УДК 517.946.8

О СИСТЕМАХ СОБОЛЕВА С ТРЕМЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В.Н.Масленникова, М.Е.Боговский (Москва)

В работе [2] для линеаризованной системы гидродинамики идеальной вращающейся жидкости – системы С.Л.Соболева [1]

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v}, \vec{\omega}] + \operatorname{grad} \mathcal{P} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \tag{1}$$

с начальными данными

$$\vec{v}\Big|_{t=0} = \vec{v}^{\,0}(x), \quad \operatorname{div} \vec{v}^{\,0} = 0 \tag{2}$$

в области $\mathcal{D}_4 = \{(x,t) | x \in R^3, t \geq 0\}$ было изучено асимптотическое поведение решения при $t \to \infty$ на произвольном компакте $K \subset R^3$ и получены оценки вида $\vec{v}(x,t) = O(1/t)$, $\mathcal{P}(x,t) = O(1/t)$ при $t \geq t_0 > 0$, равномерные по $x \in K$.

В работе [3] для задачи (1), (2) в области $\mathcal{D}_3 = \{(x,t) | x \in R^2, t \geq 0\}$, т.е. в случае двух пространственных переменных, было получено асимптотическое разложение решения на любом компакте $K \subset R^2$ при $t \to \infty$.

Целью настоящей работы является исследование всех этих вопросов в трехмерном случае.

Рассматривается система:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v}, \vec{\omega}] + (\vec{a}, \nabla)\vec{v} + \operatorname{grad} \mathcal{P} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \tag{3}$$

с учетом конвективных членов, где $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ – постоянный вектор (или зависящий от t – по этому поводу см. замечание 3 после доказательства теоремы 1), $[\cdot,\cdot]$ – векторное произведение, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение. Не ограничивая общности, можно считать, что $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, где $\omega = const > 0$.

Для решения задачи Коши (3), (2) в настоящей работе получена асимптоти-

ческая оценка по t при $t \to \infty$, равномерная во всем пространстве R^3 при условии, что начальные данные $\vec{v}^0(x) \in W_1^3(R^3) \cap C^3(R^3)$. Эта оценка имеет тот же вид, что и полученная в работе [2] асимптотическая оценка на компакте для решения задачи Коши (1), (2). Кроме того, эта оценка равномерна не только по $x \in R^3$, но также и по $\vec{a} \in R^3$, поэтому, полагая $|\vec{a}| = 0$, мы будем иметь равномерную во всем пространстве R^3 асимптотическую оценку по t для решения задачи Коши (1), (2). Так же, как и в работе [3] для случая двух пространственных переменных, в настоящей работе для случая трех пространственных переменных получено асимптотическое разложение на произвольном компакте решения задачи Коши (1), (2) при $t \to \infty$ в предположении, что начальные данные (2) достаточно гладкие и достаточно быстро убывают при $|x| \to \infty$.

Из вида асимптотического разложения решения задачи (1), (2) виден различный характер колебаний, описываемых системой (1), в двух случаях – когда $n=2$ и когда $n=3$.

В первом случае $(n=2)$ колебания по t представляются бесселевыми функциями (см [3]), а во втором, трехмерном случае, – тригонометрическими функциями. Нам кажется, что этот результат интересен с физической точки зрения.

§ 1. Равномерные асимптотические оценки во всем пространстве

В работе [2] методом преобразования Фурье было получено явное представление решения задачи (1), (2) в виде сверток начальных данных с фундаментальными решениями, имеющими локально интегрируемые особенности.

Для решения задачи (3), (2), с учетом конвективных членов, также можно применить метод преобразования Фурье; полученное при этом решение будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\vec{v}(x,t) = -\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}\Big\{&\Delta\vec{v}^0(x-\vec{a}t-y)\frac{1}{r}J_0\left(\frac{\rho\omega t}{r}\right) - \\ &-\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{v}^0}{\partial x_3}(x-\vec{a}t-y)\frac{1}{\rho}\int_0^{\rho\omega t/r} J_0(\eta)\,d\eta\Big\}dy,\\ \mathcal{P}(x,t) = \frac{\omega}{4\pi}\int_{R^3}\Big\{&\left[\frac{\partial v_1^0}{\partial x_2}(x-\vec{a}t-y) - \frac{\partial v_2^0}{\partial x_1}(x-\vec{a}t-y)\right]\frac{1}{r}J_0\left(\frac{\rho\omega t}{r}\right) - \\ &-\frac{\partial v_3^0}{\partial x_3}(x-\vec{a}t-y)\frac{1}{\rho}\int_0^{\rho\omega t/r} J_0(\eta)\,d\eta\Big\}dy.\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $r = \sqrt{\rho^3 + x_3^2}$, $\rho = \sqrt{x_1^8 + x_2^2}$, и всюду в дальнейшем через J_ν мы будем обозначать функции Бесселя вещественного порядка ν.

Имеет место

Т е о р е м а 1. Пусть $\vec{v}^0(x) \in W_1^3(R^3) \cap C^3(R^3)$. Тогда существует абсолютная постоянная $C_0 > 0$, такая что для всех $t \geq t_0 > 0$ выполнены неравенства

$$|\vec{v}(x,t)|\leq\frac{C_0}{\omega t}\|\vec{v}^0\|_{W_1^3(R^3)};\quad |\mathcal{P}(x,t)|\leq\frac{C_0}{t}\|\vec{v}^0\|_{W_1^2(R^3)},$$

равномерно по $x\in R^3$ для всех $\vec{a}\in R^3$, причем положительное число t_0 произвольно.

Замечание 1. Поскольку теорема 1 имеет место для всех $\vec{a}\in R^3$, то мы можем положить $|\vec{a}|=0$, при этом система (3) перейдет в систему (1) и, следовательно, утверждение теоремы 1 останется в силе для решения задачи Коши (1), (2).

Замечание 2. В теореме 1 порядок равномерного в R^3 убывания решения при $t\to\infty$ останется прежним, если требовать только $\vec{v}^0(x)\in W_1^3(R^3)$, но для простоты доказательства теоремы 1 мы предполагаем дополнительно, что $\vec{v}^0(x)\in C^3(R^3)$.

Доказательство достаточно провести только для $\vec{v}(x,t)$. Положим для краткости $X=x-\vec{a}t$ и рассмотрим свертки

$$\vec{Q}_1(x,t)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\Delta\vec{v}^0(X-y)\frac{1}{r}J_0\left(\frac{\rho\omega t}{r}\right)dy,$$
$$\vec{Q}_2(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{v}^0}{\partial x_3}(X-y)\frac{1}{\rho}\left(\int\limits_0^{\rho\omega t/r}J_0(\varrho)d\varrho\right)dy, \tag{5}$$

так что

$$\vec{v}(x,t)=\vec{Q}_1(x,t)+\vec{Q}_2(x,t). \tag{6}$$

Интегрируя по частям и пользуясь тем, что $\vec{v}^0(x)\in W_1^3(R^3)$, мы можем переписать $\vec{Q}_2(x,t)$ в виде

$$\vec{Q}_2(x,t)=-\frac{\omega t}{4\pi}\int\limits_{R^3}\operatorname{rot}\vec{v}^0(X-y)\frac{y_3}{r^3}J_0\left(\frac{\rho\omega t}{r}\right)dy. \tag{7}$$

Поэтому, переходя к полярным координатам, находим

$$\vec{Q}_1(x,t)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty r\,dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}J_0(\omega t\sin\theta)\sin\theta\,\Delta\vec{v}^0(X_1-$$
$$-r\cos\varphi\sin\theta,X_2-r\sin\varphi\sin\theta,\ X_3-r\cos\theta)d\theta,$$
$$\vec{Q}_2(x,t)=-\frac{\omega t}{4\pi}\int\limits_0^\infty dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}J_0(\omega t\sin\theta)\cos\theta\sin\theta\operatorname{rot}\vec{v}^0(X_1- \tag{8}$$
$$-r\cos\varphi\sin\theta,\ X_2-r\sin\varphi\sin\theta,\ X_3-r\cos\theta)d\theta.$$

Интегрируя по частям в свертке $\vec{Q}_2(x,t)$ относительно переменной θ и вводя обозначения:

$$\vec{q}_1(x,t)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty r\,dr\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\pi}J_1(\omega t\sin\theta)\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\operatorname{rot}}{\partial x_1}\vec{v}^0(X_1-$$
$$-r\cos\varphi\sin\theta,\ X_2-r\sin\varphi\sin\theta,\ X_3-r\cos\theta)d\theta,$$
$$\vec{q}_2(x,t)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty r\,dr\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\pi}J_1(\omega t\sin\theta)\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\operatorname{rot}}{\partial x_2}\vec{v}^0(X_1-$$

$$- r\cos\varphi\sin\theta,\ X_2 - r\sin\varphi\sin\theta,\ X_3 - r\cos\theta)d\theta\ , \tag{9}$$

$$\vec{q}_3(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty r\,dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\pi J_1(\omega t\sin\theta)\sin^2\theta\,\frac{\partial\,\mathrm{rot}}{\partial x_3}\,\vec{v}^0(X_1 -$$

$$- r\cos\varphi\sin\theta,\ X_2 - r\sin\varphi\sin\theta,\ X_3 - r\cos\theta)d\theta\ ,$$

