УДК 517.946

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ПОТЕНЦИАЛОВ ДВОЙНОГО СЛОЯ

Иосеф Крал (Прага)

1. Введение. Зафиксируем раз навсегда борелевское множество C в m-мерном евклидовом пространстве R^m. Будем предполагать, что граница B множества C непуста и компактна. Если $\emptyset \neq M \subset R^m$, то $Lip(M)$ обозначает класс всех действительных функций g на M, удовлетворяющих условию Липшица

$$\sup\left\{|x-y|^{-1}\cdot|g(x)-g(y)|;\ x\neq y,\ x,y\in M\right\}<\infty.$$

Для $g\in Lip(B)$ и $z\in R^m\setminus B$ можно следующим образом определить значение $Wg(z)$ потенциала двойного слоя, распределённого на B с плотностью g : сначала распространим g на финитную липшицеву функцию $\psi\in Lip(R^m)$ таким образом, чтобы ψ обращалась в нуль в некоторой окрестности точки z, а затем полагаем

$$Wg(z)=\int\limits_C |x-z|^{-m}(x-z)\cdot \operatorname{grad}\psi(x)\,dx. \tag{1}$$

Отметим, что функцию $g\in Lip(B)$ всегда можно продолжить на липшицеву функцию на всём R^m (см. гл. УI в [13]); как известно, функция $\psi\in Lip(R^m)$ почти всюду дифференцируема и её производные измеримы (см. теорему 11В в [14]). Нетрудно обнаружить, что $Wg(z)$ не зависит от выбора финитной функции $\psi\in Lip(R^m)$, удовлетворяющей требованиям

$$\psi=g \quad \text{на } B,\quad \psi(z)=0 \tag{2}$$

(см. лемму 2 ниже). Если ψ обращается в нуль на окрестности V точки z, то дифференцированием под знаком интеграла в (1) можно убедиться в том, что Wg гармонична на V. Так как точка $z\in R^m\setminus B$ совершенно произвольна, то мы получаем таким образом для каждой функции $g\in Lip(B)$ вполне определённую гармоническую функцию Wg на $R^m\setminus B$ (см. § 2 в [7]; ср. тоже [1], [8]). В связи с применением потенциала двойного слоя к краевым задачам теории гармонических функций естественно возникает вопрос о том, при каких геометрических условиях на B оператор W непрерывно распространяется с $Lip(B)$ на более широкое пространство $\mathcal{F}$ функций, определённых на B таким образом, чтобы функции Wf, соответствующие функциям $f\in\mathcal{F}$, непрерывно продолжались до границы B по множества-

$C^0, R^m \setminus \bar{C}$ *). Случай, когда $\mathcal{F}$ состоит из всех непрерывных функций на B, изучался в [7, § 2]. Здесь мы зафиксируем ограниченную полунепрерывную снизу функцию $p \geq 0$ и рассмотрим пространство $\mathcal{B}$ всех функций Бэра на B, представимых в виде $const + f_0$, где $|f_0| < cp$ для некоторой постоянной c. При естественной нормировке пространства $\mathcal{B}$ мы сначала займёмся вопросом о непрерывной продолжимости оператора W, действующего из $\mathcal{B} \cap Lip(B)$ в пространство всех гармонических функций на $R^m \setminus B$, наделённое топологией равномерной сходимости на компактах. Затем изучим необходимые и достаточные условия существования конечных пределов

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in C^0}} Wf(x) \qquad \lim_{\substack{x \to b \\ x \in R^m \setminus \bar{C}}} Wf(x)$$

для каждой функции $f \in \mathcal{B}$, удовлетворяющей в заданной точке $b \in B$ условию

$$f(y) - f(b) = O(p(y)), \quad y \to b, \quad y \in B.$$

Докажем следующую лемму:

Л е м м а 2. Если $z \in R^m$ и $\psi \in Lip(R^m)$ – такая финитная функция, что $\psi(y) = 0$ для всех $y \in B \cup \{z\}$, то

$$\int_C |x-z|^{-m} (x-z) \cdot grad\, \psi(x) dx = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим для каждого натурального числа k функцию h_k на R^1 следующим образом:

$$h_k(t) = \begin{cases} t - k^{-1} & \text{для } t \geq k^{-1}, \\ 0 & \text{для } |t| < k^{-1}, \\ t + k^{-1} & \text{для } t \leq -k^{-1} \end{cases} \tag{3}$$

(ср. [14, с.300]). Пусть ψ удовлетворяет предположениям нашей леммы. Образуя сложные функции $\psi_k = h_k(\psi)$, мы получаем последовательность финитных функций, удовлетворяющих на R^m условию Липшица с одной и той же постоянной. Отсюда видно, что все функции $|grad\, \psi_k|$ почти всюду равностепенно ограничены. Кроме того, почти всюду $grad\, \psi_k \to grad\, \psi$ $(k \to \infty)$ и все ψ_k обращаются в нуль вне фиксированной сферы. Следовательно,

$$\int_C |x-z|^{-m} (x-z) grad\, \psi(x) dx = \lim_{k \to \infty} \int_C |x-z|^{-m} (x-z) \cdot grad\, \psi_k(x) dx. \tag{4}$$

Зафиксируем k и обозначим через $spt\, \psi_k$ носитель функции ψ_k. Так как ψ_k обращается в нуль в окрестности множества $B \cup \{z\}$, то можно построить открытое множество D, ограниченное гладкой гиперповерхностью ∂D таким образом, чтобы

$$C \cap spt\, \psi \subset D, \quad \bar{D} \subset C^0 \setminus \{z\}.$$

Обозначая через n вектор внешней нормали к ∂D и через s поверхностную меру на ∂D, получаем

*) Мы обозначаем соответственно через M^0 и $\bar{M}$ внутренность и замыкание множества $M \subset R^m$.

$$\int\limits_{C} |x-z|^{-m}(x-z)\cdot \operatorname{grad}\psi_k(x)dx = \int\limits_{\partial D}\psi_k(y)|y-z|^{-m}n(y)\cdot(y-z)ds(y)=0,$$

чем вместе с (4) лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Мы пока определили $Wg(z)$ для произвольной функции $g\in Lip(B)$ в случае, когда $z\in R^m\setminus B$; если $z\in B$ и $g(z)=0$, то снова можно найти финитную функцию $\psi\in Lip(R^m)$, удовлетворяющую условию (2), и мы опять определяем $Wg(z)$ формулой (1), которая оправдана предшествующей леммой.

