УДК 517.948.34

ОБ ОДНОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ, ПРИВОДИМЫХ К НОРМАЛЬНОМУ ТИПУ

Р.С.С а к с (Новосибирск)

В работе доказывается нётеровость систем одномерных сингулярных интегродифференциальных уравнений, которые не принадлежат к нормальному типу, но которые с помощью конечной цепочки обратимых преобразований могут быть приведены к системам сингулярных интегральных уравнений нормального типа [1].

В § 1 работы вводится основной класс сингулярных интегродифференциальных операторов, разложимых в виде суммы операторов λ_+^m и λ_-^n с коэффициентами, которые называются символическими матрицами оператора. Операторы этого класса (с менее гладкими коэффициентами) мы изучали ранее в работе [2], показав, что они образуют алгебру операторов, причем формулы композиции операторов одного знака в точности такие же, как и для дифференциальных операторов, и что союзный оператор также принадлежит этому классу. В конце § 1 введены пространство $C_{m,n}^{\alpha}(\Gamma)$ и операторы λ_{10} и λ_{01} порядков (1,0) и (0,1), отображающие его взаимно-однозначно на пространства $C_{m-1,n}^{\alpha}(\Gamma)$ и $C_{m,n-1}^{\alpha}(\Gamma)$, соответственно, при m, $n \geq 1$.

В § 2 мы переносим определение нормальности на системы сингулярных интегродифференциальных уравнений произвольных порядков, предполагая невырожденность главных символических матриц. Такие системы с помощью операторов λ_{10} и λ_{01} приводятся к эквивалентным системам сингулярных интегральных уравнений нормального типа, откуда следует их нётеровость в соответствующих пространствах (теоремы 1,2,3,5). Доказывается также теорема о повышении гладкости решения системы при улучшении гладкости правой части.

В § 3 рассматриваются классы систем, удовлетворяющих условию (k,n), k и n - произвольные неотрицательные целые числа. Эти классы систем были изучены в основном в работах [3, 2] и характеризуются тем, что главные символические матрицы оператора K системы имеют на Γ постоянные, но не обязательно максимальные ранги, что позволяет построить операторы F_1 и G_1 порядков (1,0) и (0,1) соответственно такие, что оператор $K_1=KF_1G_1$ имеет порядок оператора K и его символические матрицы выражаются через коэффициенты оператора K различ-

ных порядков. Если главные символические матрицы оператора K_i имеют на Γ постоянные ранги, то процесс можно повторить. Условие (k,n) состоит в том, что через конечное число шагов мы получим оператор нормального типа. Таким образом, у оператора K, удовлетворяющего условию (k,n), существует конечная цепочка операторов F_i и G_j таких, что оператор композиции $KF_1G_1\ldots F_kG_n$ имеет порядок оператора K и принадлежит к нормальному типу. Такие операторы мы назвали приводимыми справа к оператору нормального типа и доказали для них в конце § 3 аналоги теорем 1–5 из § 2.

В § 4 изучается связь между этими двумя определениями. Показывается, что при $k,n \leq 1$ они эквивалентны, а в остальных случаях, как показывают примеры, класс операторов, (k,n)– приводимых справа к нормальному типу, является более широким и содержит операторы с главными символическими матрицами переменных рангов. Доказывается, что операторы, удовлетворяющие условию (k,n), являются также приводимыми слева или с обеих сторон. В конце § 4 в классе операторов, приводимых к нормальному типу, выделяется подкласс операторов, для которых цепочка операторов F_i и G_j определяется элементарно, а сами они имеют простейший вид. Его определение аналогично определению эллиптичности по Дуглису–Ниренбергу системы дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [6]). В § 5 рассматривается случай действительных уравнений.

В заключение укажем работу [7] , в которой рассматриваются аналогичные вопросы для систем псевдодифференциальных уравнений. Как нетрудно убедиться на примерах систем дифференциальных уравнений эллиптических по Дуглису–Ниренбергу, если отбросить условия постоянства ранга, то класс систем, приводимых к эллиптическим степени $p \geq 2$, шире класса равномерно неэллиптических систем степени p. Отметим, наконец, что рассмотренные выше уравнения применяются при изучении краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений [8,9,10] .

§ 1. Алгебра сингулярных интегродифференциальных операторов

Пусть G^+ – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная контуром Γ класса C^∞, $0 \in G^+$, G^- – дополнение $G^+ \cup \Gamma$ до полной комплексной плоскости. Обозначим через $P(t,\frac{d}{dt})$ и $Q(t,\frac{d}{dt})$ дифференциальные полиномы степени p и q соответственно:

$$P\left(t,\frac{d}{dt}\right)-\sum_{j=0}^{p} S_j(t)\frac{d^j}{dt^j},\quad Q\left(t,\frac{d}{dt}\right)-\sum_{j=0}^{q} D_j(t)\frac{d^j}{dt^j},\tag{1}$$

где $S_j(t)$ и $D_j(t)$ – заданные на Γ комплексные $\ell\times\ell$ –матрицы класса $C^\infty(\Gamma)$, $d/dt = (t'_s)^{-1}d/ds$, s – длина дуги на Γ, а через λ^0_+, λ^0_- и R – следующие операторы:

$$\lambda^0_\pm\omega = \frac{\omega(t_0)}{2} \pm \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega(t)dt}{t-t_0},\quad t_0\in\Gamma,\tag{2}$$

$$R\omega \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[k_1(t_0,t)\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right)+k_2(t_0,t)\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right)+k_3(t_0,t)\right]\omega(t)\,dt, \tag{3}$$

где интеграл в формуле (2) и всюду в дальнейшем мы понимаем в смысле главного значения, $k_j(t_0,t)$, $j=1,2,3$, – заданные $(\ell\times\ell)$ –матрицы класса $C^{\infty}(\Gamma\times\Gamma)$, а $\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right)$ (соответственно $\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right)$) при фиксированном $t\in\Gamma$ есть значение при $z=t_0\in\Gamma$, $t_0\neq t$, той ветви $\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)$ (соответственно $\ln\left(1-\frac{t}{z}\right)$), которая при $z=0$ $(z=\infty)$ обращается в нуль. Целью настоящей работы является изучение следующего сингулярного интегродифференциального оператора:

$$K\omega \equiv P\lambda_+^0\omega + Q\lambda_-^0\omega + R\omega, \quad \omega\in C^{\infty}(\Gamma), \tag{4}$$

который мы запишем также в несколько иной форме. Введем в рассмотрение следующие операторы:

$$\lambda_\pm^n\omega = \frac{d^n}{dt_0^n}\left(\lambda_\pm^0\omega\right), \quad n=1,2,\dots, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \lambda_+^{-n}\omega &= \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right)\omega(t)\,dt,\\ \lambda_-^{-n}\omega &= \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right)\omega(t)\,dt. \end{aligned} \tag{6}$$

Операторы λ_+^n, λ_-^n при $n\geq 0$ определены на функциях классов $C^{n\alpha}(\Gamma)$, n-я производная которых удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α, $0<\alpha<1$. Причем нетрудно убедиться, что $\lambda_\pm^n\omega=\lambda_\pm^0\omega^{(n)}$, если $\omega\in C^{n\alpha}(\Gamma)$.

Операторы λ_+^{-n}, λ_-^{-n}, $n=1,2,\dots$, являются младшими по сравнению с операторами λ_+^0 и λ_-^0, так как легко видеть, что с точностью до операторов с бесконечно дифференцируемым ядром

$$\frac{d^n}{dt_0^n}\left(\lambda_\pm^{-n}\omega\right)\approx\lambda_\pm^0\omega, \qquad \lambda_\pm^{-n}\omega^{(n)}\approx\lambda_\pm^0\omega, \tag{7}$$

где здесь и в дальнейшем $K_1\omega\approx K_2\omega$ означает, что разность $(K_1-K_2)\omega$ является интегральным оператором с бесконечно дифференцируемым ядром. Используя формулы (1) и (2), операторы $P\lambda_+^0$ и $Q\lambda_-^0$ можно представить в виде суммы операторов (5). Аналогично тому, как из сингулярного интегрального оператора выделяют характеристическую часть, из оператора R можно выделить произвольное число операторов (6). Пусть M и N – заданные натуральные числа. Разлагая ядра k_1 и k_2 как функции от $t\in\Gamma$ по формуле Тейлора в точке $t_0\in\Gamma$, имеем

$$\begin{aligned} k_1(t_0,t) &= \sum_{n=1}^{M}(-1)^n\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}S_{-n}(t_0)+k_{1,M}(t_0,t),\\ k_2(t_0,t) &= \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}D_{-n}(t_0)+k_{2,N}(t_0,t), \end{aligned} \tag{8}$$

где матрицы $S_{-n}(t_0)$ и $D_{-n}(t_0)$ вычисляются по формулам:

$$\mathcal{S}_{-n}(t_0)=(-1)^n \left.\frac{d^{n-1}k_1(t_0,t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_0}, \quad \mathcal{D}_{-n}(t_0)=(-1)^{n-1} \left.\frac{d^{n-1}k_2(t_0,t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_0}, \tag{9}$$

а остаточные члены $k_{1,M}(t_0,t)$ и $k_{2,N}(t_0,t)$ имеют при $t=t_0$ нули порядков $\geq M$ и N соответственно.

Подставляя разложения (8) в (3), в силу формул (1), (2), (5) и (6), получаем следующее представление оператора (4):

$$K\omega \equiv \sum_{j=0}^{p+M} \mathcal{S}_{p-j}(t_0)\lambda_+^{p-j}\omega + \sum_{j=0}^{q+N} \mathcal{D}_{q-j}(t_0)\lambda_-^{q-j}\omega + R_{M,N}\omega, \tag{10}$$

где оператор $R_{M,N}$ имеет вид (3) с матрицами $k_1=k_{1,M}$ и $k_2=k_{2,N}$. Определим порядки операторов (2), (5), (6) в зависимости от того, как они действуют в пространствах $C^{n,\alpha}(\Gamma)$. Легко видеть, что порядки операторов (2), (5) и (6) совпадают с их верхними индексами. Действительно, порядок операторов λ_+^0, λ_-^0 равен нулю, так как, в силу теоремы Племеля-Привалова, они переводят пространство $C^{0,\alpha}(\Gamma), 0<\alpha<1$, в себя [1]. Порядок операторов (5) положительный и равен n, так как $\lambda_+^n\varphi$ и $\lambda_-^n\varphi$ принадлежат классу $C^{0,\alpha}(\Gamma)$, если $\varphi\in C^{n,\alpha}(\Gamma)$, и не принадлежат классу $C^{0,\beta}(\Gamma)$ при $\beta>\alpha$. Порядок операторов (6) отрицательный и равен $-n$, так как, в силу формул (7), они действуют из пространства $C^{0,\alpha}(\Gamma)$ в $C^{n,\alpha}(\Gamma)$. Мы скажем, что оператор (10) имеет порядок (p,q), т.е. p по "плюсовым" операторам и q по "минусовым", если матрицы $\mathcal{S}_p(t)$ и $\mathcal{D}_q(t)$ не равны нулю на Γ (обооснованность этого определения будет видна из дальнейшего). Наряду с операторами, имеющими неотрицательные порядки (p,q), мы будем рассматривать также операторы, один или оба порядка которых отрицательны, скажем, $(-m,-n), m,n>0$, если матрицы $\mathcal{S}_p=\mathcal{S}_{p-1}=\ldots=\mathcal{S}_{-m+1}=0$, $\mathcal{D}_q=\mathcal{D}_{q-1}=\ldots=\mathcal{D}_{-n+1}=0$, а матрицы $\mathcal{S}_{-m}$, $\mathcal{D}_{-n}$ не равны нулю на Γ. При этом система (10) состоит из интегральных операторов Фредгольма 1-го рода.