будем иметь

$$\vec{Q}_2(x,t) = \sum_{i=1}^{3}\vec{q}_i\,(x,t). \tag{10}$$

Рассмотрим теперь свертку $Q_1(x,t)$, заданную в виде (8). Вводя обозначение

$$\vec{I}_1\,(x,r,\varphi,t) = \int_0^\pi J_0\,(\omega t\sin\theta)\sin\theta\,\Delta\vec{v}^0(X_1 -$$

$$- r\cos\varphi\sin\theta,\ X_2 - r\sin\varphi\sin\theta,\ X_3 - r\cos\theta)d\theta \tag{11}$$

и пользуясь известным интегральным представлением для функции Бесселя J_0 , получаем с помощью замен и перемены порядка интегрирования в (11)

$$\vec{I}_1\,(x,r,\varphi,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(\omega t z)dz\int_{-1}^{1}\Delta\vec{v}^0\,(X_1 - r\cos\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)},\ X_2 -$$

$$- r\sin\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)},\ \ X_3 - r\mu\sqrt{1-z^2})\frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\ .$$

Интегрируя по частям относительно переменной z , получаем

$$\vec{I}_1\,(x,r,\varphi,t) = \frac{2}{\omega t}\sin\omega t\,\Delta\vec{v}^0\,(X_1 - r\cos\varphi,\ X_2 - r\sin\varphi, X_3) +$$

$$+ \cos\varphi\,\vec{I}_1^{(1)}\,(x,r,\varphi,t) + \sin\varphi\,\vec{I}_1^{(2)}(x,r,\varphi,t) + \vec{I}_1^{(3)}(x,r,\varphi,t), \tag{12}$$

где введены обозначения:

$$\vec{I}_1^{(i)}(x,r,\varphi,t) = \frac{2r}{\pi\omega t}\int_0^1 \sin\,(\omega t z)dz\int_{-1}^{1}\frac{\partial\Delta\vec{v}^0}{\partial x_i}\,(X_1 - r\cos\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)},\ X_2 -$$

$$- r\sin\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)}, X_3 - r\mu\sqrt{1-z^2})\frac{\mu^2 z}{\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)}}\cdot\frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\ ,\ i=1,2\ ;$$

$$\vec{I}_1^{(3)}(x,r,\varphi,t) = -\frac{2r}{\pi\omega t}\int_0^1 \sin(\omega t z)dz\int_{-1}^{1}\frac{\partial\Delta\vec{v}^0}{\partial x_3}(X_1 - r\cos\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)}, X_2 - \tag{13}$$

$$- r\sin\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)},\ X_3 - r\mu\sqrt{1-z^2})\frac{\mu z}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\ .$$

Нетрудно оценить первые два интеграла из (13). Действительно, для $i=1,2$ имеем

$$|\vec{I}_1^{(i)}\,(x,r,\varphi,t)| \le \frac{2r}{\pi\omega t}\int_0^1 dz\int_{-1}^{1}\left|\frac{\partial\Delta\vec{v}^0}{\partial x_i}(X_1 - r\cos\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)}\ ,\ X_2 -\right.$$

$$\left.- r\sin\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)}, X_3 - r\mu\sqrt{1-z^2})\right|\frac{z}{\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)}}\cdot\frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\ .$$

С помощью замены $\xi = \mu\sqrt{1-z^2}$ и последующей перемены порядка интегрирования находим

$$|\vec{I}_1^{(i)}(x,r,\varphi,t)| \le \frac{2r}{\pi\omega t}\int_{-1}^{1}\left|\frac{\partial\Delta\vec{v}^0}{\partial x_i}\left(X_1 - r\cos\varphi\sqrt{1-\xi^2},\ X_2 - r\sin\varphi\sqrt{1-\xi^2},\right.\right.$$
$$\left.\left. X_3 - r\xi\right)\right|\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\int_0^{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{z\,dz}{\sqrt{1-\xi^2-z^2}},\quad i=1,2.$$

Вычисляя внутренний интеграл и делая замену $\xi = \cos\theta$, получаем для $i=1,2$

$$|\vec{I}_1^{(i)}(x,r,\varphi,t)| \le \frac{2r}{\pi\omega t}\int_0^{\pi}\left|\frac{\partial\Delta\vec{v}^0}{\partial x_i}(X_1 - r\cos\varphi\sin\theta,\ X_2 - r\sin\varphi\sin\theta,\right.$$
$$\left. X_3 - r\cos\theta)\right|\sin\theta\, d\theta. \qquad (14)$$

Оставшийся интеграл $\vec{I}_1^{(3)}(x,r,\varphi,t)$ можно привести к виду

$$\vec{I}_1^{(3)}(x,r,\varphi,t) = -\frac{2r}{\pi\omega t}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\int_0^{\mu}\sin\left(\omega t\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\mu^2}}\right)\frac{\partial\Delta\vec{v}^0}{\partial x_3}(X_1 -$$
$$- r\cos\varphi\sqrt{1-\xi^2},\ X_2 - r\sin\varphi\sqrt{1-\xi^2},\ X_3 - r\xi)\,d\xi,$$

откуда следует неравенство

$$|\vec{I}_1^{(3)}(x,r,\varphi,t)| \le \frac{2r}{\omega t}\int_{-1}^{1}\left|\frac{\partial\Delta\vec{v}^0}{\partial x_3}(X_1 - r\cos\varphi\sqrt{1-\xi^2},\ X_2 -\right.$$
$$\left. - r\sin\varphi\sqrt{1-\xi^2},\ X_3 - r\xi)\right|d\xi.$$

Делая замену $\xi = \cos\theta$, получаем окончательно

$$|\vec{I}_1^{(3)}(x,r,\varphi,t)| \le \frac{2r}{\omega t}\int_0^{\pi}\left|\frac{\partial\Delta\vec{v}^0}{\partial x_3}(X_1 - r\cos\varphi\sin\theta,\ X_2 -\right.$$
$$\left. - r\sin\varphi\sin\theta,\ X_3 - r\cos\theta)\right|\sin\theta\, d\theta. \qquad (15)$$

Из (12), (14), (15) следует

$$|\vec{I}_1(x,r,\varphi,t)| \le \frac{2}{\omega t}\left|\Delta\vec{v}^0(X_1 - r\cos\varphi,\ X_2 - r\sin\varphi,\ X_3)\right| +$$
$$+ \frac{2r}{\omega t}\sum_{|\alpha|=1}\int_0^{\pi}\left|D_x^{\alpha}\Delta\vec{v}^0(X_1 - r\cos\varphi\sin\theta,\ X_2 - r\sin\varphi\sin\theta,\ X_3 - r\cos\theta)\right|\sin\theta\, d\theta. \qquad (16)$$

В силу (8), (11) имеем

$$\vec{Q}_1(x,t) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} r\,dr\int_0^{2\pi}\vec{I}_1(x,r,\varphi,t)\,d\varphi.$$

Из последнего равенства и неравенства (16) находим, переходя от полярных координат к декартовым,

$$|\vec{Q}_1(x,t)| \le \frac{1}{2\pi\omega t}\int_{R^2}|\Delta\vec{v}^0(X' - y',\ X_3)|\,dy' + \frac{1}{2\pi\omega t}\sum_{|\alpha|=1}\int_{R^3}|D_x^{\alpha}\Delta\vec{v}^0(X-y)|\,dy,$$

где $y' = (y_1, y_2)$. Делая сдвиг по переменной интегрирования, получаем

$$|\vec{Q}_1(x,t)| \le \frac{1}{2\pi\omega t}\int_{R^2}|\Delta\vec{v}^0(x',X_3)|\,dx' + \frac{1}{2\pi\omega t}\sum_{|\alpha|=1}\int_{R^3}|D_x^{\alpha}\Delta\vec{v}^0(x)|\,dx. \qquad (17)$$

Воспользуемся теперь теоремой вложения $W_1^1(R^3) \to L_1(R^2)$ (см. [5]), из которой следует, что существует абсолютная положительная постоянная C_1, такая что

$$\int\limits_{R^2} |\Delta \vec{v}^0(x', X_3)| dx' \le C_1 \| \Delta \vec{v}^0 \|_{W_1^1(R^3)} .$$

Поэтому для всех $t \ge t_0 > 0$ на основании (17) имеем

$$|\vec{Q}_1(x,t)| \le \frac{M_0}{\omega t} \| \Delta \vec{v}^0 \|_{W_1^1(R^3)} ,$$

где $M_0 = \frac{1}{2\pi}(1 + C_1)$, и окончательно получаем оценку

$$|\vec{Q}_1(x,t)| \le \frac{M_0}{\omega t} \| \vec{v}^0 \|_{W_1^3(R^3)} , \tag{18}$$

равномерную по $x \in R^3$ для всех $\vec{a} \in R^3$.

