УДК 517.946

О ЗАДАЧЕ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Х е К а н Ч е р (Новосибирск)

Как известно [1 - 3], на корректность постановки краевых задач для вырождающихся эллиптических и гиперболических уравнений существенно влияют младшие коэффициенты. Поэтому, естественно, следует ожидать, что от них же будут зависеть и условия склеивания решения на линии вырождения в краевых задачах для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа. В задачах Трикоми и Геллерстедта [4 - 6] для уравнений:

$$\begin{gathered} \operatorname{Sign} \eta \cdot u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0, \\ \eta^{2k-1} u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где k - любое натуральное число, таковыми условиями являются обычные условия непрерывности самого решения и его нормальной производной. В данной работе ставится и исследуется краевая задача, аналогичная задаче Геллерстедта, для уравнения смешанного типа

$$L_\alpha u \equiv x u_{xx} + y u_{yy} + \alpha u_x + \alpha u_y = 0, \tag{2}$$

линии вырождения которого являются его характеристиками. Эта задача для уравнения (2) в обычной постановке (т.е. с условиями непрерывности самого решения и его нормальной производной на линиях вырождения), вообще говоря, оказывается некорректной. Здесь условие непрерывности нормальной производной заменяется несколько другим, зависящим от α. Отметим, что замена переменных

$$\xi = \frac{1}{2k+1}(x-y), \quad \eta = \sqrt[2k+1]{xy} \tag{3}$$

в области $x+y>0$, $xy \neq 0$ взаимно-однозначно преобразует уравнение (1) в уравнение (2), при этом $\alpha = \frac{2k}{2k+1}$ $\left(\frac{2}{3} \leq \alpha < 1\right)$. Если $\alpha = \frac{1}{2}$, то в переменных

$$\xi = \operatorname{Sign} x \cdot \sqrt{|x|}, \quad \eta = \operatorname{Sign} y \cdot \sqrt{|y|} \tag{4}$$

при $xy \neq 0$ уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$u_{\xi\xi} + \operatorname{sign}(\xi\eta)\cdot u_{\eta\eta} = 0. \tag{5}$$

В дальнейшем будем считать, что постоянный параметр

$$\alpha = -m+\delta, m \geq 0, \quad m \text{ - целое число}, \quad 0<\delta<1. \tag{6}$$

Обозначим через Q конечную односвязную область, ограниченную "нормальным" контуром уравнения (2) отрезком AB : $x+y=1$, $0 \leq x \leq 1$, и его характеристиками EC : $\sqrt{-x}+\sqrt{y}=1$, $-\frac{1}{4} \leq x \leq 0$, CD: $x=-y$, $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$, и DA : $\sqrt{x}+\sqrt{-y}=1, -\frac{1}{4} \leq y \leq 0$. Пусть $Q_0 = Q \cap \{x>0,\ y>0\}$ - область эллиптичности, $Q_1 = Q \cap \{x>0,\ y<0\}$ и $Q_2 = Q \cap \{x<0,\ y>0\}$ - области гиперболичности, OA : $y=0$, $0<x<1$, OB : $x=0$, $0<y<1$, - линии параболического вырождения для уравнения (2). Далее, обозначим через $Q' = Q \setminus \{xy=0\}$, $Q_{01} = Q \setminus \bar{Q}_2$, $Q_{02} = Q \setminus \bar{Q}_1$, P - дифференциальное выражение: $P \equiv \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$.

Л е м м а 1. Пусть $u(x,y)$ - достаточно гладкое решение уравнения (2). Тогда

$$L_{\alpha+s} P^s u = 0, \quad s=0,1,\ldots\ . \tag{7}$$

Справедливость этого утверждения проверяется непосредственно с учетом свойства 2) из [2, с. 61] .