Легко видеть, что линейная комбинация операторов K вида (10) представима в виде (10). Важным моментом при изучении уравнений $K\omega=f$ является тот факт, что операторы K образуют алгебру, т.е. композиция таких операторов является оператором вида (10). Оказывается также, что союзный оператор K' также представим в виде (10). Эти утверждения доказаны автором в работе [2]. Пусть m, n - произвольные целые числа, $\varphi(t)$ - функция класса $C^\infty(\Gamma)$. Имеют место [2] следующие формулы композиции операторов (5), (6):

$$\begin{aligned} &\lambda_+^m\lambda_+^n\varphi \approx \lambda_+^{m+n}\varphi, \quad &&\lambda_-^m\lambda_-^n\varphi \approx \lambda_-^{m+n}\varphi, \\ &\lambda_+^m\lambda_-^n\varphi \approx 0, &&\lambda_-^m\lambda_+^n\varphi \approx 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где нуль в последних двух формулах (11) означает, что левая часть является интегральным оператором с бесконечно дифференцируемым ядром. Композиция операторов $R_{M,N}$ вида (3) с операторами λ_+^m, λ_-^n, $m\leq M$, $n\leq N$, и между собой так-

же представима в виде (3). Точнее,

$$
\begin{aligned}
\lambda_+^m R_{M,N}\varphi &= R^{(1)}_{M-m,\infty}\varphi, \quad R_{M,N}\lambda_+^m\varphi = R^{(2)}_{M-m,\infty}\varphi, \\
\lambda_-^n R_{M,N}\varphi &= R^{(1)}_{\infty,N-n}\varphi, \quad R_{M,N}\lambda_-^n\varphi = R^{(2)}_{\infty,N-n}\varphi,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
R_{M_1,N_1}\cdot R_{M_2,N_2}\varphi = R_{M_1+M_2,N_1+N_2}\varphi,
$$

где $R^{(j)}_{M,\infty}$ (соответственно $R^{(j)}_{\infty,N}, j=1,2$) - операторы вида (3) с ядром $k_1^{(j)}(t_0,t)$, имеющим при $t=t_0$ нуль порядка $\geqslant M$, и ядром $k_2^{(j)}\equiv 0$ (соответственно $k_1^{(j)}\equiv 0$, а $k_2^{(j)}(t_0,t)$ имеет при $t=t_0$ нуль порядка $\geqslant N$).

Для операторов λ_+^n, λ_-^n имеет место аналог формулы Лейбница [2]. Пусть $\alpha(t)$ - функция класса $C^\infty(\Gamma)$. Тогда

$$
\lambda_+^n(\alpha\varphi) = \sum_{m=0}^{M}\binom{n}{m}\alpha^{(m)}(t_0)\lambda_+^{n-m}\varphi + R_{M-m,\infty}\varphi,
\tag{13}
$$

где $\binom{n}{m} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}$, а оператор $R_{M-m,\infty}$ указан выше. В работе [2] доказано, что композиция оператора K вида (10) порядка (p,q) с оператором L порядка (r,s) вида

$$
L\varphi \equiv \sum_{j=0}^{r+M_1} C_{r-j}(t_0)\lambda_+^{r-j}\varphi + \sum_{j=0}^{s+N_1} T_{s-j}(t_0)\lambda_-^{s-j}\varphi + R_{M_1,N_1}\varphi
\tag{14}
$$

является сингулярным интегродифференциальным оператором порядка $(p+r, q+s)$, который также представим в виде (10):

$$
KL\varphi = \sum_{n=0}^{p+r+M_2}\tilde{S}_{p+r-n}(t_0)\lambda_+^{p+r-n}\varphi + \sum_{n=0}^{q+s+N_2}\tilde{D}_{q+s-n}(t_0)\lambda_-^{q+s-n}\varphi + R_{M_2,N_2}\varphi,
\tag{15}
$$

причем его коэффициенты вычисляются по формулам:

$$
\tilde{S}_{p+r}(t) = S_p(t)\cdot C_r(t), \quad \tilde{D}_{q+s}(t) = D_q(t)T_s(t),
\tag{16}
$$

$$
\tilde{S}_{p+r-n}(t) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{\substack{k+j=n-m\\ k,j\geqslant 0}}\binom{p-k}{m}S_{p-k}(t)C^{(m)}_{r-j}(t),
\tag{17}
$$

$$
n=1,2,\dots,p+r+M_2; \quad p+r+M_2 \leqslant p+M,\ r+M,
$$

$$
\tilde{D}_{q+s-n}(t) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{\substack{k+j=n-m\\ k,j\geqslant 0}}\binom{q-k}{m}D_{q-k}(t)T^{(m)}_{s-j}(t)
\tag{18}
$$

$$
n=1,2,\dots,q+s+N_2; \quad q+s+N_2 \leqslant q+N,\ s+N_1.
$$

Наконец, союзный оператор K', определяемый равенством

$$
\int_\Gamma \psi\cdot K\varphi\,dt = \int_\Gamma \varphi\cdot K'\psi\,dt,
\tag{19}
$$

также представим в виде

$$
K'\psi = \sum_{n=0}^{q+N}(-1)^{q-n}\lambda_+^{q-n}(D'_{q-n}\psi) + \sum_{n=0}^{p+M}(-1)^{p-n}\lambda_-^{p-n}(S'_{p-n}\psi) + R'_{N,M}\psi,
\tag{20}
$$

где штрих означает транспонирование матрицы, а $R'_{N,M}$ – оператор, союзный оператору $R_{M,N}$. Используя формулы Лейбница, оператор (20) можно переписать в виде (10). Порядок оператора K' равен (q,p).

Введем в рассмотрение пространства $C^{\alpha}_{p,q}(\Gamma)$. Произвольная функция $\varphi\in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ однозначно представима в виде

$$\varphi = \lambda^0_+\varphi + \lambda^0_-\varphi, \tag{21}$$

причем операторы $\lambda^0_+\varphi$ и $\lambda^0_-\varphi$ как функции $t_0\in\Gamma$ являются предельными значениями Φ^+ и $-\Phi^-$ интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-z} \tag{22}$$

с плотностью φ. В силу теоремы Племеля–Привалова $\lambda^0_+\varphi$ и $\lambda^0_-\varphi$ принадлежат классу $C^{0,\alpha}(\Gamma)$, но их гладкости могут быть различными.

О п р е д е л е н и я. Функция $\varphi\in C^{\alpha}_{p,q}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $\lambda^0_+\varphi\in C^{p,\alpha}(\Gamma)$ и $\lambda^0_-\varphi\in C^{q,\alpha}(\Gamma)$.

Функция $\varphi\in C^{p,\alpha}_+(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $\varphi\in C^{p,\alpha}(\Gamma)$ и $\lambda^0_-\varphi=0$ (т.е. $\varphi=\Phi^+$). Наконец, $\varphi\in C^{q,\alpha}_-(\Gamma)$ эквивалентно условиям $\varphi\in C^{q,\alpha}(\Gamma)$ и $\lambda^0_+\varphi=0$ $(\varphi=-\Phi^-)$.

В силу представления (21) пространство $C^{\alpha}_{p,q}(\Gamma)$ является прямой суммой пространств $C^{p,\alpha}_+(\Gamma)$ и $C^{q,\alpha}_-(\Gamma)$. Легко видеть, что операторы λ^0_+ и λ^0_- являются проекционными и проектируют пространство $C^{\alpha}_{p,q}(\Gamma)$ на пространства $C^{p,\alpha}_+(\Gamma)$ и $C^{q,\alpha}_-(\Gamma)$ соответственно. Очевидно, что $C^{\alpha}_{m,n}\subset C^{\alpha}_{p,q}$, если $m\geq p$, $n\geq q$, и что пространство $C^{\alpha}_{n,n}$ совпадает с классом $C^{n,\alpha}$ *).

Рассмотрим операторы:

$$\lambda_{01}\mu \equiv \lambda^0_+\mu + t_0\lambda^1_-\mu, \qquad \lambda_{10}\nu \equiv -\lambda^1_+(t\nu) + \lambda^0_-\nu, \tag{23}$$

$$\lambda^{-1}_{01}\varphi \equiv \lambda^0_+\varphi + \lambda^{-1}_-(t^{-1}\varphi), \quad \lambda^{-1}_{10}\varphi \equiv -t_0^{-1}\lambda^{-1}_+\varphi + \lambda^0_-\varphi. \tag{24}$$

Доказано [2, 3], что операторы λ_{10} и λ_{01} отображают взаимно-однозначно пространство $C^{\alpha}_{m,n}$, $m,n\geq 1$, на пространства $C^{\alpha}_{m-1,n}$ и $C^{\alpha}_{m,n-1}$ соответственно, причем обратные операторы задаются формулами (24). Композиция $\lambda^p_{10}\lambda^q_{01}$ отображает взаимно-однозначно пространство $C^{\alpha}_{p,q}$ на $C^{0,\alpha}$. Кроме того, операторы $\lambda_{10}\varphi$ и $\lambda_{01}\varphi$ являются союзными на функциях $\varphi\in C^{1,\alpha}$. Очевидно, что операторы (23) имеют порядки (0,1) и (1,0), а операторы (24) – порядки (0,–1) и (–1,0) соответственно.

---

*) Ниже для упрощения записи мы будем опускать Γ в обозначениях пространств.

