УДК 517.5

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В.П.О р л о в, П.Е.С о б о л е в с к и й (Воронеж)

Начиная с классических работ С.Л.Соболева, изучение дифференциальных уравнений с частными производными существенно опирается на теоремы вложения. Этому направлению в теории уравнений с частными производными посвящено большое число работ. В частности, теоремы вложения для вырождающихся метрик важны при изучении вырождающихся дифференциальных уравнений. Библиографию по этому вопросу можно найти, например, в [1 - 4] и [17 - 20]. В этих работах, в частности, из суммируемости с весами некоторого набора старших производных делается вывод о существовании и суммируемости с весами "смешанных" и младших производных.

В работе [5] была развита теория коэрцитивно позитивных пар операторов. Эта теория позволяет свести вопрос об изучении областей определения дробных степеней некоторого класса операторов с частными производными к изучению областей определения дробных степеней одномерных операторов. Дробные степени одномерных невырождающихся операторов изучались в [21]. Изучению одномерных вырождающихся операторов были посвящены работы [6 - 9]. В них рассматривались краевые задачи в весовых гёльдеровских пространствах и в пространствах типа L_p . В отличие от других работ, главное внимание в них уделялось исследованию резольвенты вырождающихся операторов. Это дало возможность конструировать из одномерных операторов многомерные.

В настоящей работе с помощью теории коэрцитивно позитивных пар операторов найдены точные описания областей определения некоторого клас-

са вырождающихся дифференциальных операторов в банаховом пространстве и на этой основе получены новые теоремы вложения для таких операторов. При этом мы ограничиваемся изучением поведения функций вблизи границы вырождения. В приложениях, в частности, эти теоремы позволяют установить теоремы вложения для вырождающихся метрик типа теорем С.В.Успенского [1] и уточнить некоторые известные результаты.

Схема работы следующая. В пространстве Бохнера $B_p([0,\infty);E)$ функций со значениями в банаховом пространстве E рассматривается пара вырождающихся операторов A_1 и A_2. При некоторых ограничениях на коэффициенты доказывается, что операторы A_1 и A_2 образуют коэрцитивно позитивную пару операторов. Это позволяет получить описание областей определения дробных степеней оператора A_1+A_2 с помощью дробных степеней операторов A_1 и A_2.

§ 1. Вспомогательные утверждения и определения

1°. Функциональные пространства. Пусть $\rho(t)$ – скалярная функция, определенная и положительная на промежутке (a,b), $-\infty\le a<b<+\infty$. Обозначим через $B_p^*([a,b];E)$, $1<p<+\infty$, пространство, полученное замыканием множества всех гладких финитных на (a,b) и принимающих значения в банаховом пространстве E функций по норме

$$\|u\|_{B_p^*([a,b];E)}=\left(\int_a^b\|u(t)\|^p\rho(t)dt\right)^{1/p}.$$

В случае, когда $\rho(t)\equiv 1$, значок $*$ будем опускать. Обозначим через $W_p^n([a,b];E)$ и $W_p^{n,*}([a,b];E)$ пространства функций, имеющих на (a,b) обобщенные производные до порядка n, для которых конечны нормы

$$\|u\|_{W_p^n[a,b]}=\sum_{k=0}^n\|u^{(k)}(t)\|_{B_p([a,b];E)},$$

$$\|u\|_{W_p^{n,*}[a,b]} = \sum_{k=0}^{n} \|u^{(k)}(t)\|_{B_p^*([a,b];E)} .$$

Важную роль в дальнейшем будут играть следующие обобщения неравенств Ниренберга (см. [10]) на случай весовых пространств.

Л е м м а 1. Пусть функция $\rho(t)$ определена при всех $-\infty<t<+\infty$, $\rho(t)>0$, и при некотором $m>0$ выполнено неравенство

$$\rho(t_1) \leq m\rho(t_2), \quad -\infty < t_1 \leq t_2 < +\infty . \tag{1}$$

Пусть $u(t) \in W_p^n([-N,N];E)$ при любом $N>0$, причем $u^{(n)}(t)$ и $u(t)$ принадлежат $B_p^*((-\infty,\infty);E)$. Тогда при любых $\varepsilon>0$ и $j=1,2,\ldots,n-1$ справедливо неравенство

$$\|u^{(j)}(t)\|_{B_p^*(-\infty,\infty)} \leq \varepsilon \|u^{(n)}(t)\|_{B_p^*(-\infty,\infty)} + \frac{M}{\varepsilon^{n-j}} \|u(t)\|_{B_p^*(-\infty,\infty)} . \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $n=2$. Из тождества

$$u'(t) = \frac{u(t)-u(t+\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} (t+\varepsilon-s)u''(s)ds$$

в силу (1) вытекает, что

$$\|u'(t)\|\rho^{1/p}(t) \leq \frac{M}{\varepsilon}\Big[\rho^{1/p}(t)\|u(t)\| + \rho^{1/p}(t+\varepsilon)\|u(t+\varepsilon)\| +$$
$$+ \int_t^{t+\varepsilon} (t+\varepsilon-s) \times \rho^{1/p}(s)\|u''(s)\|\,ds\Big].$$

Отсюда с помощью замены переменной и интегрального неравенства Минковского получаем соотношение (2) при $n=2$ и $j=1$.

Лемма доказана.

Подобные неравенства в несколько другой форме устанавливались многими авторами (см. [11, 12] и др.).

Пусть непрерывная на $[0,\infty)$ скалярная функция $a_1(t)$ такова, что $a_1(0) = 0$, $a_1(t)>0$ при $t>0$, причем $a_1(t) \equiv 1$ при $t \geq 1$.

Пусть $a_1(t) \in C^n[0,\infty)$. Обозначим через $\frac{d^{[k]}}{dt^k}$ k-ю степень оператора $a_1(t)\frac{d}{dt}$.

Из леммы 1 вытекают

Л е м м а 2. Пусть функция $a_1(t)$ при всех $0 \leq t_1 \leq t_2 < +\infty$ удовлетворяет неравенству $a_1(t_1) \leq m a_1(t_2)$. Пусть функция $u(t) \in W_p^n([\varepsilon,\infty); E)$ при любом $\varepsilon > 0$, причем $u^{[n]}(t)$ и $u(t)$ принадлежат пространству $B_p([0,\infty); E)$. Тогда при любых $\varepsilon > 0$ и $j = 1, 2, \ldots, n-1$ справедливо неравенство

$$\|u^{[j]}(t)\|_{B_p[0,\infty)} \leq \varepsilon \|u^{[n]}(t)\|_{B_p[0,\infty)} + \frac{M}{\varepsilon^{n-j}} \|u(t)\|_{B_p[0,\infty)}.$$

Л е м м а 3. Пусть функция $a_1(t)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Пусть функции $a_1^n(t)u^{(n)}(t)$ и $u(t)$ принадлежат $B_p([0,\infty);E)$. Тогда при любых $\varepsilon > 0$ и $j = 1, 2, \ldots, n-1$ справедливо неравенство

$$\|a_1^j(t)u^{(j)}(t)\|_{B_p[0,\infty)} \leq \varepsilon \|a_1^n(t)u^{(n)}(t)\|_{B_p[0,\infty)} + \frac{M}{\varepsilon^{n-j}} \|u(t)\|_{B_p[0,\infty)}.$$

Для доказательства леммы 2 достаточно сделать замену

$$\tau = \int_1^t dz/a_1(z) \tag{3}$$

и положить $\rho(\tau) = a_1[t(\tau)]$. Для доказательства леммы 3 достаточно представить $a_1^j(t)u^{(j)}(t)$ в виде

$$a_1^j(t)u^{(j)}(t) = u^{[j]}(t) + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{kj}(t) u^{[k]}(t). \tag{4}$$

Здесь $\alpha_{kj}(t)$ ограничены, так как $a_1(t) \in C^n[0,\infty)$ и $a_1(t) \equiv 1$ при $t \geq 1$. Поэтому утверждение леммы 3 следует из (4) и леммы 2.

2^0. П о з и т и в н ы е о п е р а т о р ы. Обозначим через $S(\varphi)$, $0 \leq \varphi < \pi$, множество комплексных чисел вида

$$z = r\exp\{i\psi\}, \quad r \geq 0, \quad |\psi| \leq \varphi.$$

О п р е д е л е н и е 1. Действующий в банаховом пространстве X линейный оператор T называется позитивным, если его область определения $\mathcal{D}(T)$ плотна в X, операторы $T+\lambda$ при всех $\lambda \in S(\varphi)$ имеют в X ограниченные обратные, и справедлива оценка

$$\|(T+\lambda)^{-1}\| \leq M(1+|\lambda|)^{-1}. \tag{5}$$

Число $\varphi_T(X) = \inf\limits_{\varphi}(\pi-\varphi)$, где нижняя грань берется по всем φ, для которых имеет место (5), называется спектральным углом оператора T. Если $\varphi_T(X) < \frac{\pi}{2}$, то оператор называется сильно позитивным.

Для позитивного оператора T определены его любые степени T^{α}, положительные и отрицательные, целые и дробные (см. [13]). Отрицательные дробные степени при $0<\alpha<1$ определяются формулой

$$T^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \lambda^{-\alpha}(T+\lambda)^{-1} d\lambda. \tag{6}$$

Рассмотрим в X пару ограниченно обратимых операторов T_1 и T_2. Вводя на $\mathcal{D}(T_1)$ и $\mathcal{D}(T_2)$ нормы $\|y\|_{T_1} = \|T_1 y\|$ и $\|y\|_{T_2} = \|T_2 y\|$ соответственно, получаем пару банаховых пространств $\overline{\mathcal{D}}(T_1)$ и $\overline{\mathcal{D}}(T_2)$.

О п р е д е л е н и е 2. Позитивные операторы T_1 и T_2 называются почти коммутирующими, если

1) операторы $T_1 T_2$ и $T_2 T_1$ имеют одинаковую область определения $\mathcal{D}$;

2) существует число $0<\gamma<1$ такое, что при всех $y \in \mathcal{D}$ для оператора $\Delta(T_1,T_2) = T_1 T_2 - T_2 T_1$ справедливо неравенство

$$\|\Delta y\| \leq M(\|T_1 T_2 y\| + \|T_2 T_1 y\|)^{\gamma}(\|T_1 y\| + \|T_2 y\|)^{1-\gamma};$$

3) оператор T_1 позитивен в $\overline{\mathcal{D}}(T_2)$, причем $\varphi_{T_1}(\overline{\mathcal{D}}(T_2)) \leq \varphi_{T_1}(X)$;

4) оператор T_2 позитивен в $\bar{D}(T_1)$, причем $\varphi_{T_2}(\bar{D}(T_1)) \leq \varphi_{T_2}(X)$.

Определение 3. Позитивные операторы T_1 и T_2 образуют коэрцитивно позитивную пару (к.п.п.), если при всех $\mu > 0$ уравнение $T_1 x + \mu T_2 x = y$ разрешимо при любом $y \in X$, и справедливо неравенство

$$\|T_1 x\| + \mu \|T_2 x\| \leq M \|y\|, \quad M \neq M(y, \mu).$$

Теорема А. Пусть позитивные операторы T_1 и T_2 почти коммутируют и образуют к.п.п. Пусть $\varphi_{T_1}(X) + \varphi_{T_2}(X) < \pi$. Тогда определенный на $D = D(T_1) \cap D(T_2)$ оператор $T_1 + T_2$ имеет ограниченный обратный и при всех $0 \leq \gamma_1 + \gamma_2 \leq 1$, $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ справедливо неравенство

$$\|T_1^{\gamma_1} T_2^{\gamma_2} (T_1 + T_2)^{-1}\| + \|T_2^{\gamma_1} T_1^{\gamma_2} (T_1 + T_2)^{-1}\| \leq M.$$

(Определение 1 см. в [13], определения 2, 3 и теорему А см. в [5].)

