УДК 517.946

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА

А.И.Кожанов (Новосибирск)

В ограниченной области $\mathcal{D}$, лежащей в полуплоскости $y \geq 0$, рассмотрим оператор

$$Lu = K(x,y)A(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx} + u_{yy} + b(x,y,u,u_x,u_y).$$

Предположим, что $K(x,y) \in C^2(\bar{\mathcal{D}})$, $K(x,y) > 0$ при $y > 0$, $K(x,0) = 0$; $A(x,y,\xi,\eta_1,\eta_2)$ и $b(x,y,\xi,\eta_1,\eta_2)$ - достаточно гладкие функции, причем $A(x,y,\xi,\eta_1,\eta_2)$ удовлетворяет условию $0 < \alpha_0 \leq A(x,y,\xi,\eta_1,\eta_2) \leq \nu(|\xi|)$, где $\nu(|\xi|)$ - ограниченная при ограниченных ξ функция.

Для оператора L рассмотрим задачу Дирихле: найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую в $\mathcal{D}$ уравнению

$$Lu = 0 \tag{1}$$

и условию

$$u|_\Gamma = 0 \qquad (\Gamma = \partial\mathcal{D}). \tag{2}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим оператор

$$L_\varepsilon u = K_\varepsilon(x,y)A(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx} + u_{yy} + b(x,y,u,u_x,u_y),$$

где $K_\varepsilon = K + \varepsilon$. Как известно [1], при некоторых условиях гладкости на функции $A(x,y,\xi,\eta_1,\eta_2)$, $b(x,y,\xi,\eta_1,\eta_2)$, при условии равномерной эллиптичности и некоторых условиях на функцию $b(x,y,\xi,\eta_1,\eta_2)$, которые будут указаны ниже, всегда существует решение задачи Дирихле для уравнения $L_\varepsilon u = 0$ при $\varepsilon > 0$. Мы воспользуемся этим фактом и получим обобщенное решение задачи (1)-(2) как предел в некотором пространстве гладких решений уравнений $L_\varepsilon u = 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Обозначим через $W^2_{2,L}$ замыкание функций из $C_0^\infty(\mathcal{D})$ по норме

$$\|u\|^2_{2,L} = \int_{\mathcal{D}} (K^2 u_{xx}^2 + K u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\,d\mathcal{D} + \|u\|_1^2 .$$

Л е м м а 1. <u>Пусть выполнены следующие условия:</u>

1. $b(x,y,\xi,0,0)\,\mathrm{sign}\,\xi \leq 0$ при $|\xi| > M$, $(x,y) \in \bar{\mathcal{D}}$;

II. $|b(x,y,\xi,\eta_1,\eta_2)| \le \mu_1(|\xi|)(1+|\eta_1|+|\eta_2|)$, $|\frac{\partial b}{\partial \xi}(x,y,\xi,\eta_1,\eta_2)| \le \mu_2(|\xi|)$,

$|\frac{\partial b}{\partial \eta_2}(x,y,\xi,\eta_1,\eta_2)| \le \mu_3(|\xi|)$, $\frac{\partial b}{\partial \eta_1}(x,y,\xi,\eta_1,\eta_2) \ge m > 0$

при всех $(x,y)\in \bar{\mathcal{D}}$, $\xi \in R$, $(\eta_1,\eta_2)\in R^2$; здесь $\mu_i(|\xi|)$ – ограниченные при ограниченных ξ функции.

III. $0 < a_0 \le A(x,y,\xi,\eta) \le C(1+K(x,y)\nu_1(|\xi|))$; $\nu_1(|\xi|)$ – ограниченная при ограниченных ξ функция.

IV. $|K_x(x,y)| \le C\,K(x,y)$, $(x,y)\in\bar{\mathcal{D}}$.

Далее, пусть область $\mathcal{D}$ примыкает к оси $y=0$ некоторым малым прямоугольником P со сторонами, параллельными осям координат.

Если выполнены все вышеперечисленные условия, то для гладких решений однородной задачи Дирихле для уравнения $L_\varepsilon u = 0$ $(\varepsilon > 0)$ справедлива оценка

$$\|u\|_{2,L} \le M_1, \tag{3}$$

где постоянная M_1 не зависит от u и ε .