Заметим, что для каждой финитной функции $\psi\in Lip(R^m)$, обращающейся в нуль в точке $z\in R^m$, имеет место равенство

$$\int\limits_{R^m} |x-z|^{m}(x-z)\cdot \operatorname{grad}\psi(x)dx=0.$$

Отсюда видно, что при рассмотрении потенциалов двойного слоя в смысле вышеуказанного $\mathcal{O}$ – определения всегда можно предполагать, что основное множество C ограничено. В противоположном случае достаточно заменить множество C его дополнением $Q=R^m\setminus C$ (которое должно быть ограниченным, так как совместная граница B компактна); эта замена влияет только на знак соответствующих потенциалов. Пользуясь этим обстоятельством, мы в дальнейшем всегда предполагаем, что множество C ограничено.

Обозначая через ℓ постоянную функцию, равную единице, мы получаем для $z\in R^m\setminus B$

$$W\ell(z)=\begin{cases}0, & \text{если } z\in R^m\setminus\overline{C},\\ 2\pi^{\frac{1}{2}m}/\Gamma(\frac{1}{2}m), & \text{если } z\in C^0.\end{cases}\tag{5}$$

Действительно, если $z\in R^m\setminus\overline{C}$, то существует финитная функция $\psi\in Lip(R^m)$, равная единице в окрестности множества $\overline{C}$ и обращающаяся в нуль в точке z . Тогда $|\operatorname{grad}\psi|=0$ на C и

$$W\ell(z)=\int\limits_{C}|x-z|^{-m}(x-z)\cdot\operatorname{grad}\psi(x)dx=0.$$

Если $z\in C^0$, то можно отобрать открытую сферу Ω с центром в точке z таким образом, чтобы $\overline{\Omega}\subset C^0$. Пусть теперь $\psi\in Lip(R^m)$ – финитная функция, равная единице в окрестности множества $\overline{C}\setminus\Omega$ и обращающаяся в нуль в точке z . Обозначая соответственно через s и n поверхностную меру на границе $\partial\Omega$ сферы Ω и внешнюю нормаль к $\partial\Omega$, мы получаем теперь

$$W\ell(z)=\left(\int\limits_{C\setminus\Omega}+\int\limits_{\Omega}\right)|x-z|^{-m}(x-z)\cdot\operatorname{grad}\psi(x)dx=$$

$$=\int\limits_{\partial\Omega}|y-z|^{-m}(y-z)\cdot n(y)ds(y)=2\pi^{\frac{1}{2}m}/\Gamma(\tfrac{1}{2}m).$$

Обозначение. Если $z\in R^m$ и $r>0$, то положим

$$\Omega_r(z)=\{x\in R^m;\ |x-z|<r\}.$$

Символом $\mathcal{H}_k$ обозначаем k-мерную (внешнюю) меру Хаусдорфа, которую считаем естественно нормированной (таким образом, $\mathcal{H}_k(J^k)=1$ для всякого множества J^k, изометрического с k-мерным кубом $\langle 0,1\rangle^k$; в частности, $\mathcal{H}_m$ совпадает с мерой Лебега в R^m).

Назовем $y\in B$ существенной точкой пересечения границы B с полупрямой

$$H_z(\theta)=\{z+t\theta;\ t>0\},$$

выходящей из точки z в направлении вектора θ, если для каждого $\varepsilon>0$ имеют место соотношения:

$$\mathcal{H}_1(H_z(\theta)\cap\Omega_\varepsilon(Y)\cap C)>0,\quad \mathcal{H}_1(H_z(\theta)\cap\Omega_\varepsilon(Y)\setminus C)>0.$$

Зафиксируем ограниченную полунепрерывную снизу функцию $p\geq 0$ на B. Обозначая через $B(\theta,z)$ множество всех существенных точек пересечения границы B с полупрямой $H_z(\theta)$, полагаем

$$n^p(\theta,z)=\sum p(y),\quad y\in B(\theta,z).$$

Разумеется, $n^p(\theta,z)=0$, если $B(\theta,z)=\emptyset$, и $n^p(\theta,z)=\infty$, если $p(y)>0$ для несчетного множества точек $y\in B(\theta,z)$. Положим для краткости

$$\Gamma=\{\theta\in R^m;\ |\theta|=1\},\quad A=\mathcal{H}_{m-1}(\Gamma).$$

В этих обозначениях справедливо следующее

Предложение. <u>Зафиксируем</u> $z\in R^m$. <u>Тогда</u> $\theta\mapsto n^p(\theta,z)$ <u>является функцией Бэра на</u> Γ <u>и, если положить</u>

$$v^p(z)=\int_\Gamma n^p(\theta,z)\,d\mathcal{H}_{m-1}(\theta),$$

<u>то имеет место равенство</u>

$$v^p(z)=\sup\{Wg(z);\ g\in Lip(B),\ |g|\leq p\},$$

<u>причем в случае</u> $z\in B$ <u>верхняя грань берется лишь по тем функциям</u> g, <u>которые обращаются в нуль в точке</u> z.

Доказательство. Продолжим p на все пространство R^m, полагая $p=\sup p(B)$ на $R^m\setminus B$; таким образом, $p\geq 0$, полунепрерывна снизу и ограничена на R^m. Предположим для простоты, что $z=0$, и положим $n^p(\theta)=n^p(\theta,0)$ $(\theta\in\Gamma)$, $V(p)=\sup\{W\psi(0);\ \psi\in Lip(R^m), |\psi|\leq p, \psi(0)=0,\ \psi$ финитна$\}$. Обозначим через $\mathcal{P}$ класс всех ограниченных полунепрерывных снизу функций $p\geq 0$ на R^m таких, что соответствующая функция $\theta\longmapsto n^p(\theta)$ является функцией Бэра на Γ и имеет место равенство

$$V(p)=\int_\Gamma n^p(\theta)\,d\mathcal{H}_{m-1}(\theta).$$

Пусть

$$S_\rho = \{x \in R^m;\ \rho(x) \neq 0\},$$

$\mathcal{D}$ – класс всех бесконечно дифференцируемых функций φ на R^m с компактным носителем $spt\varphi$. Сначала заметим, что

$$V(\rho) = \sup\{W\varphi(0);\ \varphi \in \mathcal{D},\ spt\varphi \subset S_\rho \setminus \{0\},\ |\varphi| < \rho \quad \text{на } S_\rho\}. \tag{6}$$

