УДК 517.9

К СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ ПОГРУЖЕННОГО ТЕЛА

В.Г.Мазья (Ленинград)

§ 1. Введение

В настоящей работе даны условия однозначной разрешимости задачи об отыскании потенциала скоростей малых колебаний тяжелой несжимаемой жидкости в присутствии погруженного препятствия.

Будем предполагать, что жидкость в положении равновесия занимает область W в полупространстве $R^3_- = \{(x,y,z) : z<0\}$ с границей ∂W. Пусть ∂W представляет собой объединение трех непересекающихся поверхностей $F \cup S \cup B$, где $F=\{(x,y,0)\}$ – свободная поверхность в положении равновесия, S – поверхность погруженного в жидкость ограниченного тела $\mathcal{D}$, B – дно водоема. Допустим, что в окрестности бесконечности, т.е. при $r=(x^2+y^2)^{1/2}>a$, $a=const>0$, область W совпадает со слоем $V_h=\{(x,y,z): -h<z<0\}$. Случай отсутствия дна также будет включен в рассмотрение.

Потенциал скоростей $\Phi(x,y,z,t)$ находим в виде $Re(e^{-i\omega t}u(x,y,z))$, где u – решение краевой задачи:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } W, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \nu u = 0 \quad \text{на } F, \quad \nu = \omega^2/g, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \psi \quad \text{на } S, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на } B \tag{1.4}$$

(n – внутренняя нормаль к ∂W), удовлетворяющее условиям излучения:

$$u = O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial u}{\partial r} - i\lambda_0 u = o(r^{-1/2}) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{1.5}$$

где λ_0 – положительный корень уравнения $\lambda\, th\, \lambda h = \nu$.

Граница области W и функция ψ предполагаются достаточно гладкими, а решение понимается в классическом смысле.

Колебания жидкости бесконечной глубины в присутствии полностью погруженного тела изучались Н.Е.Кочиным [1, 2], который доказал разрешимость задачи при больших и малых значениях ν. В работе Эрселла [3] установлена однозначная разрешимость при всех значениях ν плоской задачи о колебаниях жидкости бесконечной глубины в присутствии погруженного в нее кругового цилиндра. Недавно М.Л.Лившиц [4] получил аналогичный результат для осесимметрической задачи о колебаниях шара.

Мы не останавливаемся на характеристике работ, в которых изучается задача о колебаниях жидкости в присутствии частично погруженного в нее тела или имеющей переменную глубину, а отсылаем читателя к обзору [5, § 5]. Различные условия разрешимости, найденные в этих работах, исключают полностью погруженные препятствия.

Основной результат настоящей статьи – теорема об однозначной разрешимости задачи (1.1)–(1.4) при условии, что погруженное тело и дно удовлетворяют некоторому условию звездности.

Аналогично работе Б.Р.Вайнберга и автора [6], посвященной колебаниям жидкости переменной глубины, единственность следует из обращения в нуль некоторой неотрицательной квадратичной формы от решения с конечной энергией. Однако используемое здесь соответствующее интегральное тождество сложнее.

Я искренне благодарен М.Л.Лившицу за полезные советы и обсуждение работы.

§ 2. Предварительные сведения

Задача (1.1)-(1.5) в слое V_h хорошо изучена; в частности, в [7] показано, что ее фундаментальное решение имеет вид

$$E(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{-1/2}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta+2h)^2\right]^{-1/2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{(\nu+\lambda)e^{-h\lambda}ch\lambda(\zeta+h)ch\lambda(z+h)}{\lambda sh\lambda h-\nu ch\lambda h} I_0\left[\lambda\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)^{1/2}\right]d\lambda, \qquad (2.1)$$

где I_0 - функция Бесселя; L - контур на плоскости комплексной переменной λ, полученный из вещественной оси заменой отрезка $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$ полуокружностью $|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon$, $Im\,\lambda<0$; λ_0 - единственный корень уравнения $\lambda th\lambda h=\nu$, лежащий в полукруге $|\lambda-\lambda_0|\leq\varepsilon$, $Im\,\lambda\leq 0$.

