УДК 517.946

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

С.К.Г о д у н о в, В.М.Г о р д и е н к о (Новосибирск)

В этой работе изучается смешанная задача для волнового уравнения $\frac{1}{c^2}p_{tt}-p_{xx}-p_{yy}=0$ в полупространстве $x>0$ с граничным условием (при $x=0$) $\frac{1}{c}p_t-ap_x-bp_y=0$. Выделена область значений параметров a, b, для которых такая задача поставлена некорректно, а для значений a, b, не принадлежащих этой области, построен диссипативный интеграл энергии.

Наше исследование возникло из анализа результатов работ Херша [1], Крейса [2], Сакамото [3], Икава [4, 5], Миотаки [6, 7] и выполнено весьма элементарными методами на самых простых примерах.

Мы благодарны В.А.Вербицкому за участие в первоначальной части этого исследования, В.С.Скобликову и участникам семинара по гиперболическим уравнениям в Новосибирском университете В.И.Костину, Е.В.Золотаревой, Е.В.Мамонтову за полезные обсуждения.

§ 1. Постановка смешанной задачи для волнового уравнения и примеры некорректности

Под смешанной задачей для волнового уравнения мы понимаем задачу нахождения функции $p=p(x,y,t)$, удовлетворяющей в области $t>0$, $x>0$ уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0,$$

а при $x=0$ граничному условию

$$\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - a\frac{\partial p}{\partial x} - b\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

и принимающей при $t = 0$, $x > 0$ заданные начальные данные Коши. Здесь c – постоянное положительное число.

Нас интересует, при каких значениях a, b смешанная задача поставлена корректно, при каких нет. Смешанная задача поставлена некорректно, если $a^2 + b^2 < 1$, $a < 0$ или $a = -1$. Это устанавливается построением примеров некорректности типа примера Адамара. При $a^2 + b^2 < 1$, $a < 0$, такой пример дает последовательность функций

$$p_n(x,y,t) = e^{-\sqrt{n}} \cdot e^{n\sqrt{1-a^2-b^2}(-act-x)} \cos n\left[cbt + abx + (1-a^2)y\right].$$

При $a = -1$ пример некорректности дает последовательность

$$p_n(x,y,t) = e^{-\sqrt{n}} \cdot e^{n(ct-x)}.$$

Итак, если точка (a, b) принадлежит полукругу $\{a^2+b^2<1, a<0\}$ или лежит на прямой $\{a = -1\}$ (см. рис. 1), задача поставлена некорректно. Оказывается, если (a, b) не принадлежит этим множествам, у смешанной задачи существует диссипативный интеграл энергии.

§ 2. Интеграл энергии для случая $a > 0$, $|b| \leq 1$

В этом параграфе мы построим диссипативный интеграл энергии для смешанной задачи волнового уравнения в случае, когда (a, b) лежит в полуполосе $|b| \leq 1$, $a > 0$.

Введем новые неизвестные функции:

$$p_0 = \frac{1}{c}p_t, \quad p_1 = p_x, \quad p_2 = p_y.$$

Имеет место дифференциальное тождество

$$\left[\frac{1}{c}\begin{pmatrix}1 & -m & -n\\ -m & 1 & 0\\ -n & 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}+\begin{pmatrix}m & -1 & 0\\ -1 & m & n\\ 0 & n & -m\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}n & 0 & -1\\ 0 & -n & m\\ -1 & m & n\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\right]\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\\ \frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\ -m\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\\ -n\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\end{pmatrix}.$$

Из этого тождества следует, что если P удовлетворяет волновому уравнению $\frac{1}{c^2}P_{tt}-P_{xx}-P_{yy}=0$, то вектор

$$\begin{pmatrix}P_0\\ P_1\\ P_2\\ P\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\frac{1}{c}P_t\\ P_x\\ P_y\\ P\end{pmatrix}$$

удовлетворяет системе

$$\frac{1}{c}\begin{pmatrix}1 & -m & -n & 0\\ -m & 1 & 0 & 0\\ -n & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}P_0\\ P_1\\ P_2\\ P\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m & -1 & 0 & 0\\ -1 & m & n & 0\\ 0 & n & -m & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}P_0\\ P_1\\ P_2\\ P\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}n & 0 & -1 & 0\\ 0 & -n & m & 0\\ -1 & m & n & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}P_0\\ P_1\\ P_2\\ P\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_0\\ P_1\\ P_2\\ P\end{pmatrix}=0, \quad (1)$$

которая при $m^2+n^2<1$ является симметрической гиперболической по Фридрихсу системой.

Из граничного условия $\frac{1}{c}p_t - ap_x - bp_y = 0$ для волнового уравнения следует граничное условие $p_0 - ap_1 - bp_2 = 0$ для системы.

Говорят, что граничное условие диссипативно, если на функциях, ему удовлетворяющих, форма

$$2p_0p_1 - mp_0^2 - mp_1^2 + mp_2^2 - 2np_1p_2$$

неотрицательно определена. Исключив из этой формы с помощью граничного условия функцию p_0 и положив $m=\frac{a}{1+a^2}$, $n=\frac{b}{1+a^2}$, приведем эту форму к виду

$$ap_1^2 + a\,\frac{1-b^2}{1+a^2}\,p_2^2 .$$

Отсюда видно, если $|b|\le 1$, $a>0$,то форма неотрицательно определена, и при этом выполнено условие гиперболичности системы $m^2+n^2<1$. Таким образом, в случае $a>0$, $|b|\le 1$ построена симметрическая гиперболическая система, и поставлено диссипативное граничное условие.

