УДК 517.946

# О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМ ДЕФЕКТОМ

В. А. Солонников (Ленинград)

## § 1. Введение

Пусть $\mathcal{L}(x, \frac{\partial}{\partial x})$ – матричный дифференциальный оператор с элементами $\ell_{kj}(x, \frac{\partial}{\partial x})$, $k=1,\dots,p$, $j=1,\dots,m$, заданный в области $\Omega \subset R^n$ и удовлетворяющий следующим условиям:

1. Степень полинома $\ell_{kj}(x,\xi)$ относительно $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ не превосходит суммы $s_k+t_j$, где $\{s_k\}$ и $\{t_j\}$ – наборы целых чисел, таких, что $\max s_k=0$, $t_j>0$, причем $\ell_{kj}=0$ при $s_k+t_j<0$.

2. Полиномы $\ell^0_{kj}(x,\xi)$, составленные из всех слагаемых $\ell_{kj}(x,\xi)$ степени $s_k+t_j$, образуют матрицу $\mathcal{L}_0(x,\xi)$, ранг $s$ которой при всех $x\in\bar{\Omega}$ и $\xi\in R^n\setminus\{0\}$ постоянен и меньше $m$.

В этом случае мы будем называть оператор $\mathcal{L}$ оператором с постоянным дефектом $k=m-s$. Оператор $\mathcal{L}$, удовлетворяющий условиям 1), 2) при $s=m$, называется эллиптическим (при $p>m$ –переопределенным эллиптическим).

Примером оператора с постоянным дефектом является оператор внешнего дифференцирования; кроме того, такие операторы встречаются во многих задачах математической физики, описывающих распространение волн.

Операторы $\mathcal{L}$ с постоянным дефектом были введены в работах [1, 2], и для решений системы $\mathcal{L}u=f$ с постоянными коэффициентами, заданной во всем $R^n$, были получены коэрцитивные оценки на некотором подпространстве векторов $u(x)$.

Имеется ряд работ, посвященных и краевым задачам для неэллиптических систем, главным образом, для системы Максвелла и системы внешнего дифференцирования [3–5]. В этих работах рассматриваются общие краевые задачи для указанных систем и описываются подпространства функций, в которых эти задачи нётеровы. Особо следует отметить работу И. С. Гудович и С. Г.

Крейна [6] , в которой рассматриваются краевые задачи для весьма широкого класса систем с постоянными коэффициентами с помощью предложенного авторами метода ортогонального расширения исходной матрицы $\mathcal{L}$ до квадратной эллиптической матрицы $\tilde{\mathcal{L}}$. Нётеровы краевые задачи для исходной системы удается при этом описать, рассматривая нётеровы краевые задачи специального вида для расширенной эллиптической системы. Но метод ортогонального расширения строго обоснован лишь для указанных выше конкретных систем; для более общих систем в [6] имеются лишь условные результаты.

В работах Р.С.Сакса [7, 8] рассматриваются неэллиптические системы специальной структуры, эквивалентные переопределенным эллиптическим с согласованными правыми частями (например, неэллиптическая система $\mathrm{rot}\, u + \lambda u = f$ при $\lambda \neq 0$ эквивалентна системе $\mathrm{rot}\, u + \lambda u = f$, $\mathrm{div}\, u = -\lambda^{-1} \mathrm{div} f$), для таких систем формулируются нётеровы краевые задачи.

В настоящей работе рассматриваются операторы с постоянным дефектом при условии, что $t_1 = \ldots = t_m = t$. Доказывается (§ 4), что всякий такой оператор может быть продолжен до переопределенного эллиптического добавлением к матрице $\mathcal{L}$ некоторого числа строк, состоящих из миноров матрицы $\mathcal{L}_0$. Схема продолжения излагается в § 2 и 3. Там же подсчитываются определители всех квадратных матриц, которые можно составить из строк продолженной матрицы, что необходимо для подсчета числа краевых условий и формулировки условия дополнительности для операторов, посредством которых задаются краевые условия. Далее, в § 5, рассматриваются системы с постоянными коэффициентами при некоторых дополнительных ограничениях на матрицу $\mathcal{L}$. Для таких систем удается не только поставить краевую задачу, но и написать условие согласования, которым должны удовлетворять функции в правой части системы.

В настоящей работе используются результаты работ [9-11], посвященных переопределенным эллиптическим краевым задачам.

## § 2. О продолжении матриц

Пусть задана матрица $\mathcal{P}$ с $s$ строками и $m > s$ столбцами, элементы которой $p_{ij}$ $(i=1,\ldots,s,\ j=1,\ldots,m)$ мы сейчас будем считать комплексными числами. Пусть ранг $\mathcal{P}$ равен $s$. В этом и следующем параграфах будет дан способ дополнения матрицы $\mathcal{P}$ до матрицы $\mathfrak{P}$ размеров $M \times m$, $M > m$, ранг которой равен $m$. Этот способ удобен и в случае, когда $p_{ij}$ являются полиномами; в этом случае матрица $\mathfrak{P}$ тоже будет полиномиальной.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ – мультииндекс с целыми компонентами, удовлетворяющими условию $1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_s \leq m$, $k = m - s$ и $a = (a_1, \ldots, a_k)$, при-

чем числа $a_1,\dots,a_k$ дополняют $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ до $1,\dots,m$. Обозначим через $\mathcal{P}^\alpha$ квадратную матрицу размеров $s\times s$, составленную из столбцов матрицы $\mathcal{P}$ с номерами $\alpha_i$, и положим $P^\alpha = \det \mathcal{P}^\alpha$.

Предположим, что $P^\alpha \neq 0$, и построим квадратную матрицу $\mathcal{P}_\alpha$ размеров $m\times m$ следующим образом. В качестве первых $s$ строк матрицы $\mathcal{P}_\alpha$ возьмем строки матрицы $\mathcal{P}^\alpha$ и припишем к ним еще $k$ строк. Чтобы образовать $s+\ell$-ю строку, $1\le \ell\le k$, расположим числа $\alpha_1,\dots,\alpha_s, a_\ell$ в возрастающем порядке: $(\alpha_1,\dots,\alpha_{\tau-1},a_\ell,\alpha_\tau,\dots,\alpha_s)$ и подсчитаем алгебраические дополнения элементов последней строки матрицы:

$$\begin{pmatrix} p_{1\alpha_1} \cdots p_{1a_{\tau-1}} & p_{1a_\ell} & p_{1\alpha_\tau} \cdots p_{1\alpha_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{s\alpha_1} \cdots p_{s\alpha_{\tau-1}} & p_{sa_\ell} & p_{s\alpha_\tau} \cdots p_{s\alpha_s} \\ x_1 \ \dots \ x_{\tau-1} & x & x_\tau \ \dots \ x_s \end{pmatrix}.$$

Эти алгебраические дополнения $A(x_i)$ определяются формулами:

$$A(x_i) = \begin{cases} (-1)^{s+1+i} p^{(\alpha_1\dots\alpha_{i-1}\alpha_{i+1}\dots\alpha_{\tau-1}a_\ell\alpha_\tau\dots\alpha_s)}, & i<\tau, \\ (-1)^{s+i}\, p^{(\alpha_1\dots\alpha_{\tau-1}a_\ell\alpha_\tau\dots\alpha_{i-1}\alpha_{i+1}\dots\alpha_s)}, & i\ge\tau, \end{cases}$$

$$A(x) = (-1)^{s+1+\tau} p^\alpha.$$

Положим теперь, что

$$q_{\ell j} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq (\alpha_1,\dots,\alpha_s,a_\ell), \\ A(x_i), & \text{если } j=\alpha_i, \\ A(x), & \text{если } j=a_\ell. \end{cases}$$

Определенные таким образом числа образуют матрицу $Q_\alpha$ размеров $k\times m$, и мы полагаем

$$\mathcal{P}_\alpha = \begin{pmatrix} \mathcal{P} \\ \overline{Q}_\alpha \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы $\overline{Q}_\alpha$ с элементами $\overline{q}_{\ell j}$ ортогональны строкам матрицы $\mathcal{P}$ в пространстве $C^m$ и линейно независимы, так как столбцы матрицы $Q_\alpha$ с номерами $a_\ell$ образуют диагональную матрицу с элементами $(-1)^{s+1+\tau_\ell} p^\alpha$ на главной диагонали (число $\tau_\ell$ определяется местом $a_\ell$ в ряду чисел $(\alpha_1,\dots,\alpha_s,a_\ell)$, если их расположить в возрастающем порядке, как указано выше). Поэтому $\det \mathcal{P}_\alpha \neq 0$. Нашей задачей является вычисление $\det \mathcal{P}_\alpha$ и взаимной матрицы $\hat{\mathcal{P}}_\alpha$ через элементы матрицы $\mathcal{P}$.