Из формулы (2.1) можно получить следующее асимптотическое при $\xi^2+\eta^2<b^2$, $r\to\infty$ представление фундаментального решения [7]:

$$E=\frac{\nu ch\lambda_0(\zeta+h)ch\lambda_0(z+h)}{(\nu h+sh^2\lambda_0 h)(2\pi\lambda_0 r)^{1/2}}e^{i\lambda_0\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)^{1/2}+i\pi/4}+g,$$

где $|g| + |\nabla g| = O(r^{-3/2})$. Отсюда следует, что если уравнение (1.1) заменить на неоднородное $\Delta u = f$, где f - функция с компактным носителем, то решение задачи в слое W_h будет иметь вид:

$$u = F(\varphi, z) r^{-1/2} e^{i\lambda_0 r} + g, \tag{2.2}$$

где $F(\varphi, z)$ - гладкая функция z и полярного угла φ в плоскости (x,y) и $|g| + |\nabla g| = O(r^{-3/2})$ при $r \to \infty$.

Л е м м а 2.1 (ср. [6 и 7]). Любое решение задачи (1.1)-(1.5) имеет асимптотику (2.2). Функции F и ψ связаны соотношением

$$\lambda_0 \int_{-h}^{0} \int_{0}^{2\pi} |F(\varphi, z)|^2 d\varphi dz = \mathrm{Im} \int_S \psi \bar{u} ds. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\chi(r)$ - функция класса C^∞, причем $\chi(r) = 1$ при $r \geqslant a+1$, $\chi(r) = 0$ при $r \leqslant a$. Тогда функция u_1, равная $u\chi$ при $r \geqslant a$ и нулю при $r \leqslant a$, удовлетворяет уравнению $\Delta u_1 = f$ в слое V_h и условиям (1.2), (1.4) и (1.5). Так как $\operatorname{supp} f \subset \{(x,y,z) \in V_h : (x^2+y^2)^{1/2} \leqslant a+1\}$, то для функции u, совпадающей с u_1 при $r > a+1$, справедлива асимптотическая формула (2.2).

Пусть W_R - пересечение области W с цилиндром $x^2+y^2 < R$, где $R > a+2$ и $\Gamma_R = \{(x,y,z) \in W : x^2+y^2 = R^2\}$. Согласно формуле Грина,

$$0 = \int_{W_R} (\bar{u} \Delta u - u \Delta \bar{u}) dv = \int_{\partial W_R} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

где n - внутренняя нормаль. Пользуясь условиями (1.2)-(1.4), перепишем предыдущее равенство следующим образом:

$$\int_{\Gamma_R}\left(u\frac{\partial\bar u}{\partial n}-\bar u\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = 2i\,\mathrm{Im}\int_S \psi\bar u\,ds .$$

В силу (2.2) левая часть имеет асимптотику

$$2i\lambda_0\int_{-h}^{0}\int_0^{2\pi}|F(\varphi,z)|^2\,d\varphi dz + O(R^{-1}) \quad \text{при } R\to\infty.$$

Переход к пределу при $R\to\infty$ заканчивает доказательство.

Следствие 2.1. Если $\psi\equiv 0$, то

$$|u|+|\nabla u| = O(r^{-3/2}) \tag{2.4}$$

при $r\to\infty$.

Перейдем к случаю бесконечной глубины жидкости ($B=\varnothing$). Краевое условие (1.4) заменяется условием $|\nabla u|\to 0$ при $z\to-\infty$, а в условии излучения следует положить $\lambda_0=\nu$, что соответствует предельному случаю $h=\infty$.

Фундаментальное решение имеет вид (см. [2])

$$E(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi\rho}-\frac{1}{4\pi\rho'}+\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\lambda e^{(z+\zeta)\lambda}I_0(\lambda r)d\lambda}{\lambda-\nu}, \tag{2.5}$$

где $r=((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^{1/2}$, $\rho=(r^2+(z-\zeta)^2)^{1/2}$, $\rho'=(r^2+(z+\zeta)^2)^{1/2}$, а контур L – тот же, что в формуле (2.1).