Действительно, если $\psi \in Lip(R^m)$ – произвольная финитная функция, удовлетворяющая требованиям

$$|\psi| \leq \rho, \quad \psi(0) = 0, \tag{7}$$

то мы можем определить функции h_k при помощи формулы (3) и ввести в рассмотрение сложные функции $\psi_k = h_k(\psi)$. Подбирая k достаточно большим, мы можем сделать $W\psi_k(0)$ сколь угодно близким к $W\psi(0)$. Так как $\psi_k(x) = 0$, если $|\psi(x)| \leq k^{-1}$, и $|\psi_k(x)| + k^{-1} \leq \rho(x)$, если $|\psi(x)| \geq k^{-1}$, то, сглаживая функцию ψ_k, можно получить такую функцию $\varphi \in \mathcal{D}$, что $|\varphi| < \rho$, $spt\varphi \subset S_\rho \setminus \{0\}$ и $W\varphi(0)$ как угодно близко к $W\psi_k(0)$. Отсюда вытекает (6).

Докажем, что $\mathcal{P}$ содержит вообще все ограниченные полунепрерывные снизу функции $\rho \geq 0$ на R^m. Пусть сначала $\rho = \chi_G$ *) есть характеристическая функция открытого множества $G \subset R^m$. Обозначая через D_t производную относительно переменного t и вводя сферические координаты, мы получаем для каждой функции $\varphi \in \mathcal{D}$ с носителем в $G \setminus \{0\}$ равенство

$$W\varphi(0) = \int_\Gamma \left(\int_0^\infty \chi_G(t\theta) D_t \varphi(t\theta)\, dt \right) d\mathcal{H}_{m-1}(\theta).$$

Заставляя φ пробегать те функции из $\mathcal{D}$, для которых $|\varphi| \leq 1$, $spt\varphi \subset G \setminus \{0\}$, мы получаем, по лемме 1.3 из [9], что

$$\theta \longmapsto \sup_\varphi \int_0^\infty \chi_G(t\theta) D_t \varphi(t\theta)\, dt$$

есть функция Бэра на Γ и

$$\sup_\varphi W\varphi(0) = \int_\Gamma \left(\sup_\varphi \int_0^\infty \chi_G(t\theta) D_t \varphi(t\theta)\, dt \right) d\mathcal{H}_{m-1}(\theta). \tag{8}$$

Учитывая, что $n^\rho(\theta)$ в случае $\rho = \chi_G$ равняется числу всех существенных точек пересечения B с $H_0(\theta)$, содержащихся в G, мы получаем, по лемме 1.9 из [7], равенство

$$\sup_\varphi \int_0^\infty \chi_G(t\theta) D_t \varphi(t\theta)\, dt = n^\rho(\theta),$$

которое вместе с (8) дает $\rho \in \mathcal{P}$.

Очевидно, что $\mathcal{P}$ содержит вместе с каждой функцией ρ и все функции вида $c\rho$, где $c > 0$. Пусть теперь $\rho \geq 0$ – такая полунепрерывная снизу функция на R^m, которая принимает лишь конечное число значений. Пусть $c_1 <, \dots, < c_j$ – все поло-

---

*) Мы обозначаем через χ_M характеристическую функцию множества $M \subset R^m$.

жительные значения функции ρ . Положим еще $c_0 = 0$. Тогда множества

$$G_i = \{x \in R^m;\ \rho(x) > c_i\}$$

открыты и для функций $\rho_i = (c_i - c_i)\chi_{G_i}$ имеем $\rho = \sum_{i=1}^{j} \rho_i$,

$$n^\rho(\theta) = \sum_{i=1}^{j} n^{\rho_i}(\theta), \quad \theta \in \Gamma.$$

Из предшествующей части доказательства сразу вытекает, что n^ρ есть функция Бэра на Γ . Рассмотрим произвольную финитную функцию $\psi \in Lip(R^m)$, удовлетворяющую условиям (7). Срежем её на уровне c_1 , образуя функцию $\psi_1 = \max(-c_1, \min(c_1, \psi))$, затем аналогично делаем срезку функции $\psi - \psi_1$ на уровне $c_2 - c_1$, и т.д.; таким образом получим разложение

$$\psi = \sum_{i=1}^{j} \psi_i,$$

где $\psi_i \in Lip(R^m)$ – финитные функции, удовлетворяющие требованиям:

$$\psi_i(0) = 0, \quad |\psi_i| \leq \rho_i \quad (i = 1, \dots, j). \tag{9}$$

Отсюда вытекает

$$W\psi(0) = \Big|\sum_{i=1}^{j} W\psi_i(0)\Big| \leq \sum_{i=1}^{j} \sigma^{\rho_i}(0) = \sigma^\rho(0), \quad V(\rho) \leq \sigma^\rho(0).$$

Обратное неравенство устанавливается легко, так как мы уже знаем, что $\rho_i \in \mathcal{P}$ $(i = 1, \dots, j)$. Достаточно заметить, что для произвольных финитных функций $\psi_i \in Lip(R^m)$, удовлетворяющих условиям (9), функция $\psi = \sum_{i=1}^{j} \psi_i$ удовлетворяет условию (7). Мы снова заключаем, что $\rho \in \mathcal{P}$. Остается доказать, что для каждой неубывающей последовательности функций $\rho_k \in \mathcal{P}$ функция $\rho = \lim_{k\to\infty} \rho_k$ тоже принадлежит классу $\mathcal{P}$. Очевидно,

$$n^\rho(\theta) = \lim_{k\to\infty} n^{\rho_k}(\theta)$$

есть функция Бэра на Γ,

$$\sigma^\rho(0) = \lim_{k\to\infty} \sigma^{\rho_k}(0) \leq V(\rho).$$

Но если $\varphi \in \mathcal{D}$, $spt\,\varphi \subset S_\rho \setminus \{0\}$, $|\varphi| < \rho$ на S_ρ , то для достаточно больших k имеем

$$|\varphi| \leq \rho_k, \quad W\varphi(0) \leq \sigma^{\rho_k}(0) \leq \sigma^\rho(0).$$

Отсюда, в силу (6), вытекает $V(\rho) \leq \sigma^\rho(0)$, и доказательство закончено.