§ 2. Сингулярные интегродифференциальные уравнения нормального типа

Обратимся теперь к уравнению

$$K\omega = f, \tag{1}$$

где оператор K порядка (p,q) задается формулой (10) § 1, f – заданная вектор-функция класса $C^{0,\alpha}$, а ω – искомая вектор-функция из пространства $C^{\alpha}_{p,q}$.

Определение. Мы скажем, что оператор K порядка (p,q) принадлежит к нормальному типу, если матрицы S_p и D_q не вырождены всюду на Γ :

$$\det S_p(t) \neq 0, \quad \det D_q(t) \neq 0 \qquad \forall t \in \Gamma. \tag{2}$$

Система (1) порядка (p,q) при помощи подстановки $\omega = \lambda_{10}^{-p}\lambda_{01}^{-q}\varphi$ приводится к сингулярному интегральному уравнению

$$\tilde{K}\varphi = K\lambda_{10}^{-p}\lambda_{01}^{-q}\varphi = f, \tag{3}$$

так как в силу формул композиции (16)–(18) § 1 оператор (3) является сингулярным интегральным оператором и его характеристическая часть $\tilde{K}_0$ имеет вид

$$\tilde{K}_0\varphi = (-1)^p t_0^{-p} S_p(t_0)\lambda_+^0\varphi + t_0^{-q} D_q(t_0)\lambda_-^0\varphi. \tag{4}$$

При этом решению $\omega \in C^{\alpha}_{p,q}$ системы (1) соответствует решение $\varphi \in C^{0,\alpha}$, $\varphi = \lambda_{01}^{q}\lambda_{10}^{p}\omega$, системы (3) и обратно, так что системы (1) и (3) эквивалентны.

Если система (1) принадлежит к нормальному типу, то система сингулярных интегральных уравнений (3) также имеет нормальный тип и для нее справедливы [1] теоремы Нётера, причем однородная система, союзная к системе (3), имеет вид

$$\tilde{K}'\psi = \lambda_{10}^{-q}\lambda_{01}^{-p}K'\psi = 0. \tag{5}$$

Учитывая эквивалентность систем (1) и (3), а также союзных однородных систем, легко убедиться в справедливости для системы (1) основных теорем Нётера.

Теорема 1. Однородная система $K\omega = 0$ и союзная однородная система $K'\psi = 0$ имеют каждая конечное число m и m' линейно-независимых решений, которые являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Теорема 2. Необходимое и достаточное условие разрешимости системы (1) состоит в том, что

$$\int_\Gamma f\psi_j\,dt = 0, \qquad j = 1,\dots,m', \tag{6}$$

где $\psi_1,\dots,\psi_{m'}$ – базис в пространстве решений союзной однородной системы $K'\psi = 0$.

Теорема 3. Индекс $\varkappa = m - m'$ системы (1) порядка (p,q) равен

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det D_q(t)}{\det S_p(t)}\right]_\Gamma + \ell(p-q), \tag{7}$$

где $[\arg f(t)]_\Gamma = \int_\Gamma d\arg f(t)$. Кроме того, для системы (1) нормального типа имеет место следующая теорема о повышении гладкости решения при улучшении гладкости правой части f.

Т е о р е м а 4. Если $f \in C^\alpha_{M,N}$ и удовлетворяет условиям (6), то любое решение системы (1) класса $C^\alpha_{p,q}$ принадлежит классу $C^\alpha_{p+M,q+N}$.

Предположим вначале, что $p=q=0$ в системе (1) и $f \in C^{M,\alpha}$, $M>0$, и покажем, что любое ее непрерывное по Гёльдеру решение принадлежит классу $C^{M,\alpha}$. Для этого построим левый регуляризатор системы L такой, что

$$LK\omega = \omega + R_M\,\omega, \tag{8}$$

где R_M – оператор (3) § 1 с матрицами k_1 и k_2, имеющими при $t=t_0$ нули порядков $\geq M$, который повышает гладкость ω на M производных (т.е. $R_M\omega \in C^{M,\alpha}$, если $\omega \in C^{0,\alpha}$). Оператор L ищем в виде

$$L\varphi = \sum_{k=0}^{M}\left[C_{-k}(t_0)\lambda_+^{-k}\varphi + T_{-k}(t_0)\lambda_-^{-k}\varphi\right]. \tag{9}$$

Тогда, в силу формул (15)–(18) § 1 композиции операторов L и K и условия (8), мы получим систему матричных уравнений относительно C_{-k} и T_{-k}, которая, как нетрудно убедиться, однозначно разрешима ввиду невырожденности матриц S_0 и D_0. Пусть теперь $f \in C^{M,\alpha}$ и $\omega \in C^{0,\alpha}$, тогда в силу теоремы Племеля–Привалова $Lf \in C^{M,\alpha}$ и $R_M\omega \in C^{M,\alpha}$. Следовательно, $\omega = Lf - R_M\omega$ также принадлежит классу $C^{M,\alpha}$.

Перейдем к общему случаю. Пусть $f \in C^{M,\alpha}$ удовлетворяет условиям разрешимости системы (1). Тогда система сингулярных интегральных уравнений (3) также разрешима и ее решение φ класса $C^{0,\alpha}$, как мы показали, принадлежит классу $C^{M,\alpha}$. Следовательно, $\omega = \lambda_{10}^{-p}\lambda_{01}^{-q}\varphi$ – решение системы (1) принадлежит классу $C^\alpha_{p+M,q+M}$. Если же $f \in C^\alpha_{M,N}$ и $M<N$, то $\lambda_{10}^{M-N} f \in C^{N,\alpha}$, а уравнение $\lambda_{10}^{M-N}K\omega = \lambda_{10}^{M-N}f$ имеет порядок $(p+M-N, q)$ и принадлежит к нормальному типу. В силу предыдущего любое его решение ω из $C^\alpha_{p,q}$ принадлежит пространству $C^\alpha_{p+M,q+N}$. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает, что любое решение однородной системы (1) нормального типа принадлежит классу C^∞.

Известно [4], что условие нормальности системы сингулярных интегральных уравнений является также необходимым условием для ее нётеровости в пространствах $C^{0,\alpha}$, $0<\alpha<1$. Из эквивалентности систем (1) и (3) вытекает следующая

Т е о р е м а 5. Условие (2) нормальности системы (1) необходимо и достаточно для нётеровости оператора K в пространствах

$$K : C^\alpha_{p,q} \longrightarrow C^{0,\alpha}. \tag{10}$$

Аналогичные теоремы легко получить для системы (1) нормального типа, один или оба порядка которой отрицательны. Это мы предоставляем читателю.

§ 3. Сингулярные интегродифференциальные уравнения, удовлетворяющие условию (K, n)

Пусть K – оператор (10) из § 1. В этом параграфе мы рассмотрим систему сингулярных интегродифференциальных уравнений порядка (p, q):

$$K\omega = f \tag{1}$$

при более общих, чем в § 2, предположениях.

Допустим, что ранг матрицы $S_p(t)$ постоянен всюду на Γ и равен $r < \ell$:

$$\operatorname{rang} S_p(t) = r < \ell \qquad \forall t \in \Gamma, \tag{2}$$

и для простоты предположим пока, что

$$\det D_q(t) \neq 0 \qquad \forall t \in \Gamma. \tag{3}$$

Например, матрица S_p имеет вид

$$S_p = (S_p^{(1)}, 0), \tag{4}$$

где $S_p^{(1)}$ – $(\ell \times r)$ – матрица ранга $r > 0$, а остальные столбцы матрицы S_p – нулевые.

В этом случае система (1) не принадлежит к нормальному типу. Нётеровость такой системы при достаточной гладкости f определяется матрицами S_{p-1}, $S_{p-2}, \ldots$ (см. [2, 3]). Покажем это. Каждую матрицу S_j разобьем на блоки $S_j^{(1)}$ и $S_j^{(2)}$, состоящие из r первых и $\ell - r$ оставшихся ее столбцов. Положим также $\omega = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)})$. Сделаем замену

$$\omega = F\varphi \equiv \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \lambda_{10} I_{\ell - r} \end{pmatrix}, \qquad \text{т.е. } \omega^{(1)} = \varphi^{(1)}, \quad \omega^{(2)} = \lambda_{10}\varphi^{(2)}, \tag{5}$$

где I_r – единичная $(r \times r)$ –матрица, а λ_{10} – оператор (23) из § 1. Легко видеть, что в силу (4) оператор $K_1 = KF$ снова имеет порядок (p,q) и его символические матрицы S_p^1 и D_q^1, ввиду формул (16), (17) § 1, имеют вид

$$S_p^1(t) = (S_p^{(1)}, -tS_{p-1}^{(2)}), \quad D_q^1 = D_q, \tag{6}$$

т.е. матрица S_p^1 состоит из столбцов матриц S_p и S_{p-1}. Ее ранг $r_1(t) \geq r$. Если $r_1 = \ell$, т.е. если

$$\det S_p^1(t) \neq 0 \qquad \forall t \in \Gamma, \tag{7}$$

то система $KF\varphi = f$ порядка (p,q) принадлежит к нормальному типу и для нее справедливы теоремы 1–4 § 2. Уточним гладкость решения системы (1) Пусть $p \geq 1$ и $f \in C^{0\alpha}$, тогда $\varphi \in C^{\alpha}_{p,q}$ и, ввиду (5), $\omega^{(1)} \in C^{\alpha}_{p,q}$, а $\omega^{(2)} \in C^{\alpha}_{p-1,q}$. Если $p = 0$, то, предполагая, что $f \in C^{\alpha}_{1,0}$, получаем $\varphi \in C^{\alpha}_{1,q}$ и, следовательно, $\omega^{(1)} \in C^{\alpha}_{1,q}$, а $\omega^{(2)} \in C^{\alpha}_{0,q}$. В любом случае первые r компонент решения ω системы (1) имеют большую гладкость по сравнению с остальными.

Перейдем теперь к случаю, когда матрица S_p удовлетворяет условию (2), но не представима в виде (4). Тогда существует невырожденная на Γ матрица $A(t) \in C^{\infty}$ такая, что матрица S_pA имеет вид (4), т.е.

$$S_pA = (S_pA^{(1)}, 0), \quad A = (A^{(1)}, A^{(2)}). \tag{8}$$

Это утверждение легко вытекает из следующей леммы.