Покажем, что на бесконечности (при $z,\zeta\le 0$) справедливо асимптотическое представление

$$E=\frac{1}{4\pi\rho}-\frac{1}{4\pi\rho'}+\left(\frac{\nu}{2\pi r}\right)^{1/2}e^{\nu(z+\zeta+ir-i\pi/4)}+g,$$

где $|g|+|\nabla g|=O\left(\rho'^{-2}+e^{\nu(z+\zeta)}(r+1)^{-3/2}\right).$

Оценим сначала интеграл в (2.5) в цилиндре $r<const$. Для $\varepsilon\in(0,\nu)$ имеем:

$$\left|\int\limits_L \lambda e^{(z+\zeta)\lambda} I_0(\lambda r)\frac{d\lambda}{\lambda-\nu}\right|\leqslant\left|\int\limits_0^\varepsilon \lambda e^{(z+\zeta)\lambda} I_0(\lambda r)\frac{d\lambda}{\lambda-\nu}\right|+$$

$$+e^{\varepsilon(z+\zeta)}\left|\int\limits_{L\setminus[0,\varepsilon)} \lambda e^{(z+\zeta)(\lambda-\varepsilon)} I_0(\lambda r)\frac{d\lambda}{\lambda-\nu}\right|=$$

$$=O\left(|z+\zeta|^{-2}+e^{\varepsilon(z+\zeta)}\right)=O\left(|z+\zeta|^{-2}\right)=O\left(\rho'^{-2}\right)$$

при $\rho'\to\infty$. Это дает требуемую оценку для g при $r<const.$

Для того чтобы оценить остаточный член при $r>const$, воспользуемся другой формулой для фундаментального решения [7] :

$$E=\frac{1}{4\pi\rho}-\frac{1}{4\pi\rho'}+\frac{i\nu}{2}e^{\nu(z+\zeta)}H_0^1(\nu r)-\frac{\nu}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\nu\lambda}d\lambda}{(r^2+(z+\zeta+\lambda)^2)^{1/2}},$$

где H_0^1 - функция Ганкеля. Интегрирование по частям дает:

$$E=\frac{1}{4\pi\rho}-\frac{1}{4\pi\rho'}+\frac{i\nu}{2}e^{\nu(z+\zeta)}H_0^1(\nu r)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{(z+\zeta+\lambda)e^{-\nu\lambda}d\lambda}{(r^2+(z+\zeta+\lambda)^2)^{3/2}}.\qquad(2.6)$$

Оценим интеграл в последней формуле

$$\left|\int\limits_0^\infty\frac{(z+\zeta+\lambda)e^{-\nu\lambda}d\lambda}{(r^2+(z+\zeta+\lambda)^2)^{3/2}}\right|<\int\limits_0^\infty\frac{|z+\zeta+\lambda|e^{-\nu\lambda}d\lambda}{(r^2+(z+\zeta+\lambda)^2)^{3/2}}<$$

$$\leqslant \int_0^{\infty} \frac{e^{-\nu\lambda} d\lambda}{r^2 + (z+\zeta+\lambda)^2} \leqslant \frac{1}{2\pi} \max_{\lambda>0} \frac{e^{-\nu\lambda/2}}{r^2 + (z+\zeta+\lambda)^2} .$$

Для того чтобы вычислить последнее выражение, заметим, что

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{e^{-\nu\lambda/2}}{r^2 + (z+\zeta+\lambda)^2}\right] = \frac{-e^{-\nu\lambda/2}}{r^2 + (z+\zeta+\lambda)^2}\left[\frac{\nu}{2} + \frac{2(z+\zeta+\lambda)}{r^2 + (z+\zeta+\lambda)^2}\right] =$$

$$= \frac{-e^{-\nu\lambda/2}}{r^2 + (z+\zeta+\lambda)^2}\left[\frac{\nu}{2} + \frac{2}{r}\left(\frac{r}{z+\zeta+\lambda} + \frac{z+\zeta+\lambda}{r}\right)^{-1}\right] < 0$$

при $r > 2/\nu$. Поэтому

$$\max_{\lambda>0} \frac{e^{-\nu\lambda/2}}{r^2 + (z+\zeta+\lambda)^2} = \rho'^{-2} ,$$

и интеграл в правой части (2.6) допускает оценку $O(\rho'^{-2})$ при $r > 2/\nu$, $\rho' \to \infty$.

Принимая во внимание асимптотику функции Ганкеля,

$$H_0^1(t) = \left(\left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} + O(t^{-3/2})\right) e^{i(t-\pi/4)} , \quad t \to \infty ,$$

получаем требуемую оценку для q при $r > const$. Оценка для $|\nabla q|$ получается аналогично.