Дифференциальная форма тождества интеграла энергии для построенной системы имеет вид (для простоты напишем для случая постоянных a, b):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(p_0^2 - 2mp_0p_1 - 2np_0p_2 + p_1^2 + p_2^2 + p^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2p_0p_1 - mp_0^2 - \right.$$
$$\left. - mp_1^2 + mp_2^2 - 2np_1p_2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2p_0p_2 - 2mp_1p_2 - np_0^2 - np_2^2 + np_1^2\right) - 2pp_0 = 0 .$$

Если выразить p_0, p_1, p_2 через производные от p, то мы получим тождество интеграла энергии, выполненное на решениях волнового уравнения

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}p_t^2 - 2m\frac{1}{c}p_t\cdot p_x - 2n\frac{1}{c}p_tp_y + p_x^2 + p_y^2 + p^2\right) -$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{1}{c}p_tp_x - \frac{1}{c^2}mp_t^2 - mp_x^2 + mp_y^2 - 2np_xp_y\right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{1}{c}p_t\cdot p_y-2mp_xp_y-\frac{1}{c^2}np_t^2+np_x^2-np_y^2\right)-$$

$$-\frac{1}{c}2p_t\cdot p=0.$$

Это последнее тождество можно получить еще с помощью известного приема "разделяющего оператора", т.е. путем тождественных преобразований равенства

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}-m\frac{\partial p}{\partial x}-n\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)=0$$

(оператор $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-m\frac{\partial}{\partial x}-n\frac{\partial}{\partial y}$ называется разделяющим для оператора $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, если плоскость $\frac{1}{c}\tau-m\xi-n\eta=0$ разделяет полы конуса $\frac{1}{c^2}\tau^2-\xi^2-\eta^2=0$, т.е. если $m^2+n^2<1$). (В следующем параграфе будет показано, что для значений (a,b), не лежащих в полуполосе $|b|\leq 1$, $a>0$, построить интеграл энергии с помощью "разделяющего оператора" нельзя.)

Проведенное построение без труда переносится на случай более общего граничного условия для волнового уравнения $\frac{1}{c}p_t-ap_x-bp_y+kp=0$ при $x=0$. При этом вместо последнего уравнения системы (1) надо воспользоваться уравнением

$$N\left(\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial x}-p_0+p_1\right)=0. \qquad (2)$$

При достаточно большом N граничное условие $p_0-ap_1-bp_2+kp=0$ будет диссипативным для системы.

В заключение параграфа еще раз остановимся на методе, с помощью которого был получен интеграл энергии, которым мы будем пользоваться в дальнейшем. Этот метод состоит в том, что пишется симметрическая гиперболическая система с диссипативным граничным условием, которой удовлетворяет вектор, составленный из производных от функции p - ре-

шения смешанной задачи волнового уравнения. Затем обычным способом (см., например, [8]) строим интеграл энергии симметрической гиперболической системы, выражая его через функцию ρ и ее производные. Таким образом, мы получаем интеграл энергии исходной смешанной задачи для волнового уравнения.

§ 3. Плоские волны смешанной задачи для волнового уравнения и скорость распространения возмущений

В предыдущем параграфе мы построили диссипативный интеграл энергии, если функции a, b из граничного условия удовлетворяют неравенствам $a>0$, $|b|\leq 1$. В этом параграфе мы построим плоские волны смешанной задачи, с помощью которых выясним, чем другие граничные условия отличаются от этих.

В этом и следующем двух параграфах мы рассматриваем граничное условие при $x=0$ в виде $\frac{1}{c}\rho_t - a\rho_x - b\rho_y = 0$ с постоянными a, b. Плоская волна $\rho = \rho(ct + \alpha x + \beta y)$ является решением смешанной задачи, если α, β удовлетворяют алгебраической системе

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=1, \\ a\alpha + b\beta = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Решение этой системы имеет простую геометрическую интерпретацию. Будем представлять пары (a, b) и (α, β) как координаты точек (компоненты векторов) на плоскости. Тогда алгебраическая система (1) означает, что проекция вектора (a, b) на единичный вектор (α, β) равна единице. Отсюда система разрешима только при $a^2+b^2\geqslant 1$. Если $a^2+b^2\geqslant 1$, решение (α, β) существует и представляет собой точку касания прямой, проведенной из точки (a, b) и окружности с центром в начале координат. Таким образом, если $a^2+b^2>1$, имеется два решения (α_1, β_1), (α_2, β_2) алгебраической системы и соответственно два типа

(два семейства) плоских волн $p=p(ct+\alpha_1 x+\beta_1 y)$, $p=p(ct+\alpha_2 x+\beta_2 y)$. Решив систему (1) алгебраически, получим формулы

$$\alpha_1=\frac{a+b\sqrt{a^2+b^2-1}}{a^2+b^2}, \qquad \beta_1=\frac{b-a\sqrt{a^2+b^2-1}}{a^2+b^2},$$

$$\alpha_2=\frac{a-b\sqrt{a^2+b^2-1}}{a^2+b^2}, \qquad \beta_2=\frac{b+a\sqrt{a^2+b^2-1}}{a^2+b^2}.$$

Нумерация точек касания выбрана так, что направление движения от первой точки ко второй по меньшей дуге окружности совпадает с обходом окружности против часовой стрелки. Итак, если на плоскости x, y из точки с координатами (a, b) провести касательную к единичной окружности с центром в начале координат, то получим линию уровня плоской волны смешанной задачи. Эта волна перемещается в сторону возрастания x, если $\alpha<0$ (касательная касается окружности в левой полуплоскости, рис.2), если $\alpha>0$ (касательная касается окружности в правой полуплоскости, рис.3), волна перемещается в сторону убывания x. Плоские волны дают важную информацию о смешанной задаче.

Пусть смешанная задача допускает решения в виде плоской волны $p=p(ct+\alpha x+\beta y)$ с $\alpha<0$. Это имеет место, если (a, b) не лежит в полукруге $\{a^2+b^2<1,\ a<0\}$ (где задача некорректна) или в полуполосе $\{a\geq 0, |b|\leq 1\}$. В качестве $p(z)$ возьмем такую функцию, что $p(z)=0$ при $z\leq 0$ и $p(z)>0$ при $z>0$.