Рассмотрим сначала для простоты случай $\alpha_i = \alpha_i^0 = i$ и положим $p^{\alpha^0} = p$. Тогда

$$\mathcal{P}_{\alpha^0} = \begin{pmatrix} p_{11} \cdots p_{1s}\, p_{1s+1} \cdots p_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{s1} \cdots p_{ss}\, p_{ss+1} \cdots p_{sm} \\ \bar{q}_{11} \cdots \bar{q}_{1s}\, \bar{p} \quad \cdots\ 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{q}_{k1} \cdots \bar{q}_{ks}\ 0 \ \cdots\ \bar{p} \end{pmatrix},$$

где $q_{ij} = (-1)^{s+i+j}\, p^{(1\ldots j-1\, j+1 \ldots ss+i)}$, $i=1,\ldots,k$, $j=1,\ldots,s$.

Подсчитаем определитель матрицы $\mathcal{P}_{\alpha^0}$, разлагая его с помощью теоремы Лапласа по первым $s$ строкам:

$$\det \mathcal{P}_{\alpha^0} = \sum_{\gamma} (-1)^{1+\ldots+s+\gamma_1+\ldots+\gamma_s}\, p^{\gamma}\, \bar{D}^{j}. \tag{2.1}$$

Здесь $j=(j_1,\ldots,j_k)$, причем $(j_1,\ldots,j_n)$ – числа, дополняющие $(i_1,\ldots,i_s)$ до $(1,\ldots,m)$, а через $D^j$ обозначен определитель квадратной матрицы, составленной из столбцов матрицы

$$Q_{\alpha^0} = \begin{pmatrix} q_{11} \cdots q_{1s}\ p \ldots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{k1} \cdots q_{ks}\ 0 \ldots p \end{pmatrix}$$

с номерами $j_1 \ldots j_k$. Под $\sum_{\gamma}$ здесь и ниже понимается $\sum_{1\le\gamma_1<\ldots<\gamma_s\le m}$.

Для выяснения связи между $D^j$ и $p^{\gamma}$ рассмотрим матрицу

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} -p \ldots 0\ q_{11} \cdots q_{k1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \ \ldots -p\ q_{1s} \cdots q_{ks} \\ \bar{q}_{11} \ldots \bar{q}_{1s}\, \bar{p} \ldots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{q}_{k1} \ldots \bar{q}_{ks}\, 0 \ldots \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q'_{\alpha^0} \\ \bar{Q}_{\alpha^0} \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы $Q'_{\alpha^0}$, как и строки матрицы $\mathcal{P}$, ортогональны строкам матрицы $Q_{\alpha^0}$ и линейно независимы. Поэтому строки этих матриц определяют одно и то же $s$-мерное подпространство в $C^m$, и существует такая матрица $A$ размеров $s\times s$, что $\mathcal{P} = AQ'_{\alpha^0}$. Отбрасывая в этом соотношении столбцы матриц $\mathcal{P}$ и $Q'_{\alpha^0}$ с номерами $s+1,\ldots,m$, получаем $\mathcal{P}^{\alpha^0} = -pA$, так что

$$\mathcal{P} = -p^{-1}\mathcal{P}^{\alpha^0} Q'_{\alpha^0} \tag{2.2}$$

и, следовательно,

$$p^{\gamma} = (-1)^{s}\, p^{-s+1}\, D'^{\gamma}, \tag{2.3}$$

где $D'^{\gamma}$ – определитель матрицы, составленной из столбцов матрицы $Q'_{\alpha^0}$ с номерами $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$. Сравним $D'^{\gamma}$ и $D^j$. Пусть $\gamma_1<\ldots<\gamma_p\le s<\gamma_{p+1}<\ldots$ $\ldots<\gamma_s$, $j_1<\ldots<j_{s-p}\le s<j_{s-p+1}<\ldots<j_k$, так что числа $j_1,\ldots,j_{s-p}$ дополняют $i_1,\ldots,i_p$ до $1,\ldots,s$, а $j_{s-p+1},\ldots,j_k$ дополняют $\gamma_{p+1},\ldots,\gamma_s$ до $s+1,\ldots,m$.

Воспользуемся для вычисления $D'^{\gamma}$ и $D^{j}$ теоремой Лапласа, разлагая эти определители соответственно по первым $p$ и последним $k-s+p$ столбцам. Это даст

$$D'^{\gamma}=(-1)^{1+\ldots+p+\gamma_1+\ldots+\gamma_p}(-p)^p\det\begin{pmatrix} q_{\gamma_{p+1}-s,j_1}, & \ldots, & q_{\gamma_s-s,j_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{\gamma_{p+1}-s,j_{s-p}}, & \ldots, & q_{\gamma_s-s,j_{s-p}} \end{pmatrix},$$

$$D^{j}=(-1)^{(s-p+1)+\ldots+k+(j_{s-p+1}-s)+\ldots+(j_k-s)}p^{k-s+p}\det\begin{pmatrix} q_{\gamma_{p+1}-s,j_1}, & \ldots, & q_{\gamma_{p+1}-s,j_{s-p}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{\gamma_s-s,j_1}, & \ldots, & q_{\gamma_s-s,j_{s-p}} \end{pmatrix},$$

откуда

$$D'^{\gamma}=(-1)^{1+\ldots+(p-1)+\gamma_1+\ldots+\gamma_p+(s-p+1)+\ldots+k+(j_{s-p+1}-s)+\ldots+(j_k-s)}p^{s-k}D^{j}=$$

$$=(-1)^{1+\ldots+(s-1)+\gamma_1+\ldots+\gamma_s}p^{-k+s}D^{j}.$$

Учитывая (2.3), приходим к формуле

$$p^{\gamma}=(-1)^{1+\ldots+s+\gamma_1+\ldots+\gamma_s}p^{-k+1}D^{j}, \tag{2.4}$$

связывающей $p^{\gamma}$ и $D^{j}$. Из этой формулы и из (2.1) следует, что

$$\det \mathcal{P}_{\alpha^0}=\bar{p}^{k-1}\sum_{\gamma}|p^{\gamma}|^2. \tag{2.5}$$

Получим аналогичную формулу для $\det\mathcal{P}_{\alpha}$. Для этого переставим столбцы матрицы $\mathcal{P}_{\alpha}$ с номерами $\alpha_i$ на первые $s$ мест (для этого потребуется $(\alpha_1-1)+(\alpha_2-2)+\ldots+(\alpha_s-s)$ транспозиций) и умножим $s+\ell$ -ю строку на $(-1)^{s+1+\tau_\ell}$. Нетрудно проверить, что полученная таким образом матрица будет иметь такую же структуру, как $\mathcal{P}_{\alpha^0}$, и ее определитель будет равен $(\bar{p}^{\alpha})^{k-1}\sum_{\gamma}|p^{\gamma}|^2$, а значит,

$$\det\mathcal{P}_{\alpha}=(-1)^{(\alpha_1-1)+\ldots+(\alpha_s-s)+k(s+1)+\sum_{\ell=1}^{k}\tau_\ell}(\bar{p}^{\alpha})^{k-1}\sum_{\gamma}|p^{\gamma}|^2.$$

Но так как $\tau_\ell$ – это место числа $a_\ell$ в упорядоченном ряду чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_s,a_\ell$ то $\tau_\ell=1$ – для $\alpha_1-1$ чисел $a_1,\ldots,a_k$, $\tau_\ell=2$ – для $\alpha_2-\alpha_1-1$ чисел и т.д., наконец, $\tau_\ell=s+1$ – для $m-\alpha_s$ чисел $a_1,\ldots,a_k$. Поэтому

$$\sum_{\ell=1}^{k}\tau_\ell=(\alpha_1-1)+2(\alpha_2-\alpha_1-1)+\ldots+s(\alpha_s-\alpha_{s-1}-1)+$$

$$+(s+1)(m-\alpha_s)=-(1+2+\ldots+s+\alpha_1+\ldots+\alpha_s)+(s+1)m,$$

откуда легко получается желаемая формула

$$\det\mathcal{P}_{\alpha}=(\bar{p}^{\alpha})^{k-1}\sum_{\gamma}|p^{\gamma}|^2. \tag{2.6}$$

Прежде чем вычислять взаимную матрицу $\hat{\mathcal{P}}_\alpha$, докажем, что для любой матрицы $\mathcal{P}_\alpha$ справедлива формула (2.4), т.е.

$$D_\alpha^j = (-1)^{1+\ldots+s+\gamma_1+\ldots+\gamma_s} (p^\alpha)^{k-1} p^\gamma . \tag{2.7}$$