В случае бесконечной глубины в асимптотике (2.2) следует поло-

жить $\lambda_0 = \nu$, а в формуле (2.3) еще $h = \infty$. Остаточный член в асимптотике (2.2) допускает оценку

$$|g| + |\nabla g| = O(\rho^{-2} + e^{\nu z}(r+1)^{-3/2}) \tag{2.7}$$

при $\rho^2 = r^2 + z^2 \to \infty$.

Та же оценка справедлива для решения однородной задачи (ср. (2.4)).

§ 3. Единственность решения

Обозначим через $<\ ,\ >$ эрмитово скалярное произведение в C^3, антилинейное по первому аргументу. В следующей лемме $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$; $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ – векторное поле на $\overline{W}$, компоненты которого вещественны и равномерно липшицевы на $\overline{W}$, и ψ – скалярная вещественная функция на $\overline{W}$ с равномерно липшицевыми первыми производными.

Л е м м а 3.1. <u>Решение u задачи (1.1)-(1.4), имеющее асимптотику (2.4), удовлетворяет равенству</u>

$$\begin{aligned} &Re \int_S (<\phi, \nabla u> + \psi u)\, \nabla_n \bar{u}\, ds - \frac{1}{2}\int_W <Q\nabla u, \nabla u> d\sigma + \\ &+ \frac{1}{2}\int_W |u|^2 \Delta\psi\, d\sigma + \frac{1}{2}\int_F \phi_n\, |\nabla_t u|^2 ds + \\ &+ \frac{1}{2}\int_F (\nabla_n \psi + 2\nu\psi - \nu\, div\, \phi_t - \nu^2 \phi_n)|u|^2 ds + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{S\cup B} \phi_n\, |\nabla u|^2 ds + \frac{1}{2}\int_{S\cup B} (\nabla_n \psi)\, |u|^2 ds, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где dv - элемент объема, ds - элемент площади ∂W, индексы n и t обозначают проектирование на нормаль n и касательную плоскость к ∂W и Q - матрица с элементами

$$(\operatorname{div}\Phi - 2\Psi)\delta_{ij} + 2\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}, \quad i,j = 1,2,3.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно проверяется тождество

$$\operatorname{Re}\left[(<\Phi, \nabla u> + \Psi u)\,\Delta \bar{u}\right] = -\frac{1}{2}\operatorname{div}\left(|\nabla u|^2 \Phi\right) +$$

$$+\frac{1}{2}<Q\nabla u, \nabla u> - \frac{1}{2}\operatorname{div}\left(|u|^2 \nabla \Psi\right) + \frac{1}{2}|u|^2 \Delta \Psi +$$

$$+\operatorname{Re}\operatorname{div}\left[(<\Phi, \nabla u> + \Psi u)\,\nabla \bar{u}\right]. \tag{3.2}$$

Поэтому для любой ограниченной области $\Omega \subset \overline{W}$ с кусочно-гладкой границей имеем

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} <Q\nabla u, \nabla u> dv + \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\Delta \Psi)|u|^2 dv +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \Phi_n |\nabla u|^2 ds + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (\nabla_n \Psi)|u|^2 ds = \operatorname{Re}\int_{\partial\Omega} \left(<\Phi, \nabla u> + \Psi u\right)\nabla_n \bar{u}\, ds.$$

Пусть W_R и Γ_R - множества, определенные при доказательстве леммы 2.1, и пусть B_R и F_R - части дна и свободной поверхности соответственно, высекаемые цилиндром $x^2 + y^2 < R^2$. Перепишем равенство (3.2), полагая $\Omega = W_R$:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{W_R} \langle Q\,\nabla u, \nabla u\rangle\, d\sigma + \frac{1}{2}\int\limits_{W_R} |u|^2 \Delta\,\Psi\, d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{S_R\cup B_R} \Phi_n\, |\nabla u|^2 ds + \frac{1}{2}\int\limits_{S_R\cup B_R} |u|^2\, \nabla_n \Psi\, ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_R} \Phi_r\, |\nabla u|^2 ds - \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_R} |u|^2\, \nabla_r\, \Psi\, ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{F_R} \Phi_n\, |\nabla u|^2 ds + \frac{1}{2}\int\limits_{F_R} |u|^2\, \nabla_n\, \Psi\, ds -$$

$$-\mathrm{Re}\int\limits_{F_R} \left(\langle \Phi, \nabla u\rangle + \Psi u\right) \nabla_n\, \bar{u}\, ds =$$

$$=\mathrm{Re}\int\limits_{S_R} \left(\langle \Phi, \nabla u\rangle + \Psi u\right) \nabla_n \bar{u}\, ds - \mathrm{Re}\int\limits_{\Gamma_R} \left(\langle \Phi, \nabla u\rangle + \Psi u\right) \nabla_r \bar{u}\, ds,$$