З а м е ч а н и е. Из предшествующего доказательства вытекает равенство

$$\sigma^\rho(z) = \sup\{W\varphi(z);\ \varphi \in \mathcal{D},\ spt\,\varphi \subset S_\rho \setminus \{z\},\ |\varphi| \leq \rho\}. \tag{10}$$

Отсюда видно, что функция $z \longmapsto \sigma^\rho(z)$ полунепрерывна снизу на R^m.

О б о з н а ч е н и е. Пусть $\mathcal{B}$ – класс всех функций Бэра f на B , для которых существуют действительные числа $k > 0$ и c такие, что на B имеет место неравенство

$$|f - c\ell| \leqslant kp. \tag{11}$$

Для $f\in\mathscr{B}$ положим

$$\|f\| = \inf\{|c| + k\}, \tag{12}$$

где нижняя грань берется по всем c, k, удовлетворяющим неравенству (11). Обозначим еще через $\mathscr{B}_c$ подпространство всех $f\in\mathscr{B}$, удовлетворяющих оценке вида (11) с постоянной $c=0$. Норма (12) превращает $\mathscr{B}_0$ в пространство Банаха. В случае $\{y\in B;\ p(y)=0\}\neq\varnothing$ постоянная c в неравенстве (11) определяется однозначно функцией $f\in\mathscr{B}$. В противоположном случае (когда $B\subset S_p$) $\mathscr{B}$ сводится к пространству всех ограниченных функций Бэра на B, в котором эквивалентную норму можно получить, заменив функцию p функцией ℓ.

Определение. Будем говорить, что вектор $\theta\in\Gamma$ направлен в множество $M\subset R^m$ в точке x, если существует такое $\delta>0$, что $x+t\theta\in M$ для почти всех $t\in(0,\delta)$.

Положим $s^C(\theta,x)=1$, если вектор $\theta\in\Gamma$ направлен в множество $Q=R^m\setminus C$ в точке x и одновременно вектор θ направлен в множество C в точке x. Положим еще $s^C(\theta,x)=-1$, если $s^Q(\theta,x)=1$ в смысле только что указанного определения. Во всех остальных случаях полагаем

$$s^C(\theta,x)=0.$$

Отметим, что $x\in H_z(\theta)$ необходимо является существенной точкой пересечения B с $H_z(\theta)$, если $s^C(\theta,x)\neq 0$.

Теорема. Пусть $z\in R^m\setminus B$. Для того, чтобы функционал

$$\psi \longmapsto W\psi(z) \tag{13}$$

был ограничен на множестве

$$g\in\{\mathscr{B}\cap Lip(B);\ \|g\|\leqslant 1\}, \tag{14}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$v^p(z)<\infty. \tag{15}$$

Если $z\in R^m$ и имеет место (15), то для всякой функции $f\in\mathscr{B}_0$ имеет смысл сумма

$$\Sigma_f(\theta,z)=\Sigma f(y)s^C(\theta,y),\quad y\in H_z(\theta),$$

для $\mathscr{H}_{m-1}$ - почти всех $\theta\in\Gamma$, и функция

$$\theta\longmapsto\Sigma_f(\theta,z) \tag{16}$$

интегрируема на Γ по мере $\mathscr{H}_{m-1}$. Для каждой функции $f\in B_0\cap Lip(B)$ (предполагая, что $f(z)=0$ при $z\in B$) имеет место равенство

$$Wf(z)=\int_\Gamma \Sigma_f(\theta,z)\,d\mathscr{H}_{m-1}(\theta). \tag{17}$$

Доказательство. Если функционал (13) ограничен на множестве (14), то имеет место (15) по предложению на стр. 22.

Предположим теперь для простоты, что $z=0$ и имеет место (15). Тогда для $\mathscr{H}_{m-1}$-почти всех $\theta\in\Gamma$ имеем

$$n^p(\theta,0)=n^p(\theta)<\infty. \tag{18}$$

Зафиксируем такое $\theta\in\Gamma$ и введем для $M\subset R^m$ обозначение

$$M_\theta=\{t>0;\ t\theta\in M\}.$$

Мы будем пользоваться обозначениями, введенными на стр. 22, и будем считать функцию p расширенной на все пространство R^m. Зафиксируем функцию $\psi\in Lip(R^m)$, удовлетворяющую для некоторой постоянной $k\in R^1$ оценке $|\psi|\leqslant kp$, и, считая $\psi(0)=0$, займемся вычислением интеграла

$$\int_{C_\theta} D_t\,\psi(t\theta)dt.$$

Так как функция $p\geqslant 0$ полунепрерывна снизу, то множество $F=\{t\geqslant 0;\ p(t\theta)=0\}$ замкнуто и функция $t\longmapsto\psi(t\theta)$ на нем обращается в нуль. Отсюда видно, что $D_t\,\psi(t\theta)=0$ для почти всех $t\in F$ и, следовательно,

$$\int_{F\cap C_\theta} D_t\,\psi(t\theta)=0. \tag{19}$$

Рассмотрим теперь произвольную компоненту (a,b) множества $(0,\infty)\setminus F$. Из (18) следует, что при $a<t<b$ каждая существенная точка пересечения B с $H_0(\theta)$ вида $t\theta$ необходимо изолирована. Если $t_1\theta$, $t_2\theta$ – две соседние существенные точки пересечения B с $H_0(\theta)$ и $a<t_1<t_2<b$, то почти весь отрезок (t_1,t_2) содержится либо в C_θ, либо в Q_θ $(Q=R^m\setminus C)$ и имеет место соотношение

$$s^C(\theta,t_2\theta)=-\ s^C(\theta,t_1\theta). \tag{20}$$

Отсюда вытекает

$$\int_{(a,b)\cap C_\theta} D_t\,\psi(t\theta)dt=\sum_{a<t<b} s^C(\theta,t\theta)\,\psi(t\theta),$$

