УДК 517.95

ОБЩИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В.М.Исаков (Новосибирск)

Решения задач дифракции удовлетворяют разным дифференциальным уравнениям в разных областях и условиям "склейки" на общей части границ областей. Указанные задачи имеют важные приложения [14]. Для общих эллиптических уравнений они рассмотрены в [9]. Отметим, что априорные оценки в случае эллиптических или параболических уравнений можно получить из результатов [8, 10] для систем таких уравнений.

Одна из первых дифракционных задач для гиперболических уравнений рассмотрена в [7]. В работах [2-4] изучались уравнения второго порядка при специальных условиях "склейки".

Данная работа посвящена изучению общих дифракционных задач для строго гиперболических уравнений произвольного порядка. Используются методы и результаты работ [11, 12, 13, 15]. Доказаны разрешимость в соболевских классах и конечность скорости распространения. Получены точные оценки решений.

Обозначения

$X = (x_0, x)$ - точка в R^{n+1}, $x \in R^n$, $t = x_0$,

$'x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$;

τ, ζ, ξ - переменные, двойственные к $t, {}'x, x_n$; $\tilde{X} = (X; \tau, \zeta)$;

$R_{\pm}^{n+1} = \left\{X : x_n \gtrless 0\right\}$, $S_n = \left\{(\tau, \zeta) : |\tau|^2 + |\zeta|^2 = 1\right\}$, $\tau = \sigma - i\gamma, \sigma, \gamma \in R$;

$U(\tilde{X}), U(X), U(\tau, \zeta)$ - окрестности точек $\tilde{X}, X, (\tau, \zeta) \in S_n$ в $R^{n+1} \times S_n$, R^{n+1}, S_n;

$'K$ - проекция множества $K \subset R^{n+1}$ на $\{x_n = 0\}$,

$K(X;\delta) = \{Y: t-y_0>\delta|x-y|\}$ – полуконус с вершиной в X ;

$\mathcal{D}^\alpha$ – дифференцирование мультииндекса α ;

$\mathcal{P}^0$ – главная часть (сумма элементарных операторов порядка m) линейного дифференциального оператора $\mathcal{P}$ порядка m ;

$\mathcal{P}^*$ – сопряженный по Лагранжу с $\mathcal{P}$;

$u(\tau,\xi) = \mathcal{F}_\gamma u = \mathcal{F}(e^{-t\gamma}u)$, где $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье по $(t,\,'x)$;

$\Lambda = \mathcal{F}_\gamma^{-1}(\gamma^2+\sigma^2+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}_\gamma$;

$\|\ \|_K(\mathcal{D})$ – норма в соболевском пространстве $H_K(\mathcal{D}) = W_2^K(\mathcal{D})$;

$u = (u^+,\, u^-)$, где $u^\pm$ – функция на $G^\pm$, $\|u\|^2_{\dots} = \|u^+\|^2_{\dots} + \|u^-\|^2_{\dots}$;

$$\|u^\pm\|^2_{K,\gamma} = \sum_{j+\ell+|\alpha|=K} \int_{R^{n+1}_\pm} |e^{-\gamma t}\gamma^j \mathcal{D}_t^\ell \mathcal{D}_x^\alpha u^\pm|^2 dX ;$$

$\|\ \|_{K,\gamma}$ – норма в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}_{K,\gamma}$ замыканий пар $C_0^\infty(R^{n+1})$ функций $u^\pm$;

$|v|_{K,\gamma} = |\Lambda^K v|_{0,\gamma}$ – норма в аналогичном пространстве $H_{K,\gamma}$ на $\{x_n = 0\}$;

$(\!(\ ,\ )\!)_{K,\gamma}$, $(\ ,\ )_{K,\gamma}$ – скалярные произведения в $\mathbb{H}_{K,\gamma}$, $H_{K,\gamma}$, далее считается $\gamma > 0$, но пространства определены при $\gamma = 0$, в этом случае индекс γ опускается;

$$[u^\pm]^2_{K,\gamma}(t) = \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{1+j+\ell+|\alpha|=K+m} \int_{R^n_\pm} \gamma^j |\mathcal{D}_x^\alpha \mathcal{D}_t^\ell u(t,x)|^2 dx;$$

$[u]_{K,\gamma} = \left([u^+]^2_{K,\gamma} + [u^-]^2_{K,\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$ – K^0-я энергетическая норма;

$\vec{u}^\pm = (u^\pm, \dots, \mathcal{D}_{x_n}^{m-1}u^\pm)$;

B – матрица, определяемая равенством $B\vec{u} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 u \\ \vdots \\ \mathcal{B}_\mu u \end{pmatrix}$;

B' – матрица, сопряженная с B ;

$C(\delta)$ – положительные постоянные, зависящие лишь от $\mathcal{A}^{\pm}$, $\mathcal{B}_j^{\pm}$, $G^{\pm}$; вновь вводимая $C(\delta)$ считается не меньше (не больше) ранее введенной.

1. Основные результаты

Пусть $\Omega^{\pm}$ – непересекающиеся открытые подмножества R^n с компактными границами $\partial\Omega^{\pm} \in C^{\infty}$, причем $\Omega^{\pm}$ локально лежат по одну сторону $\partial\Omega^{\pm}$, $\partial\Omega^{+} \subset \partial\Omega^{-}$, $\Omega = \Omega^{+} \cup \Omega^{-}$. Обозначим $\partial\Omega^{+} \cap \partial\Omega^{-}$ через Γ_1, $\partial\Omega^{-} \setminus \Gamma_1$ – через Γ_2, $(0,T)\times\Omega^{\pm}$ – через $G^{\pm}$, $(0,T)\times\Gamma_q$ – через Σ_q. Введем линейные дифференциальные операторы $\mathcal{A}^{\pm}$, $\mathcal{B}_j^{\pm}$ в R^{n+1} порядков $m, \tau_j^{\pm}$ с постоянными вне компакта $K = [-2T, 2T] \times K_x$ и C^{∞} – гладкими коэффициентами. Рассмотрим следующую задачу дифракционного типа:

$$\mathcal{A}^{\pm} u^{\pm} = f^{\pm} \quad \text{в } G^{\pm} \quad ; \tag{1.1}$$

$$\mathcal{B}_j u = \mathcal{B}_j^{+} u^{+} + \mathcal{B}_j^{-} u^{-} = g_j \quad \text{на } \Sigma_1 \quad ; \tag{1.2}$$

$$\mathcal{B}_j^{-} u^{-} = g_j \quad \text{на } \Sigma_2 \quad (j=1,\dots,\mu) \quad ; \tag{1.3}$$

$$\mathcal{D}_t^{\ell} u = h_{\ell} \quad \text{на } \{0\}\times\Omega \quad (\ell=0,\dots,m-1), \tag{1.4}$$

где $\mu, \tau_j^{\pm}$ постоянны на любой компоненте связности Σ_q.

Условие строгой гиперболичности

Корни τ уравнения $\mathcal{A}^{\pm 0}(X; \tau, \zeta, \xi) = 0$ вещественны и просты при $X \in R^{n+1}$, $(\zeta, \xi) \in R^n \setminus \{0\}$.

Пусть $\nu(X)$ – внешняя относительно Ω^{-} единичная нормаль к $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ в точке X, а $\pi(x)$ – касательная $(n-1)$-плоскость к $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ в X. Обозначим через $\xi_1^{\pm}, \dots, \xi_{\mu}^{\pm}$ $\pm$ корни урав-

нения $\mathcal{A}^{\pm 0}(X;\tau,\xi\nu(X)+\zeta)=0$ с $\Im\xi_j^+>0$, $\Im\xi_j^-<0$ при условии $\zeta\in\pi(x)$, $\Im\tau<0$.

Пусть

$$\mu=\begin{cases}\mu^++\mu^- & \text{на } \Sigma_1,\\ \mu^- & \text{на } \Sigma_2,\end{cases}\qquad \mathcal{A}_\pm^\pm(X;\tau,\zeta,\xi)=\prod_{j=1}^{\mu^\pm}(\xi-\xi_j^\pm).$$

Предположим далее, что $\tau_i=\tau_i^+=\tau_i^-<m$ и что $\tau_i^+=\tau_j^+$ не более чем для двух различных i,j, причем если $\tau_i^+=\tau_j^+$, $i\neq j$, то операторы, получающиеся из $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{B}_j$ вычеркиванием всех элементарных операторов, не содержащих $(\partial/\partial\nu)^{\tau_i^+}u^\pm$, линейно-независимы. (Это условие гарантирует существование L_2 - сопряженной дифференциальной задачи и введено для простоты изложения.) Поверхности $\bar{\Sigma}_1$, $\bar{\Sigma}_2$ и $\{t=\theta\}\cap\bar{G}^\pm$ при $\theta\in[0,T]$ считаем нехарактеристическими для $\mathcal{A}^\pm$, $\mathcal{B}_j^\pm$ и $\mathcal{A}^\pm$ соответственно.