Перейдем теперь к рассмотрению свертки $\vec{Q}_2(x,t)$, заданной в виде (9), (10).

Нетрудно получить оценки для $\vec{q}_1(x,t)$ и $\vec{q}_2(x,t)$. В самом деле, интегрируя по частям относительно переменной θ в свертке $\vec{q}_1(x,t)$, находим

$$\begin{aligned} \vec{q}_1(x,t) = &- \frac{1}{4\pi\omega t} \int\limits_0^\infty r\,dr \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_0^\pi J_0(\omega t \sin\theta)\cos\theta\, \frac{\partial\, \mathrm{rot}}{\partial x_1} \vec{v}^0(X_1 - \\ &- r\cos\varphi\sin\theta,\ X_2 - r\sin\varphi\sin\theta,\ X_3 - r\cos\theta)\,d\theta - \\ &- \frac{1}{4\pi\omega t} \int\limits_0^\infty r\,dr \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_0^\pi J_0(\omega t\sin\theta)\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \Big\{ \frac{\partial\, \mathrm{rot}}{\partial x_1} \vec{v}^0(X_1 - \\ &- r\cos\varphi\sin\theta,\ X_2 - r\sin\varphi\sin\theta,\ X_3 - r\cos\theta \Big\} d\theta. \end{aligned} \tag{19}$$

Интегрируя в первом интеграле правой части (19) по частям по φ, получаем

$$\begin{aligned} |\vec{q}_1(x,t)| \le \frac{1}{2\pi\omega t} \sum_{|\alpha|=2} \int\limits_0^\infty r^2 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^\pi | D_x^\alpha \mathrm{rot}\, \vec{v}^0 (X_1 - \\ - r\cos\varphi\sin\theta,\ X_2 - r\sin\varphi\sin\theta,\ X_3 - r\cos\theta)| \sin\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

Переходя от полярных координат к декартовым, будем иметь

$$|\vec{q}_1(x,t)| \le \frac{1}{2\pi\omega t} \sum_{|\alpha|=2} \int\limits_{R^3} |D_x^\alpha \mathrm{rot}\, \vec{v}^0(X - y)|\, dy,$$

откуда, производя сдвиг по переменной интегрирования, находим

$$|\vec{q}_1(x,t)| \le \frac{1}{2\pi\omega t} \sum_{|\alpha|=2} \int\limits_{R^3} |D_x^\alpha \mathrm{rot}\, \vec{v}^0(x)|\, dx,$$

т.е. для всех $t \ge t_0 > 0$

$$|\vec{q}_1(x,t)| \le \frac{1}{2\pi\omega t} \| \vec{v}^0 \|_{W_1^3(R^3)} \tag{20}$$

равномерно по $x\in R^3$. Точно так же находим, что для всех $t\geq t_0>0$

$$|\vec{q}_2(x,t)|\leq \frac{1}{2\pi\omega t}\|\vec{v}^0\|_{W_1^3(R^3)} \tag{21}$$

равномерно по $x\in R^3$.

Таким образом, для того чтобы иметь оценку для $\vec{Q}_2(x,t)$, остается, согласно (10), оценить $\vec{q}_3(x,t)$.

Пусть

$$\vec{I}_2(x,r,\varphi,t)=\int_0^{\pi} J_1(\omega t\sin\theta)\sin^2\theta\,\frac{\partial \operatorname{rot}}{\partial x_3}\vec{v}^0(X_1-$$
$$-r\cos\varphi\sin\theta,\ X_2-r\sin\varphi\sin\theta,\ X_3-r\cos\theta)d\theta, \tag{22}$$

тогда из (9) следует, что

$$|\vec{q}_3(x,t)|\leq\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} r\left|\int_0^{2\pi}\vec{I}_2(x,r,\varphi,t)d\varphi\right|dr. \tag{23}$$

Пользуясь известным интегральным представлением для функции Бесселя J_1, получаем

$$\vec{I}_2(x,r,\varphi,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 z\sin(\omega tz)dz\int_{-1}^{1}\frac{\partial\operatorname{rot}}{\partial x_3}\vec{v}^0\Big(X_1-r\cos\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)},$$
$$X_2-r\sin\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)},\ X_3-r\mu\sqrt{1-z^2}\Big)\frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Интегрируя по частям относительно переменной z и вводя обозначения

$$\vec{I}_2^{(i)}(x,r,\varphi,t)=-\frac{2r}{\pi\omega t}\int_0^1 z\cos(\omega tz)dz\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2\operatorname{rot}}{\partial x_i\partial x_3}\vec{v}^0\Big(X_1-r\cos\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)},$$
$$X_2-r\sin\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)},\ X_3-r\mu\sqrt{1-z^2}\Big)\frac{\mu^2 z}{\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)}}\cdot\frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}},\quad i=1,2\ ;$$

$$\vec{I}_2^{(3)}(x,r,\varphi,t)=\frac{2r}{\pi\omega t}\int_0^1 z\cos(\omega tz)dz\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2\operatorname{rot}}{\partial x_3^2}\vec{v}^0\Big(X_1-r\cos\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)},$$
$$X_2-r\sin\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)},\ X_3-r\mu\sqrt{1-z^2}\Big)\frac{\mu z}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}},$$

$$\vec{I}_2^{(4)}(x,r,\varphi,t)=\frac{2}{\pi\omega t}\int_0^1\cos(\omega tz)dz\int_{-1}^{1}\frac{\partial\operatorname{rot}}{\partial x_3}\vec{v}^0\Big(X_1-r\cos\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)},$$
$$X_2-r\sin\varphi\sqrt{1-\mu^2(1-z^2)},\ X_3-r\mu\sqrt{1-z^2}\Big)\frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}},$$

находим

$$\vec{I}_2^{(4)}(x,r,\varphi,t)=-\frac{2}{\omega t}\cos\omega t\,\frac{\partial\operatorname{rot}}{\partial x_3}\vec{v}^0(X_1-r\cos\varphi,\ X_2-r\sin\varphi,\ X_3)+$$
$$+\cos\varphi\,\vec{I}_2^{(1)}(x,r,\varphi,t)+\sin\varphi\,\vec{I}_2^{(2)}(x,r,\varphi,t)+\sum_{i=3}^{4}\vec{I}_2^{(i)}(x,r,\varphi,t), \tag{24}$$

откуда следует, что

$$\left|\int_0^{2\pi}\vec{I}_2(x,r,\varphi,t)\,d\varphi\right| \le \frac{2}{\omega t}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^{\,0}(X_1-r\cos\varphi, X_2-r\sin\varphi, X_3)\right|d\varphi +$$

$$+\sum_{i=1}^{4}\left|\int_0^{2\pi}\vec{I}_2^{(i)}(x,r,\varphi,t)\,d\varphi\right|. \qquad (25)$$

Очевидно, что интегралы $\vec{I}_2^{(i)}(x,r,\varphi,t)$, $i=1,2,3$, оцениваются точно так же, как интегралы $\vec{I}_1^{(i)}(x,r,\varphi,t)$, $i=1,2,3$. Поэтому мы можем сразу же записать для $i=1,2,3$

$$\left|\int_0^{2\pi}\vec{I}_2^{(i)}(x,r,\varphi,t)\,d\varphi\right| \le \int_0^{2\pi}\left|\vec{I}_2^{(i)}(x,r,\varphi,t)\right|d\varphi \le$$

$$\le \frac{2r}{\omega t}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\left|\frac{\partial^2 rot}{\partial x_i\partial x_3}\vec{v}^{\,0}(X_1-r\cos\varphi\sin\theta, X_2-r\sin\varphi\sin\theta, X_3-r\cos\theta)\right|\sin\theta\,d\theta. \qquad (26)$$

Оставшийся интеграл $\vec{I}_2^{(4)}(x,r,\varphi,t)$ можно привести к виду

$$\vec{I}_2^{(4)}(x,r,\varphi,t) = \frac{2}{\pi\omega t}\int_0^{\pi}\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^{\,0}(X_1-r\cos\varphi\sin\theta, X_2-r\sin\varphi\sin\theta, X_3-$$

$$-r\cos\theta)\left\{\int_0^{\sin\theta}\frac{\cos(\omega t z)}{\sqrt{\sin^2\theta-z^2}}\,dz\right\}\sin\theta\,d\theta.$$