Здесь, как и выше, $j_1,\ldots,j_k$ – числа, дополняющие $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$ до $1,\ldots,m$, а через $D_\alpha^j$ обозначен определитель матрицы, составленной из столбцов матрицы $Q_\alpha$ с номерами $j_1,\ldots,j_k$. Можно доказать формулу (2.7), переставляя, как выше, столбцы матрицы $\mathcal{P}_\alpha$, однако проще рассуждать следующим образом. При $P^\alpha \neq 0$ и $P \neq 0$ строки матриц $Q_\alpha$ и $Q_{\alpha 0}$ образуют одно и то же подпространство пространства $C^m$. Поэтому, рассуждая, как при доказательстве (2.2), можно показать, что

$$Q_\alpha = \frac{1}{p} Q_\alpha^{(s+1,\ldots,m)} Q_{\alpha 0},$$

где $Q_\alpha^{(s+1,\ldots,m)}$ – матрица, составленная столбцами матрицы $Q_\alpha$ с номерами $(s+1,\ldots,m)$. Следовательно, $D_\alpha^j = P^{-k} D_\alpha^{s+1,\ldots,m} D^j$. Эта формула показывает, что отношение $D_\alpha^j / D^j$ не зависит от $j_1,\ldots,j_k$. Поэтому

$$D_\alpha^j = D_\alpha^a \frac{D^j}{D^a} = (-1)^{1+\ldots+s+\alpha_1+\ldots+\alpha_s} (p^\alpha)^k \frac{(-1)^{\gamma_1+\ldots+\gamma_s}}{(-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_s}} \frac{p^\gamma}{p^\alpha} =$$

$$= (-1)^{1+\ldots+s+\gamma_1+\ldots+\gamma_s} (p^\alpha)^{k-1} p^\gamma, \tag{2.8}$$

что и требовалось.

Переходим к вычислению миноров $\Delta_\alpha^{ij} = \det \mathcal{P}_\alpha^{ij}$, где $\mathcal{P}_\alpha^{ij}$ – матрицы, получаемые в результате вычеркивания $i$-й строки и $j$-го столбца матрицы $\mathcal{P}_\alpha$. В силу теоремы Лапласа, при $i \leq s$

$$\Delta_\alpha^{ij} = \sum_{1 \leq \eta_1 < \ldots < \eta_{s-1} \leq m-1} (-1)^{1+\ldots+(s-1)+\eta_1+\ldots+\eta_{s-1}} \tilde{P}_i^\eta \tilde{D}^{\tilde{j}}, \tag{2.9}$$

где $\tilde{P}_i^\eta$, $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_{s-1})$,– определители матриц, состоящих из столбцов с номерами $\eta_1,\ldots,\eta_{s-1}$ матрицы, полученной из $\mathcal{P}$ вычеркиванием $i$-й строки, а $\tilde{D}^{\tilde{j}}$, $\tilde{j} = (\tilde{j}_1,\ldots,\tilde{j}_k)$,– дополнительные к $\tilde{P}_i^\eta$ миноры матрицы $\mathcal{P}_\alpha^{ij}$. Выразим все эти миноры через элементы матрицы $\mathcal{P}$. Рассмотрим столбцы матрицы $\mathcal{P}_\alpha^{ij}$ с номерами $\eta_1,\ldots,\eta_{s-1}$; пусть $\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1}$ – номера этих столбцов в матрице $\mathcal{P}_\alpha$. Очевидно, что

$$\eta_e = \begin{cases} \gamma_e, & \text{если } \gamma_e < j, \\ \gamma_e - 1, & \text{если } \gamma_e > j, \end{cases}$$

и что $\tilde{P}_i^\eta = P_i^\gamma$ – определители матриц, составленных из $\gamma_1$-го, ..., $\gamma_{s-1}$-го столбцов матрицы $\mathcal{P}$ с вычеркнутой $i$-й строкой. Кроме того, $\tilde{D}^{\tilde{j}} = \tilde{D}_\alpha^{\hat{j}}$,

$\hat{j}=(j_1,\dots,j_k)$, где $j_1,\dots,j_k$ - числа, дополняющие $\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1},j$ до $1,\dots,m$. Поэтому (29) можно записать в виде

$$\Delta_\alpha^{ij}\sum_{\substack{1\le\gamma_1<\dots<\gamma_{s-1}\le m\\ \gamma_k\ne j}}(-1)^{1+\dots+(s-1)+\gamma_1+\dots+\gamma_{s-1}-\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1},j)}P_i^\gamma\bar{D}_\alpha^{\hat{j}},\qquad(2.10)$$

где $\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1},j)$ определяется как число компонент $\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1}$, превосходящих $j$ : $\gamma_1<\dots<\gamma_{s-\mu-1}<j<\gamma_{s-\mu}<\dots<\gamma_{s-1}$. Из (2.7) и (2.10) следует

$$\Delta_\alpha^{ij}=(-1)^{s+j}\sum_{\substack{1\le\gamma_1<\dots<\gamma_{s-1}\le m\\ \gamma_\ell\ne j}}(-1)^{\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1},j)}P_i^\gamma\,\bar{P}^{\gamma_1\dots\gamma_{s-\mu-1}j\gamma_{s-\mu}\dots\gamma_{s-1}}(\bar{P}^\alpha)^{k-1}.$$

Если переставить столбцы в определителе $P^{\gamma_1\dots\gamma_{s-\mu-1}j\gamma_{s-\mu}\dots\gamma_{s-1}}$, то последнюю формулу можно записать в следующей симметричной форме:

$$\Delta_\alpha^{ij}=(-1)^{s+j}(\bar{P}^\alpha)^{k-1}\sum_{\substack{1\le\gamma_1<\dots<\gamma_{s-1}<m\\ \gamma_\ell\ne j}}P_i^{(\gamma_1\dots\gamma_{s-1})}\bar{P}^{(\gamma_1\dots\gamma_{s-1}j)}.\qquad(2.11)$$

Нужно только помнить, что столбцы в определителе $P^{(\gamma_1\dots\gamma_{s-1}j)}$ расположены в том же порядке, что и верхние индексы.

Рассмотрим теперь случай $i>s$. Если $i=s+\ell$, $1\le\ell\le k$, то

$$\Delta_\alpha^{ij}=\sum_{\gamma;\gamma_p\ne j}(-1)^{1+\dots+s+\gamma_1+\dots+\gamma_s-\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_s;j)}P^\gamma\bar{D}_{\alpha,\ell}^{(j_1\dots j_{k-1})},\qquad(2.12)$$

где $j_1,\dots,j_{k-1}$ - числа, дополняющие $\gamma_1,\dots,\gamma_s,j$ до $1,\dots,m$, а $D_{\alpha,\ell}^{j_1,\dots,j_{k-1}}$ - определитель матрицы, составленной из столбцов с номерами $j_1,\dots,j_{k-1}$ матрицы $Q_\alpha$ с вычеркнутой $\ell$-й строкой.

Заметим, что если $j_p=a_\ell$, то соответствующий столбец определителя $D_{\alpha,\ell}^{(j_1\dots j_{k-1})}$ состоит из нулей и $D_{\alpha,\ell}^{(j_1,\dots,j_{k-1})}=0$. Поэтому в (2.12) могут быть отличны от нуля лишь те члены, у которых одно из чисел $\gamma_t=a_\ell$, и, переобозначая переменные суммирования, можно записать (2.12) в виде

$$\Delta_\alpha^{ij}=\sum_{\substack{1\le\gamma_1<\dots<\gamma_{s-1}\le m\\ \gamma_p\ne j,a_\ell}}(-1)^{1+\dots+s+\gamma_1+\dots+\gamma_{s-1}+a_\ell-\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1},a_\ell;j)}\times$$

$$\times P^{(\gamma_1\dots\gamma_{t-1}a_\ell\gamma_t\dots\gamma_{s-1})}\bar{D}_{\alpha,\ell}^{(j_1,\dots,j_{k-1})},\qquad(2.13)$$

причем числа $j_1,\dots,j_{k-1}$ дополняют $\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1},j,a_\ell$ до $1,\dots,m$. Предположим, что $j\ne a_\ell$. Так как $j_1,\dots,j_{k-1}\ne a_\ell$, то $\bar{D}_{\alpha,\ell}^{(j_1,\dots,j_{k-1})}$ является одним из миноров матрицы $\mathcal{P}_\alpha^{ia_\ell}=\mathcal{P}_\alpha^{s+\ell,a_\ell}$, которая имеет ту же структуру, что и $\mathcal{P}_\alpha$: она получается таким же построением, как $\mathcal{P}_\alpha$: из матрицы $\mathcal{P}$ с вычеркнутым $a_\ell$-м столбцом. Поэтому $D_{\alpha,\ell}^{(j_1\dots j_{k-1})}$ можно вычислить по формуле, аналогичной (2.7), а именно:

$$D_{\alpha,\ell}^{(j_1\dots j_{k-1})} = (-1)^{1+\dots+s+x_1+\dots+x_s}\tilde{p}^{(x_1\dots x_s)}(p^{\alpha})^{k-2}, \qquad (2.14)$$