Л е м м а. Пусть $S(t)$ – комплексная матрица класса C^∞, имеющая на Γ постоянный ранг $r<\ell$. Тогда существует $(\ell\times\ell-r)$ –матрица $X(t)$ класса C^∞ ранга $\ell-r$ такая, что

$$S(t)X(t)=0 \qquad \forall t\in\Gamma. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы несложно. Вначале строится кусочно-гладкая матрица. Затем она сглаживается (см., например, [5, 6, 7]). Отметим, что построение действительной матрицы $X(t)$, если матрица $S(t)$ действительна, невозможно.

Матрица $X(t)$ строится следующим образом. Вначале находим $(\ell\times\ell-r)$–матрицу $A^{(2)}$, удовлетворяющую условиям:

$$S(t)A^{(2)}(t)=0, \quad \operatorname{rang} A^{(2)}(t)=\ell-r \quad \forall t\in\Gamma, \tag{10}$$

а затем достраиваем ее до квадратной невырожденной матрицы A. В конкретном случае это можно сделать, непосредственно исходя из вида A. Можно даже взять столбцы матриц $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ взаимно-ортогональными, т.е. $A^{(1)}$ найти из условия

$$A^{(2)*}(t)A^{(1)}(t)=0 \quad \forall t\in\Gamma, \tag{11}$$

где $*$ означает транспонирование и комплексное сопряжение $A^{(2)}$.

Рассмотрим теперь преобразование

$$\omega=F_1\varphi=AFA^{-1}\varphi, \tag{12}$$

где F – оператор (5). Оператор F_1 представим в виде:

$$F_1\varphi=C_1(t_0)\lambda_+^1\varphi+C_0(t_0)\lambda_+^0\varphi+I_\ell\,\lambda_-^0\varphi+K_1\varphi, \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered}C_1(t)=A\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -tI_{\ell-r}\end{pmatrix}A^{-1}=\left(0,-tA^{(2)}\right)A^{-1},\\ C_0(t)=A\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & -I_{\ell-r}\end{pmatrix}A^{-1}+A\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -tI_{\ell-r}\end{pmatrix}\frac{d}{dt}A^{-1},\end{gathered} \tag{14}$$

а ядро оператора K_1 принадлежит классу $C^\infty(\Gamma\times\Gamma)$.

В силу (8) оператор $K_1=KF_1$ имеет порядок (p,q), и его символические матрицы, вычисленные по формулам композиции, имеют вид:

$$S_p^1(t)=\left(S_pA^{(1)},-tS_{p-1}A^{(2)}-ptS_p\frac{dA^{(2)}}{dt}\right)A^{-1},\ D_q^1=D_q. \tag{15}$$

Легко убедиться, что ранг матрицы $S_p^1(t)$ в каждой точке t не зависит от произвола, который имеется при построении матрицы $A(t)$.

Так как матрица S_p^1 определяется через S_p и S_{p-1}, то ее ранг $r_1(t)\geq r$. Если $r_1=\ell$, то система

$$KF_1\varphi=f \tag{16}$$

имеет порядок (p,q) и принадлежит к нормальному типу. Следовательно, для нее справедливы теоремы 1–4 § 2, т.е. оператор KF_1 является нётеровым в пространствах $C^{\alpha}_{p,q} \to C^{0,\alpha}$. Из однозначной обратимости оператора F_1 вытекает, что при $p \geq 1$ оператор

$$K: \ F_1 C^{\alpha}_{p,q} \to C^{0,\alpha} \tag{17}$$

также является нётеровым. Как нетрудно убедиться, векторное пространство $F_1 C^{\alpha}_{p,q}$ характеризуется тем, что m – вектор $\mathfrak{M}\omega$, где $\mathfrak{M}$ – $(m\times\ell)$ – матрица класса C^{∞} принадлежит классу $C^{\alpha}_{p,q}$ для любого ℓ – вектора $\omega \in F_1 C^{\alpha}_{p,q}$ тогда и только тогда, когда $M(t)A^{(2)}(t)=0$ на Γ. В частности, если матрицу A^{-1} разделить по строкам на две $(r\times\ell)$ – и $(\ell-r\times\ell)$ –матрицы A_1 и A_2, то r – вектор $A_1\omega \in C^{\alpha}_{p,q}$, а $(\ell-r)$ – вектор $A_2\omega \in C^{\alpha}_{p,q}$, но для некоторых ω может не принадлежать классу $C^{\alpha}_{p,q}$. Итак, условия (2), (3), (7) достаточны для нётеровости оператора K в пространствах (17). Покажем, что эти условия являются также необходимыми. Действительно, если существует оператор F_1 вида (12) такой, что оператор K нётеров в пространствах (17), то оператор KF_1 нётеров и переводит $C^{\alpha}_{p,q}$ в $C^{0,\alpha}$. Следовательно, он имеет порядок (p,q) и, в силу теоремы 5 § 2, принадлежит к нормальному типу, откуда вытекает, что матрица S_p удовлетворяет уравнению (10) и выполнены условия (3) и (7). Так как матрица A в F_1 невырожденна, то ранг $A^{(2)}$ равен $\ell-r$ и, ввиду (10), ранг S_p меньше или равен r. Однако невырожденность матрицы S_p^1 убеждает нас в том, что ранг S_p равен r всюду на Γ, что и требовалось доказать.

Если матрица D_q также имеет на Γ постоянный ранг $s<\ell$

$$\operatorname{rang} D_q(t) = s < \ell \quad \forall t\in\Gamma, \tag{18}$$

то аналогично предыдущему строим невырожденную матрицу $B(t)=(B^{(1)}, B^{(2)})$ такую, что

$$D_q(t)B^{(2)}(t)=0, \quad \operatorname{rang} B^{(2)}(t)=s, \ t\in\Gamma, \tag{19}$$

и вводим оператор

$$\varphi = G_1\psi = B\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & \lambda_{01}I_{\ell-s}\end{pmatrix}B^{-1}, \tag{20}$$

который, в силу (23) § 1, представим также в виде:

$$G_1\psi = I_\ell \lambda^0_+ \psi + T_1(t_0)\lambda^1_-\psi + T_0(t_0)\lambda^0_-\psi + R_2\psi, \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} T_1(t) &= B\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & tI_{\ell-s}\end{pmatrix}B^{-1} \equiv (0, tB^{(2)})B^{-1}, \\ T_0(t) &= B\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}B^{-1} + B\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & tI_{\ell-s}\end{pmatrix}\frac{dB^{-1}}{dt}, \end{aligned} \tag{22}$$

а R_2 – оператор с бесконечно дифференцируемым ядром. Подставляя теперь (20) в (16), получаем систему

$$KF_1G_1\psi = f, \tag{23}$$

которая в силу (19) снова имеет порядок (p,q), ее символическая матрица S_p^1 выражается формулой (15), а

$$D_q^1(t) - (D_q B^{(1)}, t D_{q-1} B^{(2)} + q t D_q \frac{dB^{(2)}}{dt}) B^{-1}. \tag{24}$$

Если

$$\det D_q^1(t) \neq 0 \quad \forall t \in \Gamma, \tag{25}$$

то система (23) принадлежит к нормальному типу и, следовательно, оператор K является нётеровым в пространствах

$$K: F_1 G_1 C^{\alpha}_{p,q} \to C^{0,\alpha}, \quad p,q \geq 1, \tag{26}$$

или в пространствах

$$K: F_1 G_1 C^{\alpha}_{p+1,q+1} \to C^{1,\alpha}, \quad p,q \geq 0. \tag{27}$$

Определение 1. Мы скажем, что система (1) удовлетворяет условию (1,0), если матрицы S_p, S_{p-1} и D_q оператора K удовлетворяют условиям (2), (3) и (7), т.е. матрицы (15) не вырожденны на Γ. Система (1) удовлетворяет условию (1,1), если матрицы S_p, S_{p-1} и D_q, D_{q-1} удовлетворяют условиям (2), (7) и (18), (25).

В общем случае пусть k и n – целые неотрицательные числа. Система (1) удовлетворяет условию (k,n), если матрицы $S_p, S_{p-1}, \ldots, S_{p-k}$ и $D_q, D_{q-1}, \ldots, D_{q-n}$ удовлетворяют следующим условиям: матрицы S_p, D_q и S_p^1, D_q^1, определенные формулами (15) и (24), а также матрицы $S_p^2, D_q^2, \ldots, S_p^k, D_q^n$, формулы для которых мы укажем ниже, имеют на Γ постоянные ранги, причем матрицы S_p^k и D_q^n не вырожденны, т.е.

$$\det S_p^k(t) \neq 0, \quad \det D_q^n(t) \neq 0 \quad \forall t \in \Gamma. \tag{28}$$

Отметим, что условие (0,0) означает нормальность системы (1). Укажем формулы для вычисления матриц S_p^k и D_q^n. По матрицам S_p и D_q рангов r и s строятся невырожденные матрицы A и B. Матрицы S^1_{p-j}, D^1_{q-j}, $j=0,1,\ldots,$ с верхним индексом 1 – это коэффициенты оператора $K_1 = K F_1 G_1$, которые определяются формулами (16)–(18) § 1. Матрицы S_p^1 и D_q^1, по предположению, имеют на Γ постоянные ранги r_1 и s_1. Поэтому снова можно определить операторы F_2 и G_2. Матрицы S^2_{p-j}, D^2_{q-j} – коэффициенты оператора $K_2 \equiv K_1 F_2 G_2$ определяются формулами композиции этих операторов. Продолжая таким образом построение, легко видеть, что S_p^k и D_q^n – это символические матрицы оператора

$$K F_1 G_1 \ldots F_k G_n : C^{\alpha}_{p+k,q+n} \to C^{\alpha}_{k,n}. \tag{29}$$

Условие (k,n) гарантирует существование конечной цепочки операторов $F_1, G_1, \ldots$ $\ldots, F_k, G_n$ таких, что оператор (29) порядка (p,q) принадлежит к нормальному типу. Причем эта цепочка операторов не является произвольной. Исходный оператор

K имеет порядок (p,q), и его символические матрицы S_p и D_q имеют на Γ постоянные ранги r и s. Оператор $F_1 G_1$ имеет порядок (1,1) и символические матрицы C_1 и T_1 рангов $\ell-r$ и $\ell-s$ соответственно. Оператор композиции K_1 снова имеет порядок (p,q), и его символические матрицы S'_p и D'_q имеют на Γ постоянные ранги $r_1 \geq r$ и $s_1 \geq s$ и т.д., пока не получим оператор (29) порядка (p,q) нормального типа.

Определение 2. Мы скажем, что оператор K порядка (p,q) приводим справа к оператору порядка (p,q) нормального типа, если у него существует конечная цепочка операторов вида (12) и (20) такая, что оператор (29) имеет порядок (p,q) и принадлежит к нормальному типу.