Равномерное условие дополнительности

Если полиномы $c_1\mathcal{B}_1^{0\pm}(X;\tau_1,\xi\nu(X)+\pi)+\ldots+c_\mu\mathcal{B}_\mu^{0\pm}(X;\tau,\xi\nu+\pi)$

делятся на $\mathcal{A}_\pm^\pm(\xi)$ при $X\in\bar{\Sigma}_1\cup\bar{\Sigma}_2$, $\Im\tau\leq 0$, $(\tau,\pi)\neq 0$, то $c_j=0$ при $j=1,\ldots,\mu$. (1.5)

Условия согласования порядка K

Существуют последовательности $w_p^\pm\in C^{m+K}(\bar{G}^\pm)$, такие что

$\mathcal{A}^\pm w_p^\pm\to f^\pm$, $\mathcal{B}_j w_p\to g_j$, $\mathcal{D}_t^l w_p\to h_l$ в нормах из правой части (1.6) при $p\to+\infty$.

Отметим, что условия согласования порядка K означают конечность норм (1.6) для f,g,h и "склейку" g_j с h_l на $\{0\}\times\Gamma_q$.

Под сильным решением задачи (1.1)-(1.4) понимаем предел C^{m+k} - гладких решений по нормам (1.6).

Т е о р е м а 1. При сформулированных условиях существует сильное решение u задачи (1.1)-(1.4), причем

$$\|u\|_{m-1+k}(G)+\sum_{j=0}^{m-1}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{j}u^{\pm}\right\|_{m-1+k-j}(\Sigma_1\cup\Sigma_2)+\sum_{j=0}^{m-1}\|\mathcal{D}_t^{j}u(T)\|_{m-1+k-j}(\Omega)\leq$$

$$\leq C(k,T)\left(\|f\|_k(G)+\sum_{j=1}^{\mu}\|g_j\|_{m-1+k-\tau_j}(\Sigma_1\cup\Sigma_2)+\sum_{j=0}^{m-1}\|h_j\|_{m-1+k-j}(\Omega)\right). \quad (1.6)$$

Т е о р е м а 2. Существует такое $\delta_0>0$, что если $f=0$, $g_j=0$, $h_\ell=0$ на $K(X^0;\delta_0)\cap G$, то $u=0$ в $K(X^0;\delta_0)\cap G$.

2. Редукция к полупространству

Пусть $\Omega^{\pm}=R^n_{\pm}$ и выполнены условия п.1 относительно $\mathcal{A},\mathcal{B}_j$.

Т е о р е м а 2.1. Теорема 1 справедлива в случае $\Omega=\Omega^-$.

Т е о р е м а 2.2. Теорема 1 справедлива в случае $\Omega=\Omega^+\cup\Omega^-$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.1 (за исключением оценки (1.6) при $k=1,2,\ldots$) дано в [15]. Теорема 2.2 выводится ниже из теорем 2.3 и 2.4. Оценки (1.6) в случае теоремы 2.1 при $k=1,2,\ldots$ выводятся из оценки с $k=0$ аналогично тому, как это сделано для случая теоремы 2.2 в конце п.6. Пусть далее $\Omega=\Omega^+\cup\Omega^-$.

Т е о р е м а 2.3. Если $f\in H_{k,\gamma}$, $g_j\in H_{m-1-\tau_j+k,\gamma}$, $\operatorname{supp} f$, $\operatorname{supp} g_j\subset\{t\geq 0\}$, то при $\gamma\geq C(k)$ существует (сильное) решение u следующей задачи:

$$\mathcal{A}^{\pm}u^{\pm} = f^{\pm} \quad \text{в } R_{\pm}^{n+1}, \quad \mathcal{B}_j u = g_j, \quad j=1,\dots,\mu, \text{ на } \{x_n = 0\}, \tag{2.1}$$

причем $\operatorname{supp} u^{\pm} \subset \{t \geq 0\}$ и

$$\gamma \|u\|^2_{m-1+k,\gamma} + \sum_{j=0}^{m-1} |\mathcal{D}^j_{x_n} u^{\pm}|^2_{m-1+k-j,\gamma} \leq C(k)\Big(\gamma^{-1}\|f\|^2_{k,\gamma} + \sum_{j=1}^{\mu} |g_j|^2_{m-1+k-\tau_j,\gamma}\Big). \tag{2.2}$$

Доказательству теоремы 2.3 посвящены пп. 4, 5 и частично п. 6.

Теорема 2.4. Если $u^{\pm} \in H_{m+k}(G^{\pm})$, то

$$\|u\|_{m-1+k}(G) + \sum_{j=0}^{m-1} \|\mathcal{D}^j_{x_n} u^{\pm}\|_{m-1+k-j}(\Sigma_1) + [u]_{k,1}(T) \leq$$

$$\leq C(k,T)\Big(\|\mathcal{A}u\|_k(G) + \sum_{j=1}^{\mu} \|\mathcal{B}_j u\|_{m-1+k-\tau_j}(\Sigma_1) + [u]_{k,1}(0)\Big). \tag{2.3}$$

Доказательство теоремы 2.4 дано в п.6.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть выполнены условия согласования достаточно высокого порядка. Продолжим $f^{\pm}, g_j$ до финитных по t достаточно гладких при $t \geq 0$ функций. Можно считать $h_l = 0$ и $f^{\pm}, g_j$ равными нулю при $t < 0$. По теореме 2.3, существует C^{m+k} - гладкое решение задачи (1.1)-(1.4).

Для рассмотрения общего случая достаточно аппроксимировать данные задачи гладкими функциями, воспользоваться результатом предыдущего абзаца и оценкой (2.3).

Доказательству теоремы 2 предпошлем другую форму условия (1.5). Определим

$$\{\mathcal{A}^+_+, \mathcal{A}^-_-; \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_\mu\} =$$

$$=\prod_{i<j}^{\mu^+}|\xi_i^+-\xi_j^+|^{-1}\prod_{i<j}^{\mu^-}|\xi_i^--\xi_j^-|^{-1}\det\begin{pmatrix}\mathcal{B}_1^{0+}(\xi_1^+)\dots\mathcal{B}_\mu^{0+}(\xi_1^+)\\ \dots\\ \mathcal{B}_1^{0+}(\xi_{\mu^+}^+)\dots\mathcal{B}_\mu^{0+}(\xi_{\mu^+}^+)\\ \mathcal{B}_1^{0-}(\xi_1^-)\dots\mathcal{B}_\mu^{0-}(\xi_1^-)\\ \dots\\ \mathcal{B}_1^{0-}(\xi_{\mu^-}^-)\dots\mathcal{B}_\mu^{0-}(\xi_{\mu^-}^-)\end{pmatrix}. \qquad (2.4)$$

В случае кратных корней $\mathcal{A}_\pm^\pm$ определение получается предельным переходом из (2.4). Очевидно, условие (1.5) эквивалентно оценке

$$\|\{\mathcal{A}_+^+,\mathcal{A}_-^-;\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_\mu\}\|>\delta \text{ при } \Im m\,\tau<0,\ |\tau|^2+|\xi|^2=1,\ x_n=0. \qquad (2.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 при $\Omega=R_+^n\cup R_-^n$. Если C^∞- диффеоморфизм $Y(X)$, тождественный вне компакта, удовлетворяет оценке $|\nabla Y_i - e_i|<\delta$ на R^{n+1}, где e_i - направляющий вектор оси x_i, δ достаточно мало, то задача (1.1)-(1.4) в переменных Y также удовлетворяет условиям теоремы 1. Действительно, определитель (2.4) непрерывно зависит от коэффициентов главных частей $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}_j$, определяемых в переменных Y лишь градиентами Y_i.

Покажем, что $\delta_0=\delta$. Пусть $\psi_p\in C^\infty(R^n)$, $p=1,2,\dots,$ $|\nabla\psi_p|<\delta$ и $\psi-p^{-1}<\psi_p\,{:}\,\psi$, где $\psi=\max\{0,$ $t_0-\delta|x-x^0|\}$. Определим $Y_p(X)=(t-\psi_p,x)$, тогда $|\nabla Y_i-e_i|<\delta$. Зафиксируем p. Продолжим $u^\pm$ нулями на $\{t<0\}$. По условию теоремы 2, продолжение - это решение задачи (1.1)-(1.4) на $\{t<0\}\cup K(X^0,\delta_0)$. В переменных Y получим задачу (1.1)-(1.4) в слое $\{Y_0<0\}$ с однородными начальными и краевыми условиями. По теореме 2.1, функции $u^\pm=0$ при $Y_0<0$, т.е. при $0<t<\psi_p(x)$. Полагая $p\to+\infty$, получаем $u^\pm=0$ при $0<t<\psi(x)$, и в частности, в $K(X^0,\delta_0)$.