где $\tilde{p}^{(x_1\dots x_s)}$ - дополнительный к $D_{\alpha,\ell}^{(j_1\dots j_{k-1})}$ минор матрицы $\mathcal{P}_{\alpha}^{ia_\ell}$, т.е. если $\gamma_1<\dots<\gamma_{\nu-1}<j<\gamma_\nu<\dots<\gamma_{s-1}$, то

$$\tilde{p}^{(x_1\dots x_s)} = p^{(\gamma_1\dots\gamma_{\nu-1}j\gamma_\nu\dots\gamma_{s-1})} = (-1)^{\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1};j)}p^{(\gamma_1\dots\gamma_{s-1}j)}.$$

Кроме того, $x_1+\dots+x_s = \gamma_1+\dots+\gamma_{s-1}+j-\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1},j;a_\ell)$, и, следовательно,

$$D_{\alpha,\ell}^{(j_1,\dots,j_{k-1})} = (-1)^{1+\dots+s+\gamma_1+\dots+\gamma_{s-1}+j-\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1},j;a_\ell)+\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1};j)}p^{(\gamma_1\dots\gamma_{s-1}j)}.$$

Подставим это выражение в (2.13) и учтем, что

$$p^{(\gamma_1\dots\gamma_{t-1}a_\ell\gamma_t\dots\gamma_{s-1})} = (-1)^{\mu(\gamma_1\dots\gamma_{s-1};a_\ell)}p^{(\gamma_1\dots\gamma_{s-1}a_\ell)}.$$

Получим

$$\Delta_{\alpha}^{ij} \sum_{\substack{1\le\gamma_1<\dots<\gamma_{s-1}\le m\\ \gamma_p\ne j,a_\ell}} (-1)^{j+a_\ell+\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1};j)-\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1},j;a_\ell)+\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1};a_\ell)} \times$$

$$\times (-1)^{-\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1},a_\ell;j)}p^{(\gamma_1\dots\gamma_{s-1}a_\ell)}\bar{p}^{(\gamma_1\dots\gamma_{s-1}j)}(\bar{p}^{\alpha})^{k-2},$$

а так как

$$\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1},j,a_\ell)-\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1};j) = \begin{cases} 1, & j>a_\ell,\\ 0, & j<a_\ell,\end{cases}$$

$$\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1}a_\ell,j)-\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_{s-1};a_\ell) = \begin{cases} 1, & a_\ell>j,\\ 0, & a_\ell<j,\end{cases}$$

то

$$\Delta_{\alpha}^{ij} = (-1)^{j+a_\ell+1}\sum_{\substack{1\le\gamma_1<\dots<\gamma_{s-1}\le m\\ \gamma_p\ne j,a_\ell}} p^{(\gamma_1\dots\gamma_{s-1}a_\ell)}\bar{p}^{(\gamma_1\dots\gamma_{s-1}j)}(\bar{p}^{\alpha})^{k-2}. \qquad (2.15)$$

Эта формула справедлива при $j\ne a_\ell$. В случае $j=a_\ell$ достаточно в формуле (2.12) выразить $D_{\alpha,\ell}^{(j_1\dots j_{k-1})}$ с помощью равенства (2.14), которое теперь имеет вид

$$D_{\alpha,\ell}^{(j_1\dots j_{k-1})} = (-1)^{1+\dots+s+\gamma_1+\dots+\gamma_s-\mu(\gamma_1,\dots,\gamma_s;j)}p^{(\gamma_1\dots\gamma_s)}(p^{\alpha})^{k-2}.$$

Это дает

$$\Delta_{\alpha}^{ij} = \sum_{\substack{1\le\gamma_1<\dots<\gamma_s\le m\\ \gamma_p\ne j=a_\ell}} |p^{\gamma}|^2(\bar{p}^{\alpha})^{k-2}. \qquad (2.16)$$

Таким образом, миноры $\Delta_\alpha^{ij}$ выражаются по формулам (2.11), (2.15), (2.16) при $i\le s$, $i-s+\ell>s$, $j\ne a_\ell$ и $i>s, j=a_\ell$, а элементами взаимной матрицы $\widehat{\mathcal{P}}_\alpha$ являются $(-1)^{i+j}\Delta_\alpha^{ij}$.

В заключение отметим, что формулы (2.6), (2.7), (2.11), (2.15), (2.16), выведенные в предположении $P^\alpha\ne 0$, верны и при $P^\alpha=0$, как показывают соображения "общего порядка": произвольно малым изменением элементов матрицы $\mathcal{P}$ можно добиться того, что $P^\alpha\ne 0$, а после этого нужно только перейти к пределу в соответствующих формулах.

## § 3. Матрица $\widetilde{\mathcal{P}}$

Рассмотрим снова матрицу $\mathcal{P}$ из предыдущего параграфа. Построим матрицы $\mathcal{P}_\alpha=\begin{pmatrix}\mathcal{P}\\ \bar{Q}_\alpha\end{pmatrix}$ для тех $\alpha$, для которых $P^\alpha\ne 0$, и определим матрицу

$$\widetilde{\mathcal{P}}=\begin{pmatrix}\mathcal{P}\\ \bar{Q}\end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $\bar{Q}$ – матрица, составленная из строк всех матриц $Q_\alpha$. Так как строки $\bar{Q}$ ортогональны строкам $\mathcal{P}$, но среди них найдется $k$ линейно независимых (например, строки какой-нибудь матрицы $Q_\alpha$), то ранг матрицы $Q$ равен $k$, а ранг $\widetilde{\mathcal{P}}$ равен $m$.

Возьмем произвольные $k$ строк матрицы $Q$, обозначим полученную матрицу через $Q'$ и положим

$$\mathcal{P}'=\begin{pmatrix}\mathcal{P}\\ \bar{Q}'\end{pmatrix}.$$

Строки матрицы $Q'$ являются линейными комбинациями строк какой-либо матрицы $Q_\alpha$ с $P^\alpha\ne 0$, а именно:

$$Q'=Q'^{a}\Lambda_\alpha Q_\alpha, \tag{3.2}$$

где $Q'^{a}$ – матрица, составленная из столбцов матрицы $Q'$ с номерами $a_1,\dots,a_n$, дополнительными к $\alpha_1,\dots,\alpha_s$, $\Lambda_\alpha$ –диагональная матрица с элементами $(-1)^{s+1+\tau_\ell}(P^\alpha)^{-1}$ на главной диагонали (определение чисел $\tau_\ell$ см. в § 2).

Пусть $D'^{j}=D'^{(j_1\dots j_k)}=\det Q'^{(j_1\dots j_k)}$; тогда из (3.2) следует

$$D'^{j}=D'^{a}(-1)^{1+\dots+s+\alpha_1+\dots+\alpha_s}(P^\alpha)^{-k}D_\alpha^{j}. \tag{3.3}$$

Учитывая (2.8), получаем

$$\frac{D'^{j}}{(-1)^{\gamma_1+\dots+\gamma_s}P^{\gamma}}=\frac{D'^{a}}{(-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_s}P^{\alpha}}, \tag{3.4}$$

а если $P^\gamma=0$, то из (3.3) и (2.8) следует, что и $D'^{j}=0$.

Формула (3.4) показывает, что отношение в ее левой части не зависит от $\gamma_1,\dots,\gamma_s$. Покажем, что оно, с точностью до знака, равно некоторому ми-

нору $K-1$ -го порядка матрицы $Q'$. Рассмотрим первую строку матрицы $Q'$. Если она состоит только из нулей, то доказываемое утверждение очевидно. Если же она содержит отличные от нуля элементы, то она является строкой некоторой матрицы $Q_\beta$ с $P^\beta \neq 0$. Пусть $\delta_1,\ldots,\delta_K$ - числа, дополняющие $\beta_1,\ldots,\beta_s$ до $1,\ldots,m$. Легко проверить, что элементы рассматриваемой строки, стоящие в столбцах с номерами $\delta_1,\ldots,\delta_K$, все равны нулю, кроме одного, равного $\pm P^\beta$. Поэтому, разлагая определитель $D'^\delta$ по первой строке, получаем $D'^\delta = \pm P^\delta M$, а в силу (3.4) для любых $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$

$$D'^\gamma = \pm M P^\gamma, \tag{3.5}$$

где $M$ - некоторый минор $K$-1-го порядка матрицы $Q'$. Отсюда следует, что

$$\det \mathcal{P}' = \sum_\gamma (-1)^{1+\ldots+s+\gamma_1+\ldots+\gamma_s} P^\gamma D'^\gamma = \theta M \sum_\gamma |P^\gamma|^2, \quad \theta = \pm 1. \tag{3.6}$$

Эту формулу можно рассматривать как обобщение формулы (2.7).

