УДК 517.518.22

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ, ИМЕЮЩЕЙ ЗАДАННУЮ ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВЕСОВОЙ НОРМЫ

М.М.З а р у б и н (Новосибирск)

Пусть на некотором достаточно широком классе функций задано семейство норм $\|\cdot\|_{\gamma_1,\dots,\gamma_k}$, зависящих от нескольких вещественных параметров ($\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k$); для фиксированной функции $\varphi(x)$ из этого класса через $\mathcal{A}(\varphi)$ обозначим множество параметров, при которых $\|\varphi\|_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k}$ конечна. Другими словами, $\mathcal{A}(\varphi)$ определяет запас нормированных пространств, содержащих φ в качестве своего элемента. Вопрос о необходимых условиях, определяющих геометрию множеств $\mathcal{A}(\varphi)\subset R^k$, тесно связан с вопросом о вложении пространств с нормами $\|\cdot\|_{\gamma_1,\dots,\gamma_k}$ и исследован, в той или иной постановке, многими авторами (см. [4, 5, 6], а также обширную библиографию в [3]). Вопрос о достаточности этих условий является вопросом о "неулучшаемости" в целом для всего основного класса "вложений", полученных из необходимых условий, определяющих геометрию множеств $\mathcal{A}(\varphi)$ (см. [2]).

С.Л.Соболевым в [1] были получены необходимые условия на $\mathcal{A}(\varphi)$, где в качестве основного класса функций $\varphi(x)$ взят класс $L_{1,loc}(R^n)$ - локально суммируемых по Лебегу функций, а в качестве семейства $\|\cdot\|_{\gamma_1,\dots,\gamma_k}$ - некоторое двупараметрическое семейство весовых норм. В настоящей статье исследуется вопрос о достаточности условий С.Л.Соболева.

Пусть $\varphi(x): R^n\to R$, $\varphi\in L_{1,loc}(R^n)$; $\bar{M} \overset{def}{=} \{(\nu,\rho)\in R^2 \mid \rho\geq 1\}$. Положим

$\bar{\mathcal{A}}(\varphi) = \{(\nu, p) \in \bar{M} \mid |\varphi(x)|^p \cdot (1+|x|^2)^{\frac{\nu p}{2}} \in L_1(R^n)\}$ и, в соответствии с вышесказанным, назовем это множество областью существования весовой нормы функции $\varphi(x)$. Для геометрической наглядности удобно наряду с параметрами (ν, p) использовать параметры (ν, τ), определяемые соотношением

$$\nu = \nu, \quad \tau = \frac{n}{p}. \tag{1}$$

Преобразование (1) переводит множество $\bar{\mathcal{A}}(\varphi)$ в некоторое подмножество $\mathcal{A}(\varphi)$ полосы $M = \{(\nu, \tau) \in R^2 \mid 0 < \tau \leq n\}$, которое мы будем называть, как и $\bar{\mathcal{A}}(\varphi)$, областью существования весовой нормы функции $\varphi(x)$.

Необходимые условия С.Л.Соболева на $\mathcal{A}(\varphi)$, полученные в [1], состоят в следующем. Для фиксированной функции $\varphi \in L_{1,loc}(R^n)$ множество $\mathcal{A}(\varphi)$ 1) выпуклое; 2) вместе с каждой своей точкой (ν_0, τ_0), множество $\mathcal{A}(\varphi)$ содержит "резец", т.е. множество

$$B = \bigcup_{\nu < \nu_0} (\{\nu\} \times \{\tau_0 \leq \tau < \nu_0 + \tau_0 - \nu\}) \cap M$$

(см. рис.1).

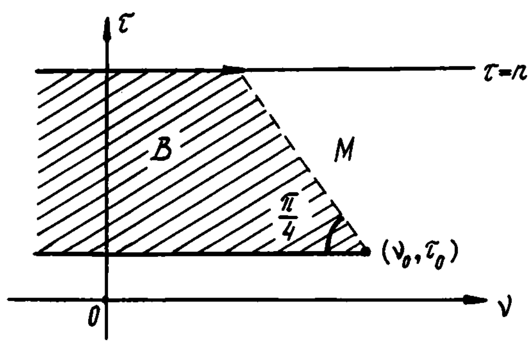


Рис. 1

(Здесь и далее заштрихованные области обозначают множество точек, принадлежащих $\mathcal{A}(\varphi)$. При этом часть границы заштрихованной области, обозначенная сплошной линией, включается в $\mathcal{A}(\varphi)$, а пунктиром обозначаются точки границы, не принадлежашие $\mathcal{A}(\varphi)$. Точка пересечения двух участков границы (пунктирного и сплошного) не включается в $\mathcal{A}(\varphi)$, если она выделена стрелкой, и включается в $\mathcal{A}(\varphi)$ в противном случае).

Поскольку в дальнейшем нам часто придется ссылаться на необходимые условия С.Л.Соболева, условимся первое из них обозначать через (V) , а второе – через (R) . Вопрос о достаточности условий (V), (R) , т.е. вопрос о существовании для каждого такого подмножества $\mathcal{A}$ полосы M функции $\varphi \in L_{1,loc}(R^n)$ такой, что $\mathcal{A}(\varphi) = \mathcal{A}$, оставался открытым. В настоящей работе будут построены функции $\varphi(x)$, реализующие достаточно широкий класс множеств, удовлетворяющих условиям (V), (R) . Тем самым будет доказано, что условия С.Л.Соболева на $\mathcal{A}(\varphi)$ близки к достаточным.

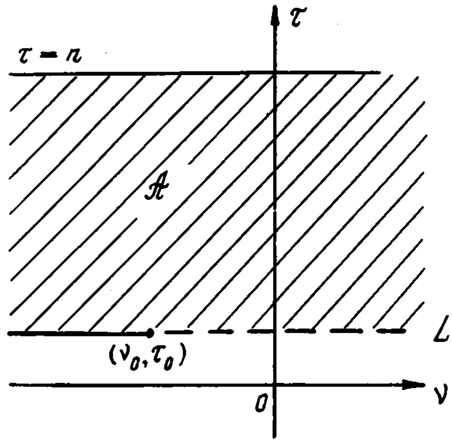
Л е м м а 1. <u>Пусть</u> φ_1 <u>и</u> φ_2 – <u>неотрицательные функции из</u> $L_{1,loc}(R^n)$. <u>Тогда</u> $\mathcal{A}(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathcal{A}(\varphi_1) \cap \mathcal{A}(\varphi_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(\nu_0, \tau_0) \in \mathcal{A}(\varphi_1) \cap \mathcal{A}(\varphi_2)$, тогда $\varphi_i(x)\cdot(1+|x|^2)^{\frac{\nu_0}{2}} \in L_{p_0}(R^n)$ $(i=1,2)$,