На рис.4 изображен фронт волны $ct+\alpha x+\beta y=0$ в моменты времени $t=0$ и $t=1$. Имеются точки (зачерченное множество на рис.4), в которых в момент времени $t=1$ решение стало ненулевым, хотя в момент времени $t=0$ расстояние до точек полупространства с ненулевым решением было больше C. Можно сказать, что смешанная задача при (a, b), не лежащих в полукруге $\{a^2+b^2<1, a<0\}$ и полуполосе

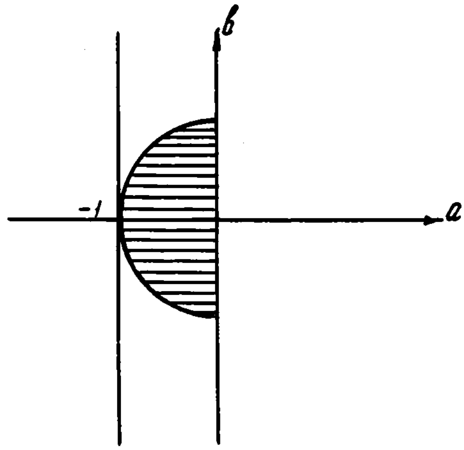

Рис. 1

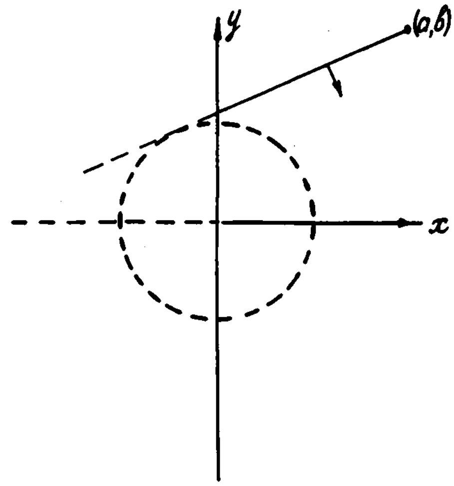

Рис. 2

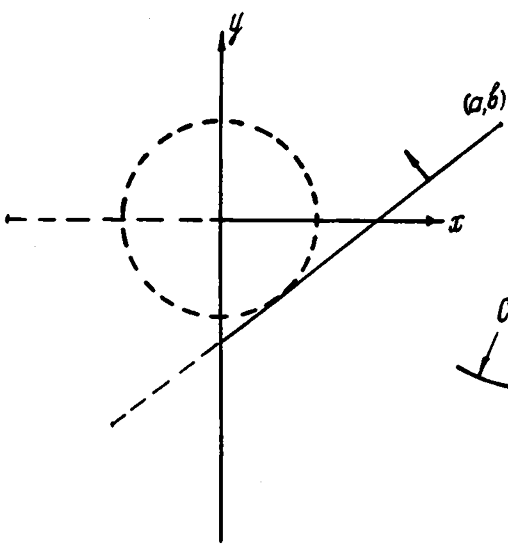

Рис. 3

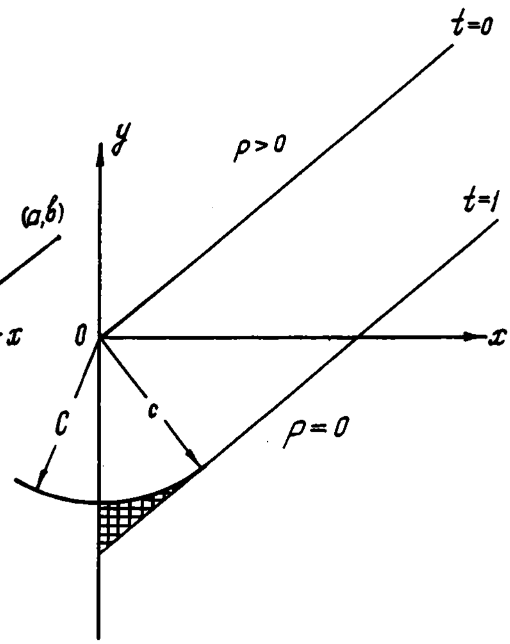

Рис. 4

$\{a \geq 0 \ , |b| \leq 1\}$, допускает распространение возмущений вблизи границы со скоростью, большей c .

Покажем, что при $a > 0$, $|b| \leq 1$ возмущения не могут распространяться быстрее c .

Про решение $p(x,y,t)$ задачи Коши для волнового уравнения известно, что если в момент времени $t=0$ данные Коши равны нулю в некоторой точке (x_0,y_0) и во всех точках (x,y) , лежащих на расстоянии, меньшем c , от нее, то до момента $t=1$ решение в точке (x_0,y_0) остается нулевым. Это же верно для симметрических гиперболических систем, у которых внешняя пола конуса характеристик такая же, как конус волнового уравнения (см. [8]). Аналогичное утверждение доказывается и в случае смешанной задачи в полупространстве с диссипативными граничными условиями при $x=0$ для тех же систем и волнового уравнения. А именно, если начальные данные Коши при $t=0$ равны нулю в точке (x_0,y_0) и во всех точках полупространства $x>0$, лежащих от нее на расстоянии, меньшем c , то решение до момента $t=1$ остается нулевым в точке (x_0,y_0) , т.е. исключается возможность распространения возмущений со скоростью, большей c . Так как для граничных условий с (a,b) , не лежащими в полукруге $\{a^2+b^2<1, a<0\}$ и полуполосе $\{a \geq 0 \ , |b| \leq 1\}$, возмущение может распространяться быстрее скорости c , то при этих граничных условиях нельзя получить диссипативный интеграл энергии с помощью симметрических гиперболических систем, имеющих в качестве внешней полы конуса характеристик конус характеристик волнового уравнения. Именно такими были системы, которые мы строили в предыдущем параграфе (уравнение конуса характеристик системы (1) из § 2 есть

$$(1-m^2-n^2)\tau\left(\frac{1}{c}\tau - m\xi - n\eta\right)\left(\frac{1}{c^2}\tau^2-\xi^2-\eta^2\right)=0 \quad).$$

Отсюда, во-первых, следует, что при $\{a>0,\ |b|<1\}$ возмущение не может распространяться быстрее скорости c, во-вторых, становится ясно, почему не удалось рассмотреть граничные условия, не лежащие в полуполосе. В следующих параграфах мы построим диссипативные интегралы энергии с помощью систем, имеющих более широкую внешнюю полу конуса характеристик для всех граничных условий, для которых не удалось в § 1 построить примеры некорректности типа примера Адамара.