где r - направление внешней нормали к поверхности цилиндра W_R.
Преобразуем интеграл по F_R, используя краевое условие (1.2):

$$\int\limits_{F_R} \left\{ \frac{1}{2}\Phi_n\, |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|u|^2 \nabla_n \Psi - \mathrm{Re}\left[\left(\langle \Phi, \nabla u\rangle + \Psi u\right) \nabla_n \bar{u}\right]\right\} ds =$$

$$=\int\limits_{F_R} \left(-\frac{\nu^2}{2}\Phi_n + \frac{1}{2}\nabla_n\, \Psi + \nu\,\Psi\right) |u|^2 ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{F_R}\Phi_n\,|\nabla_t u|^2 ds+\nu Re\int\limits_{F_R}\langle\Phi_t,\nabla u\rangle\bar u\,ds.$$

Интегрируя последнее слагаемое по частям, получаем

$$\nu Re\int\limits_{F_R}\langle\Phi_t,\nabla u\rangle\bar u\,ds=\frac{\nu}{2}\int\limits_{F_R}\langle\Phi_t,\nabla|u|^2\rangle\,ds=$$

$$=\frac{\nu}{2}R\int\limits_{\partial F_R}|u|^2\Phi_r\,d\varphi-\frac{\nu}{2}\int\limits_{F_R}|u|^2\operatorname{div}\Phi_t\,ds.$$

Заметим теперь, что в силу условий леммы интегралы по Γ_R и ∂F_R стремятся к нулю при $R\to\infty$. Поэтому, переходя к пределу при $R\to\infty$, получаем требуемый результат.

Если область W, поле Φ и функция Ψ таковы, что правая часть равенства (3.1) строго положительна для любого ненулевого решения u задачи (1.1)-(1.5), то из (3.1) следует единственность решения этой задачи. В оставшейся части параграфа такие поле Φ и функция Ψ будут построены для некоторого класса областей W.

Пусть (r,z,φ) - цилиндрические координаты в W, а поле Φ не зависит от φ и при любом φ касательно к полуплоскости $\varphi=const$. Нетрудно проверить, что в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial z},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ квадратичная форма $\langle Q\nabla u,\nabla u\rangle$ имеет матрицу

$$
Q=\begin{pmatrix}
\frac{1}{r}\Phi_r-\frac{\partial\Phi_r}{\partial r}+\frac{\partial\Phi_z}{\partial z}-2\Psi, & -\frac{\partial\Phi_r}{\partial z}-\frac{\partial\Phi_z}{\partial r}, & 0,\\
-\frac{\partial\Phi_r}{\partial z}-\frac{\partial\Phi_z}{\partial r}, & \frac{1}{r}\Phi_r+\frac{\partial\Phi_r}{\partial r}-\frac{\partial\Phi_z}{\partial z}-2\Psi, & 0,\\
0, & 0, & \frac{\partial\Phi_r}{\partial r}+\frac{\partial\Phi_z}{\partial z}-\frac{1}{r}\Phi_r-2\Psi
\end{pmatrix}
$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно проинтегрировать по частям интеграл

$$
Re\int\limits_W\left(\langle\Phi,\nabla u\rangle+\Psi u\right)\Delta\bar{u}\,d\sigma
$$

в цилиндрических координатах, предполагая, что $u\in C_0^\infty(W)$.

