УДК 517.946

О ЗАДАЧЕ СТЕФАНА, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВЗРЫВА ПРОВОДНИКОВ

В. В. Пухначёв (Новосибирск)

1. Постановка задачи. В работе рассматривается следующая задача: найти функцию $a(t)$ и решение $u(x,t)$ уравнения

$$u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + a^{-2} \tag{1.1}$$

в области $0<x<a(t), 0<t<t_0$ так, чтобы удовлетворились условия на линии фазового перехода

$$u(a(t),t)=0, \tag{1.2}$$

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon^2 u_x(a(t),t), \tag{1.3}$$

условие симметрии на линии $x=0$

$$u_x(0,t)=0 \tag{1.4}$$

и начальные условия

$$u(x,0)=u_0(x) \quad \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\ a(0)=1. \tag{1.5}$$

Здесь ε – положительный параметр, u_0 – заданная неотрицательная функция. Предположение $u_0\geqslant 0$ объясняется физической сущностью задачи.

Задача (1.1)-(1.5) возникла в одной модели электрического взрыва проводников [1]. Уравнение (1.1) описывает распространение тепла в расплавленной металлической фольге, вдоль которой течет ток постоянной силы, а на поверхности происходит выкипание металла. Функция $u(x,t)$ есть безразмерная температура, отсчитываемая от температуры кипения, а $2a(t)$ – безразмерная толщина фольги. Член a^{-2}, пропорциональный квадрату плотности тока, описывает нагревание проводника за счет джоулева тепла.

Теплопроводность и электропроводность паров, а также магнитное поле и динамические эффекты в проводнике считаются пренебрежимо малыми. Кроме того, предполагается, что фольга обладает достаточной протяженностью в направлениях, перпендикулярных оси x. Это позволяет приближенно считать

процесс распространения тепла одномерным.

Предполагается, наконец, что коэффициент теплопроводности металла $\varkappa$, его теплоемкость c_p, проводимость σ и скрытая теплота кипения λ – величины постоянные. В этих условиях единственным безразмерным определяющим параметром задачи будет параметр $\varepsilon = (\varkappa\lambda\sigma / j_0^2 h_0^2 c_p)^{1/2}$, где j_0 и $2h_0$ – соответственно плотность тока и толщина фольги в момент $t=0$.

Назовем пару функций $u(x,t)$ и $a(t)$ решением задачи (1.1)-(1.5) для $t \in [0, t_0)$, если: a – положительная непрерывно дифференцируемая функция при $0 \le t < t_0$; u и u_x непрерывны при $0 \le x \le a(t)$, $0 \le t < t_0$; u_t и u_{xx} непрерывны при $0 < x < a(t), 0 < t < t_0$; удовлетворяются соотношения (1.1)-(1.5). Справедлива следующая

Т е о р е м а. Предположим, что $u_0(x)$ – непрерывно дифференцируемая неотрицательная при $0 \le x \le 1$ функция и выполнены условия согласования $u_0'(0) = u_0(1) = 0$. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$ и такое $t_* = t_*(\varepsilon) > 0$, что при $\varepsilon > \varepsilon_0$ задача (1.1)-(1.5) имеет и притом единственное решение для всех $0 \le t < t_*$ и не имеет решения для $t \ge t_*$. Кроме того, $a(t)$ – строго убывающая функция и $a \to 0$, когда $t \to t_* - 0$.

При любом $\varepsilon > 0$ существуют такие $t_1 = t_1(\varepsilon) > 0$ $t_2 = t_2(\varepsilon) > t_1$, что задача (1.1)-(1.5) имеет единственное решение для $0 \le t < t_1$ и не имеет решения для $t \ge t_2$.

Эта теорема доказана в курсовой работе студента НГУ С.В. Яричука. Доказательство проведено по схеме, изложенной в книге [2, глава 8]. Оно основано на сведении задачи к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерра для функции $u_x(a(t), t)$.

Задача (1.1)-(1.5) относится к классу задач стефановского типа. (Подробный обзор работ по задачам Стефана имеется в [3].) Характерной особенностью рассматриваемой задачи является конечность времени существования решения. Момент $t = t_*$ соответствует полному выкипанию металла.

Целью данной работы является изучение асимптотики решения задачи (1.1)-(1.5) при больших и малых значениях параметра ε.

2. А с и м п т о т и к а р е ш е н и я п р и $\varepsilon \to \infty$. Перейдем в (1.1) к независимым переменным ξ, τ по формулам

$$\xi = \frac{x}{a(t)}, \quad \tau = \varepsilon^2 \int_0^t \frac{ds}{a^2(s)} \tag{2.1}$$

и обозначим

$$\delta = \varepsilon^{-2}, \quad u(x,t) = \delta v(\xi, \tau).$$

Уравнение (1.1) преобразуется к виду

$$v_\tau - v_{\xi\xi} = 1 + \delta \xi v_\xi \cdot v_\xi|_{\xi=1}, \tag{2.2}$$

где обозначено $\sigma_{\xi|\xi=1} = \sigma_\xi(1,\tau)$. При выводе (2.2) мы использовали условие (1.3).

Решение уравнения (2.2) ищется в прямоугольнике $Q_T = \{\xi,\tau:\ 0<\xi<1,\ 0<\tau<T\}$ при следующих краевых и начальных условиях:

$$\sigma_\xi(0,\tau)=0, \qquad \sigma(1,\tau)=0, \tag{2.3}$$

$$\sigma(\xi,0)=u_0(\xi). \tag{2.4}$$

Эти условия непосредственно вытекают из (1.2), (1.4), (1.5) и (2.1).