§ 2. Дробные степени абстрактных вырождающихся операторов

В банаховом пространстве $B_p([0,\infty); E)$ рассматриваются операторы

$$A_1 u(t) = (-1)^r a_1^n(t) u^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) a^k(t) u^{(k)}(t) + \kappa_1 u(t), \tag{7}$$

$$A_2 u(t) = a_2(t) A u(t) + \kappa_2 u(t). \tag{8}$$

Здесь A – сильно позитивный в E оператор, $\gamma_k(t)$ – измеримые и ограниченные на оси скалярные функции, $r = \left[\frac{n}{2}\right]$, κ_1 и κ_2 – некоторые положительные числа. Непрерывные на $[0,\infty)$ функции $a_i(t)$ таковы, что $a_i(t) > 0$ при $t > 0$, $a_i(t) \equiv 1$ при

$t \geq 1$ и $a_1(0) = 0$. Значение $a_2(t)$ при $t = 0$ может быть как равным нулю, так и отличным от нуля. Таким образом, A_1 и A_2 – это вырождающиеся, вообще говоря, в нуле операторы. Область определения $D(A_1)$ оператора A_1 состоит из таких функций $u(t) \in B_p([0,\infty); E)$, что $u(t)$ имеют при $t > 0$ обобщенные производные до порядка n и $a_1^i(t) u^{(i)}(t) \in B_p([0,\infty); E)$ при $0 \leq i \leq n$.

Область определения $D(A_2)$ оператора A_2 состоит из таких функций $u(t) \in B_p([0,\infty); E)$, что $u(t) \in D(A)$ почти при всех $t > 0$ и $a_2(t) Au(t) \in B_p([0,\infty); E)$.

Кроме указанных выше ограничений на коэффициенты операторов A_1 и A_2 , потребуем, чтобы выполнялись следующие четыре условия.

Условие 1. Существуют такие константы $m > 0$, $\delta_1 > 0$ и неотрицательная функция $\omega(z)$, что при всех $t, \tau \in (0,\infty)$ справедливы неравенства

$$a_1(t)/a_1(\tau) \leq m \exp\left\{\delta_1 \int_\tau^t dz/a_1(z)\right\}, \tag{9}$$

$$\left|1 - a_1^{1/p}(t)/a_1^{1/p}(\tau)\right| \leq \omega\left(\int_\tau^t dz/a_1(z)\right), \tag{10}$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\delta_2 |z|\}\, \omega(z)\, dz/|z| < +\infty \tag{11}$$

при некотором $\delta_2 > 0$.

Условие 2. Функция $a_2(t)$ непрерывна на $[0,\infty)$, n раз непрерывно дифференцируема при $t > 0$, и при всех $t, \tau \in (0,\infty)$ справедливо неравенство

$$\left|1 - a_2(t)/a_2(\tau)\right| \leq \varphi\left(\left|\int_\tau^t dz/a_1(z)\right|\right), \tag{12}$$

где непрерывная при $z \geq 0$ функция $\varphi(z)$ такова, что $\varphi(z) \to 0$ при $z \to 0$

Условие 3. При $0 \leq i \leq n$ и $t > 0$ справедливы неравенства

$$\frac{a_2^{(i)}(t)\,a_1^i(t)}{a_2(t)} \leq M. \tag{13}$$

Условие 4. Уравнение

$$(-1)^r u^{(n)}(t) + Au(t) = f(t) \tag{14}$$

коэрцитивно разрешимо (к.р.) в $B_p((-\infty,\infty); E)$. Это означает, что при любой $f(t) \in B_p((-\infty,\infty); E)$ существует единственное решение $u(t)$ уравнения (14) и справедливо неравенство

$$\| u^{(n)}(t) \|_{B_p(-\infty,\infty)} + \| Au(t) \|_{B_p(-\infty,\infty)} \leq M \| f(t) \|_{B_p(-\infty,\infty)}. \tag{15}$$

Под решением уравнения (14) понимается такая функция $u(t) \in W_p^n((-\infty,\infty); E)$, что почти при всех $t \in (-\infty,\infty)$ справедливо (14). В [7, 9] показано, что из к.р. уравнения (14) в $B_{p_0}((-\infty,\infty); E)$ при некотором $p_0 \in (1, \infty)$ вытекает его к.р. в $B_p((-\infty,\infty); E)$ при любом $p \in (1, \infty)$

Замечание 1. Условию 1 удовлетворяют функции, достаточно быстро убывающие при $t \to 0$. Например, в качестве $a_1(t)$, $0 \leq t \leq 1$, можно брать функции t^α $(\alpha \geq 1)$, $exp\{-t^{-\beta}\}$ $(\beta > 0)$ и др. В качестве функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$, удовлетворяющих условиям 2 и 3 при $0 < t \leq 1$, можно брать пары функций t^α и t^β $(\alpha \geq 1,\ \beta > 0)$, $exp\{-t^{-\alpha}\}$ и t^β $(\alpha, \beta > 0)$, t^α $(\alpha, \beta > 0)$, $t^\alpha (\alpha \geq 1)$ и $a_2(t) \equiv 1$ и др. Таким образом, условия 1–3 выделяют достаточно широкий класс функций. Отметим, что условие 3 требует от функции $a_2(t)$ определенной подчиненности функции $a_1(t)$.

Рассмотрим теперь на $D_1 = D(A_1) \cap D(A_2)$ оператор

$$(A_1 + A_2)v = A_1 v + A_2 v.$$

Для операторов A_1, A_2 и $A_1 + A_2$ справедливы следующие результаты. Во-первых, имеет место

Теорема 1. При выполнении условий 1-4 операторы A_1 и A_2 образуют к.п.п. в пространстве $B_p([0,\infty); E)$.

Во-вторых, для вырождающихся операторов, как и для обычных дифференциальных операторов, результат дифференцирования в главном не зависит от порядка, в котором производится дифференцирование. Точнее говоря, порядок коммутанта таких операторов меньше суммы порядков этих операторов.

Обозначим через $D(A_1 A_2)$ и $D(A_2 A_1)$ области определения операторов $A_1 A_2$ и $A_2 A_1$ соответственно.

Лемма 4. $D(A_1 A_2) = D(A_2 A_1) = D_2$.

Обозначим через $\Delta(A_1, A_2)$ оператор $A_1 A_2 - A_2 A_1$.

Лемма 5. При любом $u \in D_2$ справедлива оценка

$$\|\Delta(A_1, A_2)\|_{B_p} \leqslant M\left(\|A_1 A_2 u\|_{B_p} + \|A_2 A_1 u\|_{B_p}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\|A_1 u\|_{B_p} + \|A_2 u\|_{B_p}\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (16)$$

Перейдем теперь к спектральным свойствам вырождающихся операторов. Будем рассматривать операторы A_1 и A_2 в банаховом пространстве $B_p([0,\infty); E)$ и их сужения на банаховы пространства $\bar{D}(A_1)$ и $\bar{D}(A_2)$ соответственно. Здесь через $\bar{D}(A_1)$ обозначено пространство всех элементов $v \in D(A_1)$ с нормой

$$\|v\|_{\bar{D}(A_1)} = \|A_1 v\|_{B_p[0,\infty)} + \|v\|_{B_p[0,\infty)},$$

а через $\bar{D}(A_2)$ – пространство всех элементов $v \in D(A_2)$ с нормой

$$\|v\|_{\bar{D}(A_2)} = \|A_2 v\|_{B_p[0,\infty)} + \|v\|_{B_p[0,\infty)}.$$

Лемма 6. Оператор A_1 позитивен в $B_p([0,\infty); E)$ и $\bar{D}(A_2)$, причем

$$\varphi_{A_1}(\bar{D}(A_2)) \leqslant \varphi_{A_1}(B_p([0,\infty); E)). \quad (17)$$

Л е м м а 7. Оператор A_2 позитивен в $B_p([0,\infty);E)$ и $\bar{D}(A_1)$, причем

$$\varphi_{A_2}(\bar{D}(A_1)) \leq \varphi_{A_2}(B_p([0,\infty);E)). \qquad (18)$$

Т е о р е м а 2. В условиях 1–4 операторы A_1 и A_2 – почти коммутирующие позитивные операторы в $B_p([0,\infty);E)$.

Наконец, из теорем 1,2 и А вытекает

Т е о р е м а 3. Определенный на D_1 оператор A_1+A_2 имеет ограниченный обратный в $B_p([0,\infty);E)$, и для всех неотрицательных γ_1 и γ_2 таких, что $0 \leq \gamma_1+\gamma_2 \leq 1$, операторы $A_1^{\gamma_1}A_2^{\gamma_2}(A_1+A_2)^{-1}$ и $A_2^{\gamma_2}A_1^{\gamma_1}(A_1+A_2)^{-1}$ ограничены в $B_p([0,\infty);E)$.

Следующие два параграфа посвящены доказательству теорем 1 и 2.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Заменой переменной (3) доказательство теоремы 1 сводится к установлению однозначной разрешимости уравнения

$$(-1)^r u^{(n)}(\tau)+\sum_{k=0}^{n-1}\bar{\gamma}_k(\tau)u^{(k)}(\tau)+\mu\beta(\tau)Au(\tau)+(\mu k_2+k_1)u(\tau)=\varphi(\tau) \qquad (19)$$

в пространстве $B_p^*((-\infty,\infty);E)$, $\rho(\tau)=a_1[t(\tau)]$, при любых $\varphi(\tau)\in B_p^*$ и $\mu>0$ и доказательству оценки

$$\sum_{k=0}^{n}\|u^{(k)}(\tau)\|_{B_p^*}+\mu\|\beta(\tau)Au(\tau)\|_{B_p^*}+(\mu k_2+k_1)\|u(\tau)\|_{B_p^*}\leq M\|\varphi(\tau)\|_{B_p^*}. \qquad (20)$$

Здесь $\beta(\tau)=a_2[t(\tau)]$, $\bar{\gamma}_k(\tau)$ –измеримые и ограниченные на оси функции, а M не зависит от μ и $\varphi(\tau)$. Изучим сначала уравнение

$$(-1)^r u^{(n)}(\tau)+\mu\beta(\tau)Au(\tau)+ku(\tau)=\varphi(\tau). \qquad (21)$$

Для решения этого уравнения естественнс попытаться использовать метод "замороженных" коэффициентов. Однако специфика задачи состоит в том, что коэффициент $\beta(\tau)\to 0$ при $\tau\to-\infty$. Непосредственное применение этого

метода невозможно, так как из включения $\beta(\tau)Au(\tau)\in B_p^*$ не следует, что $\beta(\tau_0)Au(\tau)\in B_p^*$. Поэтому приходится несколько модифицировать известный (см., например, [14]) метод.

Прежде всего доказывается разрешимость уравнения (21). Для этого сначала строится правый регуляризатор, т.е. "почти" правый обратный оператор. Затем правая часть (21) представляется в виде суммы функций с малыми носителями, и "почти" решение представляется в виде суммы соответствующих этим правым частям решений уравнений с "замороженными" коэффициентами. На втором этапе устанавливается априорная оценка решения, которая позволяет доказать однозначную разрешимость уравнения (21).