Случай $\Omega = \Omega^-$ рассматривается аналогично.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Достаточно рассмотреть конусы малой высоты t_0. Пусть шары $U_1, \ldots, U_p$ покрывают $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причем $U_i \cap U_j = \varnothing$, если $U_i \cap \Gamma_1 \neq \varnothing \neq$ $\neq U_j \cap \Gamma_2$ и $\Sigma_q \cap U_i$ - часть графика C_0^∞ - функции σ на одной из координатных гиперплоскостей в R^{n+1}. Если эта плоскость есть $\{x_n = 0\}$, то пусть $Y^i = \Phi_i(X) = (t, 'x, x_n - \sigma('x))$, $X \in R^{n+1}$. По теореме 2 (для $\Omega^+ = R^{n+1}_\pm$), существуют конусы зависимости $K(Y, \delta_1)$ для задачи в переменных Y. Если выбрать δ_2 так, что $\Phi_i(K(X, \delta_2)) \supset K(\Phi_i(X), \delta_1)$, то получим утверждение теоремы 2 с $\delta_0 = \min\{\delta_2, \delta_3\}$, где $K(X, \delta_3)$ - конусы зависимости для задачи Коши.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Установим разрешимость в слое $(0, \delta) \times \Omega$. Зафиксируем конечное покрытие T - окрестности компакта $K \cap \bar{\Omega}$ основаниями конусов $K(X^i, \delta_0)$ такой высоты t_0, что основания $K(X^i)$ с $i = 1, \ldots, p$ можно считать шарами U_i из предыдущего абзаца, а $K(X^i)$ при $i > p$ не пересекаются с $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Можно считать, что аналогичными свойствами обладают конусы высоты $2t_0$ и, более того, что в переменных $Y = \Phi_i(X)$ задачу можно продолжить на слой $(0, 2t_0) \times R^n$ с оценкой продолжений данных (в нормах (1.6)). По теоремам 2.1, 2.2, в переменных Y существует решение. Обозначим его в переменных X через u_i. Из разрешимости задачи в конусе двойной высоты следует, что $u_i = u_j$ на $K(X^i) \cap K(X^j)$. Определим теперь $u = u_i$ на $K(X^i)$. Из постоянства коэффициентов A вне K и разрешимости задачи Коши заключаем, что задача разрешима в некотором слое $(0, \delta) \times \Omega$. В силу оценки (2.3) решение на $(0, T) \times \Omega$ можно строить по "слоям".

3. О необходимости условия (1.5)

Пусть коэффициенты операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_j$ постоянны и $\mathcal{A}=\mathcal{A}^0$, $\mathcal{B}_j=\mathcal{B}_j^0$.

Теорема 3.1. Из утверждения теоремы 2.3 вытекает условие (2.5).

Пусть $'\vec{U}^{\pm}=(u^{\pm},\ldots,\mathcal{D}_{x_n}^{\mu^{\pm}}u^{\pm})$, $\vec{g}=(g_1,\ldots,g_\mu)$, полиномы

$$'\mathcal{B}_j^{\pm}(\xi^{\pm})=\sum_{k=1}^{\mu^{\pm}}{}'b_{jk}^{\pm}(\widetilde{X})(\xi^{\pm})^{k-1}$$

- остатки от деления $\mathcal{B}_j^{\pm}$ на $\mathcal{A}_{\pm}^{\pm}$ и $'\mathcal{B}=('\mathcal{B}^{+}\,'\mathcal{B}^{-})$, где $'\mathcal{B}^{\pm}-\mu\times\mu^{\pm}$ - матрица символов $'b_{jk}^{\pm}$. Заменив τ,ζ на дифференцирования δ - функций, запишем граничный оператор в виде $\vec{u}(0)\rightarrow\mathcal{B}*\vec{u}(0)$.

Лемма 3.1. Если $u^{\pm}\in C^{\infty}(\overline{R}_{\pm}^{n+1})$, $\mathcal{A}^{\pm}u^{\pm}=0$ в $R_{\pm}^{n+1}$, $\mathcal{B}*\vec{u}(0)=\vec{g}$ и $u^{\pm}=0$ при $t<0$, то $'\mathcal{B}*'\vec{u}(0)=\vec{g}$.

Доказательство. В силу предложения 3.3 из [11], справедливо равенство $Q^{\pm}*\vec{u}^{\pm}(0)=\vec{u}^{\pm}(0)$, где $Q^{\pm}(\tilde{\zeta})$ - матрица символов

$$Q_{k,\ell}^{\pm}(\tilde{\zeta})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^{\pm}(\tilde{\zeta})}(\mathcal{A}_{\pm}^{\pm}(\tilde{\zeta},\xi))^{-1}\sum_{\tau=0}^{m-\ell}\mathcal{A}_{\tau+\ell}^{\pm}(\tilde{\zeta})\xi^{\tau+k-1}d\xi,\ \tilde{\zeta}=(\tau,\zeta),$$

контур
$$\Gamma^{\pm}(\tilde{\zeta})\subset\left\{\operatorname{Im}\xi\ \substack{\geq 0\\ \leq 0}\right\}$$

и содержит все нули $\xi^{\pm}$ полинома $\mathcal{A}_{\pm}^{\pm}$ с $\operatorname{Im}\xi^{+}>0$, $\operatorname{Im}\xi^{-}<0$, $\mathcal{A}_q^{\pm}(\tilde{\zeta})$ - однородные степеней $m-q$ полиномы по $\tilde{\zeta}$. Полагая $T^{\pm}=\mathcal{B}^{\pm}Q^{\pm}$, получим:

$$T_{j,\ell}^{\pm}(\tilde{\zeta})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^{\pm}(\tilde{\zeta})}\mathcal{B}_j(\tilde{\zeta},\xi)(\mathcal{A}_{\pm}^{\pm}(\tilde{\zeta},\xi))^{-1}\sum_{\tau=0}^{m-\ell}\mathcal{A}_{\tau+\ell}^{\pm}(\tilde{\zeta})\xi^{\tau}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^{\pm}(\tilde{\xi})}{}'\mathcal{B}_j(\tilde{\zeta},\xi)(\mathcal{A}_{\pm}^{\pm}(\tilde{\zeta},\xi))^{-1}\sum_{\tau=0}^{m-\ell}\mathcal{A}_{\tau+\ell}^{\pm}(\tilde{\zeta})\xi^{\tau}d\xi=\sum_{k=1}^{\mu^{\pm}}{}'b_{j,k}^{\pm}(\tilde{\zeta})Q_{k,\ell}^{\pm}(\tilde{\zeta}).$$

Нетрудно проверить, что ${}'b^{\pm}_{j,k}(\tilde{\zeta})$ – преобразования Фурье–Лапласа ${}'b^{\pm}_{j,k}$. В силу полученного равенства $T^{\pm} = {}'B^{\pm} * {}'Q^{\pm}$, где ${}'Q^{\pm} = (Q^{\pm}_{k,\ell};\ k=1,\ldots,\mu^{\pm},\ \ell=1,\ldots,m)$. Так как $Q^{\pm}\vec{u}^{\pm} = \vec{u}^{\pm}$, то ${}'Q^{\pm}\vec{u}^{\pm} = {}'u^{\pm}$ и ${}'B * {}'\vec{u} = {}'B^{+} * {}'\vec{u}^{+} + {}'B^{-} * {}'\vec{u}^{-} = {}'B^{+} * {}'Q^{+}\vec{u}^{+} + \ldots =$

$$= T^{+}\vec{u}^{+} + \ldots = B^{+}Q^{+}\vec{u}^{+} + \ldots = B^{+}\vec{u}^{+} - \ldots = \vec{g}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3.1. По условиям теоремы 3.1 и лемме 3.1, определен оператор $\vec{g} \to {}'\vec{u}(0)$, непрерывный из $C_0^{\infty}(R^n, C^{\mu})$ в $C^{\infty}(R^n, C^{\mu})$ и коммутирующий со сдвигами, причем

$$\sum_{j=1}^{\mu^{\pm}} |\vec{u}_j^{\pm}(0)|^2_{m-1-j,\gamma} \leq C \sum_{j=1}^{\mu} |g_j|^2_{m-1-r_j,\gamma}. \tag{3.1}$$

Таким образом, ${}'\vec{u}(0) = F * \vec{g}$, где F – $\mu \times \mu$ – матрица – обобщенная функция с носителем в $\{X : t \geq 0\}$. Имеем: ${}'\vec{u}(0) = F * {}'B\,{}'\vec{u}(0)$, поэтому аналогично [11, с.90], $F_{j,k}$ – обобщенные функции медленного роста и определены $F_{j,k}(\tilde{\zeta})$. В силу (3.1), $(\sigma,\zeta) \to F_{j,k}(\tilde{\zeta})|\tilde{\zeta}|^{r_k - j}$ – мультипликатор в $L_2(R^n)$, так что

$$|F_{j,k}(\tilde{\zeta})| \leq C|\tilde{\zeta}|^{j-r_k} \tag{3.2}$$

для почти всех $(\sigma,\zeta) \in R^n$.