Следствием (1.3) и (2.1) является соотношение

$$\frac{1}{b}\frac{db}{d\tau} = \delta\,\sigma_{\xi|\xi=1},$$

которому удовлетворяет функция $b[\tau(t)] = a(t)$. Интегрируя его с условием $b=1$ при $\tau=0$, находим:

$$b(\tau)=\exp\Big(\delta\int_0^\tau \sigma_\xi(1,\varsigma)\,d\varsigma\Big). \tag{2.5}$$

Отсюда и из (2.1) получаем зависимость между t и τ

$$t=\delta\int_0^\tau \exp\Big(2\delta\int_0^\varsigma \sigma_\xi(1,\eta)\,d\eta\Big)d\varsigma. \tag{2.6}$$

В результате замены переменных (2.1) мы пришли к задаче в фиксированной области для нелинейного уравнения (2.2). Отметим, что ранее подобное преобразование использовалось В.Г. Меламедом [4] для численного решения классической одномерной задачи Стефана.

Для дальнейшего нам потребуется одно вспомогательное утверждение. Пусть функция $\sigma(\xi,\tau)$ удовлетворяет в прямоугольнике Q_T уравнению

$$\sigma_\tau - \sigma_{\xi\xi} = f \tag{2.7}$$

и условиям (2.3), (2.4). Здесь $f(\xi,\tau)$ - заданная функция, принадлежащая пространству Гёльдера $\mathcal{H}^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ [5] . Ниже предполагается, что функция $u_0(\xi)$ из условия (2.4) принадлежит классу $\mathcal{H}^{1+\alpha}[0,1]$ и выполнены условия согласования $u_0'(0)=u_0(1)=0$. Решение задачи (2.7), (2.3), 2.4) допускает оценку шаудеровского типа

$$|\sigma|^{(2+\alpha)}_{Q_T,\tau} \le C\left(|f|^{(\alpha)}_{Q_T} + |u_0|^{(1+\alpha)}_{[0,1]}\right), \tag{2.8}$$

где C зависит от α,τ и T . (Определение пространств Гёльдера с весом $\mathcal{H}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_\tau(\bar{Q}_T)$ и норм $|\cdot|^{(2+\alpha)}_{Q_T,\tau}$ в них см. в [6]). В дальнейшем полагается $\tau=1+\alpha$ и число $\alpha\in(0,1)$ считается фиксированным.

Предположим теперь, что $f\in\mathcal{H}^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ при любом $T>0$ и нормы $|f|^{(\alpha)}_{Q_T}$ ограничены при $T\to\infty$. Из результатов В.С. Белоносова [6] следует, что в этом случае постоянная C в неравенстве (2.8) может быть выбрана не зависящей от T для всех $T>0$.

Будем искать решение задачи (2.2)-(2.4) при малых $\delta>0$ (что соответствует большим ε) в виде ряда

$$v=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{k}v^{(k)}. \qquad (2.9)$$

Подстановка (2.9) в (2.2)-(2.4) приводит к последовательности линейных краевых задач

$$v_{\tau}^{(0)}-v_{\xi\xi}^{(0)}=1, \qquad (2.10)$$

$$v_{\tau}^{(k+1)}-v_{\xi\xi}^{(k+1)}=\xi\sum_{j=0}^{k}v_{\xi}^{(j)}\cdot v_{\xi|\xi=1}^{(k-j)} \quad \text{при } k=0,1,\dots,$$

$$v_{\xi}^{(k)}(0,\tau)=0,\ v^{(k)}(1,\tau)=0 \quad \text{при } k=0,1,\dots, \qquad (2.11)$$

$$v^{(0)}(\xi,0)=u_0(\xi),\ v^{(k+1)}(\xi,0)=0 \quad \text{при } k=0,1,\dots,$$

Обозначим $|v^{(0)}|_{\tau}^{(2+\alpha)}=\sup\limits_{T>0}|v^{(0)}|_{Q_T,\tau}^{(2+\alpha)}$, $\delta_0=(8C|v^{(0)}|_{\tau}^{(2+\alpha)})^{-1}$, где C - постоянная из неравенства (2.8). Имеет место

П р е д л о ж е н и е 1. Если $0\leqslant\delta<\delta_0$, то ряд (2.9) сходится к решению $v(\xi,\tau)$ задачи (2.2)-(2.4) по норме пространства $\mathcal{H}_{\tau}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ при любом $T>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду (2.8) решение $v^{(k+1)}$, $k=0,1,\dots$, задачи (2.10), (2.11) имеет оценку

$$|v^{(k+1)}|_{Q_T,\tau}^{(2+\alpha)}\leqslant 2C\sum_{j=0}^{k}|v^{(j)}|_{Q_T,\tau}^{(2+\alpha)}\,|v^{(k-j)}|_{Q_T,\tau}^{(2+\alpha)}. \qquad (2.12)$$

Рассмотрим наряду с (2.9) степенной ряд с постоянными коэффициентами

$$z=\sum_{k=0}^{\infty}z_k\delta^{k}, \qquad (2.13)$$

в котором $z_0=|v^{(0)}|_{\tau}^{(2+\alpha)}$, $z_{k+1}=2C(z_0z_k+z_1z_{k-1}+\dots z_0z_k)$ при $k=0,1,\dots$. Ряд (2.13) сходится к решению $z(\delta)=(4\delta C)^{-1}(1-\sqrt{1-8\delta Cz_0})$ квадратного уравнения $z=z_0+2\delta Cz^2$, если $\delta\in[0,\delta_0)$. Вследствие (2.12) ряд (2.13) является мажорантой степенного ряда, который получается, если в правой части (2.9) заменить $v^{(k)}$ их нормами в $\mathcal{H}_{\tau}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ при любом $T>0$. Отсюда заключаем, что при $0\leqslant\delta<\delta_0$ ряд (2.9) сходится к решению задачи (2.2)-(2.4). Это и требуется доказать.