Очевидно, система, удовлетворяющая условию (k,n), является (k,n)-приводимой справа к оператору нормального типа. Ниже мы покажем, что класс операторов, приводимых к операторам нормального типа, шире класса операторов, удовлетворяющих условию (k,n).

Предположим теперь, что оператор K порядка (p,q) (k,n)-приводим справа к оператору нормального типа. Тогда союзный оператор K' является (n,k)-приводимым слева к оператору порядка (q,p) нормального типа. Действительно, так как $(K_1 \ldots K_n)' = K'_n \ldots K'_1$ и союзный оператор к оператору нормального типа также имеет нормальный тип, то оператор

$$G'_n F'_k \ldots G'_1 F'_1 K' : C^{\infty}_{q+n\, p+k} \longrightarrow C^{\infty}_{n,k}, \tag{30}$$

союзный к оператору (29), имеет порядок (q,p) и принадлежит к нормальному типу. Так как операторы F_i и G_j, а также союзные к ним операторы F'_i и G'_j, которые снова имеют вид (20) и (12), однозначно обратимы, то из теорем § 2 вытекает, что для системы (1), (k,n)-приводимой справа к системе порядка (p,q) нормального типа, имеют место аналоги теорем 1-5 § 2.

Теорема 1. Ядро оператора K, приводимого справа к нормальному типу, и ядро союзного оператора K' конечномерны и состоят из бесконечно дифференцируемых функций.

Теорема 2. Система $K\omega = f$ разрешима тогда и только тогда, когда $f \in C^{\infty}_{k,n}$ удовлетворяет условиям (6) § 2. Любое ее решение ω принадлежит классу

$$F_1 G_1 \ldots F_k G_n C^{\infty}_{p+k,\, q+n} \subset C^{\infty}_{p,q}. \tag{31}$$

Теорема 3. Индекс $\varkappa$ системы (1), (k,n)-приводимой справа к системе порядка (p,q) нормального типа, равен

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\left[\arg \frac{\det D^n_q(t)}{\det S^k_p(t)}\right]_{\Gamma} + \ell(p-q). \tag{32}$$

Так что индекс такой системы целиком определяется матрицами $S_p,\dots,S_{p-k}, D_q,\dots,D_{q-n}$ и не зависит от остальных матриц.

Теорема 4. Если $f\in C^{\alpha}_{M,N}$, $M>k$, $N>n$, такова, что система (1) разрешима, то любое ее решение ω принадлежит классу $C^{\alpha}_{p+M-k,\,q+N-n}$.

Из этой теоремы следует, что, решая систему (1) в классах Гёльдера, достаточно потребовать, чтобы f принадлежала классу $C^{h,\alpha}$ с $h=max(k,n)$. Тогда ω принадлежит классу $C^{b,\alpha}$, где $b=min(p+h-k,\ q+h-n)$.

Теорема 5. Оператор K порядка (p,q) нётеров в пространствах

$$K: F_1 G_1\dots F_k G_n C^{\alpha}_{p+k,\,q+n}\longrightarrow C^{\alpha}_{k,n} \tag{33}$$

тогда и только тогда, когда он (k,n) -приводим справа к оператору порядка (p,q) нормального типа.

§ 4. Сингулярные интегродифференциальные уравнения, приводимые к системам нормального типа

Приведем пример системы, удовлетворяющей условию (k,n). Пусть заданы целые числа $0\leqslant \tau_1\leqslant \tau_2\leqslant\dots\leqslant \tau_k<\ell$ и $0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\dots\leqslant s_n<\ell$, а также заданы бесконечно дифференцируемые невырожденные матрицы $\hat S_p, \hat S_{p-1},\dots,\hat S_{p-k}$ и $\hat D_q$, $\hat D_{q-1},\dots,\hat D_{q-n}$ порядков $\tau_1, \tau_2-\tau_1,\dots,\ell-\tau_k$ и $s_1, s_2-s_1,\dots,\ell-s_n$ соответственно для тех порядков, которые положительны. Пусть $\tilde K$ - произвольный оператор вида (10) из § 1 порядка $(p-k-1, q-n-1)$. Предположим, что первые $k+1$- и $n+1$- матрицы S_{p-i} и D_{q-j} оператора K состоят из нулей и матриц $\hat S_{p-i}$ и $\hat D_{q-j}$, стоящих вдоль главных диагоналей так, что он имеет вид:

$$K\omega=\begin{pmatrix}\hat S_p\lambda_+^p & & 0\\ & \hat S_{p-1}\lambda_+^{p-1} & \\ & & \ddots\\ 0 & & \hat S_{p-k}\lambda_+^{p-k}\end{pmatrix}\omega+\begin{pmatrix}\hat D_q\lambda_-^q & & 0\\ & \hat D_{q-1}\lambda_-^{q-1} & \\ & & \ddots\\ 0 & & \hat D_{q-n}\lambda_-^{q-n}\end{pmatrix}\omega+\tilde K\omega. \tag{1}$$

Легко убедиться, что оператор (1) (k,n) -приводим справа к оператору порядка (p,q) нормального типа, а операторы F_i и G_j имеют простой вид

$$F_i\varphi=\begin{pmatrix}I_{\tau_i} & 0\\ 0 & \lambda_{10}I_{\ell-\tau_i}\end{pmatrix}\varphi,\quad G_j\psi=\begin{pmatrix}I_{s_j} & 0\\ 0 & \lambda_{01}I_{\ell-s_j}\end{pmatrix}\psi, \tag{2}$$

$$i=1,2,\dots,k,\qquad j=1,\dots,n.$$

Причем если $f\in C^{0,\alpha}$ и $k<p$, $n<q$, то $\omega\in F_1G_1\dots F_kG_nC^{\alpha}_{p,q}$. Это означает в данном случае, что различные компоненты ω_j вектора ω имеют различную гладкость. Так, если $0<\tau_1<s_1<\tau_2<\dots<\ell$, то $\omega_1,\dots,\omega_{\tau_1}\in C^{\alpha}_{p,q}$, $\omega_{\tau_1+1},\dots,\omega_{s_1}\in C^{\alpha}_{p-1,q}$, $\omega_{s_1+1},\dots,\omega_{\tau_2}\in C^{\alpha}_{p-1,q-1},\dots,\omega_\ell\in C^{0,\alpha}$. Операторы вида (1) можно назвать каноническим видом оператора, удовлетворяющего условию (k,n), что оправдывает следующая

Т е о р е м а 1. Пусть оператор K порядка (p,q) удовлетворяет условию (k,n). Тогда существуют сингулярные интегральные операторы нормального типа L и M такие, что оператор LKM имеет вид (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проводится в несколько этапов. Кроме того, все построения мы проведем только для плюсовых операторов, так как для минусовых операторов они проводятся по аналогичным формулам. На первом этапе, используя лемму § 3, строятся невырожденные матрицы $A(t)$ и $B(t)$, которые матрицу S_p приводят к виду

$$AS_pB = \begin{pmatrix} \hat{S}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\hat{S}_p$ - невырожденная матрица порядка r, равного рангу матрицы S_p. Тогда оператор $K^1 = L_1 K M_1$, где

$$L_1\varphi = A\lambda_+^0\varphi + I_\ell\lambda_-^0\varphi,\quad M_1\psi = B\lambda_+^0\psi + I_\ell\lambda_-^0\psi, \tag{4}$$

имеет вид:

$$K^1\varphi = \begin{pmatrix} \hat{S}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda_+^p\varphi + \sum_{j=1}^{k} S^1_{p-j}\lambda_+^{p-j}\varphi + \tilde{K}^1_{p-k-1,q}\varphi. \tag{5}$$

Далее, используя невырожденность матрицы $\hat{S}_p$, определяем коэффициенты B_j оператора

$$M_2\psi = I_\ell\lambda_+^0\psi + \sum_{j=1}^{k} B_j(t)\lambda_+^{-j}\psi + I_\ell\lambda_-^0\psi, \tag{6}$$

таким образом, чтобы первые r_1 строк матрицы S^2_{p-j}, $j=1,\dots,k$, оператора $K^2 = K^1 M_2$ обратились в нуль. Для этого, используя формулы композиции (16)-(18) § 1, решаем матричные уравнения, аналогичные тем, которые мы решали при построении левого регуляризатора в теореме 4 § 2. При этом первые r строк матриц $B_1,\dots,B_k$ определяются однозначно, а остальные $\ell - r$ строк произвольны, мы их положим равными нулю.

В конце первого этапа определяем оператор

$$L_2\varphi = I_\ell\lambda_+^0\varphi + \sum_{j=1}^{k} A_j(t)\lambda_+^{-j}\varphi + I\lambda_-^0\varphi \tag{7}$$

так, чтобы первые r столбцов и строк матриц S^3_{p-j}, $j=1,\dots,k$, оператора $K^3 = L_2 K^2$ обращались в нуль. Для этого опять решаем матричные уравнения, причем первые r столбцов матриц $A_1,\dots,A_k$ определяются однозначно, а остальные полагаем равными нулю. Итак, после первого этапа оператор $K_{p,q}$ приводится к виду

$$L_2L_1K_{p,q}M_1M_2\varphi = \begin{pmatrix} \hat{S}_p\lambda_+^p & 0 \\ 0 & \sum\limits_{j=1}^{k}\tilde{S}_{p-j}\lambda_+^{p-j} \end{pmatrix}\varphi + \tilde{K}_{p-k-1,q}\varphi, \tag{8}$$

где $\tilde{S}_{p-j}$ – матрицы порядка $l-r$, $\tilde{K}$ – оператор порядка $(p-k-1,q)$. Обозначим $L = L_2 L_1$, $M = M_1 M_2$. Оператор (8) снова удовлетворяет условию (k,n). Это можно доказать непосредственно, проверяя, что ранги матриц $S_p^j(t)$ оператора $K_{p,q}$ и матриц $\tilde{S}_p^j(t)$ оператора (8) совпадают. Можно также указать цепочку операторов, которая приводит справа оператор (8) к нормальному типу. Пусть R – правый регуляризатор для оператора M, т.е. $MR=\varphi+T\cdot\varphi$, где оператор T имеет порядок не выше $(-2k,-2n)$, а $F_1 G_1 \dots F_k G_n$ – цепочка операторов, которая справа приводит оператор K к нормальному типу. Тогда цепочка $RF_1 G_1 \dots F_k G_n$ приводит оператор (8) к нормальному типу. Так как оператор F_1 для (8) имеет вид (5) § 3, то ранг матрицы $\tilde{S}_{p-1}$ постоянен всюду на Γ. Если ранг матрицы $\tilde{S}_{p-1}$ положителен, то построения, проведенные на первом этапе, мы можем применить к оператору $\sum\limits_{j=1}^{k} \tilde{S}_{p-j}\, \lambda_+^{p-j}$ и привести его к виду, аналогичному (8), и т.д., через k этапов–для плюсовых операторов и через n этапов – для минусовых оператор K будет приведен к виду (1). Причем операторы L и M являются произведениями сингулярных интегральных операторов нормального типа, построенных на каждом этапе, и, следовательно, сами принадлежат к нормальному типу. Теорема доказана.