Т е о р е м а 1. Пусть выполнено условие (6). Тогда существует единственное решение $u(x,y)$ уравнения (2) в области Q' такое, что

а) $P^s u \in C(\bar{Q}) \cap C^2(Q')$, $s=0,1,\ldots,m$; (8)

б) если $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$, то

$$|y|^\delta \frac{\partial P^m u}{\partial y}, \quad |x|^\delta \frac{\partial P^m u}{\partial x} \in C(Q), \tag{9}$$

причем функции $\nu_1(x) = \lim\limits_{y\to\pm 0} x^{\delta-1}|y|^\delta \frac{\partial P^m u}{\partial y}\Big|_{OA}$ и $\nu_2(y) = \lim\limits_{x\to\pm 0} y^{\delta-1}|x|^\delta \frac{\partial P^m u}{\partial x}\Big|_{OB}$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше $2(1-\delta)$ в точках A (1,0), B (0,1) и O (0,0), а если $0<\delta<\frac{1}{2}$, то

$$\operatorname{Sign}(xy)\cdot|xy|^\delta P^{m+1} u = v(x,y) \in C(\bar{Q}) \cap C^2(Q'), \tag{10}$$

$$v_x \in C(Q_{01}), \quad v_y \in C(Q_{02}), \tag{11}$$

$$x(P^m u)_{xx} + 2\delta(P^m u)_x = \omega_1(x,y) \in C(Q_{01}), \tag{12}$$

$$y(P^m u)_{yy} + 2\delta(P^m u)_y = \omega_2(x,y) \in C(Q_{02}), \tag{13}$$

причем функции $\omega_1(x,0)$ и $\omega_2(0,y)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше 2δ в точках A,B,O;

в) удовлетворяет краевому условию

$$u(x,-x)\Big|_{CD}=\varphi_0(x),\quad u(x,1-x)\Big|_{AB}=\varphi_1(x),\tag{14}$$

где заданные функции $\varphi_0(x)\in C^m\left(-\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{4}\right)$, $\varphi_1(x)\in C^m(0\le x\le 1)$, причем $\varphi_0^{(m)}(x)\in C^3\left(-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4},\ x\ne 0\right)$, $\varphi_1^{(m)}(x)\in C^1(0\le x\le 1)$ при $\frac{1}{2}\le\delta<1$; $|x|^{2\delta}\varphi_0^{(m+1)}(x)\in C\left(-\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{4}\right)\cap C^3\left(-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4},\ x\ne 0\right)$, $[x(1-x)]^{\delta}\varphi_1^{(m+1)}(x)\in C^1(0\le x\le 1)$ при $0<\delta<\frac{1}{2}$.

Доказательство разделим на три этапа:

1°. Пусть $m=0$, $\frac{1}{2}\le\delta<1$. Тогда, принимая во внимание (1), (3)-(5), справедливость теоремы 1 устанавливается, как и в [6, 7] (см. также [8, 9]), при этом условия $\varphi_1(0)=\varphi_1(1)=\varphi_1'(0)=\varphi_1'(1)=0$ всегда можно получить, используя функцию

$$a\left[6xy(x-y)-\alpha(x-y)^3\right]+b\left[2xy-\alpha(x-y)^2\right]+c(x-y)+d$$

с произвольными постоянными a, b, c, d, которая является решением уравнения (2)).

2°. Для других значений α проверим сначала единственность требуемого решения $u(x,y)$. Пусть краевые условия в (14) однородны, т.е. $\varphi_0(x)\equiv 0$, $\varphi_1(x)\equiv 0$ и $m\ge 1$, $\frac{1}{2}\le\delta<1$. Тогда из (8) вытекает, что

$$P^s u\Big|_{CD}=0,\quad P^s u\Big|_{AB}=0,\quad s=0,1,\dots,m.\tag{15}$$

Учитывая (7), (8), (15) при $s=m$ и (9), в силу 1° получаем $P^m u\equiv 0$ в $\bar{Q}$, т.е. $\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)P^{m-1}u\equiv 0$. Отсюда $P^{m-1}u=f(x+y)$, где $f(t)$ - некоторая гладкая функция при $0\le t\le 1$. Используя (7) и (15) при $s=m-1$, нетрудно показать, что $f(t)\equiv 0$ при $0\le t\le 1$. Следовательно, $P^{m-1}u\equiv\equiv 0$ в $\bar{Q}$. Продолжая далее этот процесс, получаем $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar{Q}$. Пусть теперь $m\ge 0$, $0<\delta<\frac{1}{2}$. Тогда в силу (10), имеет место также

$$v(x,y)\Big|_{CD}=0,\quad v(x,y)\Big|_{AB}=0.\tag{16}$$

Далее, используя (7), (10)-(13), нетрудно показать, что

$$L_{1-\delta}\,v(x,y)=0\quad\text{в } Q'\ \left(\frac{1}{2}<1-\delta<1\right),\tag{17}$$

$$\lim_{y\to\pm 0}x^{-\delta}|y|^{1-\delta}v_y\Big|_{OA}=\omega_1(x,0),\quad \lim_{x\to\pm 0}y^{-\delta}|x|^{1-\delta}v_x\Big|_{OB}=-\omega_2(0,y).\tag{18}$$

В силу 1° из (10), (16)-(18) следует, что $\sigma(x,y)=\operatorname{sign}(xy)\cdot|xy|^{\delta}P^{m+1}u\equiv$ $\equiv 0$ в $\overline{Q}$. Далее аналогично предыдущему случаю получим $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{Q}$.