Исходя из (2.9), (2.5) и (2.6), нетрудно получить асимптотику решения u,a задачи (1.1)-(1.5) при $\varepsilon\to\infty$. Ограничимся случаем $u_0=0$. Учитывая, что в этом случае

$$v_{\xi}^{(0)}(1,\tau)=-1+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp[-\pi^2(n+1/2)^2\tau]}{\pi^2(n+1/2)^2},$$

и переходя к пределу в правой части (2.6) при $\tau \to \infty$, $\delta \to 0$, находим предельное значение времени окончания процесса

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} t_*(\varepsilon) = \frac{1}{2}.$$

Для толщины фольги получается асимптотическое представление

$$a(t) = \sqrt{1-2t} + O(\varepsilon^{-2}),$$

справедливое при $\varepsilon \to \infty$ на любом интервале $0 \le t < 1/2$.

3. Построение асимптотики решения при $\varepsilon \to 0$. Ниже для простоты предполагается, что $u_0 = 0$.

Сделаем в (1.1)-(1.5) замену переменных

$$\xi = \frac{x}{a(t)}, \quad \eta = \int_0^t \frac{ds}{a^2(s)}, \quad w(\xi,\eta) = u(x,t). \tag{3.1}$$

Функция w удовлетворяет уравнению

$$w_\eta - \varepsilon^2 w_{\xi\xi} = \varepsilon^2 \xi w_\xi \cdot w_{\xi}|_{\xi=1} + 1 \tag{3.2}$$

в прямоугольнике $\Theta_H = \{\xi,\eta : 0<\xi<1,\ 0<\eta<H\}$, а также краевым и начальным условиям:

$$w_\xi(0,\eta) = 0, \quad w(1,\eta) = 0, \tag{3.3}$$

$$w(\xi,0) = 0. \tag{3.4}$$

Связь между t и η дается соотношением

$$t = \int_0^\eta \exp\left(2\varepsilon^2 \int_0^\zeta w_\xi(1,\sigma)d\sigma\right)d\zeta. \tag{3.5}$$

Для функции $c[\eta(t)] \equiv a(t)$, определяющей толщину фольги, получается равенство

$$c(\eta) = \exp\left(\varepsilon^2 \int_0^\eta w_\xi(1,\zeta)d\zeta\right). \tag{3.6}$$

Перейдем в уравнении (3.2) вместо ξ к новой пространственной переменной $\rho = \varepsilon^{-1}(1-\xi)$. Для функции $W(\rho,\eta) \equiv w(\xi,\eta)$ мы получим уравнение

$$W_\eta - W_{\rho\rho} = (1-\varepsilon\rho) W_\rho \cdot W_{\rho}|_{\rho=0} + 1. \tag{3.7}$$

Решение уравнения (3.7) ищем в виде формального степенного ряда

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k W^{(k)}.$$

Уравнения для $W^{(k)}$ имеют вид:

$$W_\eta^{(0)} - W_{\rho\rho}^{(0)} = W_\rho^{(0)} \cdot W_{\rho}^{(0)}|_{\rho=0} + 1 \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} LW^{(1)} \equiv W_\eta^{(1)} - W_{\rho\rho}^{(1)} - W_{\rho}^{(0)}|_{\rho=0} \cdot W_\rho^{(1)} - \\ - W_\rho^{(0)} \cdot W_{\rho}^{(1)}|_{\rho=0} = -\rho W_\rho^{(0)} \cdot W_{\rho}^{(0)}|_{\rho=0}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$L W^{(k+1)} = -\rho \sum_{j=0}^{k} W_\rho^{(j)} \cdot W^{(k-j)}_{\rho|\rho=0} + \sum_{i=1}^{k-1} W_\rho^{(i)} \cdot W^{(k-i)}_{\rho|\rho=0} \tag{3.10}$$

при $k=1,2,\ldots$. Решение каждого из уравнений (3.8)-(3.10) ищется в полуполосе $\Pi_H = \{\rho,\eta : \rho>0, 0<\eta<H\}$ при следующих условиях:

$$W^{(k)} \text{ ограничены при } \rho \to \infty , \tag{3.11}$$

$$W^{(k)}(0,\eta)=0, \quad W^{(k)}(\rho,0)=0 \tag{3.12}$$

для всех $k=0,1,\ldots$

Мы хотим показать, что, во-первых, каждая из функций $W^{(k)}$ однозначно определяется соотношениями (3.8)-(3.12); во-вторых, при $\varepsilon \to 0$ справедливо асимптотическое представление

$$\varpi(\xi,\eta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k W^{(k)}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon},\eta\right).$$