Докажем сначала ряд вспомогательных утверждений. В [9] показано, что если выполнены условия 1 и 4, то при достаточно большом λ_0, всех $\lambda\geqslant 0$ и $\varphi(\tau)\in B_p^*$ уравнение $(-1)^r u^{(n)}(\tau)+Au(\tau)+(\lambda+\lambda_0)u(\tau)=\varphi(\tau)$ однозначно разрешимо в B_p^* и справедлива оценка

$$\sum_{k=0}^{n}\left(1+\lambda^{\frac{n-k}{n}}\right)\|u^{(k)}(\tau)\|_{B_p^*}+\|Au\|_{B_p^*}\leqslant M\|\varphi\|_{B_p^*}.$$

Нам понадобится более общий факт. Именно, справедлива

Л е м м а 8. Существует такое число r_2^0, что при всех $r_2\geqslant r_2^0$ и любом $r_1>0$ уравнение

$$(-1)^r u^{(n)}(\tau)+(r_2+r_1A)u(\tau)=\varphi(\tau) \tag{22}$$

однозначно разрешимо в B_p^* и справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{n}(1+r_2)^{\frac{n-k}{n}}\|u^{(k)}(\tau)\|_{B_p^*}+r_2\|u\|_{B_p^*}+r_1\|Au\|_{B_p^*}\leqslant M\|\varphi\|_{B_p^*}, \tag{23}$$

причем M не зависит ни от r_1, ни от r_2, ни от $\varphi(\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заменой $t=r_1^{1/n}\tau$ изучение уравнения (22) в B_p^* с весом $\rho(\tau)$ сводится к изучению уравнения

$$(-1)^r v^{(n)}(t)+\left(\frac{r_2}{r_1}+A\right)v(t)=\frac{1}{r_1}f(t) \tag{24}$$

в пространстве B_p^{**} с весом $\bar{\rho}(t)=r_1^{-1/n}\rho\left(\frac{t}{r_1^{1/n}}\right)$. В [9] показано, что при гладкой и финитной $f(t)$ решение уравнения (24) существует и задается формулой

$$v(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G\left(t,s,\frac{r_2}{r_1}\right)\frac{1}{r_1}f(s)ds. \tag{25}$$

Здесь $G(t,s,\lambda)$ – оператор-функция, которая называется функцией Грина. Получим оценку нормы $v(t)$ через норму $f(t)$. Из формулы (25) получаем

$$\left(\frac{r_2}{r_1}+A\right)v_1(t)=\frac{1}{r_1}\left(A+\frac{r_2}{r_1}\right)\int_{-\infty}^{\infty}G\left(t,s,\frac{r_2}{r_1}\right)\left[\rho^{-1/p}(t)\rho^{1/p}(s)-1\right]f_1(s)ds+$$

$$+\frac{1}{r_1}\left(A+\frac{r_2}{r_1}\right)\int_{-\infty}^{\infty}G\left(t,s,\frac{r_2}{r_1}\right)f_1(s)ds=\frac{1}{r_1}R_1f_1+\frac{1}{r_1}R_2f_1.$$

Здесь $\psi_1(t)=\rho^{-1/p}(t)\psi(t)$. В [9] приведена равномерная по $\lambda\geqslant 0$ оценка

$$\|(A+\lambda)G(t,s,\lambda)\|\leqslant M|t-s|^{-1}exp\{-\beta(1+\lambda^{1/n})|t-s|\}\quad(\beta>0),$$

которая позволила, во-первых, получить равномерную по r_1 и r_2 оценку оператора R_2. Во-вторых, с помощью этой же оценки и неравенства (10) получаем, что

$$\|R_1f_1\|\leqslant M\int_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-\beta\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/n}|t-s|\right\}\omega\left(\frac{t-s}{r_1^{1/n}}\right)\|f_1(s)\|\frac{ds}{|t-s|}.$$

Делая замену $\tau=t-s$ и применяя интегральное неравенство Минковского, получаем, что

$$\|R_1f_1\|_{B_p}\leqslant M\int_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-\beta\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/n}|\tau|\right\}\omega\left(\frac{\tau}{r_1^{1/n}}\right)\frac{d\tau}{|\tau|}\|f_1\|_{B_p}.$$

Преобразуя множитель перед $\|f_1\|_{B_p}$ к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-\beta\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/n}r_1^{1/n}|z|\right\}\omega(z)dz/|z|, \tag{26}$$

выбирая r_2^0 достаточно большим и пользуясь (11), получаем равномерную по всем $r_1>0$ и $r_2 \geqslant r_2^0$ оценку интегралов (26). Из оценок норм операторов R_1 и R_2 вытекает неравенство

$$r_1 \|v^{(n)}(t)\|_{B_p^{**}} + r_2 \|v\|_{B_p^{**}} + r_1 \|Av\|_{B_p^{**}} \leqslant M\|f\|_{B_p^{**}} .$$

Лемма доказана.

Перейдем теперь к уравнению (21) с переменным коэффициентом $\beta(\tau)$. Построим гладкое разбиение оси следующим образом. Пусть δ - некоторое положительное число, $0<\alpha<1$ и $\varphi^*(\tau)$ - некоторая неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, такая, что

$$\varphi^*(\tau) = \begin{cases} 1, & |\tau| \leqslant \alpha\delta, \\ 0, & |\tau| \geqslant \delta. \end{cases}$$

Положим $\varphi_i(\tau) = \varphi^*(\tau+\delta i)$. Так как носители только конечного числа $\varphi_i(\tau)$ имеют непустое пересечение, то без ограничения общности можно считать, что $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\tau) \equiv 1$. Пусть, далее, функция $\psi^*(\tau) \in C^\infty(-\infty,\infty)$ и такова, что

$$\psi^*(\tau) = \begin{cases} 1, & |\tau| \leqslant \delta, \\ 0, & |\tau| \geqslant 2\delta. \end{cases}$$

Обозначим $\psi_i(\tau) = \psi^*(\tau+\delta i)$.

Л е м м а 9. <u>Пусть функция</u> $\beta(\tau)$ <u>при всех</u> $\tau, s \in (-\infty,\infty)$ <u>удовлетворяет соотношению</u>

$$|1-\beta(\tau)/\beta(s)| \leqslant \overline{\varphi}(\tau-s), \tag{27}$$

<u>где функция</u> $\overline{\varphi}(z)$ <u>непрерывна и</u> $\overline{\varphi}(z)\to 0$ <u>при</u> $z\to 0$. <u>Тогда найдется такое достаточно большое число</u> K_0, <u>что при всех</u> $K\geqslant K_0$ <u>и</u> $\mu>0$ <u>уравнение (21) однозначно разрешимо в</u> B_p^* <u>и справедливо неравенство</u>

$$\|u^{(n)}(\tau)\|_{B_p^*} + \mu\|\beta(\tau)Au(\tau)\|_{B_p^*} + K\|u\|_{B_p^*} \leqslant M\|f(\tau)\|_{B_p^*} . \tag{28}$$

Доказательство. Рассмотрим в B_p^* оператор

$$\mathcal{L}_i(\mu)u(\tau) \equiv (-1)^r u^{(n)}(\tau) + \mu\beta(\tau_i)Au(\tau) + \kappa u(\tau),$$

где τ_i – произвольная точка на оси. Область определения $D(\mathcal{L}_i(\mu))$ оператора $\mathcal{L}_i(\mu)$ состоит из функций $u(\tau) \in W_p^{n,*}(-\infty, \infty)$ таких, что $Au(\tau) \in B_p^*$. Из леммы 8 следует, что найдется такое достаточно большое число κ_1^0, что при всех $\kappa \geq \kappa_1^0$ и $\mu > 0$ операторы $\mathcal{L}_i(\mu)$ имеют ограниченные обратные и справедливо неравенство

$$\sum_{j=0}^{n} (1+\kappa)^{\frac{n-j}{n}} \left\| \frac{d^j}{d\tau^j} \mathcal{L}_i^{-1}(\mu) \right\|_{B_p^*} + \mu\beta(\tau_i) \| A\mathcal{L}_i^{-1}(\mu) \|_{B_p^*} +$$

$$+ \kappa \| \mathcal{L}_i^{-1}(\mu) \|_{B_p^*} \leq M. \qquad (29)$$

Главным для всего доказательства является то, что здесь M не зависит от величины $\beta(\tau_i)$. Этот факт вытекает из неравенства (23), где M не зависит от r_1 и r_2. Пусть теперь τ_i – некоторая точка из промежутка $[(i-1)\delta, (i+1)\delta]$. Определим оператор $R(\mu)$ формулой

$$R(\mu)f = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i(\tau)\mathcal{L}_i^{-1}(\mu)\varphi_i(\tau)f(\tau),$$

и покажем, что

$$\mathcal{L}(\mu)R(\mu)f = P(\mu)f + f. \qquad (30)$$

Здесь $\mathcal{L}(\mu)$ – оператор, порожденный левой частью уравнения (21), а $P(\mu)$ – некоторый равномерно по $\mu > 0$ и κ – ограниченный оператор.

Прежде всего покажем, что оператор $R(\mu)$ ограничен в B_p^*. Действительно, полагая $\Psi(\tau) = R(\mu)f(\tau)$ и пользуясь неравенством треугольника, получаем

$$\int_{i\delta}^{(i+1)\delta} \|\Psi(\tau)\|^p \rho(\tau)d\tau \leq M \sum_{|j|\leq 3} \|\psi_{i+j}(\tau)\mathcal{L}_{i+j}^{-1}(\mu)\varphi_{i+j}(\tau)f(\tau)\|_{B_p^*}^p .$$

Отсюда, в силу оценок (29), следует, что

$$\int\limits_{i\delta}^{(i+1)\delta} \|\bar{\psi}(\tau)\|^p \rho(\tau)d\tau \le M \sum_{|j|\le 3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|\varphi_{i+j}(\tau) f(\tau)\|^p \rho(\tau) d\tau \le$$

$$\le M \int\limits_{(i-3)\delta}^{(i+3)\delta} \|f(\tau)\|^p \rho(\tau) d\tau. \qquad (31)$$

Суммируя (31) по i , получаем, что

$$\|R(\mu) f\|_{B_p^*} \le M \|f\|_{B_p^*}. \qquad (32)$$

Аналогичным способом устанавливаются равномерные по $K \ge K_1^0$ и $\mu > 0$ оценки производных

$$\left\|\frac{d^i}{d\tau^i} R(\mu) f\right\|_{B_p^*} \le M \|f\|_{B_p^*}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \qquad (33)$$

Установим теперь соотношение (30). Применяя формулу Лейбница и проводя несложные преобразования, получаем

$$\mathcal{L}(\mu) R(\mu) f = (-1)^r \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} \mathcal{L}_i^{-1}(\mu) \varphi_i(\tau) f(\tau) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} \times$$

$$\times \psi_i^{(n-j)}(\tau) \frac{d^j}{d\tau^j} \mathcal{L}_i^{-1}(\mu) \varphi_i(\tau) f(\tau) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mu \psi_i(\tau) \beta(\tau_i) A \mathcal{L}_i^{-1}(\mu) \varphi_i(\tau) \times$$

$$\times f(\tau) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i(\tau) [\beta(\tau) - \beta(\tau_i)] \mu A \mathcal{L}_i^{-1}(\mu) \varphi_i(\tau) f(\tau) + K \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i(\tau) \mathcal{L}_i(\mu) \varphi_i(\tau) f(\tau) - \sum_{i=1}^{5} J_i f.$$

Легко видеть, что $(J_1 + J_3) f(\tau) \equiv f(\tau)$. Оценим слагаемое $J_4 f$.

