и решений из класса R_T, и существование слабых обобщенных решений из весового пространства.

С о п р я ж е н н а я   з а д а ч а   Т р и к о м и. Найти решение уравнения (1) в области D , так что

$$u\big|_{\sigma}=0, \quad u\big|_{\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4}=0. \qquad (2^*)$$

Всюду ниже через C_T, C_{T*} будем обозначать классы дважды непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\bar{D}$ функций и функций, обращающихся в нуль соответственно на поверхностях $\sigma, \gamma_1, \gamma_3, \gamma_4$ и $\sigma, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.

Положим $D^{\pm}=\{(x,y,z)\in D:\ z\gtrless 0\}$, $\Gamma^{-}=\Gamma\setminus\sigma$. Обозначим через H_1, H_1^* пространства функций, полученные замыканием соответственно классов функций C_T, C_{T*} в норме

$$\|u\|^2_{H_1}=\int_{D^+}(z^m u_x^2+u_y^2+u_z^2)\,dD^+ +\int_D u^2\,dD,$$

и через H^*_{-1} обозначим пространство, полученное замыканием пространства $L_2(D)$ по норме

$$\|f\|_{H^*_{-1}}=\sup_{v\in H_1^*}\frac{(f,v)}{\|v\|_{H_1^*}},$$

где $(f,v)=\int_D f v\,dD$.

О п р е д е л е н и е. Функцию $u(x,y,z)$ назовем решением однородной задачи (1)-(2) из класса R_T , если

$$u(x,y,z)\in C(\bar{D})\cap C^1(D)\cap C^2(D^+)\cap C^2(D^-)\cap H_1(D)$$

удовлетворяет в областях D^+, D^- уравнению (1) и

$$u\big|_{\sigma}=0, \quad u\big|_{\gamma_1+\gamma_3+\gamma_4}=0,$$

кроме того, функция $\varphi(x,y)=u(x,y,0)u_z(x,y,0)$ суммируема в прямоугольнике P, $u_y(x,y,z)\in L_2(D)$ и к интегралам $\int_D uLu\,dD$, $\int_{D^-}u_xLu\,dD^-$, $\int_{D^-}u_zLu\,dD^-$ можно применить формулу Грина.

Положим

$$\ell u=\begin{cases}0, & z\geq 0\\ \frac{4}{m}\left(zu_z+|z|^{\frac{m}{2}+1}u_x\right), & z\leq 0.\end{cases}$$

Т е о р е м а 1. <u>Пусть коэффициент</u> $a(x,y,z)\in C^1(D^-)$ <u>и</u>

$$a(x,y,z)\leq 0,\ (x,y,z)\in D;\quad (az)_z+a_x|z|^{\frac{m}{2}+1}\geq 0 \quad (x,y,z)\in D^-.$$

<u>Тогда для всех функций из класса</u> R_T <u>имеет место неравенство</u>

$$|(Lu,\ell u+u)|\geq\int_{D^+}(z^m u_x^2+u_y^2+u_z^2-au^2)\,dD^+ + \frac{m+2}{m}\int_{D^-}\left((|z|^{\frac{m}{2}}u_x-u_z)^2+\frac{m-2}{m+2}u_y^2-au^2\right)dD^-, \qquad (3)$$

из которого следует единственность решений задачи Трикоми в классе R_T.

Доказательство. Рассмотрим интегралы

$$\int_{D^+} uLu\,dD^+, \quad \int_{D^-} uLu\,dD^-.$$

После интегрирования по частям с учетом однородных краевых условий получим

$$\int_{D^+} uLu\,dD^+ = -\int_{D^+} (z^m u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - au^2)\,dD^+ - \int_P uu_z\,dP, \tag{4}$$

$$\int_{D^-} uLu\,dD^- = \int_{D^-} (|z|^m u_x^2 - u_y^2 - u_z^2 + au^2)\,dD^- + \int_P uu_z\,dP +$$
$$+ \int_{\gamma_2} u(u_z dx dy - |z|^m u_x dy dz) = I_1 + I_2 + I_3, \tag{5}$$

где через I_1 обозначим интеграл по области, через I_2 – интеграл по прямоугольнику P.

Далее, так как на характеристической поверхности γ_2 выполняется $dx = |z|^{\frac{m}{2}} dz$, то интеграл I_3 на поверхности γ_2 примет вид

$$I_3 = \int_{\gamma_2} |z|^{\frac{m}{2}} u(u_z dz dy - u_x dy dx).$$

На основании формулы Стокса и теоремы Пуанкаре [3], а так же в силу того, что функция $u(x,y,z)$ на границе поверхности γ_2, по условию, равна нулю и направляющая нормали $n_1\big|_{\gamma_2} < 0$, получим

$$I_3 = \frac{m}{4}\int_{\gamma_2} |z|^{\frac{m}{2}-1} u^2 dz dy = \frac{m}{4}\int_{\gamma_2} |z|^{\frac{m}{2}-1} u^2 n_1 dS \le 0. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь в области D^- интеграл $(Lu, \ell u)$, после интегрирования по частям имеем