Рассмотрим задачу об определении функции $W^{(0)}$ (3.8), (3.11), (3.12). Эта задача сводится к более стандартной путем замены переменных

$$\rho + \int_0^\eta W_\rho^{(0)}(0,\zeta)d\zeta = z, \quad W^{(0)}(\rho,\eta) = V(z,\eta). \tag{3.13}$$

В силу (3.8), (3.11)-(3.13) функция V является решением краевой задачи:

$$\begin{aligned} &V_\eta - V_{zz} = 1 \quad \text{при} \quad z > s(\eta),\ \eta>0, \\ &V(s(\eta),\eta)=0, \quad \frac{ds}{d\eta} = V_z\,(s(\eta),\eta), \\ &V(z,0)=0, \quad s(0)=0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

причем V ограничено при $z\to\infty$. Функции s и $W^{(0)}$ связаны соотношением

$$s(\eta) = \int_0^\eta W_\rho^{(0)}(0,\zeta)d\zeta.$$

Задача (3.14) имеет много общего с классической задачей Стефана. Отличия состоят в том, что область определения искомой функции $V(z,\eta)$ не ограничена по z , а уравнение теплопроводности для V является неоднородным. Кроме того, в отличие от обычной задачи Стефана, перед выражением $V_z(s(\eta),\eta)$ в правой части второго из условий на свободной границе в (3.14) стоит знак плюс. Именно это обстоятельство служит препятствием к доказательству разрешимости задачи (3.14) "в целом".

Следуя известной методике [2], можно свести задачу (3.14) к нелинейному интегральному уравнению для функции

$$U(\eta) = V_z\,(s(\eta),\eta). \tag{3.15}$$

Это уравнение имеет вид:

$$U(\eta)=\int_0^\eta\left[\frac{s(\eta)-s(\xi)}{2(\eta-\xi)}U(\xi)+1\right]exp\left[-\frac{(s(\eta)-s(\xi))^2}{4(\eta-\xi)}\right]\frac{d\xi}{\sqrt{\pi(\eta-\xi)}},\tag{3.16}$$

где вследствие (3.14), (3.15)

$$s(\eta)=\int_0^\eta U(\xi)\,d\xi.$$

Л е м м а 1. Существует такое $H>0$, что при $0\le\eta\le H$ уравнение (3.16) имеет собственное решение $U\in\mathcal{H}^{\alpha/2}[0,H]$, причем $U(\eta)>0$ для $\eta>0$.

Для доказательства леммы достаточно применить к уравнению (3.16) принцип сжатых отображений.

Если функция $U(\eta)$ известна, то решение $V(z,\eta)$ задачи (3.14) восстанавливается по формуле Грина:

$$V(z,\eta)=\eta-\int_0^\eta\left[U(\xi)+\frac{z-s(\xi)}{2(\eta-\xi)}\xi\right]exp\left[-\frac{(z-s(\xi))^2}{4(\eta-\xi)}\right]\frac{d\xi}{2\sqrt{\pi(\eta-\xi)}}.\tag{3.17}$$

В силу леммы 1 и соотношений (3.13) однозначно определено решение $W^{(0)}$ задачи (3.8), (3.11), (3.12) и $W_\rho^{(0)}(0,\eta)\in\mathcal{H}^{\alpha/2}[0,H]$, $0<\alpha<1$. Используя априорные оценки решений линейных параболических уравнений [6], заключаем, что $W^{(0)}\in\mathcal{H}_z^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(\bar{\Pi}_H)$. Кроме того, имеют место оценки:

$$W_\rho^{(0)}>0 \text{ при } \rho\ge 0,\ 0<\eta\le H,\tag{3.18}$$

$$W_\rho^{(0)}\le C_1 exp\left(-\frac{C_2\rho^2}{\eta}\right),\quad |W_{\rho\rho}^{(0)}|\le C_1 exp\left(-\frac{C_2\rho^2}{\eta}\right)\tag{3.19}$$

при $\rho\ge\rho_0$, $0\le\eta\le H$ (ρ_0 – произвольное положительное число). Здесь и далее C_k , $k=1,2,\ldots$, обозначают положительные постоянные, не зависящие от ε . Оценка (3.18) – следствие теоремы о максимуме и минимуме решений параболических уравнений [5] , примененной к уравнению для $W_\rho^{(0)}$. Оценки (3.19) вытекают из (3.17), (3.13).

Л е м м а 2. Каждая из задач (3.9)-(3.12) имеет и притом единственное решение $W^{(k)}\in\mathcal{H}_z^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(\bar{\Pi}_H)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2 проводится индукцией по k . Отметим, что линейные уравнения (3.9), (3.10) не являются дифференциальными в обычном смысле слова. Тем не менее применение априорных оценок шаудеровского типа (см. [5]) позволяет поочередно решить каждую из краевых задач для функций $W^{(k)}$ методом последовательных приближений.