что вместе с (19) дает

$$\int_{C_\theta} D_t\,\psi(t\theta)dt=\sum_{t>0}\psi(t\theta)s^C(\theta,t\theta). \tag{21}$$

(Заметим, что ряд на правой стороне мажорирован рядом $\sum\limits_{t>0} kp(t\theta)$, который сходится в силу (18).) Используя сферические координаты и теорему Фубини, мы получаем

$$W\psi(0)=\int_\Gamma\left(\int_{C_\theta} D_t\,\psi(t\theta)dt\right)d\mathcal{H}_{m-1}(\theta).$$

Отсюда и из (21) видно, что функция $\theta\longmapsto\sum_\psi(\theta,0)$ интегрируема по мере $\mathcal{H}_{m-1}$ на Γ и для $f=\psi$ справедлива формула (17) (разумеется, теперь $z=0$). Обозначим через $\mathcal{F}$ класс всех функций $f\in\mathcal{B}_0$, для которых функция (16) интегрируема на Γ по мере $\mathcal{H}_{m-1}$. Мы видели, что $\mathcal{B}_0\cap Lip(B)\subset\mathcal{F}$. Если $f_j\in\mathcal{F}$, $\lim\limits_{j\to\infty} f_j=f$ на B и $\sup\limits_j|f_j|\leqslant kp$ для некоторой постоянной $k\in R^1$, то интегрируемые функции $\sum_{f_j}(\theta,z)$ почти всюду $\mathcal{H}_{m-1}$ на Γ сходятся к $\sum_f(\theta,z)$ и мажорированы интегрируемой функцией $kn^p(\theta,z)$. По теореме Лебега, получаем, что $f\in\mathcal{F}$

и
$$\int_{\Gamma} \Sigma_f(\theta,z)\,d\mathcal{H}_{m-1}(\theta) = \lim_{j\to\infty} \int_{\Gamma} \Sigma_{f_j}(\theta,z)\,d\mathcal{H}_{m-1}(\theta). \qquad (22)$$

Отсюда заключаем, что $\mathcal{F} = \mathcal{B}_0$.

На основе предшествующей теоремы мы вправе ввести следующее

О п р е д е л е н и е. Пусть $z\in R^m\setminus B$, $\sigma^p(z)<\infty$. Если $h\in\mathcal{B}$, $h=c\ell+f$, $f\in\mathcal{B}_0$, то мы полагаем, по определению,

$$Wh(z) = Ac\chi_c(z) + \int_{\Gamma} \Sigma_f(\theta,z)\,d\mathcal{H}_{m-1}(\theta) \qquad (23)$$

З а м е ч а н и е. Если $B\subset S_p$, то $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ и постоянная c в разложении $h=c\ell+f$ ($f\in\mathcal{B}_0$) не определяется однозначно. Но формула (23) все-таки определяет значение $Wh(z)$ однозначно, так как в этом случае

$$\int_{\Gamma} \Sigma_\ell(\theta,z)\,d\mathcal{H}_{m-1}(\theta) = A\chi_c(z)$$

для $z\in R^m\setminus B$ по формулам (17) и (5).

Из доказательства предшествующей теоремы получается еще следующее

Д о б а в л е н и е. Пусть $z\in R^m\setminus B$, $\sigma^p(z)<\infty$. Если $h_j\in\mathcal{B}$, $\lim\limits_{j\to\infty} h_j = h$ на B и $\sup\limits_j |h_j| < \infty$, то

$$\lim_{j\to\infty} Wh_j(z) = Wh(z). \qquad (24)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим постоянные c_j и функции $f_j\in\mathcal{B}_0$ так, что $h_j = c_j\ell + f_j$, причем в случае $B\subset S_p$ возьмем $c_j = 0$. Тогда имеем

$$\lim_{j\to\infty} c_j = c \quad \text{и} \quad \lim_{j\to\infty} f_j = f \quad \text{на } B, \text{ где } c\ell + f = h.$$

Кроме того, $\sup\limits_j |f_j| \le kp$ для некоторой постоянной $k\in R$. Из формулы (22) следует (24).

З а м е ч а н и е. Выше мы видели, что условие (15) необходимо и достаточно для того, чтобы значение потенциала $Wf(z)$, определенное первоначально лишь для липшицевых функций, можно было расширить по непрерывности на все $f\in\mathcal{B}$. Может, однако, случиться, что условие (15) удовлетворяется в точке z, а в других точках оно не соблюдается. В связи с этим полезна следующая

Т е о р е м а. Если точки $z_0,\dots,z_m\in R^m$ находятся в общем положении (т. е. они не содержатся в одной гиперплоскости) и

$$\sum_{i=0}^{m} \sigma^p(z_i) < \infty, \qquad (25)$$

то существует такая постоянная $c\in(0,\infty)$, что

$$\sigma^p(z) \le c\,[\mathrm{dist}\,(z,B)]^{1-m}, \quad z\in R^m\setminus B;$$

здесь $\mathrm{dist}\,(z,B) = \inf\{|z-y|;\ y\in B\}$ обозначает расстояние точки z до множества B. В частности, при соблюдении условия (25) функция $\sigma^p(\cdot)$ конечна на $R^m\setminus B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что (полунепрерывная снизу)

функция $\rho \geq 0$ определена на всем пространстве R^m и положительна на $R^m \setminus B$. Рассмотрим произвольное ограниченное открытое множество G, замыкание которого содержится в $S_\rho = \{x \in R^m;\ \rho(x) > 0\}$. Пусть $\mathcal{D}(G)$ – класс всех бесконечно дифференцируемых функций с носителем в G. Обозначая через ∂_θ производную по направлению вектора $\theta \in \Gamma$, мы утверждаем, что

$$\sup \left\{ \int_G \partial_\theta \varphi(x) dx;\ \varphi \in \mathcal{D}(G),\ |\varphi| \leq 1 \right\} < \infty. \tag{26}$$

Так как $\inf \rho(\bar{G}) = a > 0$, то каждая функция $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, удовлетворяющая неравенству $|\varphi| \leq 1$, удовлетворяет также оценке $|\varphi| \leq a^{-1}\rho$ и (26) вытекает из рассуждений, рассмотренных в [7, см. 2.10]. Справедливость соотношения (26) для каждого $\theta \in \Gamma$ и каждого открытого множества G с компактным замыканием в S_ρ означает, что множество G имеет локально конечный периметр в S_ρ по определению 3.5 статьи [12] (см. также 3.7 в [12]).