В интеграле

$$\int_0^{2\pi}\vec{I}_2^{(4)}(x,r,\varphi,t)\,d\varphi = \frac{2}{\pi\omega t}\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{\sin\theta}\frac{\cos(\omega t z)}{\sqrt{\sin^2\theta-z^2}}\,dz\right\}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^{\,0}(X_1-$$

$$-r\cos\varphi\sin\theta, X_2-r\sin\varphi\sin\theta, X_3-r\cos\theta)\,d\varphi$$

проинтегрируем по частям относительно переменной φ , тогда получим

$$\left|\int_0^{2\pi}\vec{I}_2^{(4)}(x,r,\varphi,t)\,d\varphi\right| \le \frac{2\pi}{\omega t}\int_0^{\pi}\left|\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^{\,0}(X_1-r\sin\theta, X_2, X_3-r\cos\theta)\right|d\theta +$$

$$+\frac{2\pi r}{\omega t}\sum_{|\alpha|=1}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\left|D_x^{\alpha}\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^{\,0}(X_1-r\cos\varphi\sin\theta, X_2-r\sin\varphi\sin\theta,\right.$$

$$\left.X_3-r\cos\theta)\right|\sin\theta\,d\theta.$$

Из последнего неравенства и (25), (26) находим

$$\left|\int_0^{2\pi}\vec{I}_2(x,r,\varphi,t)\,d\varphi\right| \le \frac{2}{\omega t}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^{\,0}(X_1-r\cos\varphi, X_2-r\sin\varphi, X_3)\right|d\varphi +$$

$$+\frac{2\pi}{\omega t}\int_0^{\pi}\left|\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^{\,0}(X_1-r\sin\theta, X_2, X_3-r\cos\theta)\right|d\theta +$$

$$+(2\pi+2)\frac{r}{\omega t}\sum_{|\alpha|=1}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\left|D_x^{\alpha}\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^{\,0}(X_1-r\cos\varphi\sin\theta, X_2-r\sin\varphi\sin\theta,\right.$$

$$\left.X_3-r\cos\theta)\right|\sin\theta\,d\theta.$$

Подставляя последнее неравенство в (23), получаем, переходя от полярных координат к декартовым,

$$|\vec{q}_3(x,t)| \le \frac{1}{2\pi\omega t}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^0(X_1-y_1,X_2-y_2,X_3)\right|dy_1dy_2+$$

$$+\frac{1}{2\omega t}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^0(X_1-y_2,X_2,X_3-y_1)|\,dy_1dy_2+$$

$$+\frac{\pi+1}{2\pi\omega t}\sum_{|\alpha|=1}\int\limits_{R^3}\left|D_x^\alpha\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^0(X-y)\right|dy.$$

Производя сдвиг по переменной интегрирования, находим

$$|\vec{q}_3(x,t)| \le \frac{1}{2\pi\omega t}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^0(x_1,x_2,X_3)\right|dx_1dx_2+$$

$$+\frac{1}{2\omega t}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^0(x_1,X_2,x_3)\right|dx_1dx_3+\frac{\pi+1}{2\pi\omega t}\sum_{|\alpha|=1}\int\limits_{R^3}\left|D_x^\alpha\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^0(x)\right|dx.$$

Воспользуемся еще раз теоремой вложения $W_1^1(R^3)\to L_1(R^2)$, при этом

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^0(x_1,x_2,X_3)\right|dx_1dx_2 \le C_1\left\|\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^0\right\|_{W_1^1(R^3)},$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^0(x_1,X_2,x_3)\right|dx_1dx_3 \le C_1\left\|\frac{\partial rot}{\partial x_3}\vec{v}^0\right\|_{W_1^1(R^3)}.$$

Поэтому для всех $t \ge t_0 > 0$

$$|\vec{q}_3(x,t)| \le \frac{(\pi+1)M_0}{\omega t}\|\vec{v}^0\|_{W_1^3(R^3)}$$

равномерно по $x\in R^3$. Из последнего неравенства и (20), (21) получаем согласно (6), (10), что для всех $t \ge t_0 > 0$

$$|\vec{v}(x,t)| \le |\vec{Q}_1(x,t)|+|\vec{Q}_2(x,t)| \le \frac{C_0}{\omega t}\|\vec{v}^0\|_{W_1^3(R^3)} \tag{27}$$

равномерно по $x\in R^3$, где введено обозначение $C_0=C_1+2$. Заметим, что постоянная C_0 в (27) является абсолютной, поскольку C_1 определяется только из теоремы вложения $W_1^1(R^3)\to L_1(R^2)$, т.е. асимптотическая оценка (27) равномерна не только по $x\in R^3$, но также и по $\vec{a}\in R^3$. Что касается положительного числа t_0, то оно может быть выбрано произвольно, так как в ходе доказательства теоремы на него не было наложено никаких ограничений, кроме $t_0>0$. Таким образом, теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Теорема 1 допускает обобщение на случай, когда $\vec{a}=\vec{a}(t)$ – произвольная непрерывная функция t на полуоси $[0,\infty)$, а именно: решение задачи (3), (2) в этом случае для всех $t\ge t_0>0$ будет удовлетворять тем же, что и в теореме 1, неравенствам равномерно по $x\in R^3$ для всех непрерывных на полуоси $[0,\infty)$ функций $\vec{a}=\vec{a}(t)$. Это непосредственно вытекает из доказательства теоремы 1 и того факта, что решение задачи (3), (2) в случае, когда $\vec{a}=\vec{a}(t)$ – непрерывная функция $t\in[0,\infty)$, может быть записано в виде (4), где вместо произведения $\vec{a}t$ следует уже поставить интеграл $\int\limits_0^t\vec{a}(\tau)d\tau$.

В случае, когда $|\vec{a}|=0$ и $x\in K$, где $K\subset R^3$ – произвольный компакт, удается более детально изучить характер убывания решения задачи (3), (2) при $t\to\infty$.

§ 2. Асимптотическое разложение на компакте

Рассмотрим задачу Коши (1), (2). Решение этой задачи получается из (4) при $|\vec{a}|=0$. Относительно начальных данных мы будем предполагать, что они удовлетворяют следующему условию:

Условие А. Для некоторого натурального числа ℓ начальные данные $\vec{v}^{\,0}(x)\in C^{2\ell+4}(R^3)\cap W_1^1(R^3)$ и существуют положительные постоянные C_β, такие, что для всех мультииндексов β, $\ell\le|\beta|\le 2\ell+4$ выполнены неравенства

$$\int_{R^3}(1+|x|)^{|\beta|-2}\,|D_x^\beta\,\vec{v}^{\,0}(x)|\,dx\le C_\beta .$$

Имеет место

Теорема 2. <u>Пусть начальные данные (2) удовлетворяют условию А, тогда на любом компакте</u> $K\subset R^3$ <u>асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) при</u> $t\to\infty$ <u>имеет вид:</u>

$$\vec{v}(x,t)=\sum_{k=1}^{\ell}\left\{\vec{A}_k^{(1)}(x)\cos\omega t+\vec{A}_k^{(2)}(x)\sin\omega t\right\}(\omega t)^{-k}+O\left[(\omega t)^{-\ell-1}\right],$$

$$\mathcal{P}(x,t)=\omega\sum_{k=1}^{\ell}\left\{B_k^{(1)}(x)\cos\omega t+B_k^{(2)}(x)\sin\omega t\right\}(\omega t)^{-k}+O\left[(\omega t)^{-\ell-1}\right],$$

<u>причем функции</u> $\vec{A}_k^{(j)}(x)$, $B_k^{(j)}(x)$ <u>непрерывны по</u> $x\in K$ <u>и выражаются только через начальные данные (2).</u>

Сначала мы докажем две вспомогательные теоремы, после чего в конце параграфа будет проведено доказательство уже самой теоремы 2.

Очевидно, что теорему 2 достаточно доказать только для $\vec{v}(x,t)$. Полагая в (5), (7) $|\vec{a}|=0$ и вводя обозначения

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{R}}_1(x,t)&=-\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}\Delta\vec{v}^{\,0}(x-y)\frac{1}{r}J_0\left(\frac{\rho\omega t}{r}\right)dy,\\ \vec{\mathcal{R}}_2(x,t)&=-\frac{\omega t}{4\pi}\int_{R^3}\operatorname{rot}\vec{v}^{\,0}(x-y)\frac{y_3}{r^3}J_0\left(\frac{\rho\omega t}{r}\right)dy,\end{aligned}\tag{28}$$

заключаем на основании (6), что решение $\vec{v}(x,t)$ задачи (1), (2) можно записать в виде

$$\vec{v}(x,t)=\vec{\mathcal{R}}_1(x,t)+\vec{\mathcal{R}}_2(x,t).\tag{29}$$

Имеет место следующая вспомогательная

Теорема 3. <u>Пусть выполнено условие А, тогда для всех</u> $t\ge t_0>0$ <u>и</u> $x\in K$

$$\vec{R}_j(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_j(n,t)\vec{a}_n^{(j)}(x), \quad j=1,2,$$

где $h_j(n,t)$ имеют вид:

$$h_1(n,t) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\int_0^1 \cos(\omega t\xi)d\xi \int_0^{\pi} U_{2n}(\xi\cos\psi)d\psi,$$

$$h_2(n,t) = \omega t\,\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\int_0^1 \cos(\omega t\xi)d\xi \int_0^{\pi} T_{2n}(\xi\cos\psi)d\psi,$$

а функции $\vec{a}_n^{(j)}(x)$ непрерывны по $x\in K$ и выражаются только через начальные данные (2), причем существуют положительные постоянные $C_j'(K,\ell)$, зависящие только от ℓ и компакта K, такие что для всех натуральных n выполнены неравенства

$$|\vec{a}_n^{(1)}(x)| \leq \frac{C_1'(K,\ell)}{(2n+1)^{2\ell+2}}; \quad |\vec{a}_n^{(2)}(x)| \leq \frac{C_2'(K,\ell)}{(2n)^{2\ell+3}}$$

равномерно по $x\in K$.