Доказательство. Пусть функция $u(x,y)\in C^2(\mathcal{D})$ и обращается в нуль в прямоугольнике P . Для таких функций неравенство (3) известно (см. [1]). Далее, пусть функция $u(x,y)$ обращается в нуль вне P . Рассмотрим интеграл $(L_\varepsilon u, K_\varepsilon u_{xx})$

$$\int_P L_\varepsilon u\cdot K_\varepsilon u_{xx}\,dP = \int_P\Big\{K_\varepsilon^2 A(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx}^2 + K_\varepsilon u_{xx}u_{yy} + K_\varepsilon b(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx}\Big\}dP.$$

Из условия 1 следует оценка

$$\operatorname{vraimax}_{\mathcal{D}}|u| \le M. \tag{4}$$

Далее, используя условие II, так же, как в работах [2, 3] , можно доказать оценку

$$\int_P (K_\varepsilon^2 u_{xx}^2 + K_\varepsilon u_{xy}^2)\,dP \le \delta\int_P K_\varepsilon^2 u_{xx}^2\,dP + M(\delta)\|u\|_1^2 + M'(\delta), \tag{5}$$

где $\delta > 0$. Рассмотрим интеграл:

$$\begin{aligned}\int_P L_\varepsilon u\cdot u_x\,dP &= \int_P\Big\{K_\varepsilon A(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx}u_x + u_{yy}u_x + b(x,y,u,u_x,u_y)u_x\Big\}dP = \int_P\Big\{K_\varepsilon A(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx}u_x + u_{yy}u_x +\\ &+ \int_0^1\Big[\frac{\partial b(x,y,\tau u,\tau u_x,\tau u_y)}{\partial\xi}uu_x + \frac{\partial b(x,y,\tau u,\tau u_x,\tau u_y)}{\partial\eta_1}u_x^2 +\\ &+ \frac{\partial b(x,y,\tau u,\tau u_x,\tau u_y)}{\partial\eta_2}u_xu_y\Big]d\tau - b(x,y,0,0,0)\Big\}dP.\end{aligned}$$

Используя условия II,III, оценку (4), интегрируя, где нужно, по частям и применяя неравенства Гёльдера и Юнга, нетрудно получить оценку

$$m_1\int_P u_x^2\,dP \le \delta_1\int_P (K_\varepsilon^2 u_{xx}^2 + K_\varepsilon u_{xy}^2)\,dP + M(\delta_1) + M'\int_P u_y^2\,dP. \tag{6}$$

Осталось оценить интеграл с u_y^2. Рассматривая в P интеграл $(L_\varepsilon u, u)_0$ и применяя оценку (4) и условия П, Ш, нетрудно доказать неравенство

$$\int_P u_y^2\,dP \leqslant \delta_2 \int_P u_x^2\,dP + \delta_3 \int_P K_\varepsilon^2 u_{xx}^2\,dP + M(\delta_2, \delta_3). \tag{7}$$

Соединяя неравенства (5)-(7) и подбирая $\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ достаточно малыми, получаем неравенство

$$\int_P (K_\varepsilon^2 u_{xx}^2 + K_\varepsilon u_{xy}^2)\,dP \leqslant C_1, \tag{8}$$

где постоянная C_1 не зависит от u и ε.

Далее, из неравенств (4), (6)-(8) следует оценка

$$\int_P (u_x^2 + u_y^2 + u^2)\,dP \leqslant C_2, \tag{9}$$

где C_2 не зависит от u.

Наконец, из уравнения $L_\varepsilon u = 0$ и неравенств (8), (9) следует оценка

$$\int_P u_{yy}^2\,dP \leqslant C_3.$$

Суммируя полученные неравенства, имеем

$$\int_P (K_\varepsilon^2 u_{xx}^2 + K_\varepsilon u_{xy}^2 + u_{yy}^2 + u_x^2 + u_y^2 + u^2)\,dP \leqslant M''. \tag{10}$$

Разбиением единицы (как в [2]) можно из оценки (10) и известных результатов (см. [1]) получить оценку (3). Лемма доказана.