Напомним теперь определение внешней нормали к C в смысле Федерера. Если $y \in B$ и $\theta \in \Gamma$ – такой вектор, что симметрическая разность множеств C и $\{x \in R^m;\ (x-y)\cdot\theta < 0\}$ имеет нулевую m-мерную плотность в точке y, то θ называется внешней нормалью к C в точке y и обозначается через $n(y)$; очевидно, этим требованием $n(y)$ определяется однозначно. Если для точки $y \in B$ не существует вектора $\theta \in \Gamma$ единичной внешней нормали в этом смысле, то мы обозначим через $n(y)$ нулевой вектор из R^m. Тогда векторная функция $y \longmapsto n(y)$ измерима по Борелю на B (см. [5]), и из известных результатов о множествах с локально конечным периметром (см. [12], [2], [3], [6], ср. также [11]) вытекает, что для каждой финитной векторной функции $w = [w^1, \dots, w^m]$ класса $C^{(1)}$ с носителем в S_ρ имеет место формула

$$\int_C \operatorname{div} w(x) dx = \int_B w(y)\cdot n(y) d\mathcal{H}_{m-1}(y).$$

Рассмотрим теперь произвольную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(S_\rho \setminus \{z\})$. Полагая $w(z) = 0$ $(z \in R^m)$, $w(x) = |x-z|^{-m}\varphi(x)(x-z)$ для $x \in R^m \setminus \{z\}$, мы имеем

$$\operatorname{div} w(x) = |x-z|^{-m} \operatorname{grad} \varphi(x)\cdot(x-z),$$

откуда

$$W\varphi(z) = \int_B w(y)\cdot n(y) d\mathcal{H}_{m-1}(y) = \int_B \varphi(y)|y-z|^{-m}(y-z)\cdot n(y) d\mathcal{H}_{m-1}(y).$$

Отсюда и из соотношения (10) получается

$$v^P(z) = \int_B \rho(y)\,|y-z|^{-m}\,|(y-z)\cdot n(y)|\, d\mathcal{H}_{m-1}(y). \tag{27}$$

Так как точки $z_0, \dots, z_m$ находятся в общем положении, то нетрудно обнаружить, что имеется такая постоянная $q \in (0, \infty)$, что для всех $y \in B$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=0}^{m} |y-z_i|^{-m}\,|(y-z_i)\cdot n(y)| \geq q\,|n(y)|.$$

Отсюда, в силу (25), вытекает по формуле (27)

$$\int_B \rho(y)|n(y)|d\mathcal{H}_{m-1}(y) < \infty . \tag{28}$$

Пусть теперь $z\in R^m \setminus B$. Из (28), (27) получаем

$$v^p(z) \leq [dist(z,B)]^{1-m} \cdot \int_B \rho(y)|n(y)|d\mathcal{H}_{m-1}(y).$$

Мы видим, что для справедливости доказываемой оценки достаточно взять

$$c = \int_B \rho(y)|n(y)|d\mathcal{H}_{m-1}(y).$$

Из предыдущего доказательства вытекает еще следующее

Добавление. Если точки $z_0,\dots,z_m$ находятся в общем положении и имеет место (25), то для каждой точки $z\in R^m\setminus B$ и каждой функции $f\in\mathcal{B}_0$ справедлива формула

$$Wf(z) = \int_B f(y)|y-z|^{-m}(y-z)\cdot n(y)d\mathcal{H}_{m-1}(y). \tag{29}$$

Доказательство. Мы установили (29) для $f=\varphi\in\mathcal{D}(S_p\setminus\{z\})$. Отсюда при помощи соотношения (28) формула (29) легко распространяется на все функции $f\in\mathcal{B}_0$.

Замечание. Если оператор W, действующий из $Lip(B)\cap\mathcal{B}$ в пространство гармонических функций на $R^m\setminus B$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах, непрерывен относительно нормы $\|\dots\|$, то необходимо $v^p(z)<$ $<\infty$ для каждой точки $z\in R^m\setminus B$ (см. стр. 22). Наоборот, если это условие (15) удовлетворяется для некоторого множества точек z, которое нельзя поместить на единой гиперплоскости, то функция $v^p(\cdot)$ ограничена на каждом множестве, находящемся на положительном расстоянии от множества B (см. стр. 27) и, следовательно, оператор W непрерывен в указанном смысле.

В дальнейшем мы всегда предполагаем, что выполняется условие (25) для некоторых точек $z_0,\dots,z_m$ в общем положении. Тогда для каждой функции $h\in\mathcal{B}$ и каждой точки $z\in R^m\setminus B$ естественно определен потенциал двойного слоя $Wh(z)$; если $h=c\ell+f$, где $f\in\mathcal{B}_0$, то мы имеем интегральное представление

$$Wh(z) = cA\chi_C(z) + \int_B f(y)|y-z|^{-m}(y-z)\cdot n(y)\,d\mathcal{H}_{m-1}(y).$$

Отсюда (ср. также (28)) видно, что Wh есть гармоническая функция на $R^m\setminus B$.

Займемся теперь исследованием поведения Wh вблизи B. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты.

Лемма. <u>Пусть $E\subset R^m$ - выпуклое множество и f - характеристическая функция множества $E\cap B$. Если $f\in\mathcal{B}_0$, то</u>

$$|Wf(z)| \leq A, \quad z\in R^m\setminus B. \tag{30}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой

$$Wf(z) = \int_{\Gamma} \Sigma_f (\theta, z) d\mathcal{H}_{m-1}(\theta). \tag{31}$$

Для простоты предположим $z=0$ и зафиксируем $\theta \in \Gamma$ так, чтобы $n^P(\theta, 0) < \infty$. Тогда можно считать множество всех существенных точек пересечения B с $H_0(\theta) = \{t\theta;\ t>0\}$, принадлежащих E, конечным. Если $t_1\theta, t_2\theta$ – две такие соседние точки, то по формуле (20)

$$f(t_1\theta)\, s^C(\theta, t_1\theta) + f(t_2\theta)\, s^C(\theta, t_2\theta) = 0.$$

Отсюда видно, что

$$|\Sigma_f (\theta, 0)| \leqslant 1.$$

Так как это верно для $\mathcal{H}_{m-1}$-почти всех $\theta \in \Gamma$, то (31) даст оценку (30).