Производные функций $W^{(k)}$ по ρ $(k=1,2,\ldots)$ допускают оценки, подобные (3.19):

$$|W_\rho^{(k)}|\le C_3 exp\left(-\frac{C_4\rho^2}{\eta}\right),\quad |W_{\rho\rho}^{(k)}|\le C_3 exp\left(-\frac{C_4\rho^2}{\eta}\right)\tag{3.20}$$

при $\rho \geq \rho_0, 0 \leq \eta \leq H$ (C_3 и C_4 могут зависеть от k). Ниже нам потребуется лишь первая из этих оценок; оценка $W_{\rho\rho}^{(k)}$ нужна для получения оценки функции $W_\rho^{(k+1)}$. Доказательство неравенств (3.20) проводится последовательно путем построения стандартных барьеров для решений уравнения, которым удовлетворяют функции $W_\rho^{(k)}$ и $W_{\rho\rho}^{(k)}$. Для получения оценок производных $W^{(1)}$ используются неравенства (3.19).

Л е м м а 3. <u>Существует такое</u> $\eta_*, H<\eta_*<\infty$, <u>что</u> $\overline{\lim}\, W_\rho^{(0)}(0,\eta) \to \to \infty$ <u>при</u> $\eta \to \eta_* - 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы 3 означает непродолжимость решения $U(\eta) \equiv W_\rho^{(0)}(0,\eta)$ интегрального уравнения (3.16) на всю полуось $\eta > 0$ в классе ограниченных функций. Мы предположим противное и придем к противоречию.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(\rho,\eta) = \eta - W^{(0)}(\rho,\eta). \tag{3.21}$$

Согласно (3.8), (3.12), Φ есть решение краевой задачи

$$\begin{gathered} \Phi_\eta - \Phi_{\rho\rho} - U(\eta)\Phi_\rho = 0 \quad \text{при } \rho > 0,\ \eta > 0, \\ \Phi(0,\eta) = \eta \quad \text{при } \eta \geq 0, \quad \Phi(\rho,0) = 0 \quad \text{при } \rho \geq 0. \end{gathered} \tag{3.22}$$

Заметим, что вследствие (3.17), (3.21) и (3.13) функция Φ и ее производные экспоненциально убывают при $\rho \to \infty$ для любого фиксированного $\eta > 0$. Проинтегрируем уравнение (3.22) по полуполосе $0 < \eta < \zeta$, $\rho > 0$ (ζ - произвольное положительное число) и учтем начальное и краевое условия. В силу предыдущего замечания возникающие несобственные интегралы будут равномерно сходиться. В результате мы придем к тождеству

$$\int_0^\infty \Phi(\rho,\zeta)\,d\rho = \int_0^\zeta (1-\eta)\,U(\eta)\,d\eta. \tag{3.23}$$

Согласно принципу максимума будет $\Phi > 0$ при $\rho \geq 0$, $\eta > 0$, что влечет положительность левой части (3.23) при всех $\zeta > 0$. Доказательство от противного закончится, если мы установим отрицательность правой части тождества (3.23) при достаточно больших ζ.

В свою очередь, доказательство последнего факта опирается на следующее свойство решения $U(\eta)$ интегрального уравнения (3.16). Обозначим $C_5 = \sup\limits_{\eta \geq 0} U(\eta)$. Тогда на любом интервале $\eta \geq \eta_0$, где $\eta_0 > 0$, функция $U(\eta)$ допускает оценку снизу

$$U(\eta) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi e}}\, \min\left(\frac{2}{C_5}, \sqrt{\eta_0}\right). \tag{3.24}$$

Для доказательства неравенства (3.24) оценим снизу при $\eta \geq \eta_0$

правую часть интегрального уравнения (3.16), использу неотрицательность U и s. Мы получим

$$U(\eta) \geq \int_{\eta-\lambda}^{\eta} exp\left[-\frac{(s(\eta)-s(\xi))^2}{4(\eta-\xi)}\right]\frac{d\xi}{\sqrt{\pi(\eta-\xi)}} \geq$$

$$\geq \int_{\eta-\lambda}^{\eta} exp\left[-\frac{c_5^2}{4}(\eta-\xi)\right]\frac{d\xi}{\sqrt{\pi(\eta-\xi)}} \geq 2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}exp\left(-\frac{c_5^2}{4}\lambda\right)$$

при $\eta \geq \eta_0$. Здесь λ – произвольное число из интервала $[0, \eta_0/2]$. Вычисляя максимум правой части полученного неравенства по λ на интервале $[0, \eta_0/2]$, приходим к оценке (3.24). По сделанному предположению, $U \leq C_5$ для $0 \leq \eta \leq 1$. Отсюда и из (3.24) вытекает отрицательность правой части тождества (3.23) при достаточно больших ξ. Требуемое противоречие получено.

4. Обоснование асимптотики. Далее m и n обозначают неотрицательные целые числа, Q_H – прямоугольник $0<\xi<1$, $0<\eta<H$ (H – число, фигурирующее в лемме 1), $w_n(\xi,\eta)$ – функцию, определенную равенством

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k W^{(k)}\left(\frac{1-\xi}{\varepsilon}, \eta\right). \tag{4.1}$$

Функции $W^{(k)}$ удовлетворяют соотношениям (3.8)-(3.12). На основании лемм 1 и 2 каждая из этих функций определена однозначно. В этом пункте доказывается

Предложение 2. Существует $\varepsilon_1>0$ такое, что при $0<\varepsilon\leq\varepsilon_1$ задача (3.2)-(3.4) имеет единственное решение $w\in \mathcal{H}_{\tau}^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(Q_H)$. При $\varepsilon\to 0$ справедлива оценка

$$|w-w_n|^{(2+\alpha)}_{Q_H,\tau} \leq C_6\,\varepsilon^{n-1-\alpha} \tag{4.2}$$

с постоянной C_6, не зависящей от ε.