Здесь T_{2n}, U_{2n} – полиномы Чебышева первого и второго рода, соответственно.

Доказательство. Переходя в (28) к полярным координатам и вводя для краткости обозначения

$$\begin{aligned}\vec{V}_1(x,r,\theta) &= \sin\theta\int_0^{2\pi} \Delta\vec{v}^{\,0}(x_1-r\cos\varphi\sin\theta, x_2-r\sin\varphi\sin\theta, x_3-r\cos\theta)d\varphi,\\ \vec{V}_2(x,r,\theta) &= \sin\theta\int_0^{2\pi} \operatorname{rot}\vec{v}^{\,0}(x_1-r\cos\varphi\sin\theta, x_2-r\sin\varphi\sin\theta, x_3-r\cos\theta)d\varphi,\end{aligned} \tag{30}$$

будем иметь

$$\begin{aligned}\vec{R}_1(x,t) &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} r\,dr\int_0^{\pi}\vec{V}_1(x,r,\theta)J_0(\omega t\sin\theta)d\theta,\\ \vec{R}_2(x,t) &= -\frac{\omega t}{4\pi}\int_0^{\infty} dr\int_0^{\pi}\vec{V}_2(x,r,\theta)J_0(\omega t\sin\theta)\cos\theta d\theta.\end{aligned} \tag{31}$$

Продолжим функции $\vec{V}_j(x,r,\theta)$ по θ естественным образом с отрезка $[0,\pi]$ на отрезок $[0,2\pi]$ и заметим, что $\vec{V}_j(x,r,\theta)=-\vec{V}_j(x,r,-\theta)$, т.е. функции $\vec{V}_j(x,r,\theta)$ являются нечетными функциями θ. В силу условия А функции $V_j(x,r,\theta)$ можно разложить в ряд Фурье относительно θ на отрезке $[0,2\pi]$. Учитывая при этом, что $\vec{V}_j(x,r,\theta)$ – нечетные функции θ, получаем

$$\vec{V}_j(x,r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin k\theta\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\vec{V}_j(x,r,\theta)\sin k\theta d\theta\right\}, \quad j=1,2. \tag{32}$$

Очевидно, что для всех $t\geq t_0>0$ функция $\frac{1}{\omega t}J_0(\omega t\sin\theta)$ имеет на отрезке $[0,\pi]$ ограниченное изменение по θ.

Известно (см. [6]), что ряд Фурье можно почленно интегрировать в произвольных конечных пределах после умножения его на функцию с ограниченным из-

менением. Следовательно, из (31), (32) получаем

$$\vec{\mathcal{R}}_1(x,t) = -\frac{\omega t}{4\pi}\int_0^\infty \left\{\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \vec{V}_1(x,\tau,\theta)\sin k\theta d\theta\right)\left(\int_0^\pi \frac{J_0(\omega t \sin\theta)}{\omega t}\sin k\theta d\tau\right)\right\}\tau d\tau,$$

$$\vec{\mathcal{R}}_2(x,t) = -\frac{(\omega t)^2}{4\pi}\int_0^\infty \left\{\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \vec{V}_2(x,\tau,\theta)\sin k\theta d\theta\right)\left(\int_0^\pi \frac{J_0(\omega t \sin\theta)}{\omega t}\cos\theta \sin k\theta d\theta\right)\right\}d\tau.$$

А в силу того, что

$$\int_0^\pi \sin k\theta\, J_0\left(\omega t \sin\theta\right)d\theta = \pi \sin\frac{k\pi}{2}\, J_{\frac{k}{2}}\left(\frac{\omega t}{2}\right) J_{-\frac{k}{2}}\left(\frac{\omega t}{2}\right),$$

имеем

$$\vec{\mathcal{R}}_1(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{\sum_{n=0}^\infty h_1(n,t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\vec{V}_1(x,\tau,\theta)\sin(2n+1)\theta d\theta\right)\right\}\tau d\tau,$$

$$\vec{\mathcal{R}}_2(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{\sum_{n=1}^\infty h_2(n,t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\vec{V}_2(x,\tau,\theta)\sin 2n\theta d\theta\right)\right\}d\tau, \qquad (33)$$

где введены обозначения:

$$h_1(n,t) = -\frac{\pi}{2}(-1)^n J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega t}{2}\right) J_{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega t}{2}\right),$$

$$h_2(n,t) = -\omega t\,\frac{\pi}{4}\left[(-1)^n J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega t}{2}\right)J_{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega t}{2}\right) + (-1)^{n-1} J_{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega t}{2}\right)J_{-n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right].$$

Пользуясь тем, что

$$\int_0^1 P_n(1-2\xi^2)\cos(\omega t\xi)d\xi = \frac{\pi}{2} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega t}{2}\right)J_{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega t}{2}\right),$$

где P_n – полиномы Лежандра, получаем

$$h_1(n,t) = -\int_0^1 P_n(1-2\xi^2)\cos(\omega t\xi)d\xi,$$

$$h_2(n,t) = -\frac{\omega t}{2}\int_0^1 \left\{P_n(1-2\xi^2) + P_{n-1}(1-2\xi^2)\right\}\cos(\omega t\xi)d\xi,$$

а учитывая, что

$$P_n(1-2\xi^2) = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^\pi U_{2n}(\xi\cos\varphi)d\varphi,$$

находим

$$h_1(n,t) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\int_0^1 \cos(\omega t\xi)d\xi\int_0^\pi U_{2n}(\xi\cos\varphi)d\varphi,$$

$$h_2(n,t) = \omega t\,\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\int_0^1 \cos(\omega t\xi)d\xi\int_0^\pi T_{2n}(\xi\cos\varphi)d\varphi. \qquad (34)$$

Здесь, при получении последнего равенства, мы воспользовались тем (см. [4]), что $\frac{1}{2}\left\{U_{2n}(\lambda) - U_{2n-2}(\lambda)\right\} = T_{2n}(\lambda)$.

Докажем теперь, что ряды в правой части (33) можно интегрировать почленно; одновременно с этим докажем и оценки из утверждения теоремы 3.

Интегрируя $2\ell+2$ раза по частям, получаем

$$\left|\int_0^{2\pi} \vec{V}_1(x,\tau,\theta)\sin(2n+1)\theta d\theta\right| \le \frac{1}{(2n+1)^{2\ell+2}}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^{2\ell+2}}{\partial\theta^{2\ell+2}}\vec{V}_1(x,\tau,\theta)\right|d\theta. \tag{35}$$

Аналогично, интегрируя $2\ell+3$ раза по частям, получаем

$$\left|\int_0^{2\pi} \vec{V}_2(x,\tau,\theta)\sin 2n\theta d\theta\right| \le \frac{1}{(2n)^{2\ell+3}}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^{2\ell+3}}{\partial\theta^{2\ell+3}}\vec{V}_2(x,\tau,\theta)\right|d\theta. \tag{36}$$

Применяя к (30) формулу Лейбница для дифференцирования произведения двух функций, заключаем, что существуют положительные постоянные $\mu_\beta(\ell)$ и $\nu_\beta(\ell)$, зависящие только от ℓ и мультииндексов β, такие, что

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^{2\ell+2}}{\partial\theta^{2\ell+2}}\vec{V}_1(x,\tau,\theta)\right|d\theta \le \sum_{k=0}^{\ell+1} C_{2\ell+2}^{2k}\sum_{|\beta|\le 2k}\mu_\beta(\ell)\tau^{|\beta|}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}|D_x^\beta\Delta\vec{v}^0(x_1-$$
$$-\tau\cos\varphi\sin\theta,\ x_2-\tau\sin\varphi\sin\theta,\ x_3-\tau\cos\theta)|d\varphi+$$
$$+\sum_{k=0}^{\ell} C_{2\ell+2}^{2k+1}\sum_{1\le|\beta|\le 2k+1}\nu_\beta(\ell)\tau^{|\beta|}\int_0^{\pi}\left|\int_0^{2\pi}D_x^\beta\Delta\vec{v}^0(x_1-\tau\cos\varphi\sin\theta, x_2-\tau\sin\varphi\sin\theta, x_3-\right.$$
$$\left.-\tau\cos\theta)(\cos\varphi)^{\beta_1}(\sin\varphi)^{\beta_2}(\sin\theta)^{\beta_1+\beta_2}d\varphi\right|d\theta,$$