Пользуясь оценками (27) и (29), получаем, что

$$\|\psi_i(\tau) [1 - \beta(\tau)/\beta(\tau_i)] \mu \beta(\tau_i) A \mathcal{L}_i^{-1}(\mu) \varphi_i(\tau) f(\tau)\|_{B_p^*} \le M \times$$

$$\times \max_{|z| \le 4\delta} \bar{\varphi}(z) \mu \beta(\tau_i) \|A \mathcal{L}_i^{-1}(\mu) \varphi_i(\tau) f(\tau)\|_{B_p^*} \le M \max_{|z| \le 4\delta} \bar{\varphi}(z) \|\varphi_i f\|_{B_p^*}. \qquad (34)$$

Суммируя (34) по i и выбирая δ (см. определение функции $\varphi^*(\tau)$) достаточно малым, получаем равномерную по $\mu > 0$ и $K \geq K_1^0$ оценку

$$\| J_4 f \|_{B_p^*} \leq \frac{1}{3} \| f \|_{B_p^*} . \tag{35}$$

В частности, также оценивается и J_5 .

Из оценок (29) и леммы 1 вытекает, что неравенство

$$\left\| \frac{d^j}{d\tau^j} \mathcal{L}_i^{-1}(\mu) \varphi_i(\tau) f(\tau) \right\|_{B_p^*} \leq \varepsilon \| \varphi_i(\tau) f(\tau) \|_{B_p^*} + \frac{M}{K \varepsilon^{n-1}} \| \varphi_i(\tau) f(\tau) \|_{B_p^*} \tag{36}$$

справедливо при всех $\mu > 0$, $\varepsilon > 0$ и $K \geq K_1^0$. Обозначая $\sigma(\tau) = J_2 f(\tau)$ и используя (36), получаем

$$\int_{l\delta}^{(l+1)\delta} \| \sigma(\tau) \|^p \rho(\tau) d\tau \leq M \sum_{|i-l| \leq 3} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{d^j}{d\tau^j} \mathcal{L}_i^{-1}(\mu) \varphi_i(\tau) \times \right.$$

$$\left. \times f(\tau) \right\|^p \rho(\tau) d\tau \leq M \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{n-1} K} \right) \sum_{|i-l| \leq 3} \| \varphi_i(\tau) f(\tau) \|_{B_p^*}^p . \tag{37}$$

Суммируя (37) по l и выбирая ε достаточно малым, а K_1^0 достаточно большим, получаем равномерную по $\mu > 0$ и $K \geq K_1^0$ оценку

$$\| J_2 f(\tau) \|_{B_p^*} \leq \frac{1}{3} \| f \|_{B_p^*} . \tag{38}$$

Из оценок (35) и (38) вытекает, что норма оператора $P(\mu) = J_2 + J_4$ удовлетворяет неравенству

$$\| P(\mu) \|_{B_p^*} \leq \frac{2}{3}$$

равномерно по всем $\mu > 0$ и $K \geq K_1^0$. Пользуясь этой оценкой, получаем, что оператор $U(\mu) = R(\mu) [I + P(\mu)]^{-1}$ является правым обратным к $\mathcal{L}(\mu)$ оператором, или, что то же, уравнение (21) имеет в B_p^* решение.

Установим теперь однозначную разрешимость уравнения (21). Допустим, что $U(\tau)$ есть решение уравнения (21). Умножая обе части (21)

на $\varphi_i(\tau)$ и проводя несложные преобразования, получаем, что

$$(-1)^r u_i^{(n)}(\tau)+\mu\beta(\tau_i)Au_i(\tau)+\kappa u_i(\tau)=f_i(\tau)+[1-\beta(\tau)/\beta(\tau_i)]\mu\beta(\tau_i)\times$$

$$\times Au_i(\tau)+\sum_{j=0}^{n-1} C_n^j \varphi_i^{(n-j)}(\tau)u^{(j)}(\tau).$$

Здесь $u_i(\tau)=u(\tau)\varphi_i(\tau)$, $f_i(\tau)=f(\tau)\varphi_i(\tau)$, а $\tau_i\in[(i-1)\delta,(i+1)\delta]$.
Пользуясь оценками (27), (29) и финитностью $\varphi_i(\tau)$, будем иметь

$$\|u_i^{(n)}(\tau)\|_{B_p^*}+\mu\beta(\tau_i)\|Au_i(\tau)\|_{B_p^*}+\kappa\|u_i(\tau)\|_{B_p^*}\leq M\Big(\|f_i(\tau)\|_{B_p^*}+$$

$$+\max_{|z|\leq 4\delta}\bar\varphi(z)\mu\beta(\tau_i)\|Au_i(\tau)\|_{B_p^*}\Big)+\sum_{j=0}^{n-1}M\Big(\int_{(i-2)\delta}^{(i+2)\delta}\|u^{(j)}(\tau)\|^p\rho(\tau)d\tau\Big)^{1/p}.$$

Выбирая δ достаточно малым, получаем отсюда

$$\|u_i^{(n)}(\tau)\|_{B_p^*}+\kappa\|u_i(\tau)\|_{B_p^*}\leq M\Big(\|f_i(\tau)\|_{B_p^*}+\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\int_{(i-2)\delta}^{(i+2)\delta}\|u^{(j)}(\tau)\|^p\rho(\tau)d\tau\Big)^{1/p}\Big). \quad (39)$$

Так как $u_i^{(n)}(\tau)\equiv u^{(n)}(\tau)$ при $\tau\in[(i-\alpha)\delta,(i+\alpha)\delta]$, то, суммируя (39) по i и используя лемму 1, получаем неравенство

$$\|u^{(n)}(\tau)\|_{B_p^*}+\kappa\|u\|_{B_p^*}\leq M\big(\|f\|_{B_p^*}+\varepsilon\|u^{(n)}(\tau)\|_{B_p^*}+C(\varepsilon)\|u\|_{B_p^*}\big).$$

Выбирая $\varepsilon>0$ достаточно малым, а κ_1^0 достаточно большим, получаем, что $\|u\|_{B_p^*}\leq M\|f\|_{B_p^*}$.

Лемма доказана.

В лемме 9 установлена однозначная разрешимость уравнения (19) и оценки (20) для случая, когда $\bar y_k(t)\equiv 0$. Переход к общему случаю осуществляется стандартным образом (см., например, [14]).

§ 3. Доказательство теоремы 2

Достаточно доказать леммы 4-7.

Доказательство леммы 4. Заменой переменной (3) изучение операторов A_1 и A_2 в пространстве $B_p([0,\infty);E)$ сводится к изучению операторов

$$\bar{A}_1 u(\tau) = (-1)^r u^{(n)}(\tau) + \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\gamma}_k(\tau) u^{(k)}(\tau) + k_1 u(\tau),$$

$$\bar{A}_2 u(\tau) = \beta(\tau) A u(\tau) + k_2 u(\tau)$$

в пространстве $B_p^*((-\infty,\infty);E)$, $\rho(\tau)=a_1[t(\tau)]$. Здесь $\beta(\tau)=a_2[t(\tau)]$, а $\bar{\gamma}_k(\tau)$ – ограниченные на оси функции. Область определения $D(\bar{A}_1)$ оператора $\bar{A}_1$ состоит из функций $u(\tau)\in W_p^{n,*}((-\infty,\infty);E)$, а область определения $D(\bar{A}_2)$ оператора $\bar{A}_2$ – из функций $u(\tau)\in B_p^*$ таких, что $\beta(\tau)Au\in B_p^*$. Обозначим $\varphi(\tau)=\bar{A}_1\bar{A}_2 u(\tau)$, а $\psi(\tau)=\bar{A}_2\bar{A}_1 u(\tau)$. Проводя формальные преобразования, получаем

$$\varphi(\tau)=(-1)^r[\beta(\tau)Au(\tau)]^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\gamma}_k(\tau)[\beta(\tau)Au(\tau)]^{(k)} + k_1\beta(\tau)Au(\tau) +$$

$$+ (-1)^r k_2 u^{(n)}(\tau) + \sum_{k=0}^{n-1} k_2\bar{\gamma}_k(\tau)u^{(k)}(\tau) + k_1 k_2 u(\tau), \tag{40}$$

$$\psi(\tau)=(-1)^r[\beta(\tau)Au]^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\gamma}_k(\tau)[\beta(\tau)Au(\tau)]^{(k)} + k_1\beta(\tau)Au(\tau) +$$

$$+ k_1(-1)^r u^{(n)}(\tau) + k_2\sum_{k=0}^{n-1} \bar{\gamma}_k(\tau)u^{(k)}(\tau) + k_1 k_2 u(\tau). \tag{41}$$

Из соотношения (13) вытекает, что

$$\beta^{(i)}(\tau)/\beta(\tau) \le M, \quad i=1,2,\dots,n. \tag{42}$$

Поэтому функции $\gamma_k(\tau)$ ограничены на всей оси.

Установим сначала включение $\mathcal{D}(\bar{A}_1\bar{A}_2) \subset \mathcal{D}(\bar{A}_2\bar{A}_1)$. Пусть $u(\tau) \in \mathcal{D}(\bar{A}_1\bar{A}_2)$. Тогда $\bar{A}_2 u \in \mathcal{D}(\bar{A}_1)$ и, следовательно, $\bar{A}_2 u(\tau) \in W_p^{n,*}((-\infty,\infty);E)$. Обозначая $\bar{A}_2 u(\tau) = f(\tau)$, имеем

$$u(\tau) = [\beta(\tau)A + \kappa_2]^{-1} f(\tau). \tag{43}$$

Умножая (43) на $\beta(\tau)$, применяя оператор A, дифференцируя по τ и используя оценки (5) и (42), получаем, что $\beta(\tau)Au \in W_p^{n,*}$. Следовательно, $u(\tau) \in \mathcal{D}(\bar{A}_2\bar{A}_1)$.

Установим теперь, что $\mathcal{D}(\bar{A}_2\bar{A}_1) \subset \mathcal{D}(\bar{A}_1\bar{A}_2)$. Пусть $u(\tau) \in \mathcal{D}(\bar{A}_2\bar{A}_1)$. Тогда

$$(-1)^r u^{(n)}(\tau) + \sum_{\kappa=0}^{n-1} \bar{\gamma}_\kappa(\tau) u^{(\kappa)}(\tau) + \kappa_1 u(\tau) = [\beta(\tau)A + \kappa_2]^{-1} f(\tau), \tag{44}$$

где $f(\tau) \in \mathcal{B}_p^*$. Умножая (44) на $\beta(\tau)$ и внося $\beta(\tau)$ под знак производной, получаем, что

$$(-1)^r v^{(n)}(\tau) + \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(\tau) v^{(i)}(\tau) + \kappa_1 v(\tau) = \bar{f}(\tau). \tag{45}$$

Здесь $v(\tau) = \beta(\tau)u(\tau)$, $\bar{f}(\tau) = \beta(\tau)[\beta(\tau)A + \kappa_2]^{-1} f(\tau)$, а коэффициенты $\varphi_i(\tau)$ ограничены в силу (42). Так как $\beta(\tau)$ ограничена, то $v(\tau) \in \mathcal{B}_p^*$ и $\bar{f}(\tau) \in \mathcal{B}_p^*$. Рассмотрим сначала уравнение (45) при $\varphi_i(\tau) \equiv 0$. Тогда уравнение (45) есть частный случай уравнения (24) при $A = 0$ и его решение задается формулой (25). В общем случае, используя ограниченность $\varphi_i(\tau)$ и соответствующие оценки производных, получаем, что при достаточнс большом κ_1 уравнение (45) имеет в $\mathcal{B}_p^*$ решение $v(\tau)$, задаваемое формулой

$$v(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau, s, \kappa_1) R(\kappa_1) f(s) ds.$$

Здесь $R(\kappa_1)$ – некоторый ограниченный в $\mathcal{B}_p^*$ оператор. Отсюда вытекает, что $v(\tau) \in \mathcal{D}(A)$ и $Av(\tau) \in W_p^{n,*}$. Следовательно,

$\beta(\tau)Au(\tau)\in W_p^{n,*}$. Тем самым установлено, что $u(\tau)\in D(\bar A_1, \bar A_2)$.