3°. Теперь покажем существование требуемого решения $u(x,y)$. В силу (8), (10), (14) имеем

$$P^s u\Big|_{CD}=\varphi_0^{(s)}(x),\quad P^s u\Big|_{AB}=\varphi_1^{(s)}(x),\quad s=0,1,\dots,m, \tag{19}$$

и, если $0<\delta<\frac{1}{2}$,

$$\sigma(x,-x)\Big|_{CD}=-|x|^{2\delta}\varphi_0^{(m+1)}(x),\quad \sigma(x,1-x)\Big|_{AB}=[x(1-x)]^{\delta}\varphi_1^{(m+1)}(x). \tag{20}$$

Пусть $m\geq 1$, $\frac{1}{2}\leq\delta<1$. Тогда в силу 1° существует единственная функция $\sigma_m(x,y)\equiv P^m u$, как решение соответствующей краевой задачи (7)-(9), (19) при $s=m$. Далее, рассмотрим функцию

$$\omega_{m-1}(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^{y-x}\sigma_m\left(\frac{x+y-\xi}{2},\ \frac{x+y+\xi}{2}\right)d\xi, \tag{21}$$

для которой $P\omega_{m-1}=\sigma_m(x,y)$. Так как $PL_\alpha=L_{\alpha+1}P$, то нетрудно показать, что $L_{\alpha+m-1}\omega_{m-1}\equiv\mu_{m-1}(x+y)$, т.е. зависит только от $x+y$. Отсюда, учитывая (7), (8) и (19), получаем

$$\sigma_{m-1}(x,y)\equiv P^{m-1}u=\omega_{m-1}(x,y)+f_{m-1}(x+y), \tag{22}$$

где $f_{m-1}(t)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$t f''_{m-1}(t)+2(\alpha+m-1)f'_{m-1}(t)+\mu_{m-1}(t)=0,\quad 0<t<1,$$

удовлетворяющего краевым условиям

$$f_{m-1}(0)=\varphi_0^{(m-1)}(0),\quad f_{m-1}(1)=\varphi_1^{(m-1)}\left(\frac{1}{2}\right) \tag{23}$$

($f(t)$ выписывается явно). Продолжая далее этот процесс интегрирования, получаем искомое решение $u(x,y)$. Если $m\geq 0$, $0<\delta<\frac{1}{2}$, то в силу (10)-(13), (18) и 1° существует единственное решение задачи (17), (20). Далее доказательство существования требуемого решения $u(x,y)$ проводим аналогично предыдущему случаю, используя (7), (8), (10) и (19).

Замечание 1. В области Q' в переменных $\xi=x-y$, $\eta=xy$ уравнение (2) перепишется в виде $\eta u_{\eta\eta}+u_{\xi\xi}+\alpha u_\eta=0$, для которого подобная краевая задача при $m\geq 1$, $\frac{1}{2}<\delta<1$, рассматривалась в [10]. Можно показать, что в той задаче условия склеивания на линии вырождения эквивалентны условиям (8) и (9) в классах функций, где ищется решение.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения: $\widetilde{Q}_1=$ $=\overline{Q}\setminus\{\overline{OA\cup OD}\}$, $\widetilde{Q}_2=\overline{Q}_2\setminus\{\overline{OB\cup OC}\}$, $\widetilde{Q}_{12}=\widetilde{Q}_1\cup\widetilde{Q}_2$ – области, T_α – ли –

нейный интегро-дифференциальный оператор:

$$T_\alpha \psi(\eta) = \frac{2}{1-\eta^2}\left[\eta\psi'(\eta) + (1-2\alpha)(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\int_\eta^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{3}{2}}\psi'(t)\,dt\right],$$