где C_n^m – биномиальные коэффициенты. В первом слагаемом правой части последнего неравенства под знаком интеграла всегда присутствует множитель $\sin\theta$, а под знаком интеграла во втором слагаемом этот множитель может отсутствовать, когда $\beta_1+\beta_2=0$. Для того чтобы получить множитель $\sin\theta$ под знаком интеграла во втором слагаемом правой части последнего неравенства, проинтегрируем один раз по частям относительно переменной φ, при этом, меняя порядок суммирования, находим

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^{2\ell+2}}{\partial\theta^{2\ell+2}}\vec{V}_1(x,\tau,\theta)\right|d\theta \le \sum_{2\le|\beta|\le 2\ell+4}\mu_\beta^*(\ell)\tau^{|\beta|-2}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}|D_x^\beta\vec{v}^0(x_1-$$
$$-\tau\cos\varphi\sin\theta,\ x_2-\tau\sin\varphi\sin\theta,\ x_3-\tau\cos\theta)|d\varphi+$$
$$+\sum_{3\le|\beta|\le 2\ell+3}\nu_\beta^*(\ell)\tau^{|\beta|-2}\int_0^{\pi}|D_x^\beta\vec{v}^0(x_1-\tau\sin\theta, x_2, x_3-\tau\cos\theta)|d\theta, \tag{37}$$

где $\mu_\beta^*(\ell)$, $\nu_\beta^*(\ell)$ выражаются через $\mu_\beta(\ell)$, $\nu_\beta(\ell)$. Умножив последнее неравенство на τ и затем проинтегрировав его по τ в пределах от нуля до бесконечности, получим

$$\int_0^\infty\tau d\tau\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^{2\ell+2}}{\partial\theta^{2\ell+2}}\vec{V}_1(x,\tau,\theta)\right|d\theta \le \sum_{3\le|\beta|\le 2\ell+4}\mu_\beta^*(\ell)\int_0^\infty\tau^{|\beta|-1}d\tau\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}|D_x^\beta\vec{v}^0(x_1-$$
$$-\tau\cos\varphi\sin\theta, x_2-\tau\sin\varphi\sin\theta, x_3-\tau\cos\theta)|d\varphi+\sum_{3\le|\beta|\le 2\ell+3}\nu_\beta^*(\ell)\int_0^\infty\tau^{|\beta|-1}d\tau\int_0^{2\pi}|D_x^\beta\vec{v}^0(x_1-$$
$$-\tau\sin\theta, x_2, x_3-\tau\cos\theta)|d\theta+\sum_{|\beta|=2}\mu_\beta^*(\ell)\int_0^1 d\tau\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}|D_x^\beta\vec{v}(x_1-$$

$$- r\cos\varphi \sin\theta,\ x_2 - r\sin\varphi\sin\theta,\ x_3 - r\cos\theta)|d\varphi +$$

$$+\sum_{|\beta|=2} \mu^*_\beta(\ell)\int_0^\infty r^2 dr\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}|D_x^\beta \vec{v}^{\,0}(x_1 - r\cos\varphi\sin\theta, x_2 -$$

$$- r\sin\varphi\sin\theta,\ x_3 - r\cos\theta))|d\varphi.$$

Переходя от полярных координат к декартовым и применяя к интегралу во втором слагаемом правой части последнего неравенства теорему вложения $W_1^1(R^3)\to L_1(R^2)$ (см. [5]), получим, учитывая условие А, неравенство

$$\int_0^\infty r dr\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^{2\ell+2}}{\partial\theta^{2\ell+2}}\vec{V}_1(x,r,\theta)\right|d\theta \le 2\pi^2 C_1'(K,\ell), \qquad (38)$$

где постоянная $C_1'(K,\ell)$ зависит только от ℓ , компакта K и постоянных C_2 из условия А.

Далее, из неравенства (37) и условия А следует, что первый ряд в правой части (33) можно интегрировать почленно по r в конечных пределах, а тогда на основании (38) заключаем, что этот ряд можно интегрировать почленно по r в пределах от нуля до бесконечности.

Применяя аналогичную процедуру к интегралу из правой части (36), получаем, что

$$\int_0^\infty dr\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^{2\ell+3}}{\partial\theta^{2\ell+3}}\vec{V}_2(x,r,\theta)\right|d\theta \le 2\pi^2 C_2'(K,\ell), \qquad (39)$$

и точно так же доказываем, что и второй ряд в правой части (33) можно интегрировать почленно по r в пределах от нуля до бесконечности.

Теперь, интегрируя почленно ряды в (33) и вводя обозначения

$$\vec{a}_n^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi^3}\int_0^\infty\int_0^\pi \vec{V}_1(x,r,\theta)\sin(2n+1)\theta r dr d\theta,$$
$$\vec{a}_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\pi \vec{V}_2(x,r,\theta)\sin 2n\theta dr d\theta, \qquad (40)$$

получаем

$$\vec{R}_j(x,t) = \sum_{n=0}^\infty h_j(n,t)\vec{a}_n^{(j)}(x), \quad j=1,2,$$

где $h_j(n,t)$ имеют вид (34).

На основании (35), (38) и (36), (39) заключаем, что для всех натуральных n функции $\vec{a}_n^{(j)}(x)$ удовлетворяют неравенствам из утверждения теоремы 3 равномерно по $x\in K$, где K – произвольный компакт в R^3 .

Непрерывность функций $\vec{a}_n^{(j)}(x)$ по $x\in K$ тотчас же следует из их явного

вида (40) и условия А. Таким образом, теорема 3 доказана.

Приступим теперь к изучению функций $h_j(n,t)$. Имеет место

Т е о р е м а 4. Для произвольного фиксированного натурального числа m существуют постоянные $p_i^{(j)}(n)$, такие что

$$h_1(n,t)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\left\{p_{2k-1}^{(1)}(n)\frac{\sin\omega t}{(\omega t)^{2k-1}}+p_{2k}^{(1)}(n)\frac{\cos\omega t}{(\omega t)^{2k}}\right\}+R_1(n,t),$$

$$h_2(n,t)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\left\{p_{2k-1}^{(2)}(n)\frac{\cos\omega t}{(\omega t)^{2k-1}}+p_{2k}^{(2)}(n)\frac{\sin\omega t}{(\omega t)^{2k}}\right\}+R_2(n,t),$$

причем для всех $n\geq i$ выполнены неравенства

$$|p_i^{(j)}(n)|\leq n^{2i+j-2},\quad j=1,2;\quad i=1,\dots,2m,$$

и существуют положительные постоянные $M_j(m)$, такие что для всех $n>m$ и $t\geq t_0$ имеют место оценки

$$|R_j(n,t)|\leq M_j(m)(\omega t)^{-2m-1}n^{4m+j-1},\quad j=1,2,$$

где t_0 – произвольное положительное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В представлении (34) для $h_1(n,t)$ проинтегрируем $2m$ раз по частям относительно переменной ξ, тогда

$$h_1(n,t)=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\left\{\frac{\sin\omega t}{(\omega t)^{2k-1}}\int_0^{\pi}U_{2n}^{(2k-2)}(\cos\varphi)(\cos\varphi)^{2k-2}d\varphi+\right.$$
$$\left.+\frac{\cos\omega t}{(\omega t)^{2k}}\int_0^{\pi}U_{2n}^{(2k-1)}(\cos\varphi)(\cos\varphi)^{2k-1}d\varphi\right\}+R_1(n,t),$$

где $U_{2n}^{(i)}(\lambda)\equiv\frac{d^i}{d\lambda^i}U_{2n}(\lambda)$, и остаточный член имеет вид

$$R_1(n,t)=\frac{(-1)^{m+n+1}}{\pi(\omega t)^{2m}}\int_0^1\cos(\omega t\xi)d\xi\int_0^{\pi}U_{2n}^{(2m)}(\xi\cos\varphi)(\cos\varphi)^{2m}d\varphi.\qquad(41)$$

Полагая

$$p_i^{(1)}(n)=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\int_0^{\pi}U_{2n}^{(i-1)}(\cos\varphi)(\cos\varphi)^{i-1}d\varphi,\quad i=1,\dots,2m,\qquad(42)$$