откуда $(\varphi_1 + \varphi_2)\cdot(1+|x|^2)^{\frac{\nu_0}{2}} \in L_{p_0}(R^n)$, т.е. $(\nu_0, \tau_0) \in$ $\in \mathcal{A}(\varphi_1 + \varphi_2)$. Обратно, так как $\left[\varphi_i(x)\cdot(1+|x|^2)^{\frac{\nu_0}{2}}\right]^{p_0} \leqslant$ $\leqslant \left[(\varphi_1 + \varphi_2)\cdot(1+|x|^2)^{\frac{\nu_0}{2}}\right]^{p_0}$ $(i=1,2)$, то $\mathcal{A}(\varphi_1 + \varphi_2) \subset$ $\subset \mathcal{A}(\varphi_1) \cap \mathcal{A}(\varphi_2)$.

Лемма 1 доказана.

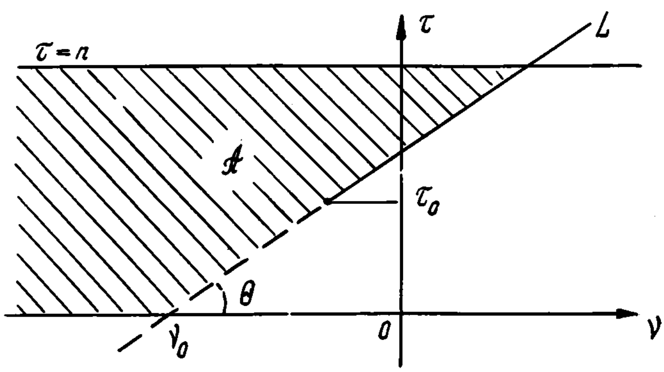
Это простое предложение служит удобным средством для решения нашей задачи, так как, имея в наличии запас неотрицательных функций, реализующих некоторое "базисное" семейство множеств, мы сможем, в силу леммы 1, реализовать множества более сложной конфигурации. В качестве такого выделенного семейства множеств удобно взять множества $\mathcal{A}$ следующего вида:



$\nu_0 \in R,$

$0 \leq \tau_0 \leq n\,.$

Рис. 2

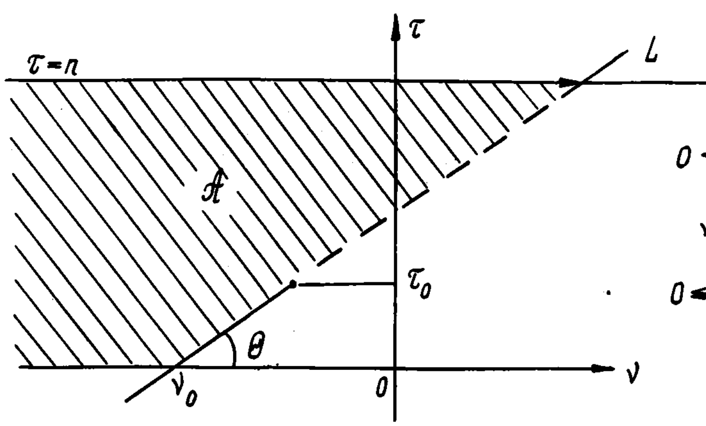


$0 < \theta \leq \dfrac{3\pi}{4}\,,$

$\nu_0 \in R,$

$0 \leq \tau_0 \leq n\,.$

Рис. 3



$0 < \theta \leq \dfrac{3\pi}{4},$

$\nu_0 \in R,$

$0 \leq \tau_0 \leq n\,.$

Рис. 4

(Заметим, что во всех трех случаях (рис. 2, 3, 4), точка, разделяющая L на два типа (по включению в $\mathcal{A}$), может, в свою очередь, либо включаться в множество $\mathcal{A}$, либо нет, кроме случаев $\nu_0 = \pm\infty$ на рис.2 и $\tau_0 = 0$ на рис. 3, 4, когда такое включение невозможно. Аналогично на рис.2 при $\tau_0 = 0$ возможен лишь случай $\nu_0 = -\infty$).

Удобство такого выбора заключается в том, что в силу леммы 1 и условий (V), (R) он полностью исчерпывает случай кусочно-линейной границы множества $\mathcal{A}$ Построение неотрицательных функций из класса $L_{1,loc}(R^n)$, реализующих множества вида 2, 3, 4 и будет основным результатом данной статьи.

Предварительно заметим, что, несмотря на простую геометрию множеств базисного семейства, реализующие их функции необходимо должны иметь достаточно сложную природу хотя бы при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Действительно, пусть $\varphi \in L_{1,loc}(R^n)$ и $\mathcal{A}(\varphi)$ имеет вид рис. 3, 4 с $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Тогда существует $\nu_1 \in R$ такое, что $|\varphi(x)|^p \cdot (1+|x|^2)^{\frac{\nu_1 p}{2}} \in L_1(R^n)$ $\forall p \geq 1$, откуда имеем $\varphi \in L_{p,loc}(R^n)$ $\forall p \geq 1$, следовательно,

$$|\varphi(x)| \cdot (1+|x|^2)^{\frac{\nu}{2}} \in L_{p,loc}(R^n) \quad \forall \nu \in R,\ p \geq 1.$$

Пусть теперь $(\nu_2, \tau_2) \in \mathcal{A}(\varphi)$, где $\nu_2 > \nu_0$ (такое значение найдется в силу условия $\theta < \frac{\pi}{2}$). Тогда $|\varphi(x)|^{p_2} \cdot (1+|x|^2)^{\frac{\nu_2 p_2}{2}} \in L_1(R^n)$ и, следовательно, $\mu\left\{x \in R^n \,\middle|\, |\varphi(x)| \cdot (1+|x|^2)^{\frac{\nu_2}{2}} \geq 1\right\} < \infty$, где μ – мера Лебега в R^n. С другой стороны, мера этого множества больше нуля, и оно неограниченно в евклидовой метрике, так как в противном случае имели бы $|\varphi(x)|^p \cdot (1+|x|^2)^{\frac{\nu_2 p}{2}} \in L_1(R^n)$ $\forall p > p_2$, что противоречит предположению $\theta > 0$. Таким образом, мы доказали, что функция, реализующая множество $\mathcal{A}$ вида 3 или 4 с $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, с необходимостью должна иметь "всплески" на некотором неограниченном множестве ненулевой конечной меры. Это простое рассуждение приводит к методу построения функций базисного семейства, который мы сейчас опишем. Близкий метод был использован О.В.Бесовым в [2] .