$\psi(\eta)\in C^1\,(0<\eta<1)$, причем $(1-t^2)^{\alpha-\frac{3}{2}}\psi'(t)$ суммируема на отрезке $(0<t<1)$; для α, удовлетворяющих (6), обозначим через H_α класс функций $u(x,y)$ таких, что

1) $P^m u\in C(\bar{Q})\cap C^2(Q')$;

2) обладают свойством "б" из формулировки теоремы 1;

3) если $\alpha<\frac{1}{2}$, то $P^s u\in C(\bar{Q})\cap C^2(Q')\cap C'(\tilde{Q}_{12})$, $s=0,1,\ldots,k$,

$$k=m-1 \quad \text{при} \quad \frac{1}{2}\le\delta<1, \quad \text{а иначе} \quad k=m; \tag{24}$$

4) $$\lim_{x\to 0}|x|^{\beta_s}P^s u\big|_{BC}=0,\quad \lim_{y\to 0}|y|^{\beta_s}P^s u\big|_{DA}=0, \tag{25}$$

$$\beta_s=\frac{\alpha+s-0{,}5}{2},\quad s=0,1,\ldots,m.$$

Для функций $u(x,y)\in H_\alpha$ обозначим через $\psi_{1,s}(1-2\sqrt{-y})=P^s u\big|_{DA}$, $\psi_{2,s}(1-2\sqrt{x})=P^s u\big|_{BC}$, $s=0,1,\ldots,K$, где $K=m$ при $\frac{1}{2}\le\delta<1$, и $K=m+1$ – в противном случае. Заметим, что (25) эквивалентно условию

$$\lim_{t\to 0}(1-t)^{2\beta_s}\psi_{i,s}(t)=0,\quad i=1,2.$$

Лемма 2. Пусть $\alpha<\frac{1}{2}$ и выполнено (6). Тогда если $u(x,y)$ – решение уравнения (2) в области $Q_1\cup Q_2$ такое, что $u(x,y)\in H_\alpha$ и $\psi_{i,s}(t)$ принадлежит области определения оператора $T_{\alpha+s}$, где $i=1,2$, $s=0,1,\ldots,K$, K определено в (24), то справедливы следующие соотношения:

$$\psi_{i,s+1}(\eta)=(-1)^i T_{\alpha+s}\psi_{i,s}(\eta), \tag{26}$$

$$\psi_{i,s}(\eta)=\frac{(-1)^i}{2}\int_\eta^1 t^{-2(\alpha+s)}(1-t^2)^{\frac{3}{2}-\alpha-s}\left\{C_0+\int_t^1 z^{2(\alpha+s)-1}\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)^{\alpha+s-\frac{1}{2}}\psi_{i,s+1}(z)\right]dz\right\}dt, \tag{27}$$

где постоянная C_0 однозначно определяется при задании $\psi_{i,s}(0)$.

Соотношение (26) можно установить непосредственно, используя лемму 1 и переходя к характеристическим координатам в области Q_1 (или Q_2), при этом существенно используются условия (10) и (25). Равенство (27) нетрудно вывести из (26), используя представление оператора $T_{\alpha+s}$ и принимая во внимание $\psi_{i,s}(1)=0$.

Лемма 3. Пусть $u(x,y)$ – решение уравнения (2) в некоторой области D. Тогда функция $u(y,x)$ удовлетворяет (2) в области D^*, симметричной D относительно прямой $x=y$.

Эта лемма доказывается также непосредственной проверкой.

Т е о р е м а 2. Пусть выполнено условие (6). Тогда в классе функций H_α существует единственное решение $u(x,y)$ уравнения (2) в области Q', удовлетворяющее краевому условию:

$$u\big|_{AB}=\varphi(x),\quad u\big|_{DA}=\psi_1\left(1-2\sqrt{-y}\right),\quad u\big|_{BC}=\psi_2\left(1-2\sqrt{-x}\right), \tag{28}$$