получаем, что

$$h_1(n,t)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\left\{p_{2k-1}^{(1)}(n)\frac{\sin\omega t}{(\omega t)^{2k-1}}+p_{2k}^{(1)}(n)\frac{\cos\omega t}{(\omega t)^{2k}}\right\}+R_1(n,t).$$

Рассмотрим теперь $h_2(n,t)$. В представлении (34) для $h_2(n,t)$ проинтегрируем один раз по частям относительно переменной ξ, при этом получим

$$h_2(n,t)=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\sin\omega t\int_0^{\pi}T_{2n}(\cos\varphi)d\varphi+$$
$$+\frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^1\sin(\omega t\xi)d\xi\int_0^{\pi}T_{2n}^{(1)}(\xi\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi,$$

где $T_{2n}^{(i)}(\lambda) \equiv \frac{d^i}{d\lambda^i} T_{2n}(\lambda)$. Заметим, что $T_{2n}(\cos\psi) = \cos(2n\psi)$, поэтому

$$\int_0^\pi T_{2n}(\cos\psi)d\psi = \int_0^\pi \cos(2n\psi)d\psi = 0.$$

Следовательно, $h_2(n,t)$ примет вид

$$h_2(n,t) = -\frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \int_0^1 \sin(\omega t \xi)d\xi \int_0^\pi T_{2n}^{(1)}(\xi\cos\psi)\cos\psi d\psi.$$

Интегрируя в правой части последнего равенства $2m$ раз по частям относительно переменной ξ , находим

$$h_2(n,t) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \left\{ \frac{\cos\omega t}{(\omega t)^{2k-1}} \rho_{2k-1}^{(2)}(n) + \frac{\sin\omega t}{(\omega t)^{2k}} \rho_{2k}^{(2)}(n) \right\} + R_2(n,t),$$

где введены обозначения

$$\rho_i^{(2)}(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \int_0^\pi T_{2n}^{(i)}(\cos\psi)(\cos\psi)^i d\psi, \quad i=1,\dots,2m, \tag{43}$$

и остаточный член имеет вид

$$R_2(n,t) = \frac{(-1)^{m+n+1}}{\pi(\omega t)^{2m}} \int_0^1 \sin(\omega t\xi)d\xi \int_0^\pi T_{2n}^{(2m+1)}(\xi\cos\psi)(\cos\psi)^{2m+1} d\psi. \tag{44}$$

Остается доказать оценки для $\rho_i^{(j)}(n)$ и $R_j(n,t)$. Пользуясь тем, что (см.[4])

$$U_{2n}^{(i-1)}(\cos\psi) = 2^{i-1}(i-1)!\, C_{2n-i+1}^{i}(\cos\psi),$$

$$T_{2n}^{(i)}(\cos\psi) = n 2^i (i-1)!\, C_{2n-i}^{i}(\cos\psi), \tag{45}$$

где C_n^λ – ультрасферические многочлены Гегенбауэра, находим из (42), (43)

$$|\rho_i^{(j)}(n)| \le (2n)^{i-1} \frac{2^{i-1}(i-1)!}{\pi} \int_0^\pi |C_{2n-i-j+2}^{i}(\cos\psi)| d\psi, \quad j=1,2;\ i=1,\dots,2m.$$

Заметим, что

$$\max_{0\le\psi\le\pi} |C_n^\lambda(\cos\psi)| = C_n^\lambda(1) = \frac{(n+2\lambda-1)!}{n!\,(2\lambda-1)!}$$

(см. [4]), следовательно, для всех $n \ge i$

$$|\rho_i^{(j)}(n)| \le \frac{(2n)^{2i-2+j}}{(2i-1)!!} < n^{2i-2+j}, \quad j=1,2;\ i=1,\dots,2m.$$

Рассмотрим теперь остаточный член $R_1(n,t)$, заданный в виде (41). Интегрируя один раз по частям относительно переменной ξ , находим

$$|R_1(n,t)| \le \frac{1}{\pi(\omega t)^{2m+1}} \left\{ \int_0^\pi |U_{2n}^{(2m)}(\cos\psi)| d\psi + \right.$$
$$\left. + \int_0^1 \left| \int_0^\pi U_{2n}^{(2m+1)}(\xi\cos\psi)(\cos\psi)^{2m+1} d\psi \right| d\xi \right\}.$$

Для второго интеграла в правой части последнего неравенства имеем, учитывая (45),

$$\int_0^1\left|\int_0^\pi U_{2n}^{(2m+1)}(\xi\cos\psi)(\cos\psi)^{2m+1}d\psi\right|d\xi\leq 2m^{2m+2}(2m+1)!\int_0^{\pi/2}d\psi\int_0^{\cos\psi}\left|C_{2n-2m-1}^{2m+2}(\lambda)\right|d\lambda.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_0^1\left|\int_0^\pi U_{2n}^{(2m+1)}(\xi\cos\psi)(\cos\psi)^{2m+1}d\psi\right|d\xi\leq 2^{2m+2}(2m+1)!\int_0^1\left|C_{2n-2m-1}^{2m+2}(\lambda)\right|\arccos\lambda\,d\lambda,$$

откуда с помощью замены $\lambda=\cos\theta$ находим

$$\int_0^1\left|\int_0^\pi U_{2n}^{(2m+1)}(\xi\cos\psi)(\cos\psi)^{2m+1}d\psi\right|d\xi\leq 2^{2m+2}(2m+1)!\int_0^{\pi/2}\left|C_{2n-2m-1}^{2m+2}(\cos\theta)\right|\theta\sin\theta d\theta.$$

Покажем, что при $n\to\infty$

$$\int_0^{\pi/2}\left|C_n^\lambda(\cos\theta)\right|\theta\sin\theta d\theta=O(n^{2\lambda-4}),\tag{46}$$

где n - натуральное, а $\lambda>3$ - произвольное вещественное число. Действительно, согласно [7] имеем

$$C_n^\lambda(\cos\theta)=\begin{cases}\theta^{-\lambda}O(n^{\lambda-1}) & \text{при } cn^{-1}\leq\theta\leq\pi/2,\\ O(n^{2\lambda-1}) & \text{при } 0\leq\theta\leq cn^{-1},\end{cases}\tag{47}$$

где $c>0$ фиксировано. Поэтому

$$\int_0^{\pi/2}\left|C_n^\lambda(\cos\theta)\right|\theta\sin\theta d\theta=\int_0^{cn^{-1}}\left|C_n^\lambda(\cos\theta)\right|\theta\sin\theta d\theta+\int_{cn^{-1}}^{\pi/2}\left|C_n^\lambda(\cos\theta)\right|\theta\sin\theta d\theta=$$

$$=O(n^{2\lambda-4})+O(n^{\lambda-1})\left\{O(1)+O(n^{\lambda-3})\right\}=O(n^{2\lambda-4}),$$

здесь мы учли, что $\lambda>3$. Справедливость (46) установлена. Тогда из (46) получаем, что при $n\to\infty$

$$\int_0^{\pi/2}\left|C_{2n-2m-1}^{2m+2}(\cos\theta)\right|\theta\sin\theta d\theta=O(n^{4m}),$$

и, следовательно,

$$\int_0^1\left|\int_0^\pi U_{2n}^{(2m+1)}(\xi\cos\psi)(\cos\psi)^{2m+1}d\psi\right|d\xi=O(n^{4m})\tag{48}$$

при $n\to\infty$. Пользуясь (45), (47), нетрудно убедиться, что

$$\int_0^\pi\left|U_{2n}^{(2m)}(\cos\psi)\right|d\psi=O(n^{4m})\tag{49}$$

при $n\to\infty$. На основании (48), (49) можно утверждать, что существует положительная постоянная $M_1(m)$, такая что для всех $n>m$ и $t\geq t_0$ выполнено неравенство $|R_1(n,t)|\leq M_1(m)(\omega t)^{-2m-1}n^{4m}$, причем положительное число t_0

произвольно.

Точно таким же образом доказывается оценка для остаточного члена $R_\ell(n,t)$, заданного в виде (44), что и завершает доказательство теоремы 4.

Теперь мы уже можем приступить к доказательству теоремы 2, сформулированной в начале этого параграфа.