Для почти всех (σ,ζ) матрица $F(\tilde{\zeta})\,{}'B(\tilde{\zeta})$ единичная, поэтому $\det F(\tilde{\zeta}) \det {}'B(\tilde{\zeta}) = 1$. Из непрерывности ${}'B(\tilde{\zeta})$ и (3.2) получаем, что $|\det {}'B(\tilde{\zeta})| > \delta$ при $|\tilde{\zeta}| = 1$, $\gamma > 0$, т.е. условие (2.5).

4. L_2 – оценки

В этом разделе считаем $A^{\pm} = A^{0\pm}$, $B_j^{\pm} = B_j^{0\pm}$.

Пусть $L^{+} = S_n \cap \{\gamma > 0\}$, $L^{0} = S_n \cap \{\gamma = 0\}$, $L^{\delta} = S_n \cap \{|\gamma| < \delta\}$.

Зафиксируем $\tilde{X}^0 \in K \times \angle^0$. В [15, раздел 2.1], полиному $\mathcal{A}^{\pm}(\tilde{X}^0; \xi^{\pm})$ (степени m) поставлены в соответствие полиномы $\mathcal{F}_{ij}^{\pm}(\xi^{\pm})$, $\mathcal{E}_k^{\pm}(\xi^{\pm})$, $i = 1, \dots, m_j^{\pm}$, $j = 1, \dots, \ell^{\pm}$, $k = 1, \dots, s^{\pm}$, определенные и непрерывные при $\tilde{X}$ из окрестности $\tilde{X}^0$, делящиеся на $\mathcal{A}_{\pm}^{\pm}(\tilde{X}; \xi^{\pm})$, линейно-независимые и такие, что $m_1^{\pm} + \dots + m_{\ell^{\pm}}^{\pm} = m - \mu^{\pm}$.

Отождествим $\mathbb{C}^{2m}$ с $\{(z^+, z^-) : z^{\pm} \in \mathbb{C}^m\}$ и поставим в соответствие полиному $\mathcal{P}^{\pm}(\xi^{\pm})$ степени $< m$ линейную функцию $\mathcal{P}^{\pm}(z^{\pm})$, заменив $(\xi^{\pm})^j$ на $z_{j+1}^{\pm}$, $j = 0, \dots, m-1$.

Л е м м а 4.1.

$$\{\mathcal{F}_{ij}^{\pm}(z^{\pm}), \mathcal{E}_k^{\pm}(z^{\pm}), \mathcal{B}_j^{+}(z^+) + \mathcal{B}_j^{-}(z^-)\} - \tag{4.1}$$

базис в $(\mathbb{C}^{2m})^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечено выше, $\dim\{\mathcal{F}_{ij}^{\pm}(z^{\pm}), \mathcal{E}_k^{\pm}(z^{\pm})\} = 2m - \mu$. Полиномы $\mathcal{F}_{ij}^{\pm}$, $\mathcal{E}_k^{\pm}$ делятся на $\mathcal{A}_{\pm}^{\pm}$, поэтому из условия (1.5) вытекает линейная независимость системы (4.1). Последняя содержит $(2m - \mu) + \mu = 2m$ элементов и поэтому является базисом в $(\mathbb{C}^{2m})^*$.

В [15, раздел 2.2] полиномам $\mathcal{A}_{\pm}^{\pm}$ поставлены в соответствие гладкие по $\tilde{X}$ в окрестности $\tilde{X}^0$ и зависящие от параметра $\lambda \in (0, \delta)$ полиномы $'\mathcal{A}^{\pm}$ степени $< m$ и по $\mathcal{A}^{\pm}$, $'\mathcal{A}^{\pm}$ построены полиномиальные по $\xi^{\pm}$, $\Xi^{\pm}$ символы $\mathcal{G}_x^{\pm}(\tilde{X}; \xi^{\pm}, \Xi^{\pm})$, $\mathcal{G}_t^{\pm}(\tilde{X}; \xi^{\pm}, \Xi^{\pm})$, содержащие ξ, Ξ в степенях $< m$, причем

$$\mathcal{G}_x^{\pm}(\tilde{X}; z^{\pm}, \bar{z}^{\pm}) \geqslant \sum_{j=1}^{\ell^{\pm}} \sum_{i=1}^{m_j^{\pm}} |\mathcal{F}_{ij}^{\pm}(z^{\pm})|^2 - C\lambda |z^{\pm}|^2, \tag{4.2}$$

$$\mathcal{G}^{\pm}_{\pm}(\tilde{X};\xi^{\pm},\xi^{\pm}) \leq -\delta\lambda\left((\xi^{\pm})^2+1\right)^{m-1}, \tag{4.3}$$

где $\xi^{\pm}\in R$, $z^{\pm}\in \mathbb{C}^m$.

Л е м м а 4.2. <u>Существуют</u> δ <u>и окрестность</u> $\mathcal{U}(\tilde{X}^0)$, <u>такие что</u>

$$|z^+|^2+|z^-|^2 \leq C\Big(\mathcal{G}^+_x(\tilde{X};z^+,\bar{z}^+) + \mathcal{G}^-_x(\tilde{X};z^-,\bar{z}^-)+$$

$$+\sum_{K=1}^{s^+}\left|\mathcal{E}^+_K(\tilde{X};z^+)\right|^2+\sum_{K=1}^{s^-}\left|\mathcal{E}^-_K(\tilde{X};z^-)\right|^2+\sum_{j=1}^{\mu}\left|\mathcal{B}^+_j(\tilde{X};z^+)+\mathcal{B}^-_j(\tilde{X};z^-)\right|^2\Big) \tag{4.4}$$

<u>при</u> $\tilde{X}\in\mathcal{U}(\tilde{X}^0)$, $z^{\pm}\in\mathbb{C}^m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 4.1, функции $z^{\pm}$ – линейные комбинации функций (4.1), непрерывных по $\tilde{X}$, поэтому коэффициенты соответствующих линейных комбинаций ограничены в некоторой $\mathcal{U}(\tilde{X}^0)$, так что $|z^+|^2+|z^-|^2$ оценивается через сумму квадратов модулей $\mathcal{F}^{\pm}_{ij}$, $\mathcal{E}^{\pm}_K$, $\mathcal{B}_j$. Выбирая малым λ, из (4.2) и из этой оценки получим (4.4).

Пусть $\{\mathcal{U}(\tilde{X}^i)=\mathcal{U}(X^i)\times\mathcal{U}((\tau_i,\zeta_j)),\ i=1,\ldots,N\}$ – конечное открытое покрытие компакта $'K\times L^0$, такое что $\{\mathcal{U}(\tilde{X}^i),\ i=1,\ldots,N_0\}$ – покрытие $'K\times L^0$ с $X^i\notin\partial K$, $\{\mathcal{U}(\tilde{X}^i),\ i=N_0+1,\ldots,N-2\}$ – покрытие $\partial'K\times L^0$ с $X^i\in\partial'K$, причем в $\mathcal{U}(X^i)$ выполнено заключение леммы 4.2. Считаем далее $\mathcal{U}(\tilde{X}^i)\subset\{|y|<2\delta\}$, $\mathcal{U}(X^1)\cup\ldots\cup\mathcal{U}(X^{N_0})\supset\{|x_n|<\delta,\ (t,'x)\in{}'K\}$. Определим $\mathcal{U}_i=\mathcal{U}(\tilde{X}^i)$ при $i=1,\ldots,N_0$,

$\mathcal{U}_i=\{X:|x_n|<\delta,\ X\notin K\}\times\mathcal{U}((\tau_i,\zeta_i))$ при $i=N_0+1,\ldots,N-2$,

$$\mathcal{U}_{N-1}=\{|x_n|>\tfrac{\delta}{2}\}\times S_n,\ \mathcal{U}_N=\{|x_n|<\delta\}\times\{S_n\setminus L^{\frac{\delta}{2}}\}.$$

Пусть $\{\varphi_i(\tilde{X}) = \varphi_i^1(X)\varphi_i^2(\tau,\zeta)\}$ – C^∞-разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$ и $u^\pm \to \varphi_i u^\pm$ – псевдодифференциальные операторы с однородными степени 0 символами φ_i. Определим $'\mathcal{A}^\pm = -\partial\mathcal{A}^\pm/\partial\tau$ на U_N, $\mathcal{B}^\pm_{k,i} = \mathcal{B}^\pm_k$ на $U(\tilde{X}^i)$ при $i = 1,\dots,N-2$, $\mathcal{B}^\pm_{k,N} = (\xi^\pm)^{m-\mu^\pm_\pm}\mathcal{A}^\pm_\pm$. Символам $\mathcal{G}_x$, $\mathcal{G}_t$, как и [15, раздел 1.3], сопоставим квадратичные по функциям $v^\pm$ формы $\mathcal{G}^\pm_x(v^\pm)_\gamma$, $\mathcal{G}^\pm_t(v^\pm)_\gamma$, отметив, что

$$|\mathcal{G}^\pm_x(v^\pm)_\gamma - 2\gamma\mathcal{G}^\pm_t(v^\pm)_\gamma| \leq C(\varepsilon)\gamma^{-1}\|\mathcal{A}v\|^2_{0,\gamma} + \varepsilon\gamma\|v\|^2_{m-1,\gamma}. \tag{4.5}$$