Т е о р е м а. Множества вида (см. рис. 2, 3, 4) являются областями существования весовой нормы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы мы построим неотрицательные функции из $L_{1,loc}(R^n)$, реализующие эти множества. Положим

$$W_k(r_k) \overset{def}{=} \{x \in R^n \,|\, ||x| - k| < r_k\}, \qquad (2)$$

где $k \in N$, $k \geq k_0$; $0 < r_k \leq \frac{1}{2}$.

Ясно, что при этом $W_j(r_j) \cap W_i(r_i) = \varnothing$, если $i \neq j$.

Положим, далее,

$$W = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} W_k(r_k).$$

Определим $k_0(\alpha, \beta, \gamma, \ell, q)$ и $\{r_k(\alpha, \beta, \gamma, \ell, q)\}_{k=k_0}^{\infty}$ из условия

$$\mu(W_k(r_k)) = \frac{1}{e^{\alpha e^k} \cdot e^{\beta k} \cdot (\ln(\ln k))^{\gamma} \cdot (\ln k)^{\ell} \cdot k^{1+q}} \qquad (3)$$

$$\forall k \geq k_0 \geq 3,$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = 0, 1 \;;\; \gamma = 0, 2 \;;\; \ell = \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2} \;;\; q \geq -n \;; \\ &\beta = 0 \text{ при } \alpha = 0 \text{ и } \beta = 0, 1, -1 \text{ при } \alpha = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Покажем, что этого всегда можно добиться, т.е. $\forall (\alpha, \beta, \gamma, \ell, q)$

удовлетворяющих (4), $\exists K_0 \in N$ и $\{ r_K \}_{K=K_0}^{\infty}$, $0 < r_K \leq \frac{1}{2}$, такие что выполнено (3).

Действительно, $\forall K \in N$ имеем

$$\mu\left(W_K\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot \left(\left(K+\frac{1}{2}\right)^n - \left(K-\frac{1}{2}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} \cdot K^{n-j} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^j - \left(-\frac{1}{2}\right)^j\right),$$

откуда в силу (4)

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\mu\left(W_K\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{\left(e^{\alpha e^K} \cdot e^{\beta K} \cdot (\ln(\ln K))^{\gamma} \cdot (\ln K)^{\ell} \cdot K^{1+q}\right)^{-1}} =$$

$$= \lim_{K\to\infty} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} \binom{j}{n} \cdot K^{n-j} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^j - \left(-\frac{1}{2}\right)^j\right)\right] \times$$

$$\times e^{\alpha e^K} \cdot e^{\beta K} \cdot (\ln(\ln K))^{\gamma} \cdot (\ln K)^{\ell} \cdot K^{1+q} = +\infty .$$

Значит, для заданных $(\alpha, \beta, \gamma, \ell, q)$, удовлетворяющих (4), $\exists K_0 \geq 3$, такое что $\forall K \geq K_0$, выполнено неравенство

$$\mu\left(W_K\left(\frac{1}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{e^{\alpha e^K} \cdot e^{\beta K} \cdot (\ln(\ln K))^{\gamma} \cdot (\ln K)^{\ell} \cdot K^{1+q}} . \tag{5}$$

Далее,

а) $\forall K \in N$ мера $\mu\left(W_K(r)\right)$ есть непрерывная строго возрастающая функция от r на $\left(0, \frac{1}{2}\right]$;

б) $\forall k \in N$ и $\forall \delta > 0$

$\exists r(k, \delta) > 0$, такое что $\mu\left(W_k(r)\right) < \delta$.

Воспользовавшись теперь (5) и свойством непрерывных на отрезке функций принимать все промежуточные значения, получим наше утверждение.

Итак, условия (3), (4) позволяют выбрать $k_0(\alpha, \beta, \gamma, \ell, q)$ и $\left\{r_k(\alpha, \beta, \gamma, \ell, q)\right\}_{k=k_0}^{\infty}$ и тем самым зафиксировать измеримое множество W .

Зададим теперь функцию $\varphi(x): R^n \longrightarrow R$ следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{te^{|x|}} \cdot \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\varkappa}{2}} \cdot \left(\ln(2+|x|)\right)^{\rho} & \text{при } x \in W, \\ 0 & \text{при } x \notin W; \end{cases} \qquad (6)$$

где $\varkappa$, ρ – произвольные действительные числа, а $t=0$, при $\alpha=0$, и произвольное действительное число при $\alpha=1$ (необходимость такого ограничения на параметр t будет видна из дальнейшего).

Очевидно, $\varphi(x) \geqslant 0$ на R^n и $\varphi \in L_{1,loc}(R^n)$.

Найдем $\mathcal{A}(\varphi)$. В силу (2) имеем

$$\int_{R^n} |\varphi(x)|^{p} \cdot \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\nu p}{2}} dx = \int_{W} |\varphi(x)|^{p} \cdot \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\nu p}{2}} dx =$$

$$= \sum_{k=k_0}^{\infty} \int_{W_k(r_k)} |\varphi(x)|^{p} \cdot \left(1+|x|^2\right)^{\frac{\nu p}{2}} dx.$$

Следовательно, $\overline{\mathcal{A}}(\varphi)$ состоит в точности из тех точек $(\nu, p) \in \overline{M}$, для которых сходится ряд

$$\sum_{\kappa=\kappa_0}^{\infty} \int\limits_{W_\kappa(\tau_\kappa)} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{p(\nu+æ)}{2}} \cdot \left(\ln(2+|x|)\right)^{p\rho} \cdot e^{pte^{|x|}} dx. \qquad (7)$$

В силу непрерывности подынтегральной функции, учитывая (3), имеем две очевидные оценки:

$$\forall \kappa \geq \kappa_0 \quad \int\limits_{W_\kappa(\tau_\kappa)} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{p(\nu+æ)}{2}} \cdot \left(\ln(2+|x|)\right)^{p\rho} \cdot e^{pte^{|x|}} dx \lesseqgtr$$

$$\lesseqgtr \left(1+|x_\kappa^{(i)}|^2\right)^{\frac{p(\nu+æ)}{2}} \cdot \left(\ln(2+|x_\kappa^{(i)}|)\right)^{p\rho} \cdot e^{pte^{|x_\kappa^{(i)}|}} \cdot \mu\left(W_\kappa(\tau_\kappa)\right) =$$

$$= \frac{\left(1+|x_\kappa^{(i)}|^2\right)^{\frac{p(\nu+æ)}{2}} \cdot \left(\ln(2+|x_\kappa^{(i)}|)\right)^{p\rho} \cdot e^{pte^{|x_\kappa^{(i)}|}}}{e^{\alpha e^\kappa} \cdot e^{\beta\kappa} \cdot (\ln\kappa)^{\ell} \cdot (\ln(\ln\kappa))^{\gamma} \cdot \kappa^{1+q}}, \qquad (8)$$

где $i=1,2$; $|x_\kappa^{(i)}| \in [\kappa-\tau_\kappa, \kappa+\tau_\kappa]$.