Отметим, что мы доказали теорему для операторов, приводимых к нормальному типу справа. Аналогично теорема доказывается для операторов, приводимых слева или с двух сторон. Существенным при доказательстве было условие постоянства ранга символических матриц оператора K и его композиций с операторами (12) и (20) § 3.

Из этой теоремы вытекает, что оператор, (k,n) –приводимый справа к оператору порядка (p,q) нормального типа, является также приводимым слева, т.е. существует конечная цепочка операторов $\tilde{F}_i$ и $\tilde{G}_j$ вида (12) и (20) § 3 такая, что оператор

$$\tilde{G}_n \tilde{F}_k \dots \tilde{G}_1 \tilde{F}_1 K_{p,q} : C^{\alpha}_{p,q} \longrightarrow C^{0,\alpha} \tag{9}$$

имеет порядок (p,q) и принадлежит к нормальному типу. Следовательно, оператор K является также нётеровым в пространствах

$$K_{p,q} : C^{\alpha}_{p,q} \longrightarrow \tilde{F}_1^{-1} \tilde{G}_1^{-1} \dots \tilde{F}_k^{-1} \tilde{G}_n^{-1} C^{0,\alpha}. \tag{10}$$

Кроме того, так как канонический оператор при $k,n > 1$ является двусторонне приводимым, то оператор K, удовлетворяющий условию (k,n), является также оператором, двусторонне приводимым к оператору нормального типа, т.е. существуют операторы вида (12) и (20) § 3 такие, что, скажем, оператор

$$\tilde{G}_{n_2} \tilde{F}_{k_2} \dots \tilde{G}_1 \tilde{F}_1 (K_{p,q} F_1 G_1 \dots F_{k_1} G_{n_1}) : C^{\alpha}_{p+k_1, q+n_1} \longrightarrow C^{\alpha}_{k_1, n_1} \tag{11}$$

имеет порядок (p,q) и принадлежит к нормальному типу, причем $k_1+k_2=k$, $n_1+n_2=n$. Откуда следует, что оператор K является нётеровым также в пространствах

$$K_{p,q}: F_1 G_1 \dots F_{k_1} G_{n_1} C^{\infty}_{p+k_1,q+n_1} \longrightarrow \tilde{F}_1^{-1} \tilde{G}_1^{-1} \dots \tilde{F}_{k_2}^{-1} \tilde{G}_{n_2}^{-1} C^{\infty}_{k_1,n_1} . \qquad (12)$$

Отметим, что условия (k,n)-приводимости слева отличаются от сформулированных выше условий (k,n)-приводимости справа тем, что они учитывают соотношения между строками матриц S_{p-i} и D_{q-j}. Условие (k,n)-двусторонней приводимости учитывает соотношения как между столбцами, так и между строками этих матриц. При этом матрицы S_p^i и D_q^j, участвующие в определении условия (k,n), различны при разных способах приведения, однако ранги их не зависят от конкретного способа приведения системы, ибо они выражаются через порядки ненулевых миноров в каноническом представлении (1) оператора K, которые определяются однозначно.

Кроме того, в силу теоремы 1 § 3 индекс системы, удовлетворяющей условию (k,n), не зависит от конкретного способа приведения оператора K к нормальному типу.

Вернемся к определению 2 § 3, которое задает класс операторов, приводимых к оператору нормального типа конечной цепочкой операторов вида (12) и (20) § 3. В этом определении требование постоянства ранга символических матриц оператора K, а также операторов, получаемых на каждом шаге приводимости, обеспечивает возможность удлинить цепочку операторов. Если символическая матрица, скажем, $S_p(t)$ оператора K имеет переменный ранг $r_0(t) \leq r < \ell$, то легко убедиться на примерах, что построение гладкой $(\ell \times \ell - r)$-матрицы $X(t)$, удовлетворяющей условиям леммы § 3, а следовательно, и оператора F в общем случае невозможно. Существуют, однако, операторы K с матрицами $S_p(t)$ и $D_q(t)$ переменных рангов, которые имеют конечную цепочку операторов вида (12) и (20) § 3, приводящую их к операторам порядка (p,q) нормального типа. Покажем это на примерах. Пусть задан оператор

$$K\omega = S_p \lambda_+^p \omega + S_{p-1} \lambda_+^{p-1} \omega + I_{2r} \lambda_-^q \omega, \qquad (13)$$

где матрицы $S_{p-m}(t), m=0,1$, порядка $\ell = 2r$, каждую из которых мы разобьем на 4 блока S^{ij}_{p-m}, $i,j = 1,2$, отделяя половину строк и столбцов, имеют вид:

$$S_p = \begin{pmatrix} S_p^{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{p-1} = \begin{pmatrix} S_{p-1}^{11} & S_{p-1}^{12} \\ S_{p-1}^{21} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

причем ненулевая $(r \times r)$-матрица S_p^{11} произвольна, а матрицы S_{p-1}^{12} и S_{p-1}^{21} невырожденны всюду на Γ.

Тогда оператор (13) (2,0)-приводим к оператору порядка (p,q) нормального типа. Причем если его приводить с двух сторон, то операторы F_1 и $\tilde{F}_1$ у него совпадают с оператором (5) § 3, $F_1 = \tilde{F}_1 = F$. Символические матрицы операторов $K^1 = KF$ и $K^2 = FKF$, согласно формулам композиции (16)-(18) § 1, равны

$$S_p^1(t)=\begin{pmatrix} S_p^{11} & -tS_{p-1}^{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad S_p^2(t)=\begin{pmatrix} S_p^{11} & -tS_{p-1}^{12} \\ -tS_{p-1}^{21} & 0 \end{pmatrix},\quad D_q^1=D_q^2=I_{2r},$$

причем матрица S_p^1 имеет постоянный ранг, а S_p^2 невырожденна всюду на Γ. Оператор (13) можно привести к нормальному типу также справа. Тогда если оператор F_2 взять в виде

$$F_2=AFA^{-1},\quad A(t)=\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & (tS_{p-1}^{12})^{-1} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

то символические матрицы оператора $\widetilde{K}^2=KF_1F_2$ равны

$$\widetilde{S}_p^2(t)=\begin{pmatrix} -tS_{p-1}^{12} & -tS_{p-1}^{11}+ptS_{p-1}^{12}\frac{d}{dt}(S_{p-1}^{12})^{-1} \\ 0 & -tS_{p-1}^{21} \end{pmatrix},\quad \widetilde{D}_q^2=I_{2r}.$$

Отметим, что определители матриц S_p^2 и $\widetilde{S}_p^2$ целиком определяются матрицей S_{p-1} и не зависят от S_p^{11}. Рассмотрим еще оператор

$$K_1\omega=\sum_{j=0}^{2} S_{p-j}\lambda_+^{p-j}\omega+I_\ell\lambda_-^q\omega, \tag{16}$$

матрицы S_p и S_{p-1}которого снова имеют вид (14) и таковы, что $(2r\times 2r)$-матрица

$$S(t)=\begin{pmatrix} S_p^{11} & S_{p-1}^{12} \\ S_{p-1}^{21} & S_{p-2}^{22} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

составленная из блоков матриц (14) и S_{p-2}, невырожденна всюду на Γ, а каждый из блоков имеет переменный ранг.

Легко убедиться, что оператор (16) с помощью тех же операторов (5) §3 и (15) приводится к нормальному типу, т.е. операторы K_1FF_2 и FK_1F имеют порядок (p,q) и нормальный тип, причем матрица S_p^2 оператора FK_1F отличается от матрицы S лишь множителем $-t$ в последних r строках и столбцах.

Выше мы показали, что оператор $K_{p,q}$ (1,0)-приводим к нормальному типу тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию (1,0) и, в частности, его символическая матрица $S_p(t)$ имеет постоянный ранг. Для операторов, (2,0)-приводимых к нормальному типу, это уже не так, как показывают примеры (13) и (16).

Таким образом, если определение 2 распространить на операторы с символическими матрицами переменных рангов и, кроме того, допустить, что символические матрицы композиций оператора $K_{p,q}$ с операторами цепочки $F_1,G_1,\dots,F_k,G_k$ также могут иметь переменные ранги, то класс операторов, (k,n)-приводимых

справа к оператору порядка (p,q) нормального типа, шире класса операторов, удовлетворяющих условию (k,n). При определении приводимости конкретного оператора K к нормальному типу мы поступаем аналогично предыдущему. При этом либо уравнение (9) § 3 имеет гладкое решение $X(t)$ ранга $l-r$ (и тогда оператор (14) можно построить), либо такого решения не существует и, следовательно, оператор K не является приводимым к нормальному типу.

Теоремы 1–4 § 3 остаются справедливыми для операторов $K_{p,q}$ с символическими матрицами переменных рангов, (k,n)-приводимых справа к оператору порядка (p,q) нормального типа, так как при доказательстве этих теорем мы использовали приводимость оператора $K_{p,q}$ к нормальному типу и однозначную обратимость операторов (12) и (20) § 3.

В заключение этого параграфа в классе операторов, приводимых к нормальному типу, мы выделим подкласс операторов, для которых цепочка операторов (12) и (20) § 3 определяется элементарно, а сами они имеют простейший вид (5) § 3.