Л е м м а 4.3. <u>При некотором</u> δ

$$\gamma\|\varphi_i u\|^2_{m-1,\gamma} + \sum_{j=0}^{m-1}|\mathcal{D}^j_{x_n}\varphi_i u^\pm|^2_{m-1-j,\gamma} \leq C\Big(\gamma^{-1}\|\mathcal{A}u\|^2_{0,\gamma} + \|u\|^2_{m-1,\gamma} +$$

$$+\sum_{j=1}^{\mu}|\mathcal{B}_j u|^2_{m-1-\tau_j,\gamma} + \sum_{k=1}^{s^+}|\mathcal{B}^+_{k,i}(u^+)|^2_{j-1,\gamma} + \sum_{k=1}^{s^-}|\mathcal{B}^-_{k,i}u^-|^2_{j-1,\gamma}\Big), \tag{4.6}$$

<u>где в случае</u> $i = N-1$ <u>слагаемые с</u> $\mathcal{B}^\pm_{k,i}$ <u>отсутствуют.</u>

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть вначале $i \leq N-2$, $v^\pm = \varphi_i u^\pm$. Из оценок символов (4.4), (4.3) по известному [15 , лемма 1.4] аналогу неравенства Гординга для псевдодифференциальных операторов имеем:

$$\sum_{j=0}^{m-1}|\mathcal{D}^j_{x_n}v^\pm|^2_{m-1-j,\gamma} \leq C\Big(\mathrm{Re}\,(\mathcal{G}^+_x(v^+)_\gamma + \mathcal{G}^-_x(v^-)_\gamma + \sum_{j=1}^{\mu}|\mathcal{B}_j u|_{m-1-j,\gamma} +$$

$$+\sum_{k=1}^{s^+}|\mathcal{B}^+_{k,i}v^+|^2_{j-1,\gamma} + \sum_{k=1}^{s^-}|\mathcal{B}^-_{k,i}v^-|^2_{j-1,\gamma} + \sum_{j=0}^{m-1}\big(|\mathcal{D}^j_{x_n}v^+|^2_{m-2-j,\gamma} + |\mathcal{D}^j_{x_n}v^-|^2_{m-2-j,\gamma}\big),$$

$$\gamma\|v^{\pm}\|^2_{m-1,\gamma}\leq C\Big(-2\gamma\,\mathrm{Re}\,\mathcal{G}^{\pm}_t(v^{\pm})_\gamma+\gamma\sum_{j=0}^{m-1}|\mathcal{D}^j_{x_n}v^{\pm}|^2_{m-\frac{3}{2}-j,\gamma}+\gamma\|\Lambda^{-1}v^{\pm}\|^2_{m-1,\gamma}\Big).$$

Складывая эти неравенства с использованием (4.5), оценим левую часть (4.6) через сумму слагаемых правой части с v вместо u и через

$$C\Big(\sum_{j=0}^{m-1}|\mathcal{D}^j_{x_n}v^{\pm}|^2_{m-2-j,\gamma}+\gamma\sum_{j=0}^{m-1}|\mathcal{D}^j_{x_n}v^{\pm}|^2_{m-\frac{3}{2}-j,\gamma}+\gamma\|\Lambda^{-1}v^{\pm}\|^2_{m-1,\gamma}\Big).$$

Но $v^{\pm}=\varphi_i u^{\pm}$ и $(\mathrm{supp}\,\varphi_i\cap S_n)\subset\{|y|<\delta\}$, поэтому $|v^{\pm}|^2_{k,\gamma}\geq$ $\geq\delta_0\delta^{-1}\gamma|v^{\pm}|^2_{k-\frac{1}{2},\gamma}$, и при малом $\delta>0$ первые два слагаемых оцениваются вторым слагаемым из левой части (4.6). Аналогично устраняется третье слагаемое. В силу известных свойств коммутирования $\|(\mathcal{A}^{\pm}\varphi_i-\varphi_i\mathcal{A}^{\pm})u^{\pm}\|_{0,\gamma}\leq C(\varphi_i)\|u^{\pm}\|_{m-1,\gamma}$, поэтому в полученной оценке можно $\mathcal{A}v,\ldots,\mathcal{B}v$ заменить на $\mathcal{A}u,\ldots,\mathcal{B}u$, если выбрать большим C.

При $i=N-1$ утверждение леммы 4.3 – следствие известных [1, 15] энергетических оценок.

При $i=N$ лемма доказывается аналогично случаю $i<N-1$, если использовать результаты [15, раздел 2.4].

Доказательство оценки (2.2) при $k=0$. В силу предложения 3 из [15]

$$|\mathcal{B}^{\pm}_{k,i}u^{\pm}|^2_{k-\frac{1}{2},\gamma}\leq C\big(\gamma^{-1}\|\mathcal{A}u\|^2_{0,\gamma}+\|u\|^2_{m-1,\gamma}\big),$$

поэтому в правой части (4.6) можно опустить слагаемые с $\mathcal{B}^{\pm}_{k,j}$. Так как $\varphi_1+\ldots+\varphi_N=1$, то из известных оценок коммутаторов $\mathcal{D}_{x_n}$ и φ_i, неравенства треугольника и оценки (4.6) без $\mathcal{B}^{\pm}_{k,i}$ вытекает (при $\gamma\geq C$) оценка (2.2) при $k=0$.

Доказательство (2.2) при $k=1,2,\ldots$. Как известно [15, раздел 2.5],

$$\|(\mathcal{A}^{\pm}\Lambda^{k}-\Lambda^{k}\mathcal{A}^{\pm})u^{\pm}\|_{0,\gamma}\leq C(k)\|\Lambda^{k}u^{\pm}\|_{m-1,\gamma},$$

$$|(\mathcal{B}_j^{\pm}\Lambda^{k}-\Lambda^{k}\mathcal{B}_j^{\pm})u^{\pm}|_{m-1-r_j,\gamma}\leq C(k)|\Lambda^{k}u^{\pm}|_{m-1,\gamma},$$

поэтому, заменяя $u^{\pm}$ на $\Lambda^{k}u^{\pm}$ в (2.2) при $k=0$, получаем:

$$\gamma\|\Lambda^{k}u\|^2_{m-1,\gamma}+\sum_{j=0}^{m-1}|\mathcal{D}^j_{x_n}u^{\pm}|^2_{k+m-1-j,\gamma}\leq$$

$$\leq C(k)\Big(\gamma^{-1}\|\Lambda^{k}\mathcal{A}u\|^2_{0,\gamma}+\sum_{i=1}^{\mu}|\mathcal{B}_ju|^2_{k+m-1-r_j,\gamma}\Big) \qquad (4.7)$$

при $\gamma\geq C(k)$. Но в силу следствия 2 из [15]

$$\|u\|^2_{m-1+k,\gamma}\leq C(k)\Big(\|\mathcal{A}u\|^2_{k-1,\gamma}+\|\Lambda^{k}u\|^2_{m-1,\gamma}\Big),$$

$$|\mathcal{D}^j_{x_n}u^{\pm}|^2_{m-1+k-j,\gamma}\leq C(k)\Big(|\mathcal{A}^{\pm}u^{\pm}|^2_{k-1,\gamma}+\sum_{j=0}^{m-1}|\mathcal{D}^j_{x_n}u^{\pm}|_{m-1-j+k,\gamma}\Big),$$

поэтому (2.2) вытекает из (4.7).

5. Сопряженная задача

Если $r_i=r_j$ при $i\neq j$, то один из $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{B}_j$ обозначим через ${}^{+}\mathcal{B}_{r_i}$, а другой – через ${}^{-}\mathcal{B}_{r_i}$; если $r_i\neq r_j$ при $i\neq j$, то пусть ${}^{+}\mathcal{B}_{r_i}=\mathcal{B}_i$, ${}^{-}\mathcal{B}_{r_i}u=\mathcal{D}^{r_i}_{x_n}u^{-}$; если не существует $r_j=i$,

то пусть ${}^{\pm}\mathcal{B}_i u = \mathcal{D}_{x_n}^i u^{\pm}$.