(Здесь в случае неравенства $\leq$ ($\geq$), $x_\kappa^{(1)}$ ($x_\kappa^{(2)}$) обозначает точку максимума (соответственно минимума) подынтегральной функции).

Оба ряда (8) (мажоранта и миноранта ряда (7)) сходятся и расходятся одновременно с рядом

$$\sum_{\kappa=\kappa_0}^{\infty} \frac{\kappa^{p(\nu+æ)} \cdot (\ln\kappa)^{p\rho} \cdot e^{pte^\kappa}}{e^{\alpha e^\kappa} \cdot e^{\beta\kappa} \cdot (\ln\kappa)^{\ell} \cdot (\ln(\ln\kappa))^{\gamma} \cdot \kappa^{1+q}}. \qquad (9)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно взять предел отношения их членов. При $\alpha=0$, в силу условия (6) $t=0$, поэтому искомый предел равен единице (в этом случае достаточно ограниченности последовательности $\{\tau_\kappa\}_{\kappa=\kappa_0}^{\infty}$). При $\alpha=1$, t - произвольное действительное число, но условие (3), обеспечивающее нужную скорость убывания τ_K, снова дает существование предела, равного единице.

Таким образом, ряд (7) сходится и расходится одновременно с рядом (9). Отсюда, пользуясь хорошо известными фактами из теории рядов с положительными членами, получаем вид $\bar{\mathcal{A}}(\varphi)$:

$$\bar{\mathcal{A}}(\varphi) = \Big(\{\alpha - pt > 0\} \cup \{\alpha - pt = 0 \wedge \beta = 1\} \cup$$

$$\cup \{\alpha - pt = 0 \wedge \beta = 0 \wedge q - p(\nu + \varkappa) > 0\} \cup \{\alpha - pt = 0 \wedge$$

$$\wedge \beta = 0 \wedge q - p(\nu + \varkappa) = 0 \wedge \gamma = 0 \wedge \ell - p\rho > 1\} \cup$$

$$\cup \{\alpha - pt = 0 \wedge \beta = 0 \wedge q - p(\nu + \varkappa) = 0 \wedge \gamma = 2 \wedge$$

$\wedge\, \ell - p\rho \geq 1\}\Big) \cap \bar{M}$, где знак $\wedge$ означает совместное выполнение условий.

Применяя (1), получаем вид $\mathcal{A}(\varphi)$

$$\mathcal{A}(\varphi) = \Big(\{\tau\alpha > tn\} \cup \{\tau\alpha = tn \wedge \beta = 1\} \cup$$

$$\cup \{\tau\alpha = tn \wedge \beta = 0 \wedge \tau q > (\nu + \varkappa)\cdot n\} \cup \{\tau\alpha = tn \wedge$$

$$\wedge \beta = 0 \wedge \tau q = (\nu + \varkappa)\cdot n \wedge \gamma = 0 \wedge \tau(\ell - 1) > n\rho\} \cup$$

$$\cup \{\tau\alpha = tn \wedge \beta = 0 \wedge \tau q = (\nu + \varkappa)\cdot n \wedge \gamma = 2 \wedge$$

$$\wedge\, \tau(\ell - 1) \geq n\rho\}\Big) \cap M. \tag{10}$$

Легко проверить, что множества вида (10) пробегают семейства 2, 3, 4 при соответствующем выборе параметров $(\alpha, \beta, \gamma, \ell, q,$

$t,\ æ,\ \rho\})$, удовлетворяющих условиям (4), (6), при которых и получена (10).

I. $\alpha=0,\ \beta=0,\ t=0,\ q=0,\ æ,\ \rho\in R;$

1) $\ell=\frac{3}{2}$;

а) $\gamma=0$, $\Longrightarrow$ рис. 5.

б) $\gamma=2$, $\Longrightarrow$ рис. 5 с включением точки $(-æ,\ 2n\rho)$.

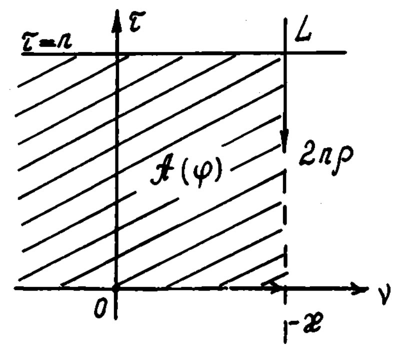


Рис. 5

2) $\ell=\frac{1}{2}$;

а) $\gamma=0$, $\Longrightarrow$ рис. 6 .

б) $\gamma=2$, $\Longrightarrow$ рис. 6 с включением точки $(-æ,\ -2n\rho)$.

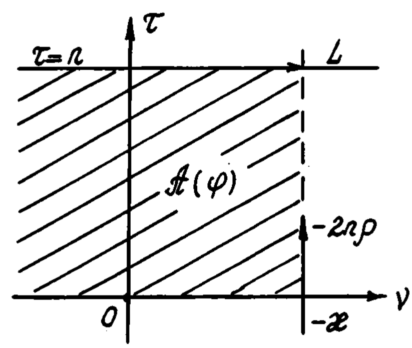


Рис. 6

П. $\alpha=0,\ \beta=0,\ t=0,\ q>0,\ æ,\rho\in R;$

1) $\ell=\frac{3}{2}$;

а) $\gamma=0$, $\Longrightarrow$ рис. 7.

б) $\gamma=2$, $\Longrightarrow$ рис. 7 с включением точки, разделяющей L .

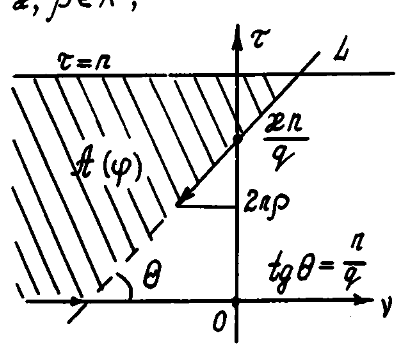


Рис. 7

2) $\ell = \frac{1}{2}$;

а) $\gamma = 0$, $\Longrightarrow$ рис. 8.