Доказательство. Определим банахово пространство $\mathcal{B}$ как пространство пар $\{\varphi,\psi\}=\chi$, где $\varphi(\xi,\eta)\in \mathcal{H}^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_H)$, а $\psi(\eta)\in \mathcal{H}^{\alpha/2}[0,H]$, причем $\psi(0)=0$. Норма в пространстве $\mathcal{B}$ определяется равенством

$$\|\chi\|_{\mathcal{B}} = |\varphi|^{(\alpha)}_{Q_H} + |\psi|^{(\alpha/2)}_{[0,H]}.$$

Через $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}_{\tau}^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(\dot{Q}_H)$ обозначим подпространство пространства $\mathcal{H}_{\tau}^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(Q_H)$, образованное функциями $w(\xi,\eta)$, для которых $w(1,\eta)=0$ при $\eta\in[0,H]$ и $w(\xi,0)=0$ при $\xi\in[0,1]$.

Краевую задачу (3.2)-(3.4) удобно рассматривать как операторное уравнение вида

$$\mathcal{P}_{\varepsilon}(w)=0, \tag{4.3}$$

где оператор $\mathcal{P}_{\varepsilon}=\{\mathcal{P}_{1\varepsilon},\mathcal{P}_{2,\varepsilon}\}$ определен на функциях $w\in\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}_{\tau}^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(\bar{Q}_H)$ заданием своих компонент

$$\mathcal{P}_{1,\varepsilon}(w)=w_{\eta}-\varepsilon^2 w_{\xi\xi}-\varepsilon^2\xi w_{\xi}\cdot w_{\xi}|_{\xi=1}-1 \quad \text{при } (\xi,\eta)\in Q_H, \tag{4.4}$$

$$\mathcal{P}_{2,\varepsilon}(w)=w_{\xi}|_{\xi=0} \quad \text{при } \eta\in[0,H]. \tag{4.5}$$

Оператор $\mathcal{P}_{\varepsilon}$ действует из пространства $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}_{\tau}^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(Q_H)$ в пространство $\mathcal{B}$.

Для доказательства существования и единственности решения задачи (3.2)-(3.4) при малых ε и обоснования оценки (4.2) применим теорему Канторовича о сходимости метода Ньютона (см., например, [7]). За начальное приближение примем функцию w_m, где m достаточно велико. Отметим, что ранее в сходной ситуации метод Ньютона применялся в работе [8].

Обозначим через $\mathcal{P}'_{\varepsilon}(w_m)$ производную Фреше оператора $\mathcal{P}_{\varepsilon}(w)$ в точке w_m. Основную роль в доказательстве предложения 2 играет следующая

Л е м м а 4. <u>При любом $\varepsilon\in(0,1]$</u> <u>определен обратный к $\mathcal{P}'_{\varepsilon}(w_m)$</u> <u>оператор</u> $[\mathcal{P}'_{\varepsilon}(w_m)]^{-1}:\mathcal{B}\longrightarrow\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}_{\tau}^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(\bar{Q}_H)$ <u>и имеет место оценка</u>

$$\|[\mathcal{P}'_{\varepsilon}(w_m)]^{-1}\|\le C_7\varepsilon^{-2-\alpha}. \tag{4.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 4 довольно громоздко и здесь не приводится. Оно сводится к рассмотрению следующей краевой задачи:

$$v_{\eta}-v_{\rho\rho}-(1-\varepsilon\rho)\left(W_{m,\rho}|_{\rho=0}\cdot v_{\rho}+W_{m,\rho}\cdot v_{\rho}|_{\rho=0}\right)=\varphi(1-\varepsilon\rho,\eta)\ \text{при}\ 0<\rho<\varepsilon^{-1},\ 0<\eta<H,$$
$$v(0,\eta)=0,\ v_{\rho}(\varepsilon^{-1},\eta)=-\psi(\eta)\ \text{при}\ 0\le\eta\le H,\quad v(\rho,0)=0\ \text{при}\ 0\le\rho\le\varepsilon^{-1}. \tag{4.7}$$

Здесь

$$W_m=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k W^{(k)}(\rho,\eta),$$

а $\varphi(\xi,\eta)\in\mathcal{H}^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_H)$, $\psi(\eta)\in\mathcal{H}^{\alpha/2}[0,H]$ - произвольные элементы указанных функциональных пространств. Доказывается, что при любом $\varepsilon>0$ задача (4.7) имеет единственное решение $v(\rho,\eta)\in\mathcal{H}_{\tau}^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(\bar{R}_{H,\varepsilon})$ ($R_{H,\varepsilon}$ - прямоугольник $0<\rho<\varepsilon^{-1}$, $0<\eta<H$) и справедлива оценка

$$|v|^{(2+\alpha)}_{R_{H,\varepsilon},\tau}\le C_7\left(|\varphi|^{(\alpha)}_{Q_H}+|\psi|^{(\alpha/2)}_{[0,H]}\right), \tag{4.8}$$

где C_7 не зависит от ε при $0<\varepsilon\leq 1$.

Если $v(\rho,\eta)$ - решение (4.7), то функция $\lambda(\xi,\eta)=v(\varepsilon^{-1}(1-\xi),\eta)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{P}'_\varepsilon(w_m)\lambda=\chi$, в котором $\chi=\{\varphi,\psi\}$ - произвольный элемент пространства $\mathcal{B}$. Поэтому из (4.8) получается неравенство (4.6).