где $\varphi(t)$, $\psi_i(t)$, $0\le t\le 1$, $i=1,2$, - заданные функции, причем $\varphi(t)=$ $=[t(1-t)]^{\varepsilon}\bar{\varphi}(t)$, $\psi_i(t)=(1-t)^{2\varepsilon}\bar{\psi}_i(t)$, $\bar{\varphi}(t)\in C^{\kappa}(0\le t\le 1)\cap C^{\kappa+1}(0<t<1)$, $\bar{\psi}_i(t)\in C^{\kappa}(0\le t\le 1)\cap C^{\kappa+3}(0<t<1)$, $i=1,2$; $\kappa=m$ при $\frac{1}{2}\le\delta<1$, $\kappa=m+1$ при $0<\delta<\frac{1}{2}$; $\varepsilon=1-\alpha$, если $\frac{1}{2}<\delta<1$, и $\varepsilon=1-\alpha+\varepsilon_1$, $\varepsilon_1>0$ - в противном случае.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единственность требуемого решения можно проверить, как и в доказательстве теоремы 1, используя леммы 1 и 2. Далее всегда можно считать, что граничные данные в (28) четны или нечетны относительно прямой $x=y$. В противном случае построим две функции $u_1(x,y)=\frac{1}{2}[u(x,y)+u(y,x)]$ и $u_2(x,y)=\frac{1}{2}[u(x,y)-u(y,x)]$, которые в силу леммы 3 будут решениями уравнения (2), удовлетворяющие соответственно краевым условиям $u_1(x,y)\big|_{\Sigma}=\frac{1}{2}[u(x,y)+u(y,x)]\big|_{\Sigma}$, $u_2(x,y)=\frac{1}{2}[u(x,y)-u(y,x)]\big|_{\Sigma}$, где $\Sigma=\overline{DA\cup AB\cup BC}$. Отсюда из единственности решения краевой задачи (2), (28) из класса H_α следует, что функции $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ являются соответственно четным или нечетным решением относительно прямой $x=y$. Но производная четной (нечетной) непрерывно-дифференцируемой функции будет нечетной (четной), поэтому, учитывая (26), получаем, что если относительно прямой $x=y$ функции $P^s u$ четна (нечетна), то $P^{s+1}u$ нечетна (четна), $s=0,1,\ldots,\kappa$, κ определено в (24). Далее доказательство существования требуемого решения проводится так же, как и в теореме 1. Только заметим, что в обозначениях (21)-(23) $f_{m-1}(0)=0$, если $v_{m-1}(x,y)$ нечетна, и $f_{m-1}(0)=\psi_{2,m-1}(0)-w_{m-1}\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, если $v_{m-1}(x,y)$ четна относительно прямой $x=y$.

Имеет место следующая

Л е м м а 4. Пусть трижды непрерывно-дифференцируемая функция $w(x,y)$ удовлетворяет уравнению $L_{\alpha+1}w=0$. Тогда функция $u(x,y)=$ $=xyPw+\alpha(y-x)w$ является решением уравнения (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится, как и в лемме 1.

З а м е ч а н и е 2. В силу леммы 4 существует бесконечно много функций

$$u_0(x,y)\equiv 1, \quad u_1(x,y)=x-y, \quad u_2(x,y)=2xy-\alpha(x-y)^2, \ldots,$$

которые являются решениями уравнения (2). Поэтому, используя эти функции, можно несколько ослабить условия обращения в нуль в точках A и B у граничных функций (28).

Л и т е р а т у р а

1. К е л д ы ш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области. – "Докл. АН СССР," 1951, т. 77, №2, с. 181–183.
2. Т е р с е н о в С. А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе, 1973, Новосибирск, НГУ.
3. С м и р н о в М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., "Наука", 1966.
4. Т р и к о м и Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.–Л., Гостехиздат, 1947.
5. Б и ц а д з е А. В. Уравнения смешанного типа. М., изд-во АН СССР, 1959.
6. G e l l e r s t e d t S. Quelques problémes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx}+z_{yy}=0$.-Arkiv mat.,Astr.och Fysik", 1938,v.3,B26 A.
7. D i n g S h i a- S h i. Differential equations of mixed type.-"Acta Math.Sinica, 1955, v.5, N 2, p.193–204.
8. З а й н у л а б к д о в М. М. О некоторых краевых задачах для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения. – "Дифференц. уравнения", 1969, т. 5, № 1, с. 91–99.
9. Х е К а н Ч е р. О задаче Трикоми для одного уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения. – В кн.: Динамика сплошной среды, Новосибирск, 1974, вып. 16, с. 112–119.
10. И с а м у х а м е д о в С. С. Некоторые краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода. – Автореферат канд. диссертации, Ташкент, 1975.