б) $\gamma = 2$, $\Longrightarrow$ рис. 8 с включением точки, разделяющей L .

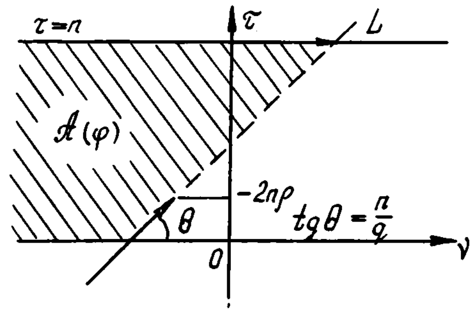


Рис. 8

Ш. $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $t = 0$, $-n \leq q < 0$, $\varkappa, \rho \in R$.

Множество $A(\varphi)$ имеет такой же вид как и в П, но $tg\,\theta < 0$.

1У. $\alpha = 1$, $\gamma = 0$, $t \in R$;

1) $\rho = 0$, $q = -1$, $\varkappa = 0$, ℓ - любое из $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$;

а) $\beta = 1$, $\Longrightarrow$ рис. 9.

б) $\beta = -1$, $\Longrightarrow$ рис. 10.

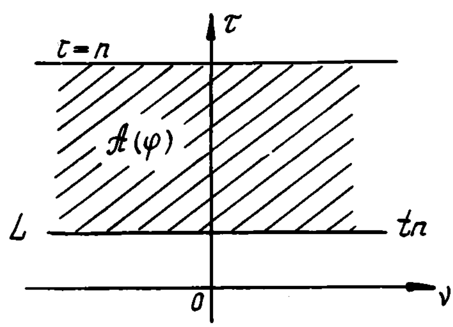


Рис. 9

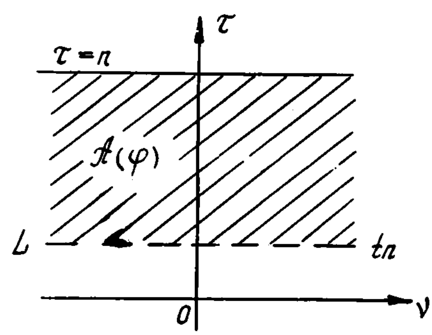


Рис. 10

2) $q = 0$, $\beta = 0$, $\ell = 1$, $\varkappa \in R$;

а) $\rho = 0$, $\Longrightarrow$ рис. 11.

б) $\rho < 0$ (любое), $\Longrightarrow$ рис. 11 с включением точки $(-\varkappa, tn)$.

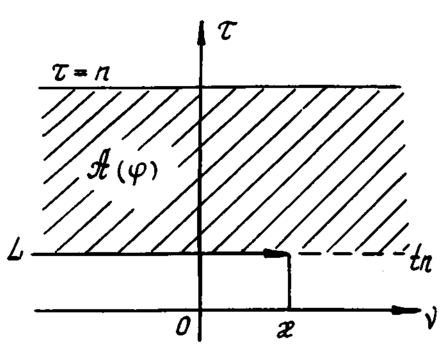


Рис. 11

Из рис. 5–11 видно, какую роль играет каждый из параметров $(\alpha, \beta, \gamma, \ell, q, t, \varkappa, \rho)$. Параметр α отделяет случай $\theta=0$ ($\alpha=1$) от случаев $0<\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$ ($\alpha=0$). При $\alpha=0$ параметр q определяет наклон L, $\varkappa$ определяет параллельный сдвиг L, ℓ – "верх–низ" (т.е. разделяет семейства 3, 4), γ – включение разделяющей L точки, ρ – высоту раздела, t и β не участвуют. При $\alpha=1$, наоборот, активно участвуют t и β : t определяет высоту L, β определяет тип L; остальные параметры играют здесь вспомогательную роль.

Теорема полностью доказана.

Заметим, что отдельные множества семейств 2, 3 и 4 могут быть реализованы, конечно, и несколько более простыми функциями. Например, $\varphi(x) \equiv (1+|x|^2)^{\frac{\varkappa}{2}}$ на R^n, реализует 12, а $\varphi(x)\equiv\frac{1}{|x|^t\cdot e^{|x|}}$ реализует 13.

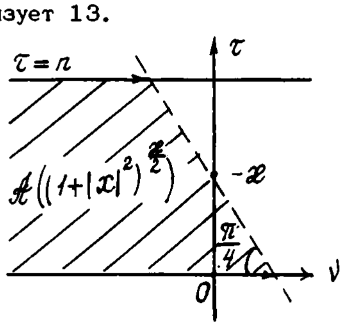


Рис. 12

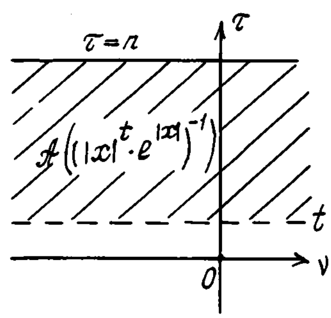


Рис. 13

Но преимущество метода (3), (6) состоит в единообразной реализации сразу всех элементов семейств 2, 3, 4, что делает удобным осуществление предельных переходов по функциям базисного семейства. Кроме того, метод, использованный в теореме, может быть применен и к другим весам соответствующим подбором множества "всплесков" W и самой функции $\varphi(x)$ на нем.

Итак, случай кусочно-линейной границы множества $\mathcal{A}$ рассмотрен полностью, причем функция, реализующая каждое такое множество, может быть выписана явно ($\varphi(x)$ есть конечная сумма функций, построенных в теореме). В частности, резцы 1, П и Ш типов, выделенные С.Л.Соболевым в [1] , оказались действительно областями существования весовой нормы.

Для того чтобы реализовать множества $\mathcal{A}$, удовлетворяющие (V), (R) , граница которых задается гладкой функцией, а сами граничные точки целыми кусками включаются в $\mathcal{A}$, либо не принадлежат ему, достаточно проинтегрировать по параметру соответствующее подмножество базисного семейства функций и применить затем операцию конечного суммирования. Полученная в результате функция, в силу леммы 1, будет иметь требуемую область существования весовой нормы.

Ниже мы докажем, что граница множеств, удовлетворяющих условиям (V), (R) , допускает аналитическое представление с нужной для наших целей гладкостью.