Вернемся к доказательству предложения 2. Пусть w и $\tilde{w}$ - любые функции класса $\mathring{\mathcal{H}}_\tau^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(\bar{Q}_H)$. Из (4.4) и (4.5) следует неравенство

$$\|\mathcal{P}'_\varepsilon(w)-\mathcal{P}'_\varepsilon(\tilde{w})\|\leq 4\varepsilon^2|w-\tilde{w}|^{(2+\alpha)}_{Q_H,\tau}.$$

Из способа построения функций $W^{(k)}$ и определения (4.1) w_m вытекает, что

$$|\mathcal{P}_{1,\varepsilon}(w_m)|^{(\alpha)}_{Q_H}\leq C_8\,\varepsilon^{m+1-\alpha}.$$

Оценки (3.19), (3.20) позволяют заключить, что

$$|\mathcal{P}_{2,\varepsilon}(w_m)|^{(\alpha/2)}_{[0,H]}\leq C_9\,\varepsilon^{m+1-\alpha}$$

при $0<\varepsilon\leq 1$. Объединяя два последних неравенства, получаем:

$$\|\mathcal{P}_\varepsilon(w_m)\|_{\mathcal{B}}\leq C_{10}\,\varepsilon^{m+1-\alpha}$$

Пусть $m\geq 4$ и $\varepsilon_1\in(0,1]$ настолько мало, что при $0<\varepsilon\leq\varepsilon_1$ выполнено неравенство

$$4C_7^2\,C_{10}\,\varepsilon^{m-1-3\alpha}<1/4.$$

Мы находимся в условиях теоремы Канторовича [7], из которой следует, что уравнение (4.3), эквивалентное задаче (3.2)-(3.4), имеет решение w, причем верна оценка

$$|w-w_m|^{(2+\alpha)}_{Q_H,\tau}\leq C_{11}\,\varepsilon^{m-1-2\alpha}. \tag{4.9}$$

Заметим, что указанная теорема гарантирует единственность решения w уравнения (4.3) в некотором шаре пространства $\mathring{\mathcal{H}}_\tau^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(\bar{Q}_H)$ с центром в точке w_m. В действительности, как нетрудно проверить, это уравнение вообще не имеет других решений.

Оценку (4.9) можно улучшить. В самом деле, применяя неравенство треугольника, имеем

$$|w-w_n|^{(2+\alpha)}_{Q_H,\tau}\leq\Big|\sum_{k=n+1}^{m}\varepsilon^k W^{(k)}\Big(\frac{1-\xi}{\varepsilon},\ell\Big)\Big|^{(2+\alpha)}_{Q_H,\tau}+C_{11}\,\varepsilon^{m-3}.$$

Если $n\geq 0$ фиксировано и m достаточно велико, то отсюда следует (4.2). Доказательство предложения 2 закончено.

5. Некоторые замечания. а) Выше мы ограничились построением асимптотики решения задачи (1.1)-(1.5) при $\varepsilon\to 0$ в простейшем случае, когда $u_0(x)\equiv 0$. При этом асимптотическое разложение решения содержало лишь функции типа погранслоя $W^{(k)}(\varepsilon^{-1}(1-\xi),\eta)$. Для

отыскания $W^{(k)}$ фактически применялся второй итерационный процесс М. И. Вишика- Л. А. Люстерника [9]. Можно показать, что аналогичная, но более сложная процедура позволяет найти асимптотику решения при $\varepsilon \to 0$ и в общем случае $u_0(x) \not\equiv 0$. В этом случае асимптотический ряд для w содержит, кроме погранслойных функций, еще и члены вида $\varepsilon^k q_k(\xi,\eta)$. Функции q_k определяются с помощью первого итерационного процесса Вишика - Люстерника.

б) При специальных начальных данных задача (1.1)-(1.5) имеет автомодельное решение вида

$$u(x,t)=f\left(\frac{x}{\sqrt{1-t/t_*}}\right), \quad a(t)=\sqrt{1-\frac{t}{t_*}}\,.$$

Параметр $t_*=t_*(\varepsilon)$, характеризующий время окончания процесса, подлежит определению вместе с функцией $f(\zeta)$ из соотношений (1.1)-(1.4). При заданном t_* функция $f(\zeta)$ находится однозначно как решение линейной краевой задачи для обыкновенного уравнения. Уравнение для t_* имеет вид

$$t_*^{-3/2} exp\left(-1/4\,\varepsilon^2 t_*\right)=\int_0^{1/\sqrt{t_*}} exp\left(-z^2/4\varepsilon^2\right)dz. \qquad (5.1)$$

Уравнение (5.1) не имеет решений при $\varepsilon < 2/3$ и имеет два решения t_{1*} и t_{2*} при $\varepsilon > 2/3$. При этом $t_{2*}>t_{1*}$ для всех $\varepsilon > 2/3$ и $t_{2*}\to\infty$, а $t_{1*}\to 1/2$, когда $\varepsilon\to\infty$. Соответствующие функции f_1 и f_2 таковы, что $f_2(\zeta)>f_1(\zeta)$ при $0<\zeta<1$. Кроме того, $f_1\to 0$ в метрике $C^2[0,1]$ при $\varepsilon\to\infty$. Функция f_2 ограничена при всех $\varepsilon > 2/3$, однако $f_2'(1)\to$ $\to -\infty$, когда $\varepsilon\to 0$.