§ 4. Симметрическая гиперболическая система для решений волнового уравнения и интеграл энергии в случае $a \geq 0$

Введем новые неизвестные функции:

$$P_0=\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}, \quad P_1=\frac{\partial p}{\partial x}, \quad P_2=\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\theta=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}-a\frac{\partial p}{\partial x}-b\frac{\partial p}{\partial y}\right),$$

$$\varphi=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}-a\frac{\partial p}{\partial x}-b\frac{\partial p}{\partial y}\right),$$

$$\psi=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}-a\frac{\partial p}{\partial x}-b\frac{\partial p}{\partial y}\right).$$

Справедливы следующие дифференциальные тождества:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]=0,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]=0.$$

Из этих тождеств и определений функций $\theta, \varphi, \psi, p_0, p_1, p_2$ следует, что если p удовлетворяет волновому уравнению, то $\theta, \varphi, \psi, p_0, p_1, p_2, p$ удовлетворяют симметрической гиперболической системе

$$\begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial y}=0, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial\theta}{\partial x}=0, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\theta}{\partial y}=0, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial p_0}{\partial t}-a\frac{\partial p_0}{\partial x}-b\frac{\partial p_0}{\partial y}-\theta=0, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial p_1}{\partial t}-a\frac{\partial p_1}{\partial x}-b\frac{\partial p_1}{\partial y}-\varphi=0, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial p_2}{\partial t}-a\frac{\partial p_2}{\partial x}-b\frac{\partial p_2}{\partial y}-\psi=0, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}-p_0=0. \end{cases}$$

Из граничного условия для волнового уравнения $\frac{1}{c}p_t-ap_x-bp_y=0$ при $x=0$ следует граничное условие $\theta=0$ при $x=0$. Это граничное условие для нашей системы диссипативно.

Обсудим некоторые свойства построенной системы. При ее построении мы использовали вторые производные от p-функции θ, φ, ψ.

Включение этих функций в систему позволило нам использовать их в уравнениях для первых производных в качестве младших членов системы и благодаря этому ввести новые характеристики. Так нам удалось построить симметрическую гиперболическую систему с диссипативными граничными условиями для области значений параметров (a,b), большей, чем в § 2. Интеграл энергии этой системы после выражения функций $\theta, \varphi, \psi, p_0, p_1, p_2$ через производные p, приводит к интегралу энергии для исходного волнового уравнения.

Однако и теперь диссипирующийся на границе интеграл энергии построен не для всех значений параметров (a,b), для которых не удалось построить примера некорректности типа Адамара. В § 5 мы построим интегралы и порождающие их симметрические системы по тому же принципу, по которому построена система, рассмотренная нами в настоящем параграфе. Это принцип состоит в введении производных

$$\theta = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - a\frac{\partial p}{\partial x} - b\frac{\partial p}{\partial y}\right),$$

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - a\frac{\partial p}{\partial x} - b\frac{\partial p}{\partial y}\right),$$

$$\psi = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - a\frac{\partial p}{\partial x} - b\frac{\partial p}{\partial y}\right),$$

от обращающегося на границе в нуль выражения $\frac{1}{c}p_t - ap_x - bp_y$ и в использовании θ, φ, ψ в качестве неизвестных симметрической системы.

§ 5. Симметрическая гиперболическая система для решений волнового уравнения и интеграл энергии в случае $a^2+b^2 \geqslant 1$, $a \neq -1$

В этом параграфе мы построим интеграл энергии для смешанной задачи волнового уравнения, когда коэффициенты граничного условия

(a,b) лежат в области $a^2+b^2 \geq 1, a \neq -1$. Мы будем использовать те же функции θ, φ, ψ, что и в предыдущем параграфе, и ту же систему для них:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\theta}{\partial t} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\psi}{\partial t} - \dfrac{\partial\theta}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

с диссипативным граничным условием $\theta = 0$ при $x=0$. Далее мы, как и в предыдущем параграфе, дополним эту систему, включив в нее уравнение для первых производных от p и самой функции p, причем напишем уравнения, не требующие граничных условий. Мы будем писать уравнения не непосредственно для p_t, p_x, p_y, а для их линейных комбинаций. Рассматриваемые уравнения будут справедливы не для любых $p(x,y,t)$, а только для p, удовлетворяющих волновому уравнению. Введем функцию $f=\frac{1}{c}p_t - ap_x - bp_y$. В силу определения функции θ, для f имеем уравнение

$$\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} - \theta = 0.$$

Это уравнение, как и уравнение для функций θ, φ, ψ, можно использовать при любых значениях коэффициентов граничного условия a, b. Дальнейшее наше построение будет зависеть от того, сколько семейств плоских волн, распространяющихся вблизи границы со скоростью, большей c, допускает исходная смешанная задача.

Пусть область $|b| \leq 1$, $a^2+b^2 \geq 1$, $a<0, a \neq -1$, характеризуется тем, что соответствующее граничное условие допускает два семейства плоских волн, распространяющихся вблизи границы со скоростью, большей c. Построение дополнительных уравнений основано на дифференци-

альном тождестве

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{\beta_1}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{\beta_2}\frac{\partial}{\partial y}\right)-$$

$$-\frac{1}{\beta_1\beta_2(a^2+b^2)}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}-b\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b\frac{\partial}{\partial y}\right)\equiv$$

$$\equiv-\frac{a^2}{(a^2+b^2)\beta_1\beta_2}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

где β_1, β_2 – те же, что в § 3.