Лемма 4 доказана.

С л е д с т в и е. <u>Область определения</u> D <u>оператора</u> $(\bar A_1 \bar A_2),(\bar A_2 \bar A_1)$ <u>состоит из таких функций</u> $u(\tau)\in W_p^{n,*}$, <u>что</u> $\beta(\tau)Au(\tau)\in W_p^{n,*}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 5. Рассмотрим в B_p^* определенный на D оператор $\bar\Delta u=(\bar A_1\bar A_2 u-\bar A_2\bar A_1)u$. Из доказательства леммы 4 вытекает, что

$$\bar\Delta u=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(\tau)\left[\beta(\tau)Au(\tau)\right]^{(k)},$$

где $\varphi_k(\tau)$ - ограниченные функции. Рассмотрим выражение

$$J_k u(\tau)=\left[\beta(\tau)Au\right]^{(k)}=\left[\beta(\tau)Au+k_2u\right]^{(k)}-k_2u^{(k)}(\tau)=\left[\bar A_2 u\right]^{(k)}-k_2u^{(k)}(\tau).$$

Отсюда, в силу леммы 1, следует, что

$$\|J_k u\|_{B_p^*}\le\varepsilon\|(\bar A_2u)^{(n)}\|_{B_p^*}+M\varepsilon^{1-n}\|\bar A_2u\|_{B_p^*}+\varepsilon\|u^{(n)}(\tau)\|_{B_p^*}+$$

$$+M\varepsilon^{1-n}\|u\|_{B_p^*}\le\varepsilon\|\bar A_1\bar A_2u\|_{B_p^*}+k_1\varepsilon\|\bar A_2u\|_{B_p^*}+\varepsilon\|\bar A_1u\|_{B_p^*}+$$

$$+k_1\varepsilon\|u\|_{B_p^*}+M\varepsilon^{1-n}\|\bar A_2u\|_{B_p^*}+M\varepsilon^{1-n}\|u\|_{B_p^*}. \quad (46)$$

Из ограниченной обратимости операторов $\bar A_1$ и $\bar A_2$ следует, что

$$\|J_k u\|_{B_p^*}\le M\left[\varepsilon\left(\|\bar A_1\bar A_2u\|_{B_p^*}+\|\bar A_2\bar A_1u\|_{B_p^*}\right)+\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\left(\|\bar A_1u\|_{B_p^*}+\|\bar A_2u\|_{B_p^*}\right)\right]. \quad (47)$$

Суммируя (47) по k и минимизируя по $\varepsilon>0$, получаем

$$\|\bar\Delta u\|_{B_p^*}\le M\left(\|\bar A_1\bar A_2u\|_{B_p^*}+\|\bar A_2\bar A_1u\|_{B_p^*}\right)^{(n-1)/n}\left(\|\bar A_1u\|_{B_p^*}+\|\bar A_2u\|_{B_p^*}\right)^{1/n}.$$

Лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 6. Позитивность оператора A_1 в пространстве $B_p([0,\infty);E)$ при достаточно большом κ_1 установлена, по существу, в [8]. Покажем, что A_1 позитивен в $\bar{D}(A_2)$. Заменой (3) доказательство этого факта сводится к доказательству позитивности сужения $\bar{A}_1'$ оператора $\bar{A}_1$ на пространство $\bar{D}(\bar{A}_2)$. Здесь через $\bar{D}(\bar{A}_2)$ обозначено пространство функций $u(\tau)\in D(\bar{A}_2)$ с нормой

$$\|u\|_{\bar{D}(\bar{A}_2)} = \|\bar{A}_2 u\|_{B_p^*} + \|u\|_{B_p^*}.$$

Из позитивности оператора A следует, что эта норма эквивалентна норме

$$\|u\|_{\bar{A}_2} = \|\beta(\tau)Au\|_{B_p^*} + \|u\|_{B_p^*}. \tag{48}$$

Прежде всего отметим, что область определения $D(\bar{A}_1')$ оператора $\bar{A}_1'$ плотна в $\bar{D}(\bar{A}_2)$. Действительно, в $D(\bar{A}_1')$ входят все функции вида $\psi(\tau)=[\kappa+A]^{-n}\varphi(\tau)$ $(\kappa, n>0)$, где $\varphi(\tau)$ – бесконечно дифференцируемые и финитные на оси функции. Пусть $\alpha=\varphi_{A_1}(B_p([0,\infty);E))$. Как показано в [8], $\alpha=\frac{\pi}{2}$ при нечетном n, $\alpha<\frac{\pi}{2}$ при четном n и уравнение $(\bar{A}_1+\lambda)u=\varphi$ или, что то же, уравнение

$$(-1)^r u^{(n)}(\tau) + \sum_{\kappa=0}^{n-1}\bar{\gamma}_\kappa(\tau)u^{(\kappa)}(\tau) + (\lambda+\kappa_1)u(\tau) = \varphi(\tau) \tag{49}$$

разрешимо в B_p^* при достаточно большом κ_1 и всех $\lambda\in S(\alpha)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{B_p^*} \le M(1+|\lambda|)^{-1}\|\varphi\|_{B_p^*}. \tag{50}$$

Рассмотрим при тех же λ уравнение $\bar{A}_1' u+\lambda u=\varphi$ или, что то же, уравнение (49) в пространстве $\bar{D}(\bar{A}_2)$. Умножая обе части (49) на $\beta(\tau)$ и делая несложные преобразования, получаем

$$(-1)^r v^{(n)}(\tau) + \sum_{\kappa=0}^{n-1}\hat{\gamma}_\kappa(\tau)v^{(\kappa)}(\tau)+(\kappa_1+\lambda)v(\tau)=f(\tau). \tag{51}$$

Здесь $\sigma(\tau)=\beta(\tau)u(\tau)$, $f(\tau)=\varphi(\tau)\beta(\tau)$, а $\hat{\gamma}_k(\tau)$ ограничены в силу (42). Ясно, что $\sigma(\tau)$ и $f(\tau)$ принадлежат B_p^*. Поэтому при достаточно большом k_1 и всех $\lambda\in S(\alpha)$ оператор $\bar{A}(\lambda)$, порожденный левой частью (51), имеет ограниченный обратный $[\bar{A}(\lambda)]^{-1}$ в B_p^*, и справедлива оценка

$$\|[\bar{A}(\lambda)]^{-1}\|_{B_p^*}\le M(1+|\lambda|)^{-1}. \tag{52}$$

Нетрудно показать, что оператор $[\bar{A}(\lambda)]^{-1}$ коммутирует с A^{-1} в B_p^*. Поэтому из включения $\beta(\tau)A\varphi(t)\in B_p^*$ и оценки (52) следует, что $A\sigma\in B_p^*$ и справедлива оценка

$$\|\beta(\tau)Au\|_{B_p^*}\le M(1+|\lambda|)^{-1}\|\beta(\tau)A\varphi(\tau)\|_{B_p^*}. \tag{53}$$

Утверждение леммы 6 следует из соотношений (48), (50) и (53).

Доказательство леммы 7. Рассмотрим в $B_p([0,\infty);E)$ уравнение

$$a_2(t)Au(t)+(k_2+\lambda)u(t)=f(t). \tag{54}$$

Из позитивности оператора A следует, что это уравнение имеет решение $u(t)=[a_2(t)A+k_2+\lambda]^{-1}f(t)$ при всех $\lambda\in S(\varphi_A(E))$, и справедливо неравенство

$$\|a_2(t)Au\|_{B_p}+(k_2+|\lambda|)\|u\|_{B_p}\le M\|f\|_{B_p}. \tag{55}$$

Тем самым позитивность оператора A_2 в $B_p([0,\infty);E)$ установлена.

Пусть теперь $f(t)\in D(A_1)$. Из леммы 2 следует, что тогда $a_1^k(t)f^{(k)}(t)\in B_p([0,\infty);E)$ при $k=0,1,\dots,n$. Дифференцируя (54) по t и умножая на $a_1(t)$, получаем

$$a_2(t)A[a_1(t)u'(t)]+(k_2+\lambda)[a_1(t)u'(t)]=a_1(t)f'(t)-$$
$$-a_1(t)a_2'(t)a_2^{-1}(t)A[a_1(t)u(t)].$$

Отсюда в силу неравенств (13) и (55) вытекает, что

$$\|a_2(t)A[a_1(t)u'(t)]\|_{B_p}+(k_2+|\lambda|)\|a_1(t)u'(t)\|_{B_p}\le M\|f\|_{B_p}+$$

$$+\|a_1(t)f'(t)\|_{B_p}.$$

Далее, соотношение

$$\sum_{i=0}^{n}\|a_2(t)A[a_1^i(t)u^{(i)}(t)]\|_{B_p}+(\kappa_2+|\lambda|)\sum_{i=0}^{n}\|a_1^i(t)u^{(i)}(t)\|_{B_p}\leq$$
$$\leq M\sum_{i=0}^{n}\|a_1^i(t)f^{(i)}(t)\|_{B_p}$$

устанавливается по индукции.

Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу теорем 1, 2 и A, достаточно установить, что

$$\varphi_{A_1}(B_p([0,\infty);E))+\varphi_{A_2}(B_p([0,\infty);E))<\pi.$$

Из леммы 6 и сильной позитивности A в E следует, что

$\varphi_{A_2}(B_p)\leq\varphi_A(E)<\frac{\pi}{2}$. Кроме того, в [8] показано, что

$$\varphi_{A_1}(B_p([0,\infty);E))\leq\frac{\pi}{2}.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. Определим на $D(A_1)$ оператор

$$A_{1,0}u(t)\equiv(-1)^r u^{[n]}(t)+\kappa_1 u(t).$$

В силу гладкости $a_1(t)$ дифференциальное выражение оператора $A_{1,0}$ можно переписать в виде (7) с ограниченными $\gamma_k(t)$. Поэтому для операторов $A_{1,0}$ и A_2 справедливы теоремы 1–3. Это замечание нам понадобится в следующем параграфе.