Л е м м а 5.1. Существуют линейные дифференциальные (по $t, {}'x$) операторы $\tau_{jk}^{q\pm}$, $j = 1,\dots, m-1$, порядков $\le j-k$, такие что

$$\mathcal{D}_{x_n}^j u^{\pm} = \sum_{k=0}^{j} (\tau_{jk}^{1\pm}\, {}^{+}\mathcal{B}_k u + \tau_{jk}^{2\pm}\, {}^{-}\mathcal{B}_k u).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится индукцией по j аналогично доказательству леммы 2.1 из [5, с.141].

Л е м м а 5.2. Существуют линейные дифференциальные операторы ${}^{*}\mathcal{B}_j^{\pm}$, $j=1,\dots,2m$, с постоянными вне $[-2T, 2T] \times K_x$ коэффициентами, такие что

$$((\mathcal{A}u, u^*))_0 - ((u, \mathcal{A}^* u^*))_0 = \sum_{j=1}^{2m} (\mathcal{B}_j u, {}^{*}\mathcal{B}_j u^*)_0 \qquad (5.1)$$

при $u \in H_{m,\gamma}$, $u^* \in H_{m,-\gamma}$ ($\mathcal{B}_j u = \mathcal{D}_{x_n}^{\gamma_j} u^{\pm}$ при $j = \mu+1,\dots,2m$, причем $\{\mathcal{B}_j : j=1,\dots,2m\} = \{{}^{\pm}\mathcal{B}_j : j=1,\dots,m\}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [5, с.143], левая часть (5.1) равна

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left((\mathcal{D}_{x_n}^j u^+, \overline{N_{m-j}^+ u^{*+}})_0 + (\mathcal{D}_{x_n}^j u^-, \overline{N_{m-j}^- u^{*-}})_0\right), \qquad (5.2)$$

где $\{N_j^{\pm}\}$ – некоторая система Дирихле для $\mathcal{A}^{\pm}$. Используя представления $\mathcal{D}_{x_n}^j u^{\pm}$ из леммы 5.1, относя $\tau_{jk}^{\pm}$ к $N_{m-j}^{\pm}$ сопряжением по Лагранжу и обозначая получившиеся скалярные множители при $\mathcal{B}_j$ через ${}^{*}\mathcal{B}_j$, получаем (5.1).

С л е д с т в и е 5.1. Если $\varphi^{\pm}, \varphi^{*\pm} \in H^m(R_{\pm})$, то

$$\int ((\mathcal{A}^0 \varphi)\bar{\varphi}^* - \varphi(\overline{\mathcal{A}^{0*}\varphi^*})) = \sum_{j=1}^{2m} \mathcal{B}_j^0 \varphi(0)\, \overline{{}^{*}\mathcal{B}_j^0 \varphi^*(0)}, \qquad (5.3)$$

где $\mathcal{A}^0\varphi = \mathcal{A}^0(\tilde{X}; \mathcal{D}_{x_n})\varphi, \dots, {}^{*}\mathcal{B}_j^0 \varphi^* = {}^{*}\mathcal{B}_j^0(\bar{\tilde{X}}; \mathcal{D}_{x_n})\varphi^*$.

Доказательство. Как и в [5, с.160–162], положим в (5.1) $u^{\pm}=u^{\pm}(\lambda X)$, $u^{*\pm}=u^{*\pm}(\lambda X)$ и по асимптотике при $\lambda\to+\infty$ выведем формулу Грина лишь для главных частей $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_j$, выбирая в последней $u^{(*)\pm}=exp(i<'X,\xi>)\times\chi(\lambda' X)\varphi^{(*)\pm}(x_n)$, где $\chi\in C_0^{\infty}(R^n)$, $\chi(0)>0$, из асимптотики при $\lambda\to 0$ получим (5.3).

Лемма 5.3. Если

$$\mathcal{B}_j(\xi)=\sum_{k=1}^{m} b_{jk}(\xi^+)^{k-1}+\sum_{k=m+1}^{2m} b_{jk}(\xi^-)^{k-1-m}, \qquad (5.4)$$

то $|\{\mathcal{A}^+,\mathcal{A}^-;\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_{2m}\}|=|det(b_{jk})|$.

Доказательство. Записывая соответствующую определителю (2.4) матрицу в виде произведения матриц, получаем:

$$|\{\mathcal{A}^+,\mathcal{A}^-;\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_{2m}\}|=\prod_{i<j}^{m}|\xi_i^+-\xi_j^+|^{-1}\prod_{i<j}^{m}|\xi_i^--\xi_j^-|^{-1}|det(b_{jk})|\left|\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ (\xi_1^+)^{m-1} & \dots & (\xi_m^+)^{m-1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \dots & 0 & (\xi_1^-)^{m-1} & \dots & (\xi_m^-)^{m-1}\end{vmatrix}\right|$$

($\xi_i^{\pm}$ – корни $\mathcal{A}^{\pm}(\xi^{\pm})$)

Вычисляя последний определитель (произведение определителей Вандермонда), получаем утверждение леммы 5.3.

Лемма 5.4. Если $\mathcal{B}_j(\xi)=C_j^+(\xi^+)\mathcal{A}_+^+(\xi^+)+C_j^-(\xi^-)\mathcal{A}_-^-(\xi^-)$, где $C_j^{\pm}$ – полиномы от $\xi^{\pm}$, $j=\mu+1,\dots,2m$, то

$$|\{\mathcal{A}^+,\mathcal{A}^-;\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_{2m}\}|=|\{\mathcal{A}_+^+,\mathcal{A}_-^-;\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_{\mu}\}\{\mathcal{A}_-^+,\mathcal{A}_+^-;C_{\mu+1},\dots,C_{2m}\}|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В матрице (2.4) можно считать первыми строки с $\xi_1^+, \ldots, \xi_{\mu^+}^+$, $\xi_1^-, \ldots, \xi_{\mu^-}^-$ – корнями $\mathcal{A}_+^+$ и $\mathcal{A}_-^-$, тогда матрица (2.4) в силу условий леммы 5.4 имеет нулевой правый верхний $\mu \times (2m-\mu)$ – угол и модуль ее определителя равен $|\{\mathcal{A}_+^+, \mathcal{A}_-^-; \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_\mu\}$ $\{\mathcal{A}_-^+, \mathcal{A}_+^-; \mathcal{B}_{\mu+1}, \ldots, \mathcal{B}_{2m}\}| \prod_{i \le \mu < j} |\xi_i^+ - \xi_j^+|^{-1} |\xi_i^- - \xi_j^-|^{-1}$. Для завершения доказательства заметим, что по определению (2.4) и условиям леммы 5.4,

$$|\{\mathcal{A}_-^+, \mathcal{A}_+^-; \mathcal{B}_{\mu+1}, \ldots, \mathcal{B}_{2m}\}| = \Big(\prod_{i \le \mu < j} |\xi_i^+ - \xi_j^+| |\xi_i^- - \xi_j^-|\Big) |\{\mathcal{A}_-^+, \mathcal{A}_+^-; C_{\mu+1}, \ldots, C_{2m}\}|.$$

Построим еще одну систему, сопряженную с $\{\mathcal{B}_j\}$. Определим $\check{\mathcal{B}}_j(\xi)$ как $\mathcal{B}_j(\xi)$ при $j = 1, \ldots, \mu$; $(\xi^+)^{j-\mu-1} \mathcal{A}_+^+(\xi^+)$ при $j = \mu+1, \ldots, 2m-\mu^-$; $(\xi^-)^{j-2m+\mu^- -1} \mathcal{A}_-^-(\xi^-)$ при $j = 2m-\mu^-+1, \ldots, 2m$.

В [15, с.97] по $\mathcal{A}^\pm$ построены такие матрицы $A^\pm$, что в обозначениях $A\vec{\varphi} = (A^+\vec{\varphi}^+, A^-\vec{\varphi}^-)$ имеем:

$$\int \big((\mathcal{A}^0 \varphi)\bar{\varphi}^* - \varphi \overline{\mathcal{A}^0 \varphi^*}\big) = i < A\vec{\varphi}(0), \vec{\varphi}^*(0) > =$$

$$= i < \check{B}\vec{\varphi}(0), {}^*\check{B}\vec{\varphi}^*(0) > = i \sum_{j=1}^{2m} \check{\mathcal{B}}_j \varphi(0) \overline{{}^*\check{\mathcal{B}}_j \varphi^*(0)}, \tag{5.5}$$

где ${}^*\check{B} = (\check{B}')^{-1} A'$, $\check{B}\vec{\varphi} = (\check{\mathcal{B}}_1 \varphi, \ldots, \check{\mathcal{B}}_{2m} \varphi)$.

Обозначим $\mathcal{P}(-t, x; -\mathcal{D}_t, \mathcal{D}_x)$ через $\tilde{\mathcal{P}}$.