Для нас особый интерес представляет "малое" автомодельное решение, соответствующее меньшему из корней уравнения (5.1). Оказывается, что при достаточно больших (в зависимости от функции u_0) значениях параметра ε это автомодельное решение дает главный член асимптотики решения задачи (1.1)-(1.5) вблизи момента полного выкипания. Для произвольных ε и u_0 этот результат носит условный характер.

в) Согласно теореме из п.1, при любом $\varepsilon\in(0,\infty)$ и любом гладком $u_0\geq 0$ решение задачи (1.1)-(1.5) существует лишь конечное время $0<t<$ $<t_*$. Интересно получить верхнюю оценку времени выкипания t_*. Такая оценка может быть получена путем сравнения решения $w(\xi,\eta)$ уравнения (3.2) с краевыми условиями (3.3) и начальным условием $w(\xi,0)=u_0(\xi)$ и решения $\mu(\xi,\eta)$ следующей задачи:

$$\begin{aligned}
&\mu_\eta-\varepsilon^2\mu_{\xi\xi}=\varepsilon^2\xi\mu_\xi^2+1 && \text{при } 0<\xi<1,\ 0<\eta<H,\\
&\mu_\xi(0,\eta)=0,\ \mu(1,\eta)=0 && \text{при } 0\leq\eta\leq H, && (5.2)\\
&\mu(\xi,0)=0 && \text{при } 0\leq\xi\leq 1.
\end{aligned}$$

Решение задачи (5.2) существует при любом $H>0$. Если для некоторого $H>0$ существует решение w предыдущей задачи, то по теореме сравнения будет $w>\mu$ для любых $(\xi,\eta)\in\bar{Q}_H$. Отсюда и из (3.5) следует, что

$$t_* \leq \int_0^\infty exp\left(2\varepsilon^2 \int_0^\xi \mu_\xi(1,\eta)d\eta\right)d\xi. \tag{5.3}$$

Располагая оценкой сверху для функции $\mu_\xi(1,\eta)$, мы находим из (5.3) верхнюю оценку времени выкипания t_*. Приведем окончательный результат:

$$t_* \leq C_{12}\left[\ln(1+\varepsilon^{-1})+1\right] \tag{5.4}$$

при любом $\varepsilon>0$.

Оценка (5.4) представляется нам все же довольно грубой при $\varepsilon\to 0$. Есть основания полагать, что величина t_* ограничена при всех $\varepsilon>0$.

г) В п. 3 мы построили асимптотику решения задачи (3.2)-(3.4) при $\varepsilon\to 0$ для достаточно малого интервала "времени" $0\leq\eta\leq H$. Заметим, что ввиду (3.5) и (4.2) решение задачи (1.1)-(1.5) существует по крайней мере на интервале $0\leq t<t_1(\varepsilon)$, где физическое время $t_1(\varepsilon)$ ограничено сверху и снизу при $\varepsilon\to 0$. Как видно из (3.6), (3.1), за это время толщина фольги $a(t)$ уменьшается на величину порядка ε, а градиент температуры на границе имеет порядок ε^{-1} при $\varepsilon\to 0$.

Было показано также, что функция $W^{(0)}(\rho,\eta)$, определяющая главный член асимптотики w, имеет особенность при конечном значении $\eta=\eta_*>H$. Наличие особенности $W^{(0)}$, конечно, еще не означает непродолжимости решения задачи (3.2)-(3.4) в область $\eta>\eta_*$. Ясно лишь, что в этой области асимптотика решения при $\varepsilon\to 0$ имеет иной, значительно более сложный вид. Для построения такой асимптотики следует изучить структуру особенности функции $W^{(0)}(\rho,\eta)$ при $\eta\to\eta_*-0$, что само по себе представляет определенный интерес.

Мы предполагаем, что при $\eta\to\eta_*$ толщина фольги резко уменьшается. Это соответствует взрывообразному характеру выкипания металла при малых ε.

Автор весьма признателен А.М.Искольдскому, В.К.Пинусу и Я.Г. Эпельбауму, которые привлекли его внимание к теме данной работы.

Литература

1. Искольдский А.М., Пинус В.К., Эпельбаум Я.Г. Теория явления электрического взрыва проводников. 1. Препринт № 30 Института автоматики и электрометрии СО АН СССР. Новосибирск, 1976.
2. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., "Мир", 1968.

3. Р у б и н ш т е й н Л.И. Проблема Стефана. Изд. "Звайгзне", Рига, 1967.

4. М е л а м е д В.Г. Сведение задачи Стефана к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. - "Изв. АН СССР. Сер. геофиз.", 1958, № 7, с.848-869.

5. Л а д ы ж е н с к а я О.А., С о л о н н и к о в В.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., "Наука", 1967.

6. Б е л о н о с о в В.С., З е л е н я к Т.И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск, изд. НГУ, 1975.

7. К о л м о г о р о в А.Н., Ф о м и н С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., "Наука", 1972.

8. С р у б щ и к Л.С., Ю д о в и ч В.И. Асимптотическое интегрирование системы уравнений большого прогиба симметрично загруженных оболочек вращения. - "Прикл. математика и механика", 1962, т.26, вып. 5, с.313-322.

9. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - "Успехи мат. наук", 1957, т.12, вып. 5/77, с.3-122.