Матричные операторы мы будем рассматривать теперь поэлементно. Пусть $K=\{K^{ij}\}$, $i,j=1,\dots,l$, где K^{ij} – скалярный оператор порядка (p_{ij}, q_{ij}), $p_{ij}\leq p$, $q_{ij}\leq q$, с символическими функциями $S^{ij}_{p_{ij}}(t)$ и $D^{ij}_{q_{ij}}(t)$. Предположим, что существуют неотрицательные целые числа a_i, b_j и c_i, d_j такие, что порядки операторов K^{ij} не превосходят $p_{ij}\leq b_j-a_i$ и $q_{ij}\leq d_j-c_i$, и матрицы $S(t)$ и $D(t)$, составленные из коэффициентов $S^{ij}_{p_{ij}}(t)$ и $D^{ij}_{q_{ij}}(t)$ тех операторов, порядки которых равны $p_{ij}=b_j-a_i$ и $q_{ij}=d_j-c_i$, невырожденны всюду на Γ, т.е.

$$S(t)=\left\{S^{ij}_{b_j-a_i}(t)\right\},\quad D(t)=\left\{D^{ij}_{d_j-c_i}(t)\right\},\quad i,j=1,\dots,l, \tag{18}$$

причем

$$\det S(t)\neq 0,\quad \det D(t)\neq 0 \qquad \forall t\in\Gamma. \tag{19}$$

Тогда оператор

$$\tilde{K}\varphi=\begin{pmatrix} \lambda_{10}^{a_1}\lambda_{01}^{c_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{10}^{a_l}\lambda_{01}^{c_l}\end{pmatrix}K_{p,q}\begin{pmatrix} \lambda_{10}^{-b_1}\lambda_{01}^{-d_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{10}^{-b_l}\lambda_{01}^{-d_l}\end{pmatrix}\varphi \tag{20}$$

является сингулярным интегральным оператором нормального типа.

Действительно, в силу формул композиции (16) § 1 порядок оператора $\tilde{K}^{ij}$ равен (0,0), так как $a_i+p_{ij}-b_j=0$ и $c_i+q_{ij}-d_j=0$, т.е. $\tilde{K}$ – сингулярный интегральный оператор. Его символические матрицы $\tilde{S}_0$ и $\tilde{D}_0$ имеют вид

$$\tilde{S}_0=\left\{(-t)^{a_i-b_j}S^{ij}_{b_j-a_i}\right\},\quad \tilde{D}_0=\left\{t^{c_i-d_j}D^{ij}_{d_j-c_i}\right\}, \tag{21}$$

и так как определители матриц (21) выражаются через определители матриц (18) и $t\neq 0$ на Γ, то оператор (20) принадлежит к нормальному типу. Следовательно, для оператора, удовлетворяющего условию (19), имеют место аналоги теорем 1–5. В частности,

Т е о р е м а 2. Оператор K является нётеровым в пространствах

$$K: C^{\infty}_{b_1,d_1}\times\ldots\times C^{\infty}_{b_\ell,d_\ell}\longrightarrow C^{\infty}_{a_1,c_1}\times\ldots\times C^{\infty}_{a_\ell,c_\ell} \tag{22}$$

тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию (19).

Т е о р е м а 3. Индекс $\varkappa$ оператора K, удовлетворяющего условию (19), равен

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det D(t)}{\det S(t)}\right]_{\Gamma}+\sum_{j=1}^{\ell}(b_j-a_j+c_j-d_j). \tag{23}$$

П р и м е р ы. Легко видеть, что операторы (13) и (16) удовлетворяют условию (19) и числа $-a_i$, $-c_i$ и b_j, d_j, которые можно назвать порядками строк и столбцов оператора K относительно плюсовых и минусовых операторов и которые определяются, очевидно, с точностью до произвольных натуральных чисел, для них равны: $a_1=\ldots=a_z=0$, $a_{z+1}=\ldots=a_\ell=1$, $b_1=\ldots=b_z=p$, $b_{z+1}=\ldots=b_\ell=p-1$ при $p>0$ и $a_1=\ldots=a_z=1$, $a_{z+1}=\ldots=a_\ell=\varepsilon$, $b_1=\ldots=b_z=1$, $b_{z+1}=\ldots=b_\ell=0$ при $p=0$; далее, $c_1=\ldots=c_\ell=0$, $d_1=\ldots=d_\ell=q$, причем все числа мы выбрали минимальными.

Аналогично, легко убедиться, что оператор (1) также удовлетворяет условию (19). Отметим еще, что мы рассматривали операторы K с неотрицательными порядками. Аналогичные теоремы остаются верными для операторов, один или оба порядка которых отрицательны.

§ 5. Случай действительных уравнений

В некоторых случаях (см., например, работы [9, 10]) краевая задача для эллиптической системы дифференциальных уравнений редуцируется к системе действительных сингулярных интегральных или интегродифференциальных уравнений относительно действительного неизвестного вектора. Поэтому в этом параграфе мы докажем аналоги теорем Нётера для систем действительных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений нормального типа или приводимых к нормальному типу. Рассмотрим оператор

$$N\mu=2\operatorname{Re}K_p^+\cdot\mu=K_p^+\mu+\overline{K_p^+\bar\mu}=(K_p^++\overline{K_p^+})\mu, \tag{1}$$

где K_p^+ – "плюсовая" часть оператора (10) из § 1, т.е.

$$K_p^+\varphi=\sum_{j=0}^{p+M}S_{p-j}(t_0)\lambda_+^{p-j}\varphi+R_{M,\infty}\varphi, \tag{2}$$

а $R_{M,\infty}$ — оператор (3) из § 1; в котором $k_2 \equiv 0$, а $k_1(t,t_0)$ имеет при $t=t_0$ нуль порядка $\geqslant M$.

Покажем, что оператор $\overline{K_p^+}$ является "минусовым" оператором порядка p, т.е.

$$\overline{K_p^+\overline{\varphi}} = K_p^- \varphi, \tag{3}$$

и, следовательно, составляет "минусовую" часть оператора (1). Действительно, легко убедиться, что

$$\overline{\lambda_+^0\overline{\varphi}} = \lambda_-^0\varphi + R_\infty\varphi, \tag{4}$$

где

$$R_\infty\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{t'(s)}{\frac{t-t_0}{s-s_0}} - \frac{\overline{t}'(s)}{\frac{\overline{t}-\overline{t}_0}{s-s_0}}\right)\varphi\frac{ds}{s-s_0}. \tag{5}$$

Ядро оператора (5) бесконечно дифференцируемо по s и s_0. Действительно, $t(s)\in C^\infty[0,\gamma]$, и при $s\to s_0$, раскрывая неопределенность ядра, мы можем его выразить через первые и вторые производные от $t(s)$ и $\overline{t}(s)$.

Так как $|t'(s)|=1$ и

$$\frac{d}{d\overline{t}} = \overline{t}'(s)\frac{d}{ds} = \frac{dt}{d\overline{t}}\frac{d}{dt} = t'^2(s)\frac{d}{dt}, \tag{6}$$

то, дифференцируя формулу (4), имеем

$$\overline{\lambda_+^1\varphi} = \frac{d}{d\overline{t}_0}\overline{\lambda_+^0\varphi} = \frac{dt_0}{d\overline{t}_0}\lambda_-^1\varphi + \frac{d}{d\overline{t}}R_\infty\varphi = t'^2(s_0)\lambda_-^1\varphi + R_\infty^1\varphi, \tag{7}$$

где ядро оператора R_∞^1 принадлежит классу C^∞. При $n>1$ имеем $\lambda_+^n\varphi = \frac{d}{dt_0}\lambda_+^{n-1}$, поэтому, дифференцируя последовательно $n-1$ раз формулу (7) и используя (6), получаем

$$\overline{\lambda_+^n}\varphi = t'^2(s_0)\frac{d}{dt}\left(t'^2(s_0)\frac{d}{dt_0}\left(\ldots\left(t'^2(s_0)\lambda_-^1\varphi\right)\ldots\right) + R_\infty\varphi = \right.$$

$$= t'^{2n}(s_0)\lambda_-^n\varphi + \ldots + R_\infty^n\varphi, \tag{8}$$

т.е. оператор $\overline{\lambda_+^n}$ линейно выразится через операторы $\lambda_-^n,\ldots,\lambda_-^1$ и оператор R_∞^n с бесконечно дифференцируемым ядром.

Переходя к операторам отрицательного порядка, напомним, что $\ln(1-t_0/t)$ определен однозначно для всех $t_0, t\in\Gamma, t\neq t_0$, и если мы условимся аргументы всех функций выбирать в интервале $(-\pi,\pi]$, то разность

$$\overline{\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right)} - \ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right) = \ln\left|\frac{t_0}{t}\right| - 2i\arg\frac{t-t_0}{s-s_0} + i\arg t\cdot t_0 + 2k\pi i, \tag{9}$$

где k — вполне определенное целое число.

Разность (9) непрерывна на Γ, так как она имеет пределы при $s\to s_0$, и, кроме того, если при фиксированном $t_0\in\Gamma$ точка t делает обход контура Γ один

раз в положительном направлении, начиная с t_0, то хотя аргументы векторов $t-t_0$ и t получают приращение π и 2π соответственно, суммарное приращение функции (9) равно нулю. Так как $\Gamma \in C^{\infty}$, то разность (9) также бесконечно дифференцируема по t_0 и $t \in \Gamma$.

Преобразуя интеграл $\overline{\lambda_+^{-n}}$ при $n>1$, в силу формулы (9), имеем

$$\overline{\lambda_+^{-n}}\varphi = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right)\left[\left(\frac{\bar t-\bar t_0}{t-t_0}\right)\frac{d\bar t}{dt}\right]^{n-1}\varphi(t)dt+\widetilde{R}^n_\infty\varphi =$$
$$= t'(s_0)^{-2n}\lambda_-^{-n}\varphi+\ldots+\widetilde{R}^n_\infty\varphi, \tag{10}$$

где коэффициенты при операторах λ_-^{-n}, $\lambda_-^{-n-1}, \ldots$ можно получить, разлагая функцию, заключенную в квадратные скобки, по формуле Тейлора в точке t_0, а ядро оператора $\widetilde{R}^n_\infty$ принадлежит классу C^∞.

Используя формулу (9), легко убедиться также, что

$$\overline{R}_{M,\infty}\varphi = R_{\infty,M}\varphi, \tag{11}$$

где $R_{\infty,M}$ - оператор вида (3) из § 1, у которого ядро $k_1 = 0$, а $k_2(t,t_0)$ имеет при $t=t_0$ нуль порядка $\geq M$. Итак, равенство (3) полностью доказано.