## § 4. Расширение операторов с постоянным дефектом до эллиптических

Пусть в области $\Omega$ задан оператор с постоянным дефектом $\mathcal{L}(x,\frac{\partial}{\partial x})$, причем $t_1=\ldots=t_m=t$, так что порядок оператора $\ell_{kj}(x,\frac{\partial}{\partial x})$ не превосходит $\ell_k = s_k + t$.

Обозначим через $\mathcal{L}_{0\beta}(x,\xi)$ матрицу, составленную из строк матрицы $\mathcal{L}_0(x,\xi)$, определенной в § 1, с номерами $\beta_1,\ldots,\beta_s$ ($s$ - ранг $\mathcal{L}_0$ при $\xi \in R^n$), а через $\mathcal{L}^\alpha_{0\beta}(x,\xi)$ - квадратные матрицы, составленные из элементов строк и столбцов матрицы $\mathcal{L}_0$ с номерами $\beta_1,\ldots,\beta_s$ и $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ (при этом $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_s)$). Фиксируем $\beta$ и предположим, что определители $\det \mathcal{L}^\alpha_{0\beta}(x,\xi) = L^\alpha_\beta$ не равны одновременно нулю как полиномы по $\xi$. Предполагая, что $\xi \in R^n \setminus \{0\}$, продолжим матрицу $\mathcal{L}_{0\beta}(x,\xi)$ по формуле (3.1), обозначив через $\mathcal{M}_\beta$ матрицу $Q$, соответствующую матрице $\mathcal{L}_{0\beta}(x,\xi)$. Такому расширению матрицы $\mathcal{L}_{0\beta}$ соответствует расширение оператора $\mathcal{L}_{0\beta}(x,\frac{\partial}{\partial x})$ до оператора

$$\mathcal{L}_\beta\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{0\beta}(x,\frac{\partial}{\partial x}) \\ \overline{\mathcal{M}}_\beta(x,\frac{\partial}{\partial x}) \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где $\overline{\mathcal{M}}_\beta$ - оператор, получаемый из $\mathcal{M}_\beta$ заменой всех коэффициентов на комплексно-сопряженные.

Определим теперь расширение оператора $\mathcal{L}(x,\frac{\partial}{\partial x})$ формулой

$$\tilde{\mathcal{L}}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \\ \bar{\mathcal{M}}_{\beta^{(1)}}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \\ \cdots\cdots\cdots \\ \bar{\mathcal{M}}_{\beta^{(N)}}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ \bar{\mathfrak{M}}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \end{pmatrix}, \qquad (4.2)$$

где $\beta^{(1)},\ldots,\beta^{(N)}$ – всевозможные мультииндексы с $s$ компонентами, которые можно составить из чисел $1,\ldots,p$, а $N = C_p^s$.

Т е о р е м а 1. Оператор $\tilde{\mathcal{L}}$ – переопределенный эллиптический.

Действительно, во-первых, отметим, что $\mathcal{M}_{\beta^{(i)}}$ – однородный оператор порядка $\sum_{q=1}^{s} \ell_{\beta_q^{(i)}}$; во-вторых, при фиксированных $x \in \bar{\Omega}$ и $\xi \in R^n \setminus \{0\}$ найдется такой мультииндекс $\beta$, что ранг матрицы $\mathcal{L}_{0\beta}(x,\xi)$ равен $s$, а тогда ранг матрицы

$$\mathcal{L}_\beta(x,\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{0\beta}(x,\xi) \\ \bar{\mathcal{M}}_\beta(x,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{0\beta}(x,\xi) \\ \overline{\mathcal{M}_\beta(x,\xi)} \end{pmatrix}$$

равен $m$; значит, и ранг $\tilde{\mathcal{L}}_0(x,\xi)$ равен $m$.

Если оператор $\mathcal{L}_0$ имеет постоянные коэффициенты, то можно предложить более экономный способ расширения оператора $\mathcal{L}$.

Л е м м а 1. Если полиномиальная матрица $\mathcal{P}(\xi)$ размером $p \times m$ имеет ранг $s$ (т.е. все ее миноры порядка, большего $s$, равны нулю как полиномы по $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$, а миноры порядка $s$ одновременно в нуль не обращаются), то для миноров (порядка $s$) $P_\beta^\alpha(\xi) = \det \mathcal{P}_\beta^\alpha(\xi)$ справедлива формула

$$P_\beta^\alpha(\xi) = g(\xi)\, a^\alpha(\xi)\, b_\beta(\xi), \qquad (4.3)$$

причем полиномы $\{a^{\alpha^{(1)}}(\xi),\ldots,a^{\alpha^{(T)}}(\xi)\}$ и $\{b_{\beta^{(1)}}(\xi),\ldots,b_{\beta^{(N)}}(\xi)\}$, $T = C_m^s$, не имеют общих полиномиальных множителей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем какое-либо $\xi \in C^n$, для которого ранг числовой матрицы $\mathcal{P}(\xi)$ равен $s$, и пусть $\gamma$ таково, что ранг $\mathcal{P}_\gamma(\xi)$ тоже равен $s$. Строки любой матрицы $\mathcal{P}_\beta(\xi)$ линейно выражаются через строки $\mathcal{P}_\gamma$: $\mathcal{P}_\beta(\xi) = A_{\beta\gamma}(\xi)\,\mathcal{P}_\gamma(\xi)$. Отсюда следует $P_\beta^\alpha(\xi) = P_\gamma^\alpha(\xi) \det A_{\beta\gamma}(\xi)$, т.е.

$$P_\gamma^\alpha(\xi)\, P_\beta^{\alpha'}(\xi) = P_\gamma^{\alpha'}(\xi)\, P_\beta^\alpha(\xi). \qquad (4.4)$$

Это равенство справедливо при всех $\xi \in C^n$, и, значит, его можно понимать как равенство двух полиномов. Фиксируем $\alpha'$ так, чтобы полином $P_\gamma^{\alpha'}(\xi)$ был отличен от нуля. Из (4.4) следует, что произведение полиномов $P_\gamma^\alpha(\xi)\, P_\beta^{\alpha'}(\xi)$ делится на $P_\gamma^{\alpha'}(\xi)$. Произведя деление и обозначив через $g(\xi)$ наибольший общий делитель всех $P_\beta^\alpha(\xi)$, мы и получим (4.3).

Таким образом, если главная часть $\mathcal{L}_0$ оператора с постоянным дефектом имеет не зависящие от $x$ коэффициенты, то

$$L_\beta^\alpha(\xi) = \det \mathcal{L}_{0\beta}^\alpha(\xi) = \Gamma(\xi) A^\alpha(\xi) B_\beta(\xi), \tag{4.5}$$

откуда вытекает, что

$$\mathcal{M}_\beta(\xi) = \Gamma(\xi) B_\beta(\xi) \mathcal{M}(\xi). \tag{4.6}$$

Легко видеть, что оператор

$$\mathcal{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ \bar{\mathcal{M}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

также эллиптический.

Строки матрицы $\mathcal{M}(\xi)$ состоят из полиномов $A^\alpha(\xi)$. Хотя $A^\alpha(\xi)$ не имеют общих полиномиальных делителей, может случиться, что полиномы $A^\alpha(\xi)$, находящиеся в одной и той же строке матрицы $\mathcal{M}(\xi)$, имеют общие делители. Обозначим через $\mathcal{N}(\xi)$ матрицу, которая получается из $\mathcal{M}(\xi)$ отбрасыванием всех таких общих делителей и лишних (повторяющихся) строк, которые, возможно, появятся в результате сокращения. Оператор

$$\mathcal{L}'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ \bar{\mathcal{N}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

также эллиптический; по-видимому, он является наиболее экономным расширением оператора $\mathcal{L}$ до эллиптического.

Если коэффициенты оператора $\mathcal{L}_0$ переменные, то равенство (4.5) справедливо и для $L_\beta^\alpha(x, \xi)$ при $\forall x \in \bar{\Omega}$, но нельзя гарантировать гладкости коэффициентов полиномов $\Gamma, A^\alpha$ и $B_\beta$, даже если коэффициенты $L_\beta^\alpha$ являются гладкими функциями $x$.