Л е м м а 5.5. $\{\tilde{\mathcal{A}}_+^+, \tilde{\mathcal{A}}_-^-; \mathcal{B}_{\mu+1}, \ldots, \mathcal{B}_{2m}\} \ne 0$ при $\operatorname{Im} \tau \geq 0$, $|\tau|^2 + |\zeta|^2 \ne 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вместо ${}^*\mathcal{B}_j$ можно рассмотреть ${}^*\check{\mathcal{B}}_j$. Действительно, пусть $\{\tilde{\mathcal{A}}_+^{*+}, \tilde{\mathcal{A}}_-^{*-}; {}^*\check{\mathcal{B}}_{\mu+1}, \ldots, {}^*\check{\mathcal{B}}_{2m}\} \ne 0$.

Для любых $y_{\mu+1}, \ldots, y_{2m} \in \mathbb{C}$ существует $\varphi : B\vec{\varphi}(0) = (0, \ldots, 0, y_{\mu+1}, \ldots, y_{2m})$, и тогда $\check{B}\vec{\varphi}(0) = (0, \ldots, 0, \sigma_{\mu+1}, \ldots, \sigma_{2m})$, где $\sigma_j \in \mathbb{C}$. В силу (5.3) и (5.5),

$$\sum_{j=\mu+1}^{2m} \left(y_j \, \overline{{}^*\mathcal{B}_j \varphi^*(0)} - v_j \, \overline{{}^*\check{\mathcal{B}}_j \varphi^*(0)} \right) = 0 . \tag{5.6}$$

Полагая φ^* последовательно равными

$(exp(i\xi^{*+}_{\mu^+ +1} x_n), 0), \ldots, (exp(i\xi^{*+}_m x_n), 0), (0, exp(i\xi^{*-}_{\mu^- +1} x_n)), \ldots$

$\ldots, (0, exp(i\xi^{*-}_m x_m))$, где $\xi^{*\pm}_j$ – корни $\tilde{\mathcal{A}}^{*\pm}$ с $Im\,\xi^{*+}_j > 0$, $Im\,\xi^{*-}_j < 0$, получаем из (5.6) систему $2m-\mu$ уравнений относительно y_j или v_j. В силу (5.6) из однородной системы для y_j вытекает однородная система для v_j с ненулевым, по предположению в начале абзаца, определителем, поэтому $v_j = 0$, $\check{\mathcal{B}}\vec{\varphi}(0) = 0$, $\vec{\varphi}(0) = 0$ в силу обратимости $\check{\mathcal{B}}$ и $y_j = 0$; таким образом, система относительно y_j имеет ненулевой определитель, который и рассмотрен в лемме 5.5.

Полагая в (5.5) последовательно

$$\varphi = (exp(i\xi^+_{K_+} x_n), 0), \quad \varphi^* = (exp(i\bar{\xi}^+_{\ell_+} x_n), 0),$$

$$\varphi = (0, exp(i\xi^-_{K_-} x_n)), \quad \varphi^* = (0, exp(i\bar{\xi}^-_{\ell_-} x_n)),$$

где $K_\pm = 1, \ldots, \mu^\pm$, $\ell_\pm = 1+\mu^\pm, \ldots, m$;

и учитывая, что $\check{\mathcal{B}}_j = \mathcal{B}_j$ при $j = 1, \ldots, \mu$, $\check{\mathcal{B}}_j \varphi(0) = 0$ при $j = \mu+1, \ldots, 2m$, получаем:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \mathcal{B}^+_j (\xi^+_{K_+}) \overline{{}^*\check{\mathcal{B}}^+_j (\bar{\xi}^+_{\ell_+})} = 0 = \sum_{j=1}^{\mu} \mathcal{B}^-_j (\xi^-_{K_-}) \overline{{}^*\check{\mathcal{B}}^-_j (\bar{\xi}^-_{\ell_-})} .$$

Получившаяся система относительно ${}^*\check{\mathcal{B}}_j$ имеет в силу (1.5) ненулевой определитель, поэтому ${}^*\check{\mathcal{B}}^\pm_j (\bar{\xi}^\pm_{\ell_\pm}) = 0$ при указанных ℓ_+ и ℓ_-, так что ${}^*\check{\mathcal{B}}^\pm_j (\xi^\pm) = C^\pm_j (\xi^\pm) \bar{\mathcal{A}}^\pm_\mp (\xi^\pm)$, $j = 1, \ldots, \mu$,

где C_j – полиномы с ограниченными коэффициентами. По леммам 5.4 и 5.3,

$$|\{\bar{\mathcal{A}}_-^+, \bar{\mathcal{A}}_+^-; C_1, \ldots, C_\mu\}\{\bar{\mathcal{A}}_+^+, \bar{\mathcal{A}}_-^-; {}^*\check{\mathcal{B}}_{\mu+1}, \ldots, {}^*\check{\mathcal{B}}_{2m}\}| =$$

$$= |\{\bar{\mathcal{A}}^+, \bar{\mathcal{A}}^-; {}^*\check{\mathcal{B}}_1, \ldots, {}^*\check{\mathcal{B}}_{2m}\}| = |det(\check{B}'^{-1})A'| \neq 0,$$

что и завершает доказательство.

С л е д с т в и е 5.2.

$$\gamma \|u^*\|^2_{m-1+\kappa,-\gamma} + \sum_{j=0}^{m-1} |\mathcal{D}^j_{x_n} u^{*\pm}|^2_{m-1+\kappa-j,\gamma} \leq$$

$$\leq C(\kappa)\left(\gamma^{-1}\|\mathcal{A}u^*\|^2_{\kappa,-\gamma} + \sum_{j=\mu+1}^{2m} |{}^*\mathcal{B}_j u^*|^2_{m-1+\kappa-\tau_j^*,-\gamma}\right) . \qquad (5.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 5.5 и результатов п.4, имеем оценку (2.3) с $u = u^*(-t, x)$, $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}^*$, $\mathcal{B}_j = {}^*\tilde{\mathcal{B}}_j$ и соответствующей нумерацией $\mathcal{B}_j$. Остается лишь заметить, что

$$\|v(-t,x)\|_{\kappa,\gamma} = \|v(t,x)\|_{\kappa,-\gamma}, \ |v(-t,x)|_{\kappa,\gamma} = |v(t,x)|_{\kappa,-\gamma}.$$

6. Сильная разрешимость задачи (2.1) и энергетические оценки

Из оценок (2.2) и (5.7) решений задачи (2.1) и сопряженной к ней задачи стандартным путем [15, с.84-86] получается следующая

Л е м м а 6.1. <u>При</u> $\gamma \geq C(\kappa)$, $f \in \mathbb{H}_{\kappa,\gamma}$, $g_j \in H_{m-1+\kappa-\tau_j,\gamma}$ <u>существует (сильное) решение</u> $u \in \mathbb{H}_{m-1+\kappa,\gamma}$ <u>задачи (2.1).</u>

Отметим, что часть 2-я доказательства из [15] проводится отдельно для u^+ и u^- , а части 1, 3, 4-я доказываются без изменений,

причем существование решения вначале получается в пространстве пар функций, аналогичном пространству из [15] для одной функции.

Подобным образом [15, с.87-88] выводится еще одна

Л е м м а 6.2. Если при условиях леммы 6.1 $\operatorname{supp} f$, $\operatorname{supp} g_j \subset \{t \geq 0\}$, то существует решение u с $\operatorname{supp} u \subseteq \{t \geq 0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.3 следует из лемм 6.1 и 6.2 и оценки (2.2), установленной в п.4. Обозначим нормы и скалярные произведения на $\{t \geq 0\}$, $\{t < 0\}$ через $\| \ \|_{\dots,+}, \| \ \|_{\dots,-}, \dots$

Л е м м а 6.3.

$$\gamma \|u\|^2_{m-1,\gamma,-} + \sum_{j=0}^{m-1} |\mathcal{D}^j_{x_n} u^{\pm}|^2_{m-1,\gamma,-} + [u]^2_{0,\gamma}(0) \leq$$

$$\leq C\,(\gamma^{-1} \|\mathcal{A}u\|^2_{0,\gamma} + \sum_{j=1}^{\mu} |\mathcal{B}_j u|^2_{m-1-r_j,\gamma,-}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о повторяет доказательство предложения 2.1 из [15, с.92], но вместо соответствующей оценки из [15] применяется оценка (2.3).