Предположим сначала, что ℓ - четное число, т.е. $\ell=2m$. Тогда, согласно теореме 3, имеем

$$\vec{\mathcal{R}}_1(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} h_1(n,t)\vec{a}_n^{(1)}(x)=\sum_{n=0}^{m} h_1(n,t)\vec{a}_n^{(1)}(x)+\sum_{n=m+1}^{\infty} h_1(n,t)\vec{a}_n^{(1)}(x),$$

при этом для всех натуральных n и $x\in K$

$$|\vec{a}_n^{(1)}(x)|\leq \frac{C_1'(K,2m)}{(2n+1)^{4m+2}} . \tag{50}$$

А согласно теореме 4

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} h_1(n,t)\vec{a}_n^{(1)}(x)=\sum_{\kappa=1}^{m}(-1)^{\kappa+1}\frac{\sin\omega t}{(\omega t)^{2\kappa-1}}\sum_{n=m+1}^{\infty}p_{2\kappa-1}^{(1)}(n)\vec{a}_n^{(1)}(x)+$$
$$+\sum_{\kappa=1}^{m}(-1)^{\kappa+1}\frac{\cos\omega t}{(\omega t)^{2\kappa}}\sum_{n=m+1}^{\infty}p_{2\kappa}^{(1)}(n)\vec{a}_n^{(1)}(x)+\sum_{n=m+1}^{\infty}R_1(n,t)\vec{a}_n^{(1)}(x). \tag{51}$$

В силу (50) и теоремы 4, все ряды в правой части (51) сходятся равномерно по $x\in K$. Полагая в (41) $n=m$, находим

$$R_1(n,t)=(-1)^n p_{2n+1}^{(1)}(n)\frac{\sin\omega t}{(\omega t)^{2n+1}},$$

а тогда при $n\geq 1$

$$h_1(n,t)=\sum_{\kappa=1}^{n}(-1)^{\kappa+1}\left\{p_{2\kappa-1}^{(1)}(n)\frac{\sin\omega t}{(\omega t)^{2\kappa-1}}+p_{2\kappa}^{(1)}(n)\frac{\cos\omega t}{(\omega t)^{2\kappa}}\right\}+(-1)^n p_{2n+1}^{(1)}(n)\frac{\sin\omega t}{(\omega t)^{2n+1}}. \tag{52}$$

Меняя порядок суммирования, получим для всех $t\geq t_0>0$

$$\sum_{n=0}^{m} h_1(n,t)\vec{a}_n^{(1)}(x)=\sum_{\kappa=1}^{m}(-1)^{\kappa+1}\frac{\sin\omega t}{(\omega t)^{2\kappa-1}}\sum_{n=\kappa-1}^{m}p_{2\kappa-1}^{(1)}(n)\vec{a}_n^{(1)}(x)+$$
$$+\sum_{\kappa=1}^{m}(-1)^{\kappa+1}\frac{\cos\omega t}{(\omega t)^{2\kappa}}\sum_{n=\kappa}^{m}p_{2\kappa}^{(1)}(n)\vec{a}_n^{(1)}(x)+O\left[(\omega t)^{-2m-1}\right]. \tag{53}$$

И вводя обозначение

$$\vec{A}_{2\kappa-1}^{(2)}(x)=(-1)^{\kappa+1}\sum_{n=\kappa-1}^{\infty}p_{2\kappa-1}^{(1)}(n)\vec{a}_n^{(1)}(x),\quad \kappa=1,2,\ldots,m,$$
$$\vec{A}_{2\kappa}^{(1)}(x)=(-1)^{\kappa+1}\sum_{n=\kappa}^{\infty}p_{2\kappa}^{(1)}(n)\vec{a}_n^{(1)}(x),\quad \kappa=1,2,\ldots,m, \tag{54}$$

находим из (51) и (53), пользуясь оценками теорем 3,4,

$$\vec{\mathcal{R}}_1(x,t)=\sum_{\kappa=1}^{m}\left\{\vec{A}_{2\kappa-1}^{(2)}(x)\frac{\sin\omega t}{(\omega t)^{2\kappa-1}}+\vec{A}_{2\kappa}^{(1)}(x)\frac{\cos\omega t}{(\omega t)^{2\kappa}}\right\}+O\left[(\omega t)^{-2m-1}\right]. \tag{55}$$

Точно таким же образом преобразуем свертку $\vec{\mathcal{R}}_2(x,t)$. При этом, вводя обозначения

$$\vec{A}^{(1)}_{2k-1}(x)=(-1)^{k+1}\sum_{n=k}^{\infty}P^{(2)}_{2k-1}(n)\vec{a}^{(2)}_n(x),\quad k=1,2,\ldots,m,$$
$$\vec{A}^{(2)}_{2k}(x)=(-1)^{k+1}\sum_{n=k}^{\infty}P^{(2)}_{2k}(n)\vec{a}^{(2)}_n(x),\quad k=1,2,\ldots,m, \tag{56}$$

получим

$$\vec{\mathcal{R}}_2(x,t)=\sum_{k=1}^{m}\left\{\vec{A}^{(1)}_{2k-1}(x)\frac{\cos\omega t}{(\omega t)^{2k-1}}+\vec{A}^{(2)}_{2k}(x)\frac{\sin\omega t}{(\omega t)^{2k}}\right\}+O\left[(\omega t)^{-2m-1}\right].$$

Подставляя последнее соотношение и (55) в (29), получаем

$$\vec{v}(x,t)=\sum_{k=1}^{2m}\left\{\vec{A}^{(1)}_k(x)\cos\omega t+\vec{A}^{(2)}_k(x)\sin\omega t\right\}(\omega t)^{-k}+O\left[(\omega t)^{-2m-1}\right].$$

А так как, по предположению, $\ell=2m$, то имеем

$$\vec{v}(x,t)=\sum_{k=1}^{\ell}\left\{\vec{A}^{(1)}_k(x)\cos\omega t+\vec{A}^{(2)}_k(x)\sin\omega t\right\}(\omega t)^{-k}+O\left[(\omega t)^{-\ell-1}\right], \tag{57}$$

причем, в силу теорем 3,4, функции $\vec{A}^{(j)}_k(x)$, заданные в виде (54) и (56), непрерывны по x на компакте K.

Случай нечетного $\ell=2m+1$ рассматривается аналогично, но при этом утверждение теоремы 4 нам понадобится в несколько измененной формулировке, а именно, имеет место

Т е о р е м а 4^*. Для произвольного фиксированного натурального числа m

$$h_1(n,t)=\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}P^{(1)}_{2k-1}(n)\frac{\sin\omega t}{(\omega t)^{2k-1}}+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}P^{(1)}_{2k}(n)\frac{\cos\omega t}{(\omega t)^{2k}}+R^*_1(n,t),$$

$$h_2(n,t)=\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}P^{(2)}_{2k-1}(n)\frac{\cos\omega t}{(\omega t)^{2k-1}}+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}P^{(2)}_{2k}(n)\frac{\sin\omega t}{(\omega t)^{2k}}+R^*_2(n,t),$$

где $P^{(j)}_i(n)$ – те же, что и в теореме 4. Кроме того, существуют положительные постоянные $M^*_j(m)$, такие что для всех $n>m+1$ и $t\geq t_0>0$ имеют место оценки

$$|R^*_j(n,t)|\leq M^*_j(m)(\omega t)^{-2m-2}n^{4m+j+1},\quad j=1,2.$$

Единственное отличие доказательства теоремы 4^* от доказательства теоремы 4 состоит в том, что мы должны проинтегрировать по частям в представлении (34) для $h_j(n,t)$ на один раз больше, чем это мы сделали в доказательстве теоремы 4.

Из теорем 3 и 4^* находим, пользуясь прежними обозначениями (54), (56),

$$\vec{v}(x,t)=\sum_{k=1}^{2m+1}\left\{\vec{A}^{(1)}_k(x)\cos\omega t+\vec{A}^{(2)}_k(x)\sin\omega t\right\}(\omega t)^{-k}+O\left[(\omega t)^{-2m-2}\right].$$

А так как теперь, по предположению, $l=2m+1$, то получаем асимптотическое разложение вектора $\vec{r}(x,t)$ при $t\to\infty$ в виде (57).

Точно так же теорема 2 доказывается и для $\mathcal{P}(x,t)$, при этом функции $B_k^{(j)}(x)$ будут иметь вид, аналогичный виду функций $\vec{A}_k^{(j)}(x)$.

Таким образом, теорема 2 доказана. Нами получено асимптотическое разложение решения задачи Коши (1), (2) при $t\to\infty$, равномерное на произвольном компакте $K\subset R^3$.

Литература

1. С о б о л е в С.Л. Об одной новой задаче математической физики. - "Изв. АН СССР. Серия мат.", 1954, т.18, № 1, с. 3-50.
2. М а с л е н н и к о в а В.Н. Оценки в L_p и асимптотика при $t\to\infty$ решения задачи Коши для системы С.Л.Соболева. - "Труды Мат. ин-та АН СССР", 1968, т.103, с. 117-141.
3. М а с л е н н и к о в а В.Н., Б о г о в с к и й М.Е. Системы Соболева в случае двух пространственных переменных. - "Докл.АН СССР", 1975, т. 221, № 3, с. 563-566.
4. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. "Наука", М., 1974, т. 2.
5. Б у р е н к о в В.И. Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных во всем пространстве. - В кн.: Итоги науки, Матем. анализ, М., 1965, 1966.
6. З и г м у н д А. Тригонометрические ряды, "Мир", М., 1965, т.1.
7. С е г ё Г. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.