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\tilde{\mathcal{L}}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = F(x), \quad \mathcal{B}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u \Big|_{x \in \partial\Omega \equiv S} = \Phi(x) \tag{4.8}$$

и выясним, какие ограничения надо наложить на матрицу $\mathcal{B}$, чтобы эта задача была эллиптической. Для подсчета числа краевых условий (строк матрицы $\mathcal{B}$) следует найти общие корни по переменной $\tau \in C$ определителей всех квадратных матриц, которые можно составить из строк матрицы

$$\tilde{\mathcal{L}}_0(x, \xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_0(x, \xi) \\ \bar{\mathfrak{M}}(x, \xi) \end{pmatrix}$$

при любом фиксированном $x \in S$ и при $\xi = \zeta + \nu(x)\tau$, где $\nu(x)$ - единичный вектор внутренней нормали к $S$ в точке $x$, а $\zeta$ - произвольный вектор $R^n$, ортогональный $\nu(x)$.

При нахождении общих корней нескольких полиномов мы будем пользо-

ваться следующей очевидной леммой:

Л е м м а 2. <u>Пусть заданы полиномы</u> $p_1(\xi),\ldots,p_M(\xi)$, $\xi=\zeta+\tau\nu$, <u>и однородные полиномы</u> $D_1(p),\ldots,D_K(p)$, $p=(p_1,\ldots,p_M)$, <u>порядка</u> $s$, <u>в числе которых имеются</u> $p_j^s$, $j=1,\ldots,M$. <u>Общие корни относительно</u> $\tau$ <u>полиномов</u> $D_i(\xi)=D_i(p_1(\xi),\ldots,p_m(\xi))$ <u>совпадают с общими корнями полиномов</u> $p_j^s(\xi)$ (<u>с учетом кратности</u>).

Рассмотрим теперь матрицу

$$\mathcal{L}_\beta(x,\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{0\beta}(x,\xi) \\ \bar{\mathcal{M}}_\beta(x,\xi) \end{pmatrix}.$$

Согласно (3.6), определители квадратных матриц, составленных из ее строк, имеет вид: $\pm\bar{D}(x,\xi)\sum\limits_\gamma L_\beta^\gamma(x,\xi)\bar{L}_\beta^\gamma(x,\xi)$, где $D$ - минор $k-1$ -го порядка матрицы $\mathcal{M}_\beta$, причем, в силу (2.6), для некоторых определителей этот минор равен $(L_\beta^\alpha(x,\xi))^{k-1}$. В силу леммы 2, общие корни определителей всех квадратных матриц, составленных из строк $\mathcal{L}_\beta$, те же, что и общие корни полиномов

$$\det\mathcal{L}_{\beta\alpha}(x,\xi) = (\bar{L}_\beta^\alpha(x,\xi))^{k-1}\sum_\gamma L_\beta^\gamma(x,\xi)\bar{L}_\beta^\gamma(x,\xi). \tag{4.9}$$

С помощью формулы (4.5) можно представить эти полиномы в виде

$$\det\mathcal{L}_{\beta\alpha}(x,\xi) = (\bar{\Gamma}(x,\xi)\bar{B}_\beta(x,\xi))^k\Gamma(x,\xi)B_\beta(x,\xi)(\bar{A}^\alpha(x,\xi))^{k-1}\sum_\gamma A^\gamma(x,\xi)\bar{A}^\gamma(x,\xi). \tag{4.10}$$

Рассмотрим теперь произвольную квадратную матрицу, составленную из строк $\mathcal{L}_0$. Ее определитель может быть отличен от нуля лишь в том случае, если $s$ первых строк являются строками матрицы $\mathcal{L}_0$, а остальные $k$ строк являются строками $\bar{\mathfrak{M}}$, т.е. если эта матрица имеет вид

$$\Lambda(x,\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{0\beta}(x,\xi) \\ \bar{\mathcal{M}}'(x,\xi) \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

причем $i$-я строка $\mathcal{M}'$ входит в матрицу $\mathcal{M}_{\beta(i)}$. В силу леммы 1, если $i$-ю строку матрицы $\mathcal{M}'$ умножить на $\dfrac{B_\beta(x,\xi)}{B_{\beta^{(i)}}(x,\xi)}$, то мы превратим $\Lambda$ в матрицу, составленную из строк $\mathcal{L}_\beta$. Поэтому

$$\det\Lambda(x,\xi) = \pm\bar{D}(x,\xi)\sum_\gamma L_\beta^\gamma(x,\xi)\bar{L}_\beta^\gamma(x,\xi)\frac{\bar{B}_{\beta^{(1)}}(x,\xi)\ldots\bar{B}_{\beta^{(k)}}(x,\xi)}{(\bar{B}_\beta(x,\xi))^k} =$$

$$= \bar{\Gamma}^k\Gamma B_\beta\bar{B}_{\beta^{(1)}}\ldots\bar{B}_{\beta^{(k)}}\sum_\gamma A^\gamma(x,\xi)\bar{A}^\gamma(x,\xi)Q_{k-1}(\bar{A}^{\alpha^{(1)}},\ldots,\bar{A}^{\alpha^{(T)}}),$$

где $D(x,\xi)=Q_{k-1}(L_\beta^{\alpha^{(1)}},\ldots,L_\beta^{\alpha^{(T)}})$ - некоторый минор матрицы $\mathcal{M}_\beta$ порядка $k-1$. Снова применяя лемму 2, убеждаемся в том, что общие корни определителей матриц вида (4.11) совпадают с общими корнями полиномов (4.9), (4.10),

т. е. это корни полинома $\bar{\Gamma}^{\kappa}\Gamma\sum_{\gamma} A^{\gamma}\bar{A}^{\gamma}$, а также общие корни полиномов $(\bar{A}^{\alpha})^{\kappa-1}$ и полиномов $\bar{B}^{\kappa}_{\beta}B_{\beta}$, хотя полиномы $A^{\alpha}$ и $B_{\beta}$ не имеют общих полиномиальных делителей, зависящих от $\xi_1,\dots,\xi_n$; не исключено, что при некоторых $x\in S$ и некоторых $\zeta\perp\nu(x)$ они могут иметь общие корни по $\tau$. Это обстоятельство, кажется, ускользнуло от внимания авторов работы [6], так как на стр. 78 при подсчете числа краевых условий для системы (1.8) они принимают во внимание только общие полиномиальные делители.

Число краевых условий зависит от числа общих (с учетом кратности) корней полиномов (4.10) с положительной мнимой частью. Обозначим это число через $\tau^+$, и пусть

$$P^+(\tau)=\prod_{j=1}^{\tau^+}(\tau-\tau_j^+). \tag{4.12}$$

При отсутствии дополнительных ограничений на матрицу $\mathcal{L}_0$ (они будут наложены в следующем параграфе) число $\tau^+$ может зависеть от $x$ и даже от $\zeta$. Тогда число краевых условий для системы $\tilde{\mathcal{L}}u=F$ не определено; матрицу $\mathcal{B}$ можно взять переопределенной с числом строк, не меньшим чем $\max\limits_{x,\zeta}\tau^+$, и потребовать, чтобы она накрывала матрицу $\mathcal{L}$ [10]. Можно показать, что матрица $\mathcal{B}$ накрывает $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда при каждом $x\in S$ и $\zeta\in R^n\setminus\{0\}$, $\zeta\cdot\nu(x)=0$, среди строк матрицы

$$\mathcal{B}_0(x,\xi)\hat{\mathcal{L}}(x,\xi),\quad \xi=\zeta+\nu\tau, \tag{4.13}$$

найдется $\tau^+$ линейно-независимых по модулю полинома $P^+(\tau)$. Через $\mathcal{B}_0$ обозначена главная часть матрицы $\mathcal{B}$, которая получается из $\mathcal{B}$ отбрасыванием в каждой строке членов, содержащих младшие степени $\xi$, а

$$\hat{\mathcal{L}}=(\hat{\mathcal{L}}_{\beta^{(1)},\alpha^{(1)}},\dots,\hat{\mathcal{L}}_{\beta^{(1)},\alpha^{(T)}},\dots,\hat{\mathcal{L}}_{\beta^{(N)},\alpha^{(T)}}),$$

где $\hat{\mathcal{L}}_{\beta\alpha}$ – матрица, взаимная к $\mathcal{L}_{\beta\alpha}$ (матрица $\hat{\mathcal{L}}$ образуется последовательным выписыванием взаимных матриц для тех квадратных матриц, образованных строками $\mathcal{L}$, общие корни $\tau_j^+$ определителей которых совпадают с общими корнями определителей всех квадратных матриц, образованных строками $\mathcal{L}$). Это утверждение доказывается с помощью слегка измененных рассуждений работы [9].