Предположим теперь, что

$$\det S_p(t) \neq 0 \quad \forall t \in \Gamma. \tag{12}$$

Тогда оператор (1) имеет порядок p по каждому виду операторов, причем ввиду равенства (8) матрица D_p оператора λ_-^p равна

$$D_p(t) = t'^{2p}\,\overline{S_p(t)}. \tag{13}$$

Таким образом, при условии (12) оператор (1) принадлежит к нормальному типу, и в силу результатов § 2 для него справедливы теоремы 1-5 § 2. В частности, однородное уравнение $N\varphi = 0$ имеет конечное число линейно-независимых комплексных решений $\varphi = \mu + i\nu$, причем реальная и мнимая части φ также являются решениями этого уравнения. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_m$ - полная система линейно-независимых действительных решений уравнения

$$N\mu = 0. \tag{14}$$

Тогда любое действительное, а следовательно, и комплексное решение φ уравнения (14) представляется в виде линейной комбинации: $\varphi = a_1\mu_1 + \ldots + a_m\mu_m$ решений этой системы с действительными или комплексными коэффициентами a_j. Итак, $\mu_1, \ldots, \mu_m$ образуют базис в пространстве всех решений уравнения (14). Следовательно, размерность линейного пространства действительных решений уравнения (14) над полем R действительных чисел равна размерности пространства комплексных решений над полем C комплексных чисел. Наряду с союзным оператором N' рассмотрим также сопряженный оператор N^*, определяемый из интегрального равенства

$$\int_\Gamma \nu \cdot N\mu\, ds = \int_\Gamma \mu N^*\nu\, ds, \tag{15}$$

где μ и ν — произвольные действительные вектор-функции класса $C^{p,\alpha}$.

Легко убедиться, что сопряженный и союзный операторы связаны между собой следующим образом:

$$N^*\nu = t'(s_0)N'(\bar{t}'(s)\nu(s)). \tag{16}$$

Из этого равенства вытекает соответствие между решениями союзного однородного и сопряженного однородного уравнений. Если ψ есть решение уравнения $N'\psi=0$, то вектор-функция $\sigma=t'\cdot\psi$ является решением уравнения $N^*\sigma=0$, и обратно. Так как, по теореме 1 § 2, нуль-пространство союзного оператора N' конечномерно, то нуль-пространство сопряженного оператора N^* также конечномерно и в силу действительности N^* имеет базис, состоящий из действительных векторов $\nu_1,\dots,\nu_{m'}$.

Из этого соответствия и теоремы 2 § 2, с учетом того, что

$$\int_\Gamma g\varphi dt = \int_\Gamma g\, t'(s)\varphi ds,$$

также следует, что необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения

$$N\mu = g, \quad g \in C^{0,\alpha}, \tag{17}$$

является ортогональность правой части к фундаментальной системе решений однородного сопряженного уравнения $N^*\nu = 0$, т.е.

$$\int_\Gamma g\nu_j ds = 0, \quad j=1,\dots,m'. \tag{18}$$

Таким образом, в предположении (12), теоремы 1, 2 § 2 остаются в силе для действительного уравнения (17) и в том случае, если ограничиться решениями в действительной области, а вместо союзного оператора использовать сопряженный оператор N^*, который также является действительным оператором.

Далее, используя формулу (13), легко подсчитать индекс $\varkappa_1 = m - m'$ оператора (1) нормального типа в комплексной области

$$\varkappa_1 = 2p\ell - \frac{1}{\pi}\left[\arg\det S_p(t)\right]_\Gamma. \tag{19}$$

Как мы показали, индекс $\varkappa_1$ не изменится, если мы ограничимся действительными решениями уравнения (17) при действительной правой части g. Итак, мы приходим к следующему утверждению.

Т е о р е м а 1. Индекс оператора (1) порядка p нормального типа вычисляется по формуле (19).

Пусть μ — действительная функция класса $C^{\alpha}_{p,q}$, $p,q \geq 0$, тогда $\mu \in C^{\rho,\alpha}$, где $\rho = max(p,q)$. Действительно, из формул (4) и (5) имеем

$$\mu = \lambda_+^0\mu + \lambda_-^0\mu = 2Re(\lambda_+^0\mu) - R_\infty\mu = 2Re(\lambda_-^0\mu) - R_\infty\mu. \tag{20}$$

Так как, по предположению, $\lambda_+^0\mu \in C^{p,\alpha}$, $\lambda_-^0\mu \in C^{q,\alpha}$ и $\mu \in C^{0,\alpha}$, то $R_\infty\mu \in C^\infty$,

и, в силу (20), $\mu \in C^{p,\alpha} \cap C^{q,\alpha}$, что и требовалось доказать. Следовательно, аналогом теоремы 4 § 2 является

Т е о р е м а 2. Если $g \in C^{M,\alpha}$ и удовлетворяет условиям (18) разрешимости системы (17), то любое ее решение μ класса $C^{p,\alpha}$ принадлежит классу $C^{p+M,\alpha}$.

Аналогом теоремы 5 § 2 является

Т е о р е м а 3. Оператор (1) порядка p нётеров в пространствах

$$N_p : C^{p,\alpha} \to C^{0,\alpha} \tag{21}$$

тогда и только тогда, когда он принадлежит к нормальному типу, т.е. удовлетворяет условию (12).

Отметим, наконец, что подстановка $\mu = \lambda_{10}^{-p} \overline{\lambda_{10}^{-p}}\, \varphi$ приводит уравнение (17) к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению нормального типа.

Перейдем теперь к операторам (1), приводимым к нормальному типу. Пусть матрицы $S_p, S_{p-1}, \dots, S_{p-k}$ удовлетворяют условию k, сформулированному в определении 1 § 4, т.е. ранги матриц $S_p, S'_p, \dots, S^k_p$ постоянны всюду на Γ, причем матрица S^k_p имеет максимальный ранг, т.е.

$$\det S^k_p(t) \neq 0 \quad \forall t \in \Gamma. \tag{22}$$

Тогда определяются операторы $F_1, \dots, F_k$ вида (12) § 3 такие, что оператор $NF_1\overline{F}_1 \dots F_k \overline{F}_k$ имеет порядок p и принадлежит к нормальному типу.

Действительно, представление (13) § 3 показывает, что оператор F_1 является единичным относительно "минусовых" операторов. Тогда, в силу формул (3) и (4), оператор $\overline{F}_1$ является единичным относительно "плюсовых" операторов. Следовательно, учитывая, что композиция операторов "различных знаков" является оператором с бесконечно дифференцируемым ядром, получаем

$$NF_1\overline{F}_1 \dots F_k \overline{F}_k \varphi = K_p F_1 \dots F_k \varphi + \overline{K_p F_1 \dots F_k}\, \varphi + R^k_\infty \varphi, \tag{23}$$

где R^k_∞ – оператор с ядром класса C^∞. Из этой формулы, используя определение матриц $S^j_p(t)$ и формулу (18), получим, что оператор (23) имеет порядок p и его символические матрицы равны S^k_p и $t^{2p}\overline{S^k_p}$. Итак, в силу предположения (22), оператор (23) имеет порядок p и нормальный тип.

Как мы показали в § 4, может оказаться, что существует цепочка операторов $F_1, \dots, F_k$ таких, что оператор (23) принадлежит к нормальному типу, т.е. матрица S_p удовлетворяет условию (22), хотя некоторые из матриц $S_p(t), \dots, S^{k-1}_p(t)$ не имеют постоянных рангов. Такой оператор N назовем оператором, k-приводимым справа к нормальному типу.

Пусть оператор (1) k-приводим к нормальному типу. Тогда для него, как для комплексного оператора, в силу того, что оператор (23) имеет нормальный тип, выполняются теоремы 1–5 § 3. Следовательно, для действительного оператора N имеют место аналоги этих теорем, формулировку которых мы предоставляем читателю.

Наконец, рассмотрим операторы (1), удовлетворяющие условиям, аналогичным условиям (19) § 4. Матричный оператор K_p состоит из скалярных операторов K^{ij}, $i,j=1,\dots,\ell$, порядков p_{ij} с символическими функциями $S^{ij}_{p_{ij}}$. Пусть существуют неотрицательные целые числа a_i и b_j такие, что порядки операторов K^{ij} не превосходят b_j-a_i и матрица $S(t)$, составленная из коэффициентов тех операторов, порядки которых равны b_j-a_i, невырожденна всюду на Γ, т.е.

$$S(t)=\left\{S^{ij}_{b_j-a_i}(t)\right\},\quad i,j=1,\dots,\ell,\ \det S(t)\neq 0\quad \forall t\in\Gamma. \tag{24}$$

Тогда, используя операторы λ_{10} и $\overline{\lambda}_{10}$, оператор (1) легко привести к сингулярному интегральному оператору нормального типа вида (20) § 4, в котором λ_{01} следует заменить на $\overline{\lambda}_{10}$ и положить $c_i=a_i$, $d_j=b_j$.

Для оператора (1), удовлетворяющего условию (24), очевидно, выполняются следующие аналоги теорем 6 и 7 § 4.

Т е о р е м а 4. Оператор (1) нётеров в пространствах

$$N: C^{b_1,\alpha}\times\dots\times C^{b_\ell,\alpha}\longrightarrow C^{a_1,\alpha}\times\dots\times C^{a_\ell,\alpha} \tag{25}$$

тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию (24).

Т е о р е м а 5. Индекс $\varkappa_1$ оператора (1), удовлетворяющего условию (24), равен

$$\varkappa_1=2\sum_{j=1}^{\ell}(b_j-a_j)-\frac{1}{\pi}\left[\arg\det S(t)\right]_\Gamma. \tag{26}$$

Л и т е р а т у р а

1. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., ФМ., 1968, 512 с.
2. С а к с Р.С. Об одном классе сингулярных интегродифференциальных уравнений. – "Дифференц. уравнения", 1969, т.5, № 1, с.115–130.
3. Т о в м а с я н Н.Е. К теории сингулярных интегральных уравнений. – "Дифференц. уравнения", 1967, т.3, № 1, с.74–80.
4. Г о х б е р г И.Ц. и З а м б и ц к и й М.К. О нормально разрешимых операторах в пространствах с двумя нормами. – "Изв. АН МССР", 1964, № 6, с. 80–84.
5. С т и н р о д Н. Топология косых произведений. М., ИЛ., 1953.
6. В о л е в и ч Л.Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем. – "Матем.сб.", 1965, т.68, № 3, с.373–416.
7. В а й н б е р г Б.Р., Г р у ш и н В.В. О равномерно неэллиптических задачах. Ч.1. – "Матем. сб.", 1967, т. 72, № 4, с. 602–636.

8. В а й н б е р г Б.Р., Г р у ш и н В.В. О равномерно неэллиптических задачах. Ч.II. – "Матем. сб.", 1967, т. 73, № 1, с. 126–154.

9. С а к с Р.С. О задаче Дирихле для одного класса эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка. – "Дифференц. уравнения", 1970, т.6, № 1, с. 72–85.

10. Т о в м а с я н Н.Е. К теории общих линейных краевых задач для эллиптических систем. – "Сиб. мат. журн.", 1967, т.8, № 5, с. 1104–1123.