§ 4. Теоремы вложения для весовых пространств

В этом параграфе полученные выше результаты применяются к доказательству теорем вложения для вырождающихся метрик. Пусть $R_0^+=\{(t,x):-\infty<x<+\infty,\ t\geq 0\}$. Через n будем обозначать

вектор (n_1, n_2) с целочисленными неотрицательными координатами. Обозначим через $\overline{W}_p^{\,n}$ пространство функций $u(t,x)\in L_p(R_0^+)$, имеющих в R_0^+ обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные

$$u^{(\kappa)}=\frac{\partial^{\kappa_1+\kappa_2}u}{\partial t^{\kappa_1}\partial x^{\kappa_2}}\,,\quad \frac{\kappa_1}{n_1}+\frac{\kappa_2}{n_2}\le 1\,,$$

для которых конечна норма

$$\|u\|_{\overline{W}_p^{\,n}}=\sum_{\frac{\kappa_1}{n_1}+\frac{\kappa_2}{n_2}\le 1}\left\|a_1^{\kappa_1}(t)a_2^{\frac{\kappa_2}{n_2}}(t)\frac{\partial^{\kappa_1+\kappa_2}u}{\partial t^{\kappa_1}\partial x^{\kappa_2}}\right\|_{L_p(R_0^+)}.$$

Через $W_p^{n,*}$ обозначим пространство функций

$$u(t,x)\in L_p(R_0^+)\,,$$

имеющих в R_0^+ обобщенные производные $\dfrac{\partial^{n_1}u}{\partial t_1^{n_1}}$ и $\dfrac{\partial^{n_2}u}{\partial x^{n_2}}$, для которых конечна норма

$$|u|_{W_p^{n,*}}=\left|a_2(t)\frac{\partial^{n_2}u}{\partial x^{n_2}}\right|_{L_p(R_0^+)}+\left|a_1^{n_1}(t)\frac{\partial^{n_1}u}{\partial t^{n_1}}\right|_{L_p(R_0^+)}+\|u\|_{L_p(R_0^+)}.$$

Основной результат этого параграфа формулируется следующим образом.

Т е о р е м а 4. Пусть функции $a_i(t)$ при $n_1=n$ удовлетворяют условиям 1–3. Пусть, кроме того, при всех $t_1, t_2\in(0,\infty)$ и $0\le j\le n_1$ справедливы неравенства

$$\left|1-a_2^{\frac{j}{n_1}}(t_2)/a_2^{\frac{j}{n_1}}(t_1)\right|\le 6\left(\int_{t_1}^{t_2}dz/a_1(z)\right),\qquad(56)$$

причем непрерывная на оси функция $6(z)$ удовлетворяет соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty}exp\{-\delta|z|\}\,6(z)dz/|z|<+\infty\qquad(57)$$

при некотором $\delta>0$. Тогда при любом κ таком, что $\frac{\kappa_1}{n_1}+\frac{\kappa_2}{n_2}\le 1$, операторы вложения $J_\kappa:\ W_p^{n,*}(R_0^+)\to\overline{W}_p^{\,\kappa}(R_0^+)$ ограничены.

З а м е ч а н и е. Условиям теоремы 4 удовлетворяют, например,

функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$, приведенные в замечании 1 § 2.

Доказательство теоремы 4 будет проведено ниже путем сведения к вырождающимся операторам в банаховом пространстве, а сейчас мы приведем вспомогательные результаты. Прежде всего нам понадобятся сильно позитивные операторы, области определения которых совпадают с пространствами С.Л.Соболева. При четном дифференциальном показателе в качестве таких операторов могут быть выбраны эллиптические операторы соответствующего порядка. Дифференциальные операторы нечетного порядка свойством сильной позитивности не обладают. Однако можно указать класс псевдодифференциальных сильно позитивных операторов любого порядка.

Определим в $L_p(-\infty,\infty)$ оператор A на финитных функциях формулой

$$Au(\tau) = F^{-1}(1+|y|^2)^{\frac{n_2}{2}} Fu. \tag{58}$$

Здесь F - оператор, ставящий в соответствие функции $u(\tau)$ её преобразование Фурье (см. [15]), а n_2 - произвольное неотрицательное целое число. Из теории мультипликаторов (см., например, [15]) следует, что оператор A допускает замыкание до сильно позитивного в $L_p(-\infty,\infty)$ оператора, за которым мы сохраним прежнее обозначение. С помощью той же теории устанавливается, что область определения $D(A^\alpha)$ оператора A^α, $0<\alpha<1$, совпадает с пространством $W^{n_2\alpha}(-\infty,\infty)$. Определение W_p^β при дробном β см. в [15].

Положим $E=L_p(-\infty,\infty)$ и рассмотрим в $B_p([0,\infty);E)$ операторы

$$A_1u(t) \equiv (-1)^{r}a_1^{n_1}(t)u^{(n_1)}(t)+\kappa_1u(t),$$

$$A_2u(t) \equiv a_2(t)Au(t)+\kappa_2u(t).$$

Выше была установлена их позитивность, а сейчас мы изучим их дробные степени.

Л е м м а 8. При любом целом $\kappa \in [0, n_1]$ операторы

$$a_1^{\kappa}(t)\frac{d^{\kappa}}{dt^{\kappa}}A_1^{-\frac{\kappa}{n_1}} \qquad \text{и} \qquad \frac{d^{[\kappa]}}{dt^{\kappa}}A_1^{-\frac{\kappa}{n_1}}$$

ограничены в $B_p([0,\infty);E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [8] этот факт доказан для случая $E=R^1$. Из доказательства видно, что это верно и для любого пространства $B_p([0,\infty);E)$, в котором ограничен сингулярный оператор Гильберта

$$H\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(s)}{t-s}ds.$$

Рассматривая переменную x как параметр, нетрудно убедиться, что оператор H ограничен в $B_p([0,\infty);L_p(-\infty,\infty))$.

Лемма доказана.

Л е м м а 9. Операторы

$$Q_i\,u(t) = a_2^{\frac{i}{n_2}}(t)\frac{d^i}{dx^i}A_2^{-\frac{i}{n_2}}u(t)$$

ограничены в $B_p([0,\infty);E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь формулой (6), имеем

$$a_2^{\frac{i}{n_2}}(t)A_2^{-\frac{i}{n_2}}u(t)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}a_2^{\frac{i}{n_2}}(t)\int_0^{\infty}\lambda^{-\frac{i}{n_2}}[a_2(t)A+\kappa_2+\lambda]^{-1}u(t)d\lambda=$$

$$=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^{\infty}\mu^{-\frac{i}{n_2}}\left(A+\frac{\kappa_2}{a_2(t)}+\mu\right)^{-1}u(t)d\mu=\left[A+\frac{\kappa_2}{a_2(t)}\right]^{-\frac{i}{n_2}}u(t).$$

Доказательство леммы 9 сводится теперь к доказательству равномерной при $\sigma>0$ ограниченности операторов

$$A^{\frac{i}{n_2}}(A+\sigma)^{-\frac{i}{n_2}}$$

и ограниченности оператора

$$\frac{d^i}{dx^i} A^{-\frac{i}{n_2}} .$$

Из теории мультипликаторов следует ограниченность оператора $\frac{d^i}{dx^i} A^{-\frac{i}{n_2}}$, а равномерную ограниченность операторов $A^{\frac{i}{n_2}}(A+\sigma)^{-\frac{i}{n_2}}$ можно получить, например, из [5] . Лемма доказана.

Лемма 10. В условиях теоремы 2 операторы

$$R_{ijk}\, u(\tau) = a_2^{\frac{i}{n_2}}(t) \frac{d^{[j]}}{dt^j} A_{1,0}^{-\frac{k}{n_2}} a_2^{-\frac{i}{n_2}} u(t)$$

ограничены в $B_p([0,\infty); E)$ при всех $0 \le j \le k$ и $0 \le i \le n$.

Доказательство. Заменой (3) доказательство ограниченности операторов R_{ijk} в $B_p([0,\infty); E)$ сводится к доказательству ограниченности операторов

$$\bar{R}_{ijk}\, u(\tau) = \beta_1(\tau) \frac{d^j}{d\tau^j} \int_0^\infty \lambda^{-\frac{k}{n_1}} \int_{-\infty}^\infty G(\tau, s, \lambda) u(s) \beta_1^{-1}(s)\, ds\, d\lambda \qquad (59)$$

в $B_p^*((-\infty,\infty); E)$, $\rho(\tau) = a_1[t(\tau)]$. Здесь $\beta_1(\tau) = a_2^{\frac{i}{n_2}}[t(\tau)]$, а $G(\tau, s, \lambda)$ функция Грина оператора $(\bar{A}_{1,0} + \lambda)u = (-1)^r u^{(n_1)}(\tau) + (k_1 + \lambda)u$. Считая $u(\tau)$ финитной, продифференцируем в (59) j раз

$$\bar{R}_{ijk}\, u(\tau) = \beta_1(\tau) \int_0^\infty \lambda^{-\frac{k}{n_1}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial^j}{\partial \tau^j} G(\tau, s, \lambda) \frac{u(s)}{\beta_1(s)} ds\, d\lambda = \int_0^\infty \lambda^{-\frac{k}{n_1}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial^j}{\partial \tau^j} \times$$

$$\times\, G(\tau, s, \lambda) u(s)\, ds\, d\lambda + \int_0^\infty \lambda^{-\frac{k}{n_1}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial^j}{\partial \tau^j} G(\tau, s, \lambda) \left[1 - \beta_1(\tau)/\beta_1(s)\right] u(s)\, ds\, d\lambda =$$

$$= \frac{d^j}{d\tau^j} \bar{A}_{1,0}^{-\frac{k}{n_1}} u(\tau) + R'_{ijk}\, u(\tau).$$

Ограниченность в B_p^* оператора $\frac{d^j}{d\tau^j} \bar{A}_{1,0}^{-\frac{k}{n_1}}$ следует из леммы 8. Установим ограниченность оператора R'_{ijk} . Используя оценки произ-

водных функции Грина (см. [8]) и неравенство (56), получаем, что

$$\| R'_{ijk} u \| \leq M \int_0^\infty \lambda^{-\frac{k}{\pi_1}} \int_{-\infty}^{\infty} (k_1+\lambda)^{-\frac{n_1-1+j}{n_1}} exp\{-\beta(\lambda+k_1)^{1/n_1}|\tau-s|\}\sigma(\tau-s)\|u(s)\| ds d\lambda.$$

С помощью замены $\tau - s = z$ и интегрального неравенства Минковского получаем, что

$$\| R'_{ijk} u \|_{B_p^*} \leq M \int_0^\infty \lambda^{-\frac{k}{\pi_1}} \int_{-\infty}^{\infty} (k_1+\lambda)^{-\frac{n_1-1+j}{n_1}} exp\{-(\lambda+k_1)^{1/n_1}|z|\}\sigma(z) dz d\lambda \|u\|_{B_p^*}.$$

Меняя порядок интегрирования, считая K_1 достаточно большим и используя соотношение (57), получаем, что множитель перед $\|u\|_{B_p^*}$ ограничен. Лемма доказана.