Если число $\tau^+$ не зависит от $x$ и $\zeta$, то оно является числом краевых условий в задаче (4.8) (т.е. числом строк матрицы $\mathcal{B}$ при отсутствии переопределенности в краевом условии). В этом случае матрица $\mathcal{B}$ должна удовлетворять условию дополнительности: строки матрицы (4.13) при всех $x\in S$, $\zeta\in R^n\setminus\{0\}$, $\zeta\cdot\nu=0$ должны быть линейно-независимы по модулю полинома (4.12). Элементы матриц $\hat{\mathcal{L}}_{\beta\alpha}$ можно подсчитать с помощью формул (2.11), (2.15), (2.16).

Если эти условия выполняются, то задача (4.8) – переопределенная эл-

липтическая, и для нее справедлива теория, построенная в работе [10].

Рассмотрим теперь оператор (4.6). Из определения матрицы $\mathcal{L}$ и из проведенных выше рассуждений следует, что

1) из определителей всех квадратных матриц, составленных из строк матрицы

$$\mathcal{L}_0(\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_0(\xi) \\ \bar{\mathcal{M}}(\xi) \end{pmatrix},$$

только те могут быть отличны от нуля, первые $S$ строк которых принадлежат матрице $\mathcal{L}_0$, остальные – матрице $\mathcal{M}$, и эти определители имеют вид:

$$Q_{K-1}(\bar{\mathcal{A}}^{\gamma})\Gamma(\xi)B_{\beta}(\xi)\sum_{\gamma} A^{\gamma}(\xi)\bar{A}^{\gamma}(\xi),$$

где $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_S)$, $\beta_i$ – номера первых $S$ строк (в матрице $\mathcal{L}_0$) рассматриваемого определителя, а $Q_{K-1}(\bar{\mathcal{A}}^{\gamma})$ – некоторый однородный полином от $\bar{\mathcal{A}}^{\gamma}$, зависящий от номеров последних $K$ строк определителя, и среди полиномов $Q_{K-1}$ есть $(\bar{A}^{\alpha})^{K-1}$ при всех $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_S)$, $1\leq\alpha_1<\dots<\alpha_S\leq m$;

2) при $\xi=\zeta+\nu(x)\tau$, $x\in S$, $\zeta\in R^n\setminus\{0\}$, $\zeta\cdot\nu(x)=0$ общие корни всех этих определителей по $\tau$, с учетом кратности, те же самые, что у полиномов

$$(\bar{A}^{\alpha}(\xi))^{K-1}B_{\beta}(\xi)\Gamma(\xi)\sum_{\gamma} A^{\gamma}(\xi)\bar{A}^{\gamma}(\xi).$$

Остальные условия на матрицу $\mathcal{B}_0$, гарантирующие эллиптичность краевой задачи

$$\mathcal{L}\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u=F,\quad \mathcal{B}\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u\Big|_S=\Phi, \tag{4.14}$$

формулируются аналогично изложенному выше.

## § 5. Нётеровы краевые задачи для систем с постоянным дефектом

Предположим, что оператор с постоянным дефектом $\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) его коэффициенты не зависят от $x$, и младшие члены отсутствуют, т.е. $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0$;

2) полиномы $A^{\alpha}(\xi)$, входящие в (4.5), равно как и $B_{\beta}(\xi)$, не имеют общих корней $\xi\in C^n$;

и рассмотрим его расширение $\mathcal{L}$, определяемое формулой (4.6).

При этих условиях общие корни определителей всех квадратных матриц, образованных строками $\mathcal{L}$, совпадают с корнями полинома $H(\xi)=$ $=\Gamma(\xi)\sum_{\gamma} A^{\gamma}(\xi)\bar{A}^{\gamma}(\xi)$. Этот полином, таким образом, не имеет веществен-

ных ненулевых корней, и мы наложим на него следующее (излишнее при $n>2$) ограничение:

3) полином $H(\xi)$ имеет четную степень $2\tau$ и при $\xi=\zeta+\nu\tau$, $|\nu|=1$, $\zeta\in R^n\setminus\{0\}$, $\zeta\cdot\nu=0$ его $\tau$ корней по $\tau$ имеют положительную и $\tau$ его корней имеют отрицательную мнимые части.

Так как ранг матрицы $\mathcal{M}(\xi)$ при $\xi\in R^n\setminus\{0\}$ равен $k$ и от $\xi$ не зависит, то для ее миноров порядка $K$ справедлива формула типа (4.3), а именно:

$$M_q^j=\det \mathcal{M}_q^j(\xi)=I(\xi)K^j(\xi)S_q(\xi),$$

где $j=(j_1,\dots,j_K)$, $q=(q_1,\dots,q_K)$, $1\le j_1<\dots<j_K\le m$, $1\le q_1<\dots<q_K\le R=KC_m^s$ ( $R$ - число строк матрицы $\mathcal{M}$ ), $\mathcal{M}_q^j$ - матрица, составленная из элементов, принадлежащих столбцам с номерами $j_1,\dots,j_K$ и строкам с номерами $q_1,\dots,q_K$ матрицы $\mathcal{M}$ ; $I(\xi)$ - наибольший полиномиальный общий делитель всех $M_q^j$ .

Л е м м а 3. <u>Полиномы $K^j(\xi)$ , а также $S_q(\xi)$ не имеют общих комплексных корней:</u> $I(\xi)=1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (3.5), $M_q^j(\xi)=D(\xi)A^\gamma(\xi)$, где $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_s)$ - мультииндекс, компоненты которого дополняют $j_1,\dots,j_K$ до $1,\dots,m$ , а $D$ - однородный полином от $A^T(\xi)$ степени $K-1$ , и для всякого $\alpha$ существует такой мультииндекс $q$ , что

$$M_q^j=(-1)^{1+\dots+s+\gamma_1+\dots+\gamma_s}(A^\alpha)^{K-1}A^\gamma.$$

Уже у этих $M_q^j$ нет отличного от постоянной общего полиномиального делителя, а так как у $A^\gamma$ нет общих комплексных корней, то и $M_q^j$ их не имеют. Отсюда и вытекает утверждение леммы.

Пусть $\mathcal{L}_a$ - матрица, составленная из строк матрицы $\mathcal{L}(\xi)$ с номерами $a_1,\dots,a_m$-компонентами мультииндекса $a$ , причем $a_1=\beta_1,\dots,a_s=\beta_s$, $a_{s+1}=q_1,\dots,a_m=q_K$, $1\le\beta_1<\dots<\beta_s\le p$. Тогда

$$\det\mathcal{L}_a(\xi)=\sum_\gamma(-1)^{1+\dots+s+\gamma_1+\dots+\gamma_s}L_\beta^\gamma(\xi)\bar{M}_q^j(\xi)=$$

$$=\Gamma(\xi)\sum_\gamma(-1)^{1+\dots+s+\gamma_1+\dots+\gamma_s}A^\gamma(\xi)\bar{K}^j(\xi)\cdot B_\beta(\xi)\bar{S}_q(\xi),\tag{5.1}$$

где $j=(j_1,\dots,j_s)$ и $j_1,\dots,j_K$ дополняют $\gamma_1,\dots,\gamma_s$ до $1,\dots,m$ .

Рассмотрим краевую задачу (4.14), т.е.

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=f,\quad \bar{\mathcal{M}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=g,\quad \mathcal{B}\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u\Big|_S=\phi,\tag{5.2}$$

предполагая, что матрица $\mathcal{B}$ имеет $r^+ = r$ строк и удовлетворяет условию дополнительности: строки матрицы $\mathcal{B}_0 \hat{\mathcal{L}}$ линейно-независимы по модулю полинома (4.12), где $\tau_j^+$ - все корни полинома $H(\xi)$, $\xi = \zeta + \tau\nu$, имеющие положительную мнимую часть.