Пусть $\mathcal{A} \subset M$ удовлетворяет условиям (V) и (R) . Положим $\xi_0(\mathcal{A}) = \sup\{\nu \mid \exists (\nu,\tau) \in \mathcal{A}\}$ (если $\mathcal{A} = \varnothing$, то, по определению, $\xi_0(\mathcal{A}) = -\infty$). Покажем, что случай $\xi_0(\mathcal{A}) = \pm\infty$ исчерпывается семейством 2.

Л е м м а 2. <u>Множество</u> $\mathcal{A}$, <u>удовлетворяющее</u> (V), (R) , <u>принадлежит семейству 2 тогда и только тогда, когда</u> $\xi_0(\mathcal{A}) = \pm\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mathcal{A}$ имеет вид 2, то $\xi_0(\mathcal{A}) = \pm\infty$. Покажем обратное. Пусть $\xi_0(\mathcal{A}) = +\infty$ (случай $\xi_0(\mathcal{A}) = -\infty$ очевиден), тогда $\mathcal{A} \neq \varnothing$. Положим $\tau_0 = \inf\{\tau \mid \exists (\nu,\tau) \in \mathcal{A}\}$, очевидно, $n \geq \tau_0 \geq 0$. Покажем, что $\mathring{\mathcal{A}}$ - внутренность множества $\mathcal{A}$ в R^2 совпадает с $\{(\nu,\tau) \in R^2 \mid \tau_0 < \tau < n\}$. Действительно, $\mathcal{A} \subset \{(\nu,\tau) \in R^2 \mid \tau_0 \leq \tau \leq n\}$, откуда следует, что $\mathring{\mathcal{A}} \subset$

$\subset \{(\nu,\tau)\in R^2 \mid \tau_0 < \tau < n\}$. Обратно, пусть $(\nu,\tau)\in R^2$, где $\tau_0 < \tau < n$. Тогда, взяв $(\nu_1,\tau_1)\in \mathcal{A}$ такую, что $\tau_1<\tau$, $\nu_1<\nu$, и $(\nu_2,\tau_2)\in\mathcal{A}$ такую, что ν_2 достаточно велико (они существуют в силу определения τ_0 , условия (R) и $\xi_0(\mathcal{A})=+\infty$), и проведя через них прямую L , получим, что точка (ν,τ) вместе со своей окрестностью лежит выше L (см. рис. 14).

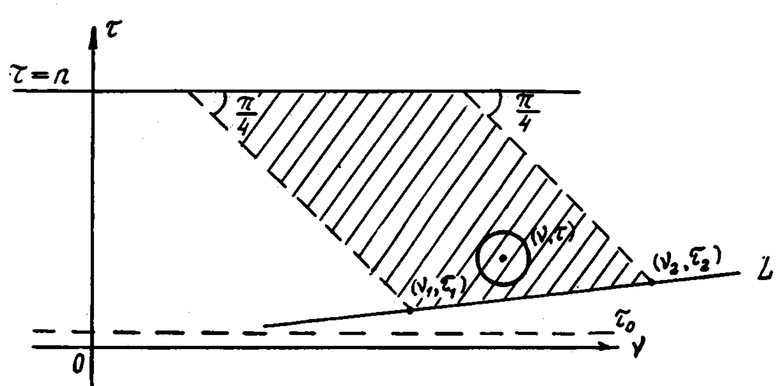


Рис. 14

Отсюда в силу условий (V) и (R) следует, что $(\nu,\tau)\in\mathring{\mathcal{A}}$.

Итак, $\mathring{\mathcal{A}} = \{(\nu,\tau)\in R^2 \mid \tau_0<\tau<n\}$. Снова использовав условие (R) , получим, что $\mathcal{A}$ имеет вид 2.

Лемма 2 доказана.

Таким образом, нас теперь могут интересовать лишь множества $\mathcal{A}$, такие, что $\xi_0(\mathcal{A})\in R$. Исследуем вид таких множеств. Заметим, что в силу (V) и (R) для каждого $\nu<\xi_0(\mathcal{A})$ множество $\{\tau \mid (\nu,\tau)\in\mathcal{A}\}$ образует непустой промежуток; его концы обозначим $\tau_\nu^{(1)}$ и $\tau_\nu^{(2)}$,

$$\tau_\nu^{(1)} \le \tau_\nu^{(2)} \qquad (*)$$

При этом, в силу тех же условий, имеем:

$$\begin{cases} \tau_{\nu_1}^{(1)} \leq \tau_{\nu_2}^{(1)}, \\ \tau_{\nu_1}^{(2)} \geq \tau_{\nu_2}^{(2)} \quad \forall \nu_1 \leq \nu_2 < \xi_0(\mathcal{A}) . \end{cases} \qquad (**)$$

Л е м м а 3. Пусть $\partial\mathcal{A}$ - граница множества $\mathcal{A}$, удовлетворяющего условиям (V) и (R), такого что $\xi_0(\mathcal{A}) \in R$. Положим $\partial\mathcal{A}(\nu) \overset{def}{=} \{\tau \mid (\nu, \tau) \in \partial\mathcal{A}\}$. Тогда

$$\partial\mathcal{A}(\nu) = \begin{cases} \{\tau_\nu^{(1)}, \tau_\nu^{(2)}\}, \text{ при } \nu < \xi_0(\mathcal{A}); \\ \{\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2\}, \text{ при } \nu = \xi_0(\mathcal{A}), \text{ где } \tau_1, \tau_2 \text{ - некоторые числа}; \\ \varnothing, \text{ при } \nu > \xi_0(\mathcal{A}). \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\nu > \xi_0(\mathcal{A})$ утверждение очевидно. Пусть $\nu = \xi_0(\mathcal{A})$. Возьмем $\nu_n = \xi_0(\mathcal{A}) - \frac{1}{n}$ $(n \in N)$ и положим $\tau_1 = \sup\limits_N \{\tau_{\nu_n}^{(1)}\}$, $\tau_2 = \inf\limits_N \{\tau_{\nu_n}^{(2)}\}$.