Введя новые функции:

$$g=\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{1}{\beta_2}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad h=\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{1}{\beta_1}\frac{\partial p}{\partial y}$$

и используя тождество, мы заключаем, что если p удовлетворяет волновому уравнению, то g, h, p удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial g}{\partial t}-\dfrac{1}{\beta_1}\dfrac{\partial g}{\partial y}-\dfrac{1}{\beta_1\beta_2(a^2+b^2)}(\theta+a\varphi-b\psi)=0, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial h}{\partial t}-\dfrac{1}{\beta_2}\dfrac{\partial h}{\partial y}-\dfrac{1}{\beta_1\beta_2(a^2+b^2)}(\theta+a\varphi-b\psi)=0, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial p}{\partial t}-\dfrac{1}{\beta_2}\dfrac{\partial p}{\partial y}-g=0. \end{cases}$$

Пусть $b \geqslant 1$. В этом случае исходная смешанная задача допускает одно семейство плоских волн, распространяющихся вдоль границы со скоростью, большей c . Имеет место тождество

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}-\beta_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{\beta_2}\frac{\partial}{\partial y}\right)-$$

$$-\frac{b}{\beta_2(a^2+b^2)}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\sqrt{a^2+b^2-1}}{b}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b\frac{\partial}{\partial y}\right)\equiv$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2+b^2-1}}{\beta_2(a^2+b^2)}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

причем $\alpha_1 \geqslant 0$.

Введем новые функции

$$g=\frac{1}{c}p_t-\frac{1}{\beta_2}p_y\,;\quad h=\frac{1}{c}p_t-\alpha_1 p_x-\beta_1 p_y\,.$$

Используя тождество, получаем, что если p удовлетворяет волновому уравнению, то g, h, p удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial g}{\partial t}-\alpha_1\dfrac{\partial g}{\partial x}-\beta_1\dfrac{\partial g}{\partial y}-\dfrac{b}{\beta_2(a^2+b^2)}\left(\theta-\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-1}}{b}\varphi-\dfrac{1}{b}\psi\right)=0,\\[2ex] \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial h}{\partial t}-\dfrac{1}{\beta_2}\dfrac{\partial h}{\partial y}-\dfrac{b}{\beta_2(a^2+b^2)}\left(\theta-\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-1}}{b}\varphi-\dfrac{1}{b}\psi\right)=0,\\[2ex] \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial p}{\partial t}-\dfrac{1}{\beta_2}\dfrac{\partial p}{\partial y}-g=0.\end{cases}$$

Случай $b \leqslant -1$ аналогичен предыдущему, здесь допускается другое семейство плоских волн, распространяющихся вдоль границы быстрее скорости c . Мы воспользуемся тождеством

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{\beta_1}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}-\beta_2\frac{\partial}{\partial y}\right)-$$

$$-\frac{b}{(a^2+b^2)\beta_1}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\sqrt{a^2+b^2-1}}{b}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b\frac{\partial}{\partial y}\right)=$$

$$=-\frac{a\sqrt{a^2+b^2-1}}{\beta_1(a^2+b^2)}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),\quad \alpha_2\geqslant 0.$$

Введем новые функции

$$g=\frac{1}{c}p_t-\alpha_2 p_x-\beta_2 p_y\,,\quad h=\frac{1}{c}p_t-\frac{1}{\beta_1}p_y\,.$$

Тогда для g, h, p можем написать уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial g}{\partial t} - \dfrac{1}{\beta_1}\dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{1}{(a^2+b^2)\beta_1}\left(\theta + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2-1}}{b}\varphi - \dfrac{1}{b}\psi\right) = 0, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial h}{\partial t} - \alpha_2\dfrac{\partial h}{\partial x} - \beta_2\dfrac{\partial h}{\partial y} - \dfrac{b}{(a^2+b^2)\beta_1}\left(\theta + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2-1}}{b}\varphi - \dfrac{1}{b}\psi\right) = 0, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial p}{\partial t} - \alpha_2\dfrac{\partial p}{\partial x} - \beta_2\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

При $a^2+b^2 \geq 1, a>0, |b| \leq 1$, возмущение не может передаваться со скоростью, превышающей c . В этом случае мы воспользуемся дифференциальным тождеством

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_1\frac{\partial}{\partial x} - \beta_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_2\frac{\partial}{\partial x} - \beta_2\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{1}{a^2+b^2}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x} - b\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x} - b\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Тогда для функций

$$g = \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - \alpha_2\frac{\partial p}{\partial x} - \beta_2\frac{\partial p}{\partial y}, \quad h = \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - \alpha_1\frac{\partial p}{\partial x} - \beta_1\frac{\partial p}{\partial y}, \quad p$$

имеем уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial g}{\partial t} - \alpha_1\dfrac{\partial g}{\partial x} - \beta_1\dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{1}{a^2+b^2}(\theta - a\varphi - b\psi) = 0, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial h}{\partial t} - \alpha_2\dfrac{\partial h}{\partial x} - \beta_2\dfrac{\partial h}{\partial y} - \dfrac{1}{a^2+b^2}(\theta - a\varphi - b\psi) = 0, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial p}{\partial t} - \alpha_2\dfrac{\partial p}{\partial x} - \beta_2\dfrac{\partial p}{\partial y} - g = 0. \end{cases}$$

Итак, если $a^2+b^2 \geq 1$, $a \neq -1$, то мы в этом параграфе построили симметрическую гиперболическую систему с диссипативным граничным условием.

Легко проверить, что наши построения непрерывно зависят от a, b, когда a, b изменяются в областях $\{a^2+b^2 \geq 1,\ a > -1\}$ и $\{a < -1\}$.

Заметим также, что область единственности вблизи границы, которую можно выделить с помощью этих систем, является максимально допускаемой плоскими волнами, бегущими быстрее c . (Этим свойством не обладает система из § 3.)