П р е д л о ж е н и е. Если $D \subset R^m \setminus B$ – открытое множество с границей ∂D и $\sup\{\sigma^P(y);\ y \in \partial D\} = V < \infty$, то

$$\sup\{\sigma^P(z);\ z \in D\} \leqslant V + A \sup p(B).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (Ср. теорему 2.13 в [7].) Предположим, что функция p полунепрерывна снизу на всем пространстве $p = \sup p(B)$ на $R^m \setminus B$. Зафиксируем произвольную точку $z \in D$ и постоянную $a < \sigma^P(z)$. Из (27) заключаем, что существуют взаимно непересекающиеся кубы $K_j \subset S_p$ и постоянные c_j $(j=1,\dots,s)$ такие, что функция

$$f = \sum_{j=1}^{s} c_j \chi_{K_j}$$

удовлетворяет оценке $|f| \leqslant p$ и имеет место неравенство

$$a < \int_B f(y) |y-z|^{-m} (y-z) \cdot n(y) d\mathcal{H}_{m-1}(y) = Wf(z).$$

Функция Wf гармонична на $R^m \setminus (B \cap \bigcup_{j=1}^{s} K_j) \supset D$,

$$\lim_{|x| \to \infty} Wf(x) = 0. \tag{32}$$

Рассмотрим теперь произвольную точку $y \in \partial D$. Если $y \in R^m \setminus (B \cap \bigcup_{j=1}^{s} K_j)$, то

$$\lim_{x \to y} Wf(x) = Wf(y) \leqslant \sigma^P(y).$$

Если $y \in B \cap \bigcup_{j=1}^{s} K_j$, то можно считать, что $y \in K_1$. По предшествующей лемме, $|c_1 W\chi_{K_1}| \leqslant A|c_1| \leqslant A \sup p(B)$ на $R^m \setminus B \supset D$. Отметим, что функция $f_1 = \sum_{j=2}^{s} c_j \chi_{K_j}$ обращается в нуль в окрестности точки y. Следовательно, Wf_1 непрерывна в точке y. Так как $|f_1| \leqslant p$, то

$$\limsup_{x \to y} Wf(x) \leqslant A \sup p(B) + |Wf_1(y)| \leqslant A \sup p(B) + \sigma^P(y).$$

Во всяком случае

$$\limsup_{x \to y} Wf(x) \leqslant V + A \sup p(B) = u, \quad y \in \partial D.$$

Это вместе с (32) дает $Wf \leqslant u$ на D. В частности, $a < Wf(z) \leqslant u$, и так как $a < \sigma^P(z)$ мы взяли совершенно произвольно, то $\sigma^P(z) \leqslant u$, $z \in D$.

Т е о р е м а. Пусть $D \subset R^m \setminus B$, $b \in B \cap \overline{D}$. Если для каждой функции

$f \in \mathcal{B}$, удовлетворяющей требованию

$$f(y) - f(b) = o(\rho(y)), \ y \to b, \ y \in B, \tag{33}$$

имеет место соотношение

$$\limsup_{\substack{z \to b \\ z \in D}} Wf(z) < \infty, \tag{34}$$

то существует $r > 0$ такое, что

$$\sup\{\sigma^p(z); \ z \in \bar{D} \cap \Omega_r(b)\} < \infty. \tag{35}$$

Наоборот, если ∂D обозначает границу множества D и для некоторого $q > 0$ имеет место оценка

$$\sup\{\sigma^p(y); \ y \in \Omega_q(b) \cap \partial D\} < \infty, \tag{36}$$

то для каждой функции $f \in \mathcal{B}$ справедливо соотношение (34); более того, если целое множество D содержится в некотором из множеств $C, Q = R^m \setminus C$ и $\rho > 0$ на $B \setminus \{b\}$, тогда для каждой функции $f \in \mathcal{B}$, удовлетворяющей требованию (33), существует конечный предел

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in D}} Wf(x). \tag{37}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{K}$ класс всех функций $f \in \mathcal{B}_0$, для которых $f(b) = 0$ и $f(y) = o(\rho(y)), \ y \to b, \ y \in B$. Нетрудно обнаружить, что $\mathcal{K}$ есть замкнутое подпространство банахова пространства $\mathcal{B}_0$. Для каждой точки $z \in R^m \setminus B$ линейный функционал $f \longmapsto Wf(z)$ ограничен на пространстве $\mathcal{K}$ и

$$\sup\{Wf(z); \ f \in \mathcal{K}, \ |f| \le \rho\} = \sigma^p(z).$$

Если для каждой функции $f \in \mathcal{K}$ выполняется (34), то, по теореме Банаха-Штейнгауза, заключаем, что для произвольной последовательности $z_n \in D$, сходящейся к b, должно быть

$$\sup_n \sigma^p(z_n) < \infty.$$

Отсюда вытекает, что для определенного $r > 0$ справедливо соотношение

$$\sup\{\sigma^p(z); \ z \in D \cap \overline{\Omega_r(b)}\} < \infty;$$

так как функция $\sigma^p(\cdot)$ полунепрерывна снизу, то имеет место (35).

Из определения (23) для $f \in \mathcal{B}$ и $z \in R^m \setminus B$ вытекает, что

$$|Wf(z)| \le \|f\| (A + \sigma^p(z)).$$

Итак, из (35) следует (34) для каждой $f \in \mathcal{B}$.