$$(Lu,\ell u) = -\frac{2}{m}\int_{D^-}\Big\{(m+1)|z|^m u_x^2 - (m+2)|z|^{\frac{m}{2}} u_x u_z + u_z^2 - u_y^2 + \big[(az)_z + |z|^{\frac{m}{2}+1} a_x\big]u^2\Big\}dD^-$$
$$+\frac{2}{m}\int_{\Gamma^-} |z|\Big\{(|z|^{\frac{m}{2}} u_x - u_z)^2(n_3 + |z|^{\frac{m}{2}} n_1) + u_y^2(|z|^{\frac{m}{2}} n_1 - n_3) + 2u_y(u_z - u_x|z|^{\frac{m}{2}})n_2 + au^2(n_3 - |z|^{\frac{m}{2}} n_1)\Big\}dS. \tag{7}$$

На характеристических поверхностях γ_1, γ_2 имеем $\gamma_1: n_2 = 0,\ n_3 = |z|^{\frac{m}{2}} n_1$; $\gamma_2: n_2 = 0,\ n_3 = -|z|^{\frac{m}{2}} n_1,\ n_1 < 0$, и из однородного краевого условия (2) на $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4$ имеют место равенства $u_x = u_n n_1,\ u_y = u_n n_2,\ u_z = u_n n_3$, $u_n = u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3$.

Из вышесказанного следует, что интеграл по границе Γ^- равен интегралу

$$I_4 = \frac{4}{m}\int_{\gamma_2} |z|^{\frac{m}{2}+1} u_y^2 n_1 dS + \frac{2}{m}\int_{\gamma_3+\gamma_4} |z| u_n^2 n_3\,dS + \frac{4}{m}\int_{\gamma_2} |z| a u^2 n_3 dS, \tag{8}$$

и из предположений на поверхности γ_3, γ_4 получим $I_4 \le 0$.

Сложив теперь интегралы (4), (5), (7) с учетом неравенств (6), (8) и условий на коэффициент $a(x,y,z)$, получим утверждение теоремы. На

основании теоремы 1, легко доказать

Следствие. При выполнении условий теоремы 1 и условия $(az)_z - a_x|z|^{\frac{m}{2}+1} \geq 0$ для всех функций $V \in C_{T*}$ имеет место неравенство

$$|(Lv_1, \ell_1 v + v)| \geq \int_{D^+}(z^m v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\,dD^+ + \frac{m+2}{m}\int_{D^-}\left\{(|z|^{\frac{m}{2}} v_x + v_z)^2 + \frac{m-2}{m+2}u_y^2\right\}dD^-, \quad (9)$$

где

$$\ell_1 v = \begin{cases} 0, & z \geq 0, \\ |z|\,(v_z + |z|^{\frac{m}{2}} v_x\,), & z < 0. \end{cases}$$

Доказательство следствия следует из того, что при замене $x' = 1 - x$, $y' = y$, $z' = z$ уравнение (1) не изменяется, а характеристические поверхности γ_1 и γ_2 меняются местами.

Определение. Функцию $u(x,y,z) \in H_1(D)$ будем называть слабым обобщенным решением задачи Трикоми, если для всех функций $v \in C_{T*}$ имеет место тождество $(u, Lv) = (f, v)$ $\forall v \in C_{T*}$.

Теорема 2. Пусть коэффициент $a(x,y,z) \in C^1(\bar{D})$, $m > 2$,

$$a(x,y,z) \leq 0, \ (x,y,z) \in D; \ (az)_z - |a_x|\,|z|^{\frac{m}{2}+1} \geq 0 \quad (x,y,z) \in D^-.$$

Тогда для любой функции $f \in H_{-1}^*$ существует слабое обобщенное решение задачи Трикоми из пространства $H_1(D)$.

Доказательство. Так как, по предположению, на коэффициент $a(x,y,z)$ выполнены условия теоремы 1 и следствия, то имеет место неравенство (9).

Применяя к левой части неравенства (9) неравенство Шварца и Коши, получим неравенство

$$\|Lv\|_{H_{-1}^*} \geq C\,\|V\|_{H_1^*} \quad \forall v \in C_{T*}, \quad (10)$$

где константа C не зависит от функции $V(x,y,z)$. Но, как известно [4], неравенство (10) является необходимым и достаточным условием для слабой разрешимости краевой задачи, и тем самым теорема доказана.

Литература

1. Каратопраклиев Г.Д. Существование слабых решений одной краевой задачи для уравнения смешанного типа в многомерных обрастях. – "Докл. АН СССР", 1970, т. 193, № 6, с. 1226–1229.
2. Каратопраклиев Г.Д. Об уравнениях смешанного типа и вырождающихся гиперболических уравнениях в многомерных областях. – "Дифференц. уравнения", 1972, т. 8, № 1, с. 55–67.

3. К а р т а н Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М., Изд-во Моск. ун-та, 1962.

4. Б е р е з а н с к и й Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных эллиптических операторов, Киев, "Наукова Думка", 1965.