При $a^2+b^2>1,\ a\neq-1$, первые производные, которые мы ввели, линейно-независимы, и мы можем с помощью линейной замены перейти от функций f, g, h к функциям $p_0=\frac{1}{c}p_t,\ p_1=p_x, p_2=p_y$. Мы получим для них уравнения

$$\frac{1}{c}A\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\\p\end{pmatrix}+B\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\\p\end{pmatrix}+C\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\\p\end{pmatrix}+Q\begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\\p\end{pmatrix}+Q_1\begin{pmatrix}\theta\\\varphi\\\psi\end{pmatrix}=0. \qquad (1)$$

Матрицы A, B, C, Q, Q_1 непрерывно зависят от a, b . Для функций θ, φ, ψ , которые мы ввели по формулам

$$\begin{aligned}\theta&=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}-a\frac{\partial p}{\partial x}-b\frac{\partial p}{\partial y}\right),\\ \varphi&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}-a\frac{\partial p}{\partial x}-b\frac{\partial p}{\partial y}\right),\\ \psi&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}-a\frac{\partial p}{\partial x}-b\frac{\partial p}{\partial y}\right),\end{aligned} \qquad (2)$$

у нас есть система

$$\begin{cases}\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\theta}{\partial t}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=0,\\[2mm] \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}-\dfrac{\partial\theta}{\partial y}=0.\end{cases} \qquad (3)$$

При получении системы уравнений (1), (3), мы считали a, b посто-

янными. В следующем параграфе мы покажем, что если a, b – гладкие функции на границе $x=0$, то их можно так продолжить внутрь полупространства $x \geq 0$, что функции θ, φ, ψ, введенные по тем же формулам (2), будут удовлетворять системе (3) с младшими членами. Уравнения системы (1) после замены $\theta, \varphi, \psi, \rho_0, \rho_1, \rho_2$ на производные от ρ, представляют собой тождества на решениях волнового уравнения при постоянных a, b. Если a, b считать переменными, то надо заменить в (1) θ на $\theta + a_t \rho_1 + b_t \rho_2$; φ на $\varphi + a_x \rho_1 + b_x \rho_2$; ψ на $\psi + a_y \rho_1 + b_y \rho_2$ при этом изменится только матрица Q. Кроме того, в следующем параграфе мы включим в систему остальные производные второго порядка от ρ, правда, помноженные на функции, обращающиеся в нуль на границе.

§ 6. Окончание построения диссипативного интеграла энергии для смешанной задачи волнового уравнения с двумя пространственными переменными

Окончание построения нам удается провести, использовав специальную систему координат λ, μ, ν вблизи границы $x=0$. Эта система координат удовлетворяет следующим свойствам. Координатные поверхности $\mu = const$, $\nu = const$ – характеристические поверхности волнового уравнения.

Линия пересечения этих поверхностей пересекает границу в направлении дифференцирования

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - a(y,t)\frac{\partial}{\partial x} - b(y,t)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Линии пересечения поверхностей $\lambda = const$, $\mu = const$ и поверхностей $\lambda = const$, $\nu = const$ пересекают границу не касаясь.

Опишем построение такой системы координат. Зададимся точкой

(y_0, t_0) на границе. Мы предполагаем, что $a^2+b^2>1$, поэтому имеются две характеристические плоскости, содержащие вектор $(-a(y,t),$ $-b(y,t), 1)$. Линия пересечения этих плоскостей с граничной поверхностью определяет направления в точке (y_0, t_0). Построив такие направления в каждой точке границы, получим два поля направлений. Проинтегрировав последние, получим два семейства кривых на границе $x=0$. Проведем через каждую кривую каждого семейства характеристическую поверхность. Получим семейства μ и ν. Семейство λ всегда можно подобрать (например, при $a\neq 1$ годятся поверхности $\lambda\equiv t=const$). Итак, мы построили вблизи границы $x=0$ систему координат $\lambda(x,y,t)$, $\mu(x,y,t)$, $\nu(x,y,t)$, такую что

$$\frac{1}{c^2}\mu_t^2-\mu_x^2-\mu_y^2=0,\quad \frac{1}{c^2}\nu_t^2-\nu_x^2-\nu_y^2=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}-b(x,y,t)\frac{\partial}{\partial y},$$

где $a(0,y,t)=a(y,t)$, $b(0,y,t)=b(y,t)$.

Система координат построена вблизи $\{x=0,\ t>0\}$. Мы будем считать, что коэффициенты $a(y,t)$, $b(y,t)$ гладко продолжены в полоску $\{x=0,\ -\varepsilon<t<0\}$, тогда система координат построена вблизи $\{x=0, t\geq 0\}$. Запишем волновой оператор в новых переменных

$$\frac{1}{c^2}P_{tt}-P_{xx}-P_{yy}=P_{\lambda\lambda}\left(\frac{1}{c^2}\lambda_t^2-\lambda_x^2-\lambda_y^2\right)+P_{\mu\mu}\left(\frac{1}{c^2}\mu_t^2-\mu_x^2-\mu_y^2\right)+$$

$$+P_{\nu\nu}\left(\frac{1}{c^2}\nu_t^2-\nu_x^2-\nu_y^2\right)+2P_{\lambda\mu}\left(\frac{1}{c^2}\lambda_t\mu_t-\lambda_x\mu_x-\lambda_y\mu_y\right)+2P_{\lambda\nu}\left(\frac{1}{c^2}\lambda_t\nu_t-\right.$$

$$\left.-\lambda_x\nu_x-\lambda_y\nu_y\right)+2P_{\mu\nu}\left(\frac{1}{c^2}\mu_t\nu_t-\mu_x\nu_x-\mu_y\nu_y\right)+P_\lambda\left(\frac{1}{c^2}\lambda_{tt}-\lambda_{xx}-\lambda_{yy}\right)+$$

$$+P_\mu\left(\frac{1}{c^2}\mu_{tt}-\mu_{xx}-\mu_{yy}\right)+P_\nu\left(\frac{1}{c^2}\nu_{tt}-\nu_{xx}-\nu_{yy}\right).$$

Введем сокращенные обозначения:

$$[\lambda,\nu] = \left(\frac{1}{c^2}\lambda_t\nu_t - \lambda_x\nu_x - \lambda_y\nu_y\right),\ \square\lambda = \frac{1}{c^2}\lambda_{tt} - \lambda_{xx} - \lambda_{yy}.$$

Так как $[\mu,\mu] = 0$ и $[\nu,\nu] = 0$, то можем записать

$$\frac{1}{c^2}p_{tt} - p_{xx} - p_{yy} \equiv ([\lambda,\lambda]p_{\lambda\lambda} + 2[\lambda,\mu]p_{\lambda\mu} + 2[\lambda,\nu]p_{\lambda\nu} + 2[\mu,\nu]p_{\mu\nu} +$$

$$+ (\square\lambda)p_\lambda + (\square\mu)p_\mu + (\square\nu)p_\nu) = 0. \qquad (1)$$