В силу $(*)$ и $(**)$ имеем $\tau_1 \leq \tau_2$. Покажем, что $\partial\mathcal{A}(\xi_0(\mathcal{A})) = \{\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2\}$. Очевидно, что $\{\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2\} \subset \partial\mathcal{A}(\xi_0(\mathcal{A}))$. Докажем, что других точек в $\partial\mathcal{A}(\xi_0(\mathcal{A}))$ нет. Пусть $\tau_0 > \tau_2$ или $\tau_0 < \tau_1$. Возьмем некоторую кубическую ε-окрестность $O_\varepsilon(\tau_0)$ точки $(\xi_0(\mathcal{A}), \tau_0)$, где $\varepsilon < max(\tau_0 - \tau_2, \tau_1 - \tau_0)$; тогда, в силу определения τ_1 и τ_2, найдется $n_0 \in N$ такое, что $\{\nu_{n_0}, \tau_{n_0}^{(1)} \leq \tau \leq \tau_{n_0}^{(2)}\} \cap O_\varepsilon(\tau_0) = \varnothing$. Взяв теперь $O_\delta(\tau_0)$ с $\delta < min(\varepsilon, \frac{1}{n_0})$ и воспользовавшись $(**)$ получим, что $O_\delta(\tau_0) \cap \mathcal{A} = \varnothing$ и, следовательно, $\tau_0 \notin \partial\mathcal{A}(\xi_0(\mathcal{A}))$, что и требовалось.

Пусть, наконец, $\nu < \xi_0(\mathcal{A})$. Ясно, что $\tau_\nu^{(1)}, \tau_\nu^{(2)} \in \partial\mathcal{A}(\nu)$. Проверим, что других точек в $\partial\mathcal{A}(\nu)$ нет. Пусть вначале $\tau_\nu^{(1)} < \tau_0 < \tau_\nu^{(2)}$. Возьмем произвольное ν_1 такое, что $\nu < \nu_1 < \xi_0(\mathcal{A})$.

Если при этом окажется, что $\tau^{(1)}_{\nu_1} < \tau_0 < \tau^{(2)}_{\nu_1}$, то $\tau_0 \notin \partial\mathcal{A}(\nu)$ в силу (R). Пусть это не так, например, $\tau_0 \geq \tau^{(2)}_{\nu_1}$. Тогда, в силу условия (V), существует ν_2, такое, что $\nu < \nu_2 < \nu_1$ и $\tau^{(2)}_{\nu_2} > \tau_0$. Если к тому же выполнено и $\tau_0 > \tau^{(1)}_{\nu_2}$, то получаем предыдущий случай. Пусть $\tau_0 \leqslant \tau^{(1)}_{\nu_2}$, тогда, в силу условия (V), существует ν_3 такое, что $\nu < \nu_3 < \nu_2$ и $\tau^{(1)}_{\nu_3} < \tau_0$. Так как при этом $\tau^{(2)}_{\nu_3} \geqslant \tau^{(2)}_{\nu_2}$ (в силу (* *)), то $\tau^{(1)}_{\nu_3} < \tau_0 < \tau^{(2)}_{\nu_3}$, откуда следует, что $\tau_0 \notin \partial\mathcal{A}(\nu)$ при $\tau^{(1)}_{\nu} < \tau_0 < \tau^{(2)}_{\nu}$.

Возьмем теперь $\tau_0 > \tau^{(2)}_{\nu}$. Пусть опять $\mathcal{O}_\varepsilon(\tau_0)$ – кубическая ε-окрестность точки (ν, τ_0), где $\varepsilon < (\tau_0 - \tau^{(2)}_{\nu})$. Докажем, что существует $\nu_1 < \nu$ такая, что $\{\nu_1, \tau^{(1)}_{\nu_1} \leqslant \tau \leqslant \tau^{(2)}_{\nu_1}\} \cap$ $\cap\ \mathcal{O}_\varepsilon(\tau_0) = \varnothing$. Допустим противное, тогда $\forall \nu_1 < \nu$ выполнено $\tau^{(2)}_{\nu_1} \geqslant \tau_0 - \varepsilon$, следовательно, $\forall \nu_1 < \nu$ точки $\left(\nu_1, \tau = \dfrac{\tau_0 - \varepsilon + \tau^{(2)}_{\nu}}{2}\right)$ принадлежат $\mathcal{A}$. С другой стороны, так как $\nu < \xi_0(\mathcal{A})$, то существует $(\nu_2, \tau_2) \in \mathcal{A}$ такая, что $\nu_2 > \nu$. При этом выполнено $\tau_2 \leqslant \tau^{(2)}_{\nu_2} \leqslant \tau^{(2)}_{\nu}$, т.е. $\tau_2 \leqslant$ $\leqslant \tau^{(2)}_{\nu}$. Если $\tau_2 = \tau^{(2)}_{\nu}$, то нарушается условие (R). Если же $\tau_2 < \tau^{(2)}_{\nu}$, то прямая L (см. рис. 15), соединяющая точки (ν_2, τ_2) и $(\nu, \tau^{(2)}_{\nu})$, пересекает прямую $\left\{\tau = \dfrac{\tau_0 - \varepsilon + \tau^{(2)}_{\nu}}{2}\right\}$ в точке $\left(\nu_3, \dfrac{\tau_0 - \varepsilon + \tau^{(2)}_{\nu}}{2}\right)$, где $\nu_3 < \nu$. Точка $\left(\dfrac{\nu + \nu_3}{2},\ \dfrac{\tau_0 - \varepsilon + \tau^{(2)}_{\nu}}{2}\right) \in \mathcal{A}$, следовательно, отрезок, соединяющий ее с точкой $(\nu_2, \tau_2) \in \mathcal{A}$, в силу (V), состоит из точек $\mathcal{A}$. Противоречие с определением $\tau^{(2)}_{\nu}$.

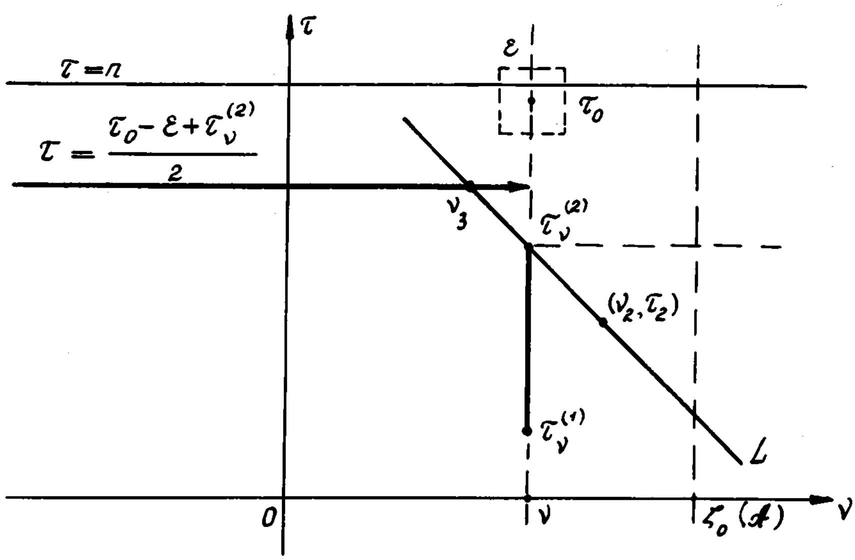


Рис. 15

Таким образом, мы доказали, что существует $\nu_1 < \nu$ такая, что $\{\nu_1, \tau^{(1)}_{\nu_1} \leqslant \tau \leqslant \tau^{(2)}_{\nu_1}\} \cap O_\varepsilon(\tau_0) = \varnothing$. Взяв $\delta = \min(\varepsilon, \nu - \nu_1)$ и воспользовавшись (* *), получим, что $O_\delta(\tau_0) \cap \mathcal{A} = \varnothing$, следовательно, $\tau_0 \notin \partial\mathcal{A}(\nu)$. Случай $\tau_0 < \tau^{(1)}_\nu$ рассматривается аналогично.