Изучим теперь вопрос о к.р. уравнения

$$(-1)^r u^{(n_1)}(\tau) + Au(\tau) = \varphi(\tau). \tag{60}$$

Л е м м а 11. Уравнение (60) к.р. в $B_p((-\infty,\infty);E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь формулой (58) и делая преобразование Фурье по переменным t и x, получаем

$$(-1)^{r+n_1} i^{n_1} \xi_1^{n_1} \tilde{u}(\xi_1, \xi_2) + (1+|\xi_2|^2)^{\frac{n_2}{2}} \tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{\varphi}(\xi_1, \xi_2).$$

Здесь через $\sim$ обозначен оператор преобразования Фурье по t и x.
Из теории мультипликаторов следует, что уравнение (60) разрешимо в $L_p(R_0^+)$ и справедливо неравенство

$$\| u_t^{(n_1)}(t,x)\|_{L_p(R_0^+)} + \|u_x^{(n_2)}(t,x)\|_{L_p(R_0^+)} \leq M \|\varphi(t,x)\|_{L_p(R_0^+)}$$

или, что то же,

$$\|u^{(n_1)}(\tau)\|_{B_p((-\infty,\infty);E)} + \|Au(\tau)\|_{B_p((-\infty,\infty);E)} \leq M\|\varphi(\tau)\|_{B_p((-\infty,\infty);E)}.$$

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Пусть $u(t,x) \in L_p(R_0^+)$. Из теоремы Фубини следует, что почти при всех $t \geq 0$

функция $U(t) = u(t,x)$, как функция переменной x , принадлежит пространству $L_p(-\infty,\infty)=E$, измерима, как функция со значениями в E , и справедливо соотношение

$$\|U(t)\|_{B_p([0,\infty);E)} = \|u(t,x)\|_{L_p(R_0^+)}.$$

Таким образом, определен изометрический оператор T , ставящий естественным образом в соответствие функции $u(t,x)\in L_p(R_0^+)$ вектор-функцию $U(t)\in B_p([0,\infty);E)$. Нетрудно показать, что если функция $u(t,x)$ имеет обобщенную производную по t , как функция из $L_p(R_0^+)$, то функция $U(t)$ имеет обобщенную производную, как функция из $B_p([0,\infty);E)$, и наоборот. Таким образом, тот факт, что $u(t,x)$ имеет обобщенную производную n_1 -го порядка по t такую, что

$$a_1^{n_1}(t)\frac{\partial^{n_1}u}{\partial t^{n_1}}\in L_p(R_0^+),$$

равносилен включению

$$a_1^{n}(t)\frac{d^{n_1}U(t)}{dt^{n_1}}\in B_p([0,\infty);E).$$

Тот факт, что $u(t,x)$ имеет обобщенную производную $\dfrac{\partial^{n_2}u}{\partial x^{n_2}}$ при $t>0$, означает, что $U(t)\in D(A)$ почти при всех $t>0$, причем из включения $a_2(t)\dfrac{\partial^{n_2}u}{\partial x^{n_2}}\in L_p(R_0^+)$ следует, что $a_2(t)AU(t)\in$ $\in B_p([0,\infty);E)$. Из сказанного выше вытекает, что оператор T отображает пространство $W_p^{n,*}$ на пространство D , состоящее из элементов $U\in D(A_1)\cap D(A_2)$ с нормой

$$\|U\|_D = \|A_1U\|_{B_p([0,\infty);E)} + \|A_2U\|_{B_p([0,\infty);E)},$$

взаимно-однозначно и взаимно непрерывно. Из условий теоремы 4 и леммы 11 вытекает, что коэффициенты операторов A_1 и A_2 удовлетворяют всем требованиям теорем 1-4. Поэтому определенный на D оператор A_1+A_2 имеет в $B_p([0,\infty);E)$ ограниченный обратный $(A_2+A_1)^{-1}$, отображающий $B_p([0,\infty);E)$ на D . Далее, каждой функции $u(t,x)\in$ $\in W_p^{n,*}$ соответствует функция $U(t)=Tu(t,x)$, принадлежащая,

очевидно, пространству D, и, в силу обратимости оператора A_1+A_2,

$$u(t) = (A_1+A_2)^{-1} V(t), \tag{61}$$

где $V(t) \in B_p([0,\infty); E)$. Далее,

$$\left\| a_1^{k}(t) a_2^{\frac{i}{n_2}}(t) \frac{\partial^{k+i} u(t,x)}{\partial t^k \partial x^i} \right\|_{L_p(R_0^+)} = \left\| a_1^{k}(t) a_2^{\frac{i}{n_2}}(t) T^{-1} \frac{d^i}{dx^i} \frac{d^k}{dt^k} Tu \right\|_{L_p(R_0^+)} =$$

$$= \left\| a_1^{k}(t) a_2^{\frac{i}{n_2}}(t) \frac{d^i}{dx^i} \frac{d^k}{dt^k} U(t) \right\|_{B_p[0,\infty)}. \tag{62}$$

Из соотношений (61) и (62) вытекает, что для доказательства теоремы 4 достаточно установить ограниченность операторов

$$K_{mi} = a_1^{k}(t) a_2^{\frac{i}{n_2}}(t) \frac{d^k}{dt^k} \frac{d^i}{dx^i} (A_1+A_2)^{-1}$$

при $\frac{k}{n_1}+\frac{i}{n_2} \leq 1$. Здесь оператор $\frac{d^i}{dx^i}$ рассматривается как оператор в E, а $\frac{d^k}{dt^k}$ как оператор в $B_p([0,\infty); E)$. Воспользовавшись леммой 3, перепишем $K_{mi} V(t)$ в виде

$$K_{mi} V(t) = a_1^{k}(t) a_2^{\frac{i}{n_2}}(t) \frac{d^k}{dt^k} \frac{d^i}{dx^i} A_{1,0}^{-\frac{k}{n_1}} A_2^{-\frac{i}{n_2}} W(t) = \sum_{j=0}^{k} \varphi_j(t) \times$$

$$\times a_2^{\frac{i}{n_2}}(t) \frac{d^{[j]}}{dt^j} A_{1,0}^{-\frac{k}{n_1}} \left[a_2^{-\frac{i}{n_2}}(t) a_2^{\frac{i}{n_2}}(t) \frac{d^i}{dx^i} A_2^{-\frac{i}{n_2}} W(t) \right]. \tag{63}$$

Здесь

$$W(t) = A_2^{\frac{i}{n_2}} A_{1,0}^{\frac{k}{n_1}} (A_{1,0}+A_2)^{-1} (A_{1,0}+A_2)(A_1+A_2)^{-1} V(t), \tag{64}$$

а $\varphi_j(t)$ – ограниченные на $[0,\infty)$ функции. Оператор, порожденный правой частью (64) ограничен в силу теоремы 3. Отсюда и из (63) в силу лемм 8–11 вытекает доказательство теоремы 4.

З а м е ч а н и е 1. Пусть $u(t,x) \in L_p(R_0^+)$ такова, что $a_1^{n}(t) \frac{\partial^n u}{\partial t^n}$ и $a_2(t) \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ принадлежат $L_p(R_0^+)$. Здесь $a_1^{n}(t)$ и $a_2(t)$ – гладкие при $t>0$ и ограниченные на бесконеч-

ности функции, причем $a_1^n(t) = a_2(t) = t^\alpha$ при $0 \le t \le 1$, $\alpha > n$.

Тогда из теоремы 4 вытекает, что

$$\int_0^1 dt \int_{-\infty}^{\infty} t^{\alpha|k|p} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2} u(t,x)}{\partial t^{k_1}\, \partial x^{k_2}} \right|^p dx < +\infty$$

при всех $k_1 + k_2 \le n$. Этот результат уточняет аналогичный результат из [1], где при тех же k_i установлена лишь сходимость интегралов

$$\int_0^1 dt \int_{-\infty}^{\infty} t^{(\alpha n - n + k_1 + k_2)p} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2} u(t,x)}{\partial t^{k_1}\, \partial x^{k_2}} \right|^p dx < +\infty .$$

Замечание 2. В теореме 4 рассмотрен случай, когда переменная x одномерна. Аналогичная ситуация возникает и в случае, когда $x = (x_1, x_2, \dots, x_\ell)$. Именно, справедлив следующий результат. Пусть функция $u(t, x_1, \dots, x_\ell)$, суммируемая с p-й степенью в полупространстве $R_0^+ = \{(t,x) : t \ge 0, -\infty < x_i < +\infty\}$, такова, что

$$a_1^{n_0}(t) \frac{\partial^{n_0} u}{\partial t^{n_0}} \in L_p(R_0^+) \text{ и } a_2(t) \frac{\partial u^{n_i}}{\partial x_i^{n_i}} \in L_p(R_0^+),\ i = 1, 2, \dots, \ell .$$

Тогда при всех целых неотрицательных k_i, $i = 0, 1, \dots, \ell$, таких, что $\sum_{i=0}^{\ell} \frac{k_i}{n_i} \le 1$, справедливы включения

$$a_1^{k_0}(t)\, a_2^{\frac{k_1}{n_1} + \dots + \frac{k_\ell}{n_\ell}}(t) \frac{\partial^{k_0 + k_1 + \dots + k_\ell} u(t, x_1, \dots, x_\ell)}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_\ell^{k_\ell}} \in L_p(R_0^+),$$

а соответствующие операторы вложения ограничены. Доказательство такое же, как и в теореме 4.

Используя приведенную выше методику, можно рассмотреть и случай, когда производные $\dfrac{\partial^{n_i} u}{\partial x_i^{n_i}}$ суммируемы с различными весами.

§ 5. Точное описание областей определения дробных степеней сумм вырождающихся операторов

Пусть A_1 и A_2 – операторы, действующие в банаховом пространстве E. Пусть эти операторы позитивны, $\varphi_{A_1}(E) + \varphi_{A_2}(E) < \pi$,

и A_1 и A_2 образуют к.п.п. Тогда, как показано в [5], оператор $C = A_1 + A_2$ с $\mathcal{D}(C)=\mathcal{D}(A_1)\cap\mathcal{D}(A_2)$ позитивен, и поэтому определены дробные степени A_1^α, A_2^α и C^α. Оказывается, для их областей определения справедливы непрерывные вложения

$$\mathcal{D}(C^\alpha)\subset\mathcal{D}(A_1^\alpha)\cap\mathcal{D}(A_2^\alpha), \quad 0<\alpha<1. \tag{65}$$

Далее, тождество

$$\mathcal{D}(C^\alpha)=\mathcal{D}(A_1^\alpha)\cap\mathcal{D}(A_2^\alpha) \tag{66}$$

устанавливается лишь при дополнительных ограничениях на сопряженный с C оператор. В рассматриваемом нами случае вырождающихся операторов A_1 и A_2, действующих в $\mathcal{B}_p([0,\infty);E)$, это тождество справедливо без дополнительных предположений.

Т е о р е м а 5. Пусть выполняются условия 1–4. Тогда при любом $0<\alpha<1$ имеет место соотношение (66).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 3 достаточно установить непрерывность вложения

$$\mathcal{D}(A_1^\alpha)\cap\mathcal{D}(A_2^\alpha)\subset\mathcal{D}(C^\alpha). \tag{67}$$

Пусть $u\in\mathcal{D}(A_1^\alpha)\cap\mathcal{D}(A_2^\alpha)$. Тогда справедливо тождество

$$C^{\alpha-1}u=C^{\alpha-1}A_i^{-\alpha}A_i^\alpha u=A_i^{-\alpha}C^{\alpha-1}A_i^\alpha u+\left[C^{\alpha-1}A_i^{-\alpha}-A_i^{-\alpha}C^{\alpha-1}\right]A_i^\alpha u,\ i=1,2. \tag{68}$$

Из непрерывности вложения (65) вытекает, что операторы $A_i^{1-\alpha}C^{\alpha-1}$ ограничены. Ниже будет показано, что операторы

$$R_i=A_i\left[C^{\alpha-1}A_i^{-\alpha}-A_i^{-\alpha}C^{\alpha-1}\right],\quad i=1,2, \tag{69}$$

также ограничены в $\mathcal{B}_p([0,\infty);E)$. Это будет означать, что

$C^{\alpha-1}u\in\mathcal{D}(C)$, т.е. $u\in\mathcal{D}(C^\alpha)$.