Введем новую функцию $f = p_\lambda$. Продифференцировав уравнение (1) по λ, получим

$$\{[\lambda,\lambda]f_{\lambda\lambda} + 2[\lambda,\mu]f_{\lambda\mu} + 2[\lambda,\nu]f_{\lambda\nu} + 2[\mu,\nu]f_{\mu\nu} + (\square\lambda)f_\lambda +$$

$$+ (\square\mu)f_\mu + (\square\nu)f_\nu\} + [\lambda,\lambda]_\lambda f_\lambda + 2[\lambda,\mu]_\lambda f_\mu + 2[\lambda,\nu]_\lambda f_\nu +$$

$$+ 2p_{\mu\nu}[\mu,\nu]_\lambda + (\square\lambda)_\lambda p_\lambda + (\square\mu)_\lambda p_\mu + (\square\nu)_\lambda p_\nu = 0. \qquad (2)$$

Часть, заключенная в фигурные скобки, есть волновой оператор от f. Легко установить, что соотношения $[\mu,\mu] = 0$, $[\nu,\nu] = 0$ влекут $[\mu,\nu] \neq 0$, если $\mu \neq \nu$. Поэтому $p_{\mu\nu}$ можно выразить из уравнения (1)

$$p_{\mu\nu} = -\frac{1}{2[\mu,\nu]}\left([\lambda,\lambda]f_\lambda + 2[\lambda,\mu]f_\mu + 2[\lambda,\nu]f_\nu +\right.$$

$$\left. + (\square\lambda)p_\lambda + (\square\mu)p_\mu + (\square\nu)p_\nu\right). \qquad (3)$$

Подставляя это выражение в (2) и переходя к переменным x, y, t, будем иметь

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k_0\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} + k_1\frac{\partial f}{\partial x} + k_2\frac{\partial f}{\partial y} + \ell_0 p_0 + \ell_1 p_1 + \ell_2 p_2 = 0,$$

где

$$f = \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - a(x,y,t)\frac{\partial p}{\partial x} - b(x,y,t)\frac{\partial p}{\partial y},$$

причем $a(0,y,t) = a(y,t)$, $b(0,y,t) = b(y,t)$. Вводя наши обозначения

$$\theta = \frac{1}{c} f_t , \ \varphi = f_x , \ \psi = f_y ,$$

и так как

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_x) - \frac{\partial}{\partial x}(f_t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(f_y) - \frac{\partial}{\partial y}(f_t) = 0,$$

то для θ, φ, ψ можем написать систему

$$\begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} + k_0\theta + k_1\varphi + k_2\psi + \ell_0 p_0 + \ell_1 p_1 + \ell_2 p_2 = 0, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Граничное условие $\theta = 0$ диссипативно для этой системы. Эта система отличается от системы (3) предыдущего параграфа только младшими членами. Если в эту систему подставить вместо θ, φ, ψ

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - a\frac{\partial p}{\partial x} - b\frac{\partial p}{\partial y} + kp\right) = \theta + kp_0 + \frac{1}{c}k_t p,$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - a\frac{\partial p}{\partial x} - b\frac{\partial p}{\partial y} + kp\right) = \varphi + kp_1 + k_x p,$$

$$\tilde{\psi} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - a\frac{\partial p}{\partial x} - b\frac{\partial p}{\partial y} + kp\right) = \psi + kp_2 + k_y p,$$

то в системе появится остаток в виде $\tilde{\theta}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p \end{pmatrix}$. Включив этот остаток в систему, еще раз изменим матрицу младших членов. Таким образом, все наши результаты справедливы для граничного условия

$$\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - a(y,t)\frac{\partial p}{\partial x} - b(y,t)\frac{\partial p}{\partial y} + k(y,t)p = 0 \qquad \text{при } x = 0.$$

§ 7. Смешанная задача для волнового уравнения

в полупространстве

Смешанную задачу в полупространстве

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial y_2^2}=0 \quad \text{при} \quad x>0,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}-a\frac{\partial p}{\partial x}-b_1\frac{\partial p}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial p}{\partial y_2}=0 \quad \text{при} \quad x=0 \tag{1}$$

рассмотрим только для постоянных a, b_1, b_2. Имеет место тот же результат: можно построить либо пример некорректности типа примера Адамара, либо диссипативный интеграл энергии. Пример некорректности можно построить при $-1 \leq a < 0$. Соответствующей последовательностью будет

$$p_n(x,y,y,t)=e^{-\sqrt{n}}e^{n\sqrt{b_1^2+b_2^2}(-act-x)}\cos[n\sqrt{1-a^2}(b_2y_1-b_1y_2)].$$

Построим симметрическую гиперболическую систему с диссипативным граничным условием при $a \geq 0$. Введем новые функции

$$q=\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t},\quad q_0=\frac{\partial p}{\partial x},\quad q_1=\frac{\partial p}{\partial y_1},\quad q_2=\frac{\partial p}{\partial y_2},$$

$$\theta=\frac{1}{c}\frac{\partial q}{\partial t}-a\frac{\partial q}{\partial x}-b_1\frac{\partial q}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial q}{\partial y_2},$$

$$\varphi=\frac{1}{c}\frac{\partial q_0}{\partial t}-a\frac{\partial q_0}{\partial x}-b_1\frac{\partial q_0}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial q_0}{\partial y_2}, \tag{2}$$

$$\psi_1=\frac{1}{c}\frac{\partial q_1}{\partial t}-a\frac{\partial q_1}{\partial x}-b_1\frac{\partial q_1}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial q_1}{\partial y_2},$$

$$\psi_2=\frac{1}{c}\frac{\partial q_2}{\partial t}-a\frac{\partial q_2}{\partial x}-b_1\frac{\partial q_2}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial q_2}{\partial y_2}.$$

Справедливы тождества:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b_1\frac{\partial}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-b_1\frac{\partial}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial y_1}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b_1\frac{\partial}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial}{\partial y_1}\right]-\frac{\partial}{\partial y_2}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b_1\frac{\partial}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\frac{\partial}{\partial y_2}\right]=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-a\frac{\partial}{\partial x}-b_1\frac{\partial}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right),$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b_1\frac{\partial}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b_1\frac{\partial}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right]=0,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b_1\frac{\partial}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\frac{\partial}{\partial y_1}\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y_1}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b_1\frac{\partial}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right]=0,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b_1\frac{\partial}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\frac{\partial}{\partial y_2}\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y_2}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}-b_1\frac{\partial}{\partial y_1}-b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right]=0.$$