Предположим теперь, что целое множество D содержится в некотором из множеств $C, Q = R^m \setminus C$. Пусть, далее,

$$\rho > 0 \quad \text{на } B \setminus \{b\}, \tag{38}$$

$$\sup\{\sigma^p(x); \ x \in D \cap \Omega_r(b)\} = u < \infty.$$

Если $f \in \mathcal{B}$ удовлетворяет требованию (33), то для $g = f(b)\, l$ существует конечный предел

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x\in D}} Wg(x)$$

и функция $f_0 = f - g$ удовлетворяет условию $f_0(y) = O(\rho(y))$, $y \to b$, $y \in B$. Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти разложение $f_0 = g_0 + g_1$, где g_0, g_1 – функции Бэра на B такие, что $|g_0| \leq \varepsilon\rho$, и g_1 обращается в нуль на $B \cap \Omega_q(b)$ для некоторого $q > 0$. В силу (38) мы имеем $g_1 \in \mathcal{B}_0$, и из представления

$$Wg_1(x) = \int_B g_1(y)\,|y-x|^{-m}(y-x)\cdot n(y)\,d\mathcal{H}_{m-1}(y)$$

заключаем, что существует конечный предел

$$\lim_{x\to b} Wg_1(x).$$

Так как $|Wg_0| \leq \varepsilon \sigma^{\rho} \leq \varepsilon u$ на $D \cap \Omega_r(b)$ и $\varepsilon > 0$ можно взять сколь угодно малым, то существует конечный предел

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x\in D}} Wf_0(x)$$

и, следовательно, также предел (37).

Для окончания доказательства достаточно установить следующую лемму:

Л е м м а. Пусть $D \subset R^m \setminus B$, $b \in \bar{D} \cap B$ и ∂D обозначает границу множества D. Тогда из соотношения

$$\limsup_{\substack{y\to b\\ y\in\partial D}} \sigma^{\rho}(y) < \infty$$

вытекает

$$\limsup_{\substack{x\to b\\ x\in D}} \sigma^{\rho}(x) < \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай, когда D открыто. Пусть имеет место (36). Зафиксируем $q_1 \in (0, q)$ и, обозначая через χ_1 характеристическую функцию множества $R^m \setminus \overline{\Omega_{q_1}(b)}$, положим $\rho_1 = \rho\chi_1$. Тогда ρ_1 полунепрерывна снизу и для $r \in (0, q_1)$ и каждого $z \in \overline{\Omega_r(b)}$ справедлива оценка

$$\sigma^{\rho_1}(z) \leq (q-r)^{1-m} \int_B \rho(y)\,|n(y)|\,d\mathcal{H}_{m-1}(y)$$

(см. (27)). Зафиксируем еще $q_2 \in (q_1, q)$, обозначим через χ_2 характеристическую функцию множества $\Omega_{q_2}(b)$ и положим $\rho_2 = \rho\chi_2$. Если $|z-b| = q$, то

$$\sigma^{\rho_2}(z) \leq (q-q_1)^{1-m} \int_B \rho(y)\,|n(y)|\,d\mathcal{H}_{m-1}(y).$$

Отсюда и из (36) видно, что σ^{ρ_2} ограничена на границе множества $D \cap \Omega_q(b)$; но тогда она ограничена также на $D \cap \Omega_q(b)$ (см. стр. 30). Мы установили, что обе функции $\sigma^{\rho_1}(\cdot), \sigma^{\rho_2}(\cdot)$ ограничены на $D \cap \Omega_r(b)$ при достаточно малом $r > 0$. Так как $\rho \leq \rho_1 + \rho_2$, то $\sigma^{\rho} \leq \sigma^{\rho_1} + \sigma^{\rho_2}$ также ограничена на $D \cap \Omega_r(b)$.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает следующая

Т е о р е м а. Предположим, что B является общей границей множеств C^0,

$Q^0 = R^m \setminus \overline{C}$. Пусть $b \in B$, $p > 0$ на $B \setminus \{b\}$. Тогда условие

$$\limsup_{\substack{y \to b \\ y \in B}} \sigma^p(y) < \infty$$

необходимо и достаточно для того, чтобы для каждой функции $f \in \mathcal{B}$, удовлетворяющей условию (33), соответствующий потенциал Wf обладал в точке b конечными пределами по множествам C^0, Q^0.

Замечание. При помощи функции σ^p можно также установить необходимые и достаточные условия для существования угловых предельных значений потенциала Wf (ср. [4], [8], [15], [16] для $p \equiv 1$; подобные результаты для потенциалов слоев, распределенных на плоских кривых, имеются в [10]). На этом вопросе мы здесь не останавливаемся.

Литература

1. Бураго Ю.Д., Мазья В.Г. Некоторые вопросы теории потенциала и теории функций для областей с нерегулярными границами. - В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. 1967, т.3, с. 1-86.
2. Giorgi E. de. Su una generale della misura (r-1)-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni.-" Ann.Mat.Pura Appl".,1954, v.4, N 36 , p.191-213.
3. Giorgi E. de. Nuovi teoremi relativi alle misure (r-1) -dimensionali in uno spazio ad r dimensioni.-"Ricerche Mat.", 1955, v.4,p.95 - 113.
4. Dont M. Non-tangential limits of the double layer potentials.-"Casopis pest.mat.", 1972, v.97, p.231-258.
5. Federer H. The Gauss-Green the orem, Trans.-"Amer.Math.Soc".,1945, v.58, p.44-76.
6. Federer H. A note on the Gauss-Green the orem.-"Proc.Amer.Math. Soc.", 1958,v.9, p.447-451.
7. Král J. The Fredholm method in potential theory,-"Trans.Amer.Math. Soc.", 1966, v.125, p.511-547.
8. Král J. Limits of double layer potentials. - "Accad. Nazionale dei Lincei, Rendiconti Cl.Sc.fis.,mat. e natur.",ser.8,1970,v.48, p.39-42 .
9. Král J. Flows of heat and the Fourier problem.-"Czechoslovak Math. J.", 1970, v.20, p.556-598.
10. Král J., Lukes J. Integrals of the Cauchy type.-"Czechoslovak Math.J.", 1972, v.22, p.663-682.
11. Marík J. The surface integral, Czechoslovak Math.J.,1956, v.6 , p.522-558.
12. Miranda M. Distribuzioni aventi derivate misure . Insiemi di perimetro localmente finito.-"Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa.",1964,v.3, N 18, p.27-56.
13. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций М., 1973.

15. V e s e l ý J. On the limits of the potential of the double distri - bution.-"Comment.Math.Univ.Carolinae.",1969,v.10,p.189-194.

16. V e s e l ý J. Úhlové limity potenciálu dvojvrstvy.-"Casopis pro pest. mat.",1970, v.95, p.379-401.