Итак, установим ограниченность операторов R_i. Используя формулу (6), имеем

$$R_i u = \left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}\mu^{\alpha-1} A_i (\lambda+A_i)^{-1}(\mu+C)^{-1}\Delta(A_1,A_2)(\mu+C)^{-1}(\lambda+A_i)^{-1} d\lambda d\mu.$$

Обозначим

$$\mathcal{J}_i(\lambda,\mu) = \Delta(A_1,A_2)(\mu+C)^{-1}(\lambda+A_i)^{-1},$$

$$Q_i(\lambda,\mu) = A_i(\lambda+A_i)(\mu+C)^{-1}.$$

Докажем сначала ограниченность R_1. Для этого достаточно показать, что

$$\|\mathcal{J}_1(\lambda,\mu)\|_{B_p([0,\infty);E)} \leq M(1+\lambda)^{-1/n}, \tag{70}$$

$$\|Q_1(\lambda,\mu)\|_{B_p([0,\infty);E)} \leq M(1+\lambda)^{\beta-1}(1+\mu)^{-\beta} \tag{71}$$

при некотором $\beta \in (\alpha, \alpha+\frac{1}{n})$. Полагая $\bar{C} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2$, делая замену (3), используя явный вид оператора $\Delta(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$ и неравенство (42), получаем

$$\|\mathcal{J}_1(\lambda,\mu)\|_{B_p([0,\infty);E)} = \left\|\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(\tau)\frac{d^k}{d\tau^k}\beta(\tau)A(\mu+\bar{C})^{-1}(\lambda+\bar{A}_1)^{-1}\right\|_{B_p^*((-\infty,\infty);E)} \leq$$

$$\leq M\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\beta(\tau)\frac{d^k}{d\tau^k}A(\mu+\bar{C})^{-1}(\lambda+\bar{A}_1)^{-1}\right\|_{B_p^*((-\infty,\infty);E)} = K.$$

Пусть $\varphi(\tau)$ – финитная на оси функция и функции $\varphi(\tau)$ и $A\varphi(\tau)$ бесконечно дифференцируемы. Тогда, дифференцируя почленно уравнение

$$(\bar{C}+\mu)u(\tau) \equiv (-1)^r u^{(n)}(\tau) + (\beta(\tau)A + \kappa_1 + \kappa_2 + \mu)u(\tau) = \varphi(\tau), \tag{72}$$

получаем, что

$$(-1)^r[u'(\tau)]^{(n)} + (\beta(\tau)A + \kappa_1 + \kappa_2 + \mu)u'(\tau) = \varphi'(\tau) + \gamma_1(\tau)\beta(\tau)Au(\tau),$$

где $\gamma_1(\tau)$ ограничена в силу (42). Для доказательства возможности этого дифференцирования нужно учесть то, что функция Грина оператора $\bar{C}+\mu$ коммутирует с оператором A. Предыдущее соотношение равносильно

соотношению

$$\frac{d}{d\tau}\left(\bar{C}+\mu\right)^{-1}\varphi(\tau)=\left(\bar{C}+\mu\right)^{-1}\frac{d}{d\tau}\varphi(\tau)+\left(\bar{C}+\mu\right)^{-1}\gamma_1(\tau)\beta(\tau)A\left(\bar{C}+\mu\right)^{-1}\varphi(\tau)=$$

$$=\left(\bar{C}+\mu\right)^{-1}\frac{d}{d\tau}\varphi(\tau)+\Phi_1(\mu)\varphi(\tau).$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что оператор $\Phi_1(\mu)$ ограничен в $B_p^*((-\infty,\infty);E)$ равномерно по $\mu\geqslant 0$. По индукции, нетрудно установить справедливость тождества

$$\frac{d^k}{d\tau^k}\left(\bar{C}+\mu\right)^{-1}\varphi=\left(\bar{C}+\mu\right)^{-1}\frac{d^k}{d\tau^k}\varphi+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi_{ik}(\mu)\frac{d^i}{d\tau^i}\varphi,\quad 0\leqslant k<n, \tag{73}$$

и равномерную ограниченность операторов $\Phi_{ik}(\mu)$. Из (73), в силу плотности множества функций $\varphi(\tau)$ в B_p^*, вытекает, что

$$\frac{d^k}{d\tau^k}A\left(\mu+\bar{C}\right)^{-1}\left(\lambda+\bar{A}_1\right)^{-1}=A\left(\mu+\bar{C}\right)^{-1}\left[\frac{d^k}{d\tau^k}\left(\bar{A}_1+\lambda\right)^{-1}+\sum_{i=0}^{k-1}F_{ik}(\mu)\frac{d^i}{d\tau^i}\left(\bar{A}_1+\lambda\right)^{-1}\right],$$

где операторы $F_{ik}(\mu)$ равномерно ограничены по $\mu\geqslant 0$. Так как

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\frac{d^k}{d\tau^k}\left(\bar{A}_1+\lambda\right)^{-1}\right\|_{B_p^*((-\infty,\infty);E)}\leqslant M\left(1+\lambda\right)^{-\frac{1}{n}}$$

(см. [9]), то отсюда, в силу оценки (20), вытекает неравенство (70)

Докажем неравенство (71). Из позитивности операторов A_1 и C следует, что $\|Q_1(\lambda,\mu)\|_{B_p}\leqslant M\left(1+\mu\right)^{-1}$. Из доказательства теоремы 1 вытекает, что $\|Q_1(\lambda,\mu)\|_{B_p}\leqslant M\left(1+\lambda\right)^{-1}$. Поэтому при любом $\beta\in(0,1)$ справедливо неравенство

$$\|Q_1(\lambda,\mu)\|_{B_p^*((-\infty,\infty);E)}\leqslant M\left(1+\lambda\right)^{\beta-1}\left(1+\mu\right)^{-\beta}.$$

Выбирая $\beta\in\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{n}\right)$ и используя (70) и (71), получаем ограниченность оператора R_1.

Установим теперь ограниченность оператора R_2. Пусть $\varphi(\tau)\in D(A_2)$. Применяя к обеим частям (72) оператор $\beta(\tau)A$ и используя несложные преобразования, получаем, что

$$(-1)^r\left[\beta(\tau)Au\right]^{(n)}+\ (\beta(\tau)A+K_1+K_2+\mu)\left[\beta(\tau)Au\right]=\beta(\tau)A\varphi+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k(\tau)\frac{d^k}{d\tau^k}\left[\beta(\tau)Au\right]. \qquad (74)$$

Здесь функции $\gamma_k(\tau)$ ограничены на оси в силу (42). Из доказательства теоремы 1 и (74) вытекает, что при больших K_1 и K_2 справедливо соотношение

$$(-1)^r\left[\beta(\tau)Au\right]^{(n)}+\left[\beta(\tau)A+K_1+K_2+\mu\right]\left[\beta(\tau)Au(\tau)\right]=R(\mu)\left[\beta(\tau)A\varphi\right],$$

где оператор $R(\mu)$ ограничен в $B_p^*((-\infty,\infty);E)$ равномерно по $\mu\geqslant 0$. Иными словами,

$$\beta(\tau)A(\bar C+\mu)^{-1}\varphi=(\bar C+\mu)^{-1}R(\mu)\left[\beta(\tau)A\varphi\right]. \qquad (75)$$

Используя явный вид оператора $\Delta(\bar A_1,\bar A_2)$ и соотношение (75), получаем, что

$$K\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\gamma_k(\tau)\frac{d^k}{d\tau^k}(\bar C+\mu)^{-1}R(\mu)\left[\beta(\tau)A(\lambda+\bar A_2)^{-1}\right]\right\|_{B_p^*}.$$

Из оценок (20) и позитивности оператора A вытекает, что

$$\|\mathcal{J}_2(\lambda,\mu)\|_{B_p([0,\infty);E)}\leqslant M(1+\mu)^{-\frac{1}{n}}.$$

Кроме того, при любом $\beta\in(0,1)$, как и в случае $Q_1(\lambda,\mu)$, справедливо неравенство

$$\|Q_2(\lambda,\mu)\|_{B_p([0,\infty);E)}\leqslant M(1+\lambda)^{\beta-1}(1+\mu)^{-\beta}.$$

Выбирая $\beta\in\left(\alpha-\frac{1}{n},\alpha\right)$, получаем ограниченность оператора R_2.

Покажем теперь, что вложение (67) непрерывно. Пусть $u\in D(A_1^\alpha)\cap D(A_2^\alpha)$. Тогда

$$C^\alpha u=R_1A_1^\alpha u+R_2A_2^\alpha u+R_3A_1^\alpha u+R_4A_2^\alpha u,$$

где

$$R_i=A_{i-2}^{1-\alpha}\,C^{-(1-\alpha)},\quad i=3,4.$$

Ограниченность операторов R_1 и R_2 была установлена выше, а ограниченность операторов R_3 и R_4 следует из непрерывности вложения (65)

Теорема 5 доказана.

Литература

1. Успенский С.В. О теоремах вложения для весовых классов. - "Труды Мат. ин-та АН СССР", 1961, т.60, с. 282-303.
2. Успенский С.В. О смешанных производных функций, суммируемых с весом. - "Дифференц. уравнения", 1967, т.3, № 1, с. 139-154.
3. Кочарли А.Ф. Весовые оценки смешанных производных функций. - в кн.: Функциональный анализ и его применение, "Элм", Баку, 1971, с. 193-203.
4. Grisvard P. Espaces intermediacres entre espaces de Sobolev avec poids, Sc.Norm.Sup,Pisa, Ser.III,1963,v.17,f.3,p.255-296.
5. Соболевский П.Е. Дробные степени коэрцитивно позитивных сумм операторов. - "Докл. АН СССР", 1975, т.225, № 6, с. 1271-1274.
6. Соболевский П.Е. О вырождающихся параболических операторах. - "Докл. АН СССР", 1971, т.196, № 2, с.302-304.
7. Орлов В.П., Соболевский П.Е. О резольвенте вырождающегося оператора в банаховом пространстве. - "Докл. АН СССР", 1975, т.221, № 5, с. 1035-1037.
8. Орлов В.П. Дробные степени вырождающихся дифференциальных операторов. - "Дифференц. уравнения", 1975, т.11, № 11, с. 1980-1989.
9. Орлов В.П. Сингулярно вырождающиеся дифференциальные операторы высокого порядка с неограниченным операторным коэффициентом. -

"Дифференц. уравнения", 1976, 12, № 2, с. 272-280.

10. М о р е н К. Методы гильбертова пространства, М., "Мир", 1975.

11. Г л у ш к о В.П., К р е й н С.Г. Неравенства для норм производных в пространствах L_p с весом. - "Сиб. мат. журн.", 1960, 1, с. 343-382.

12. Б а т а л и н М.Д. Об оценках норм производных с весом в пространствах L_p . - "Труды Воронежск. ун-та Мат.ф.", 1973, вып.9, с. 35-40.

13. К р а с н о с е л ь с к и й М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., "Наука", 1966.

14. А г р а н о в и ч М.С., В и ш и к М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. - "Успехи мат. наук" 1964, т.19, вып.3, с. 53-161.

15. Н и к о л ь с к и й С.М. Приближения функций многих переменных и теоремы вложения, М., "Наука", 1975.

16. А г м о н С., Д у г л и с А., Н и р е н б е р г Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, ИЛ, 1962.

17. К у д р я в ц е в Л.Д. - "Труды Мат. ин-та АН СССР", 1972, т.112, с. 256-271.

18. К у д р я в ц е в Л.Д. - "Труды Мат. ин-та АН СССР", 1959, т.55, с. 3-182.

19. С е д о в В.Н. Весовые пространства и теоремы вложения. - "Дифференц. уравнения", 1972, т.8, № 8, с. 1452-1462.

20. G e y m o n a t G., G r i s v a r d P. Problemi ai liniti lineari elliptici negli spazi di Sobolev con peso, Estratto "le Matematiche", 1967, v.22, f.2, p.212-249.

21. Е в з е р о в И.Д., С о б о л е в с к и й П.Е. Дробные степени обыкновенных дифференциальных операторов. - "Дифференц. уравнения", 1973, т.9, № 2, с. 228-240.