Лемма 3 доказана.

Заметим, что если $\xi_0(\mathcal{A}) \in R$, то всегда существует $\nu_1 \in R$ такое, что $\nu_1 < \xi_0(\mathcal{A})$, и $\forall\ \nu \leqslant \nu_1$ выполнено $\tau^{(2)}_\nu = n$. Возьмем верхнюю грань таких ν_1 и обозначим ее через ν_0 $(\nu_0 \leqslant \xi_0(\mathcal{A}))$. Положим, далее,

$$f_1(\nu) = \begin{cases} \tau_\nu^{(1)}, & \text{при } \nu < \xi_0(\mathcal{A}), \\ \tau_1 & \text{при } \nu = \xi_0(\mathcal{A}), \end{cases} \qquad f_2(\nu) = \begin{cases} \tau_\nu^{(2)} & \text{при } \nu_0 \leqslant \nu < \xi_0(\mathcal{A}), \\ \tau_2 & \text{при } \nu = \xi_0(\mathcal{A}), \end{cases}$$

где числа τ_1, τ_2 определены в лемме 3. Таким образом, получим общий вид границы множества $\mathcal{A}$, удовлетворяющего условиям (V) и (R) и такого, что $\xi_0(\mathcal{A}) \in R$ (см. рис. 16).

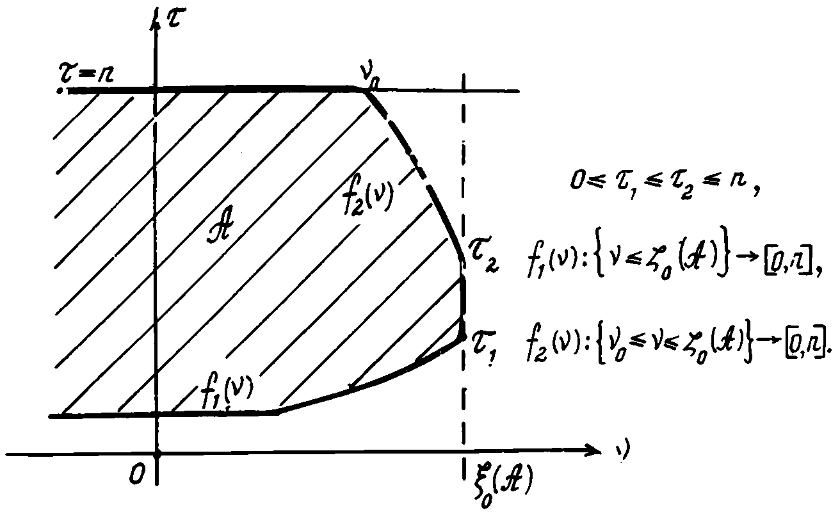


Рис. 16

Из (* *) и определения τ_1, τ_2 следует монотонность функций $f_1(\nu)$ и $f_2(\nu)$, следовательно, они могут иметь разрывы лишь первого рода. Но, как показывает анализ доказательства леммы 3, это невозможно. Таким образом, f_1 и f_2 – непрерывные монотонные функции, и $f_2(\nu_0) = n$. Кроме того, в силу монотонности они имеют обычную конечную производную во всех внутренних точках области своего задания, за исключением множества меры нуль (см. [7]); при этом $f_1'(\nu) \geq 0$, $f_2'(\nu) \leq -1$ (иначе нарушается условие (R)) и функции $f_1'(\nu)$, $f_2'(\nu)$, в свою очередь, монотонны в силу условия (V).

Данная гладкость функций $f_1(\nu)$ и $f_2(\nu)$ достаточна для интегрирования по параметру функций базисного семейства. Таким образом, задача построения функции, реализующей заданное множество $\mathcal{A}$, которое удовлетворяет условиям (V), (R), решена в случае "хорошего" включения в $\mathcal{A}$ точек границы.

Заметим, что если часть границы множества $\mathcal{A}$ представляет собой кусок прямой, то включение точек этой части границы в само множество $\mathcal{A}$ не произвольно, а регламентируется выпуклостью $\mathcal{A}$, т.е. представляет из себя некий промежуток. Иначе обстоит дело в случае "кривого" куска, так как тогда условия (V), (R) не накладывают на включение в $\mathcal{A}$ граничных точек никаких ограничений. Именно здесь содержатся основные трудности доказательства полной достаточности условий С.Л.Соболева, так как на "кривом" участке границы множество включенных в $\mathcal{A}$ точек совершенно произвольно (в частности, проекция его на ось ν может быть даже неизмеримой, что не позволяет воспользоваться интегрированием базисных функций).

Хотя доказательство полной достаточности условий (V), (R) представляет собой, по-видимому, трудную задачу, тем не менее из полученных результатов следует, что условия С.Л.Соболева близки к достаточным.

Литература

1. С о б о л е в С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., "Наука", 1974, с.200-207.
2. Б е с о в О.В. Один пример к теории теорем вложения. - "Докл. АН СССР", 1962, т.143, № 5, с.1014-1016.
3. Б е с о в О.В., И л ь и н В.П., Н и к о л ь с к и й С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., "Наука", 1975.
4. Г о л о в к и н К.К. Параметрически нормированные пространства и нормированные массивы. - "Труды Мат. ин-та АН СССР", 1969, т.106, с.1-135.
5. И л ь и н В.П. О неравенствах между нормами частных производных функций многих переменных. - "Труды Мат. ин-та АН СССР", 1965, т.84, с.144-173.

6. И л ь и н В.П. Об условиях справедливости неравенств между L_p – нормами частных производных функций многих переменных. – "Труды Мат. ин-та АН СССР", 1968, т.96, с.205-242.

7. Н а т а н с о н И.П. Теория функций вещественной переменной. М., "Наука", 1974, с.191-202.