Пусть $l_j$ - порядок операторов в $j$-й строке матрицы $\mathcal{L}$, $m_i$ - в $i$-й строке матрицы $\mathcal{M}$ и $b_q$ - в $q$-й строке матрицы $\mathcal{B}$ и пусть $l$ - целое число, удовлетворяющее условиям:

$$l > l_j, \quad l \geq m_i, \quad l > b_q, \quad \forall j, i, q.$$

В работе [11] показано, что если $S \in C^l$, то область значений оператора

$$\mathcal{O}\!\iota u = \begin{Bmatrix} \mathcal{L}u \\ \mathcal{M}u \\ \mathcal{B}u|_S \end{Bmatrix},$$

который, очевидно, является ограниченным оператором, действующим из пространства $H = \underbrace{W_2^l(\Omega) \times \ldots \times W_2^l(\Omega)}_{m}$ в пространство $H_1 \times H_2 \times H_3$,

$$H_1 = W_2^{l-l_1}(\Omega) \times \ldots \times W_2^{l-l_p}(\Omega),$$

$$H_2 = W_2^{l-m_1}(\Omega) \times \ldots \times W_2^{l-m_R}(\Omega),$$

$$H_3 = W_2^{l-b_1-\frac{1}{2}}(S) \times \ldots \times W_2^{l-b_r-\frac{1}{2}}(S),$$

содержится в некотором подпространстве $H_{12} \times H_3$, где $H_{12} \subset H_1 \times H_2$, и, более того, оператор $\mathcal{O}\!\iota$ нётеров как оператор, действующий из $H$ в $H_{12} \times H_3$: его ядро $N(\mathcal{O}\!\iota)$ конечномерно в $H$, а область значений $R(\mathcal{O}\!\iota)$ - это подпространство элементов $\{f, g, \phi\} \in H_{12} \times H_3$, удовлетворяющих конечному числу условий ортогональности $(f, f^i)_{H_1} + (g, g^i)_{H_2} + (\phi, \phi^i)_{H_3} = 0$, $i = 1, \ldots, h$, $\{f^i, g^i, \phi^i\} \in H_{12} \times H_3$. Само же подпространство $H_{12}$ определяется как замыкание в норме $H_1 \times H_2$ множества всех бесконечно дифференцируемых векторов $(f, g) \in H_1 \times H_2$, удовлетворяющих конечному числу условий

$$\sum_{j=1}^{P} S'_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_j(x) + \sum_{j=1}^{R} S''_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) g_j(x) = 0. \tag{5.3}$$

Векторы $S^i(\xi) = (S'_{i1}, \ldots, S'_{ip}, S''_{i1}, \ldots, S''_{iR})$ определяются с помощью процедуры расширения матрицы $\mathcal{L}$, аналогичной той, которая описана в § 2. Нужно задать произвольный мультииндекс $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{m+1})$, $1 \leq \omega_1 < \ldots < \omega_{m+1} \leq p + R$, подсчитать алгебраические дополнения элементов последнего столбца матрицы

$$\begin{pmatrix} l_{\omega_1 1}(\xi) \ldots l_{\omega_1 m}(\xi) x_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_{\omega_{m+1} 1}(\xi) \ldots l_{\omega_{m+1} m}(\xi) x_{m+1} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

( $l_{ij}$ – единое обозначение для элементов матрицы $\mathcal{L}$ ) и отбросить у получившихся полиномов общий делитель. Таким образом вычисляются компоненты вектора $\delta^i(\xi)$ с номерами $\omega_1, \dots, \omega_{m+1}$ ; остальные компоненты следует положить равными нулю. Перебирая все мультииндексы $\omega$ , мы получим все векторы $\delta^i(\xi)$ .

Т е о р е м а 4. Для задачи (5.2) условия согласования (5.3) сводятся к

$$\sum_{j=1}^{s+1} (-1)^j B_{\beta^{(j)}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_{\beta_j}(x) = 0, \tag{5.5}$$

$$\sum_{j=1}^{K+1} (-1)^j \bar{S}_{q^{(j)}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) g_{q_j}(x) = 0, \tag{5.6}$$

где $\beta^{(j)} = (\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_{s+1})$, $q^{(j)} = (q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_{K+1})$, при всевозможных $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{s+1})$ и $q = (q_1, \dots, q_{K+1}) \subseteq 1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_{s+1} \leq p$, $1 \leq q_1 < \dots < q_{K+1} \leq R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Алгебраические дополнения элементов последнего столбца матрицы (5.4) могут не обращаться одновременно в нуль лишь при условии, что $1 \leq \omega_1 < \dots < \omega_{s+1} \leq p < \omega_{s+2} < \dots < \omega_{m+1} \leq p+R$ или $1 \leq \omega_1 < \dots < \omega_s \leq p < \omega_{s+1} < \dots < \omega_{m+1} \leq p+R$.

В первом случае матрица (5.4) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} l_{\omega_1 1}(\xi) \dots l_{\omega_1 m}(\xi)\, x_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ l_{\omega_{s+1} 1}(\xi) \dots l_{\omega_{s+1} m}(\xi)\, x_{s+1} \\ \bar{m}_{\omega_{s+2}-p\,1}(\xi) \dots \bar{m}_{\omega_{s+2}-p\,m}(\xi)\, x_{s+2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{m}_{\omega_{m+1}-p\,1}(\xi) \dots \bar{m}_{\omega_{m+1}-p\,m}(\xi)\, x_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Алгебраические дополнения элементов $x_{s+2}, \dots, x_{m+1}$ равны нулю, а алгебраические дополнения элементов $x_i$, $i \leq s+1$ , в силу (5.1), пропорциональны $(-1)^j B_{\omega^{(j)}}(\xi)$ . Перебирая все мультииндексы $\omega$ , удовлетворяющие первому из указанных выше условий, получим серию условий согласования (5.5). Аналогично выводится условие (5.6).

Таким образом, для задачи (5.2) $H_{12} = H_1' \times H_2'$ , где $H_1'$ – замыкание в норме $H_1$ множества гладких вектор-функций $f(x)$ , удовлетворяющих условиям (5.5), а $H_2'$ – замыкание в $H_2$ множества гладких $g(x)$ , удовлетворяющих условиям (5.6). Определим ещё пространство $H'$ как множество всех векторов $u(x) \in H$ , удовлетворяющих условию $\bar{M}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ , и рассмотрим задачу $\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f$, $\mathcal{B}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u\big|_S = \phi$ . Запишем ее в виде $\mathcal{L}u = h = \binom{f}{\phi}$ , где

$$\mathfrak{L}u = \begin{pmatrix} \mathcal{L}u \\ \mathcal{B}u|_S \end{pmatrix}.$$

Т е о р е м а 5. <u>Оператор $\mathcal{L}$ нётеров как оператор, действующий из $H'$ в $H_1' \times H_3$.</u>

Действительно, задание оператора $\mathcal{L}$ на $H'$ равносильно рассмотрению задачи (5.2) с $g=0$. Для любых $f\in H_1'$, $\phi\in H_3$, удовлетворяющих конечному числу условий ортогональности $(f, f^i)_{H_1} + (\phi, \phi^i)_{H_3} = 0$, $i=1,\dots,k$, существует решение этой задачи, так что область значений $\mathcal{L}|_{H_1'}$ имеет в $H_1' \times H_3$ конечную коразмерность. Конечномерность ядра оператора $\mathcal{L}|_{H_1'}$ следует из конечномерности ядра оператора $\mathcal{O}$.

## Л и т е р а т у р а


1. **S c h u l e n b e r g e r J.R., W i l c o x C.H. Coerciveness inequalities for partial differential equations.-"Annali di matematica pura ed applicata", 1971, t.88, p.229-305.**

2. Б и р м а н М.С. Задачи рассеяния для дифференциальных операторов при возмущении пространства. - "Изв. АН СССР. Серия мат.", 1971, т. 35, с. 440-495.
3. З у х о в и ц к а я Е.С. Краевые задачи для переопределенных систем дифференциальных уравнений. - "Докл. АН СССР", 1971, т. 201, с. 523-526.
4. Г у д о в и ч И.С., К р е й н С.Г., К у л и к о в И.М. Краевые задачи для уравнений Максвелла. - "Докл. АН СССР", 1972, т. 207, с. 321-324.
5. Г у д о в и ч И.С., К р е й н С.Г. Краевые задачи для операторов внешнего дифференцирования. - "Труды научно-исслед. ин-та матем. ВГУ", 1972, вып. 5.
6. Г у д о в и ч И.С., К р е й н С.Г. Краевые задачи для переопределенных систем уравнений в частных производных. - "Дифференциальные уравнения и их применечие", (Труды семинара, сек. 1), Ин-т физ. и матем. АН ЛитССР, 1974, с. 7-140.
7. С а к с Р.С. О краевых задачах для системы $\mathrm{rot}\, u + \lambda u = h$. -"Докл. АН СССР", 1971, т. 199, с. 1022-1025.
8. С а к с Р.С. Краевые задачи для некоторых систем, приводимых к эллиптическим. - "Дифференц. уравнения", 1974, т. 10, с. 132-142.
9. С о л о н н и к о в В.А. Об условии дополнительности для переопределенных систем. - "Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР", 1969, т. 14, с. 237-255.

10. С о л о н н и к о в  В.А. Переопределенные эллиптические краевые задачи. – "Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР", 1971, т. 21, с. 112–158.

11. С о л о н н и к о в  В.А. Об одном классе нётеровых переопределенных эллиптических краевых задач. – "Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР", 1974, т. 47, с. 138–154.