Из этих тождеств и определений функций $\theta, \varphi, \psi_1, \psi_2$ следует, что если p удовлетворяет волновому уравнению, то вектор

$$
\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ q \\ q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ p \end{pmatrix}
$$

удовлетворяет симметрической гиперболической системе

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} = 0, \\
&\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \\
&\frac{1}{c}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial y_1} = 0, \\
&\frac{1}{c}\frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial y_2} = 0, \\
&\frac{1}{c}\frac{\partial q}{\partial t} - a\frac{\partial q}{\partial x} - b_1\frac{\partial q}{\partial y_1} - b_2\frac{\partial q}{\partial y_2} - \theta = 0, \\
&\frac{1}{c}\frac{\partial q_0}{\partial t} - a\frac{\partial q_0}{\partial x} - b_1\frac{\partial q_0}{\partial y_1} - b_2\frac{\partial q_0}{\partial y_2} - \varphi = 0, \\
&\frac{1}{c}\frac{\partial q_1}{\partial t} - a\frac{\partial q_1}{\partial x} - b_1\frac{\partial q_1}{\partial y_1} - b_2\frac{\partial q_1}{\partial y_2} - \psi_1 = 0, \\
&\frac{1}{c}\frac{\partial q_2}{\partial t} - a\frac{\partial q_2}{\partial t} - b_1\frac{\partial q_2}{\partial y_1} - b_2\frac{\partial q_2}{\partial y_2} - \psi_2 = 0.
\end{aligned}
\right. \tag{3}
$$

Из граничного условия для волнового уравнения $\frac{1}{c}p_t - ap_x - b_1 p_{y_1} - b_2 p_{y_2} = 0$ при $x=0$ следует граничное условие для системы $\theta = 0$ при $x=0$. Это граничное условие диссипативно, если $a \geqslant 0$. Таким образом, если $a \geqslant 0$, мы построили диссипативный интеграл энергии для смешанной задачи волнового уравнения.

Переходим к построению симметрической системы для случая $a < -1$. Имеют место тождества:

$$a^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right) - \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - b_1\frac{\partial}{\partial y_1} - b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2 -$$

$$+\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x} - b_1\frac{\partial}{\partial y_1} - b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x} - b_1\frac{\partial}{\partial y_1} - b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right) =$$

$$= a^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right),$$

$$a^2\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right) - a^2\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0,$$

$$a^2\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right) - a^2\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - b_1\frac{\partial}{\partial y_1} - b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right) - \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - b_1\frac{\partial}{\partial y_1} - b_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

Введем функции

$$f = \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - a\frac{\partial p}{\partial x} - b_1\frac{\partial p}{\partial y_1} - b_2\frac{\partial p}{\partial y_2},$$

$$\tau = \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} - b_1\frac{\partial p}{\partial y_1} - b_2\frac{\partial p}{\partial y_2},$$

$\theta, \varphi, \psi_1, \psi_2, q, q_1, q_2$ как и для системы (3). Для $\theta, \varphi, \psi_1, \psi_2$ мы используем те же уравнения, что и в (2), остальные уравнения получаем с помощью выписанных тождеств и определений функций:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\theta}{\partial t}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_1}-\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y_2}=0,\\[2ex]
\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=0,\\[2ex]
\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial t}-\dfrac{\partial\theta}{\partial y_1}=0,\\[2ex]
\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial t}-\dfrac{\partial\theta}{\partial y_2}=0,\\[2ex]
\dfrac{1}{c}a^2\dfrac{\partial q}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial q_1}{\partial y_1}-a^2\dfrac{\partial q_2}{\partial y_2}-\dfrac{\partial r}{\partial t}+b_1\dfrac{\partial r}{\partial y_1}+b_2\dfrac{\partial r}{\partial y_2}+\theta+a\varphi-b_1\psi_1-b_2\psi_2=0,\\[2ex]
\dfrac{1}{c}a^2\dfrac{\partial q_1}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial q}{\partial y_1}=0,\\[2ex]
\dfrac{1}{c}a^2\dfrac{\partial q_2}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial q}{\partial y_2}=0,\\[2ex]
\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial r}{\partial t}-\dfrac{\partial q}{\partial t}+b_1\dfrac{\partial q}{\partial y_1}+b_2\dfrac{\partial q}{\partial y_2}=0,\\[2ex]
\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial f}{\partial t}-\theta=0,\\[2ex]
\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial p}{\partial t}-q=0.
\end{cases}
$$

Эта система симметрическая гиперболическая при $a^2>1$. Граничное условие $\theta=0$ при $x=0$ диссипативно для этой системы.

Литература

1. H e r s h R. Mixed problems in several variables.-" Jour.Math. Mech", 1963, v.12, p.317-334.
2. К р е й с О. Смешанные задачи для гиперболических систем. Сб. переводов "Математика", 1970, т.14, № 4, с.98-111.

3. С а к а м о т о Р. Смешанные задачи для гиперболических уравнений. Сб. переводов "Математика", 1972, т.16, № 1, с.62-100.

4. I k a w a M. Mixed problem for the wave equation with an ablique derivatise boundary condition.-"Osaka J.Math",1970, v.7,p.495-525.

5. I k a w a M. Sur les problèmes Mixed pour l'équation des andes.- "J.Math.Kyoto Univ.",1975, v.10, N 3.

6. M i y a t a k e S. Mixed problem for hyperbolic equation of se - cond order.-"J.Math.Kyoto Univ.", 1973, v.13, p.435-487.

7. M i y a t a k e S. Mixed problems for hyperbolic equations of second order with first order complex boundary operators.-"Japan J.Math.", 1975, v.1, N 1, p.111-158.

8. Г о д у н о в С.К. Уравнения математической физики. М., 1971.