Далее, из (5.1) и оценок коммутаторов псевдодифференциальных операторов, как и в [15, с.89], выводится следующее соотношение:

$$((\mathcal{A}u, {}'\Lambda^{m-1+\kappa} \mathcal{D}^{\kappa}_t u^*))_{0,+} - (({}'\Lambda^{m-1+\kappa} \mathcal{D}^{\kappa}_t u, \mathcal{A}u^*))_{0,+} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2m} ({}'\Lambda^{m-1-r_j-\nu_j} \mathcal{D}^{\nu_j}_t \mathcal{B}_j u, {}'\Lambda^{r_j-\nu_j^*} \mathcal{D}^{\nu_j^*}_t {}^*\mathcal{B}_j u^*)_{0,+} + \mathcal{R}(u,u^*), \quad (6.1)$$

где ${}'\Lambda = \mathcal{F}^{-1}(\gamma^2 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}$, $\kappa = 1,\dots,m-1$, $\nu_j + \nu_j^* = \kappa$,

$\nu_j = 0,\dots,\min\{m-1-r_j, \kappa\}$, $j = 1,\dots,2m$,

а остаток $\mathcal{R}(u,u^*)$ оценивается через $[u]_m [u^*]_m$,

$$|u|_{m-1,\gamma,+}\,|u^*|_{m-1,\gamma,+}, \quad |u|_{m-2,\gamma,+}\,|u^*|_{m-1,\gamma,-}.$$

Л е м м а 6.4. При $\kappa=0,1,\ldots$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\|\mathcal{D}^j_{x_n}u^{\pm}\|^2_{m+\kappa-1-j}\left((0,T)\times R^{n-1}\right)+[u]^2_{\kappa,1}(T)\leqslant$$

$$\leqslant C(T,\kappa)\Big(\|\mathcal{A}u\|^2_{\kappa}\left((0,T)\times R^n\right)+\sum_{j=0}^{\mu}\|\mathcal{B}_j u\|^2_{m+\kappa-1-\tau_j}\left((0,T)\times R^{n-1}\right)+$$

$$+[u]^2_{\kappa,1}(0)+\|u\|^2_{\kappa+m-1}\left((0,T)\times R^n\right)\Big). \tag{6.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим u^* как решение задачи $\mathcal{A}^*u^*=0$, ${}^*\mathcal{B}_j u^*=\varphi$, ${}^*\mathcal{B}_\kappa u^*=0$ при $\kappa=\mu+1,\ldots,j-1,$ $j+1,\ldots,2m$, где $\varphi\in C_0^\infty(R^n)$. В силу (6.1) и леммы 6.3,

$$\left|\left({}'\Lambda^{m-1-\tau_j-\nu_j}\mathcal{D}_t^{\nu_j}\mathcal{B}_j u,\ {}'\Lambda^{\tau_j-\nu_j^*}\mathcal{D}_t^{\nu_j^*}u^*\right)_{0,+}\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\left(M+\|u\|_{m-1,\gamma,+}\right)|\varphi|_{\tau_j,-\gamma,+}, \tag{6.3}$$

где $M=\gamma^{-1}\|\mathcal{A}u\|_{0,\gamma,+}+\sum\limits_{j=1}^{\mu}|\mathcal{B}_j u|_{m-1-\tau_j,\gamma,+}+[u]_{0,\gamma}$.

Нетрудно проверить, что

$$|\psi|_{\kappa,\gamma,+}\leqslant C\sum_{q=0}^{\kappa}\sum_{p=0}^{\ell}\sup_{\varphi\in H_{\ell,-\gamma,t}}\left|\left({}'\Lambda^{\kappa-q}\mathcal{D}_t^q\psi,\ {}'\Lambda^{\ell-p}\mathcal{D}_t^p\varphi\right)_+\right|/|\varphi|_{\ell,-\gamma,+},$$

поэтому из (6.3) вытекает оценка

$$|\mathcal{B}_j u|_{m-1-\tau_j,\gamma,+}\leqslant C\left(M+\|u\|_{m-1,\gamma,+}\right),\quad j=1,\ldots,2m. \tag{6.4}$$

Система $\{\mathcal{B}_j\}$ нормальна, так что нормы $|\mathcal{D}^j_{x_n} u^\pm|_{m-1-j,\gamma,+}$ оцениваются через сумму $|\mathcal{B}_j u|_{m-1-\tau_j,\gamma,+}$ по $j=1,\dots,2m$. В случае конечного промежутка времени $(0,T)$ можно продолжить f, g_j до финитных по t функций на $(0,+\infty)$ с оценкой продолжения (при фиксированном K) и, воспользовавшись (при фиксированном $\gamma>0$) эквивалентностью норм $\| \ \|_{K,\gamma}$ и $| \ |_K$, оценить с помощью (6.4)

$$M_\pm=\sum_{j=0}^{m-1}|\mathcal{D}^j_{x_n}u^\pm\|^2_{m-1-j}((0,T)\times R^{n-1})$$

через сумму всех слагаемых из правой части (6.2). Для завершения доказательства при $K=0$ достаточно напомнить [15, с.90] оценку

$$[u^\pm]^2_{0,1}(T)\leq C(T)\left(\|\mathcal{A}^\pm u^\pm\|^2_0((0,T)\times R^n_\pm)+M^\pm+[u^\pm]^2_{0,1}(0)\right).$$

Случай $K=1,2,\dots$ доказывается индукцией по K . При шаге от K к $K+1$ оценка с K используется для u_{x_i}, $i=0,\dots,n$, получающиеся коммутаторы оцениваются через последнее слагаемое (6.2) с использованием нехарактеристичности $\mathcal{A}^\pm$ относительно $\{t=\theta\}$ при $\theta\in[0,T]$ и теорем о следах.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.4. Отметим, что при $t\in(0,T)$

$$|u^\pm\|^2_{m-1+K}((0,t)\times R^n_\pm)\leq C(K,T)\left(\|\mathcal{A}^\pm u^\pm\|^2_K((0,T)\times R^n_\pm)+\int_0^t[u^\pm]^2_{K,1}(\theta)d\theta\right). \quad (6.5)$$

При $K=0$ неравенство очевидно. На индуктивном шаге от K к $K+1$ сначала из уравнения $a\mathcal{D}^m_t u^\pm+\ldots=\mathcal{A}^\pm u^\pm$ (... входят в [ ]) оцениваются нормы $\mathcal{D}^m_t\mathcal{D}^\alpha_x u^\pm$, а затем последовательно оцениваются

$$|\mathcal{D}^j_t\mathcal{D}^\alpha_x u^\pm\| \text{ с } j=m+1,\dots .$$

В силу (6.5) и леммы 6.4 имеем

$$[u]^2_{k,1}(t) \leqslant C(k,T)\left(N^2 + \int_0^t [u]^2_{k,1}(\theta)d\theta\right),$$

где N - сумма всех слагаемых правой части (6.2), кроме последнего. Таким образом, $[u]^2_{k,1}(t) \leqslant C(k,T)N^2$, что вместе с (6.2), (6.5) дает оценку (2.4).

Литература

1. Г о р д и н г Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М., ИЛ., 1961.
2. Е г о р о в Ю.В. О гиперболических уравнениях с разрывными коэффициентами. - "Докл. АН СССР", 1962, т.134, № 3, с.514-517.
3. И л ь и н В.А. Метод Фурье для гиперболических уравнений с разрывными коэффициентами. - "Докл. АН СССР", 1962, т.142, № 1, 21-24.
4. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О решении общей задачи дифракции. - "Докл. АН СССР", 1954, т.96, № 3, с.433-436.
5. Л и о н с Ж.-Л., М а д ж е н е с Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., "Мир", 1971.
6. Псевдодифференциальные операторы. Сб. переводов. М., "Мир", 1967.
7. С о б о л е в С.Л. Обшая теория дифракции волн на римановых поверхностях. - "Труды Физ.-мат. ин-та АН СССР", 1935, т.9, с.39-106.
8. С о л о н н и к о в В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. - "Труды Матем. ин-та им.В.А.Стеклова АН СССР", 1965, т.83, с.3-162.
9. Ш е ф т е л ь З.Г. Энергетические неравенства и обшие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. - "Сиб. мат. журн.", 1965, т.6, № 3, с.636-668.

10. A g m o n S., D o u g l i s A., N i r e n b e r g L. Estimates near the boundary for the solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary conditions I.-"Communs. Pure Appl.Math.", 1959, v.I, N 12, p.623-727; 1964, v.II, N 17, p.35-92.
11. C h a z a r a i n J., P i r i o u A. Characterization des problemes mixtes hyperboliques bien poses.-"Ann.Inst.Fourier Grenoble", 1972, v.22, N 4, p.193-237 (Сб. переводов "Математика", 1974, т.18, № 2 с.79-109.
12. I k a v a M. Problemes mixtes pas nècessairement $\mathcal{L}_2$ - bien poses pour les equations strictement hyperboliques.-"Osaka J.Math.", 1975, v.12, N 1, p.69-115.
13. K r e i s s H.O. Initial boundary value problem for hyperbolic equations.-"Communs. Pure Appl.Math.", 1970, v.23, N 3, p.277-298 (Сб. переводов "Математика", 1970, т.14, № 4, с.98-111).
14. M ü l l e r C. Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Berlin, Springer, 1957.
15. S a k a m o t o R. Mixed problems for hyperbolic equations I, II.-"J.Math.Kyoto Univ.", 1970, v.10, N2-3, p.349-373 (Сб. переводов "Математика", 1972, т.16, № 1, с.62-100).