Т е о р е м а 1. Пусть функции $A(x,y,\xi,\eta_1,\eta_2)$, $b(x,y,\xi,\eta_1,\eta_2)$, $K(x,y)$ и граница области $\mathcal{D}$ удовлетворяют нужным условиям гладкости и условиям 1-1У леммы. Тогда всегда существует функция $u(x,y)$ из пространства $W_{2,L}^2$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду в $\mathcal{D}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\varepsilon > 0$ обозначим через u^ε решение однородной задачи Дирихле для уравнения $L_\varepsilon u = 0$. Из леммы следует, что последовательность функций $\{u^\varepsilon\}$ равномерно ограничена в $W_{2,L}^2$. Отсюда следует возможность предельного перехода в уравнении $L_\varepsilon u^\varepsilon = 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Аналогичными методами доказывается существование решения из пространства $W_{2,L}^2(\psi)$ задачи

$$Lu = K(y) u u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x = 0, \tag{11}$$

$$u|_\Gamma = \psi(x,y). \tag{12}$$

Уравнение (11) отличается от уравнения (1), во-первых, вырождением на решении, во-вторых, невыполнением условия Ш. От вырождения на решении можно избавиться ограничением класса граничных функций. Именно, справедлива следующая

Л е м м а 2. Пусть выполнено условие $0 < m \leqslant \psi(x,y) \leqslant M$. Тогда при $\varepsilon > 0$ существует функция $u \in C^2(\mathcal{D})$, являющаяся решением уравнения $L_\varepsilon u = 0$ при условии (12), причем справедлива оценка $m \leqslant u \leqslant M$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $a(u) \in C^2(R)$,

$$a(u) = \begin{cases} |u|, & u > m, \\ \in C^2, & \frac{m}{2} \le u \le m, \\ \frac{m}{2}, & u < \frac{m}{2}. \end{cases}$$

Для оператора $L_1 u = K_\varepsilon a(u) u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x$ задача Дирихле с данными (12) разрешима в пространстве $C^2(\mathcal{D})$ (см. [1]). Далее, из принципа максимума (минимума) следует, что $u > m$ в $\mathcal{D}$. Из вида функции $a(u)$ и неравенства $u > m$ следует, что u есть решение уравнения $K_\varepsilon u u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x = 0$. Лемма доказана.

Сложнее обойтись без условия Ш. Именно, справедлива следующая

Лемма 3. Предположим, что существует функция $\Psi(x,y) \in C^2(\mathcal{D})$, являющаяся продолжением функции $\psi(x,y)$, причем $m \le \Psi \le M$. Далее, пусть $\alpha > 0$ – достаточно большая постоянная и область $\mathcal{D}$ примыкает к оси $y=0$ некоторым прямоугольником P со сторонами, параллельными осям координат. Тогда для гладких решений задачи Дирихле для уравнения $L_\varepsilon u = 0$ при условии (12) справедлива оценка

$$\int_{\mathcal{D}} (K_\varepsilon^2 u_{xx}^2 + K_\varepsilon u_{xy}^2 + u_{yy}^2 + u_x^2 + u_y^2 + u^2)\, d\mathcal{D} \le M_3. \qquad (13)$$

Доказательство леммы 3 проводится по той же схеме, что и в лемме 1. Величина постоянной α_0 такой, что при $\alpha > \alpha_0$ справедлива оценка (13), зависит от K, M, m и области $\mathcal{D}$ (α_0 выписывается явно).

Теорема 2. При выполнении условий леммы 3 существует функция $u(x,y)$ из пространства $W^2_{2,L}(\psi)$, удовлетворяющая уравнению (11) и условию (12) почти всюду.

Литература

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., "Наука", 1973.
2. Врагов В.Н. Об одной смешанной задаче для вырождающегося эллиптического уравнения первого рода. – "Сиб.мат.журн.", 1975, т.16, № 3, с. 494–500.
3. Кожанов А.И. Априорные оценки обобщенных решений квазилинейных эллиптических вырождающихся уравнений. – "Дифференц.уравнения", 1976, т. 12, № 1, с. 69–78.