Л е м м а 3.2. Пусть решение u задачи (1.1)-(1.5) имеет асимптотику (2.4). Тогда

$$
Re\int\limits_S\left[r\left(\frac{r^2-z^2}{r^2+z^2}\;\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}+\frac{2rz}{r^2+z^2}\;\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)+\bar{u}\right]\frac{\partial u}{\partial n}\,ds=
$$

$$
=\int\limits_W\left(\left|\frac{2rz}{r^2+z^2}\;\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{r^2-z^2}{r^2+z^2}\;\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2+\frac{z^2}{r^2+z^2}\;|\nabla u|^2\right)d\sigma+
$$

$$
+\frac{1}{2}\int\limits_{S\cup B}r\left(\frac{z^2-r^2}{r^2+z^2}\;\frac{\partial r}{\partial n}-\frac{2rz}{r^2+z^2}\;\frac{\partial z}{\partial n}\right)|\nabla u|^2\,ds. \qquad (3.3)
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\Phi=\left(x\frac{z^2-r^2}{r^2+z^2},\ y\frac{z^2-r^2}{r^2+z^2},\ -\frac{2r^2z}{r^2+z^2}\right),\quad \Psi=-1, \tag{3.4}$$

и применим формулу (3.1). Заметим, что $\Delta\Psi=0$, $\nabla\Psi=0$,

$\Phi_n\big|_F=-\Phi_z\big|_{z=0}=0$. Поэтому второй, третий и шестой интегралы в правой части (3.1) равны нулю. Покажем, что четвертый интеграл справа в (3.1) также аннулируется. Действительно,

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}+2\nu\Psi-\nu\,\mathrm{div}\,\Phi_t-\nu^2\Phi_n\right)\Big|_F=$$

$$=\nu\left(2\Psi-\mathrm{div}\,\Phi_t\right)\Big|_F=\nu\left[-2-r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}(-r^2)\right]=0.$$

Чтобы вычислить матрицу Q, введем комплексную переменную $\zeta=r+iz=(r^2+z^2)^{1/2}e^{i\theta}$ и функцию

$$w(\zeta)=\Phi_r+i\Phi_z=-\frac{\zeta+\bar\zeta}{2}\cdot\frac{\zeta}{\bar\zeta}=-re^{2i\theta}.$$

Тогда

$$Q_{11}=\frac{1}{r}\Phi_r-\frac{\partial\Phi_r}{\partial r}+\frac{\partial\Phi_z}{\partial z}-2\Psi=-\cos 2\theta-2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial w}{\partial\bar\zeta}+2=$$

$$= -\cos 2\theta + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\left(\frac{\zeta+\bar\zeta}{2}\cdot\frac{\zeta}{\bar\zeta}\right)\right] + 2 = 2 - \cos 2\theta - \cos 4\theta =$$

$$= 2\left(\sin^2\theta + \sin^2 2\theta\right) = 2\left(\frac{z^2}{r^2+z^2} + \left(\frac{2rz}{r^2+z^2}\right)^2\right);$$

$$Q_{12} = Q_{21} = -\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_z}{\partial r}\right) = -2\,\mathrm{Im}\,\frac{\partial w}{\partial\bar\zeta} =$$

$$= 2\,\mathrm{Im}\left[\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\left(\frac{\zeta+\bar\zeta}{2}\cdot\frac{\zeta}{\bar\zeta}\right)\right] = -\sin 4\theta =$$

$$= -2\sin 2\theta\cos 2\theta = -4\frac{rz}{r^2+z^2}\cdot\frac{r^2-z^2}{r^2+z^2};$$

$$Q_{22} = \frac{1}{r}\Phi_r + \frac{\partial\Phi_r}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_z}{\partial z} - 2\Psi = -\cos 2\theta + 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial w}{\partial\bar\zeta} + 2 =$$

$$= 2 - \cos 2\theta + \cos 4\theta = 2\left(\sin^2\theta + \cos^2 2\theta\right) = 2\left(\frac{z^2}{r^2+z^2} + \left(\frac{r^2-z^2}{r^2+z^2}\right)^2\right),$$

$$Q_{33} = \frac{\partial\Phi_r}{\partial r} + \frac{\partial\Phi_z}{\partial z} - \frac{1}{r}\Phi_r - 2\Psi = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial w}{\partial\zeta} + \cos 2\theta + 2 =$$

$$= -2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta+\bar\zeta}{2}\cdot\frac{\zeta}{\bar\zeta}\right)\right] + \cos 2\theta + 2 = 1 - \cos 2\theta = 2\frac{z^2}{r^2+z^2}.$$

Поэтому первый из интегралов в правой части равенства (3.1) равен

$$\frac{1}{2}\int\limits_W \left(Q_{11}\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(Q_{12}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial\bar u}{\partial z}\right) + Q_{22}\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 + Q_{33}r^{-2}\left|\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|^2\right)dv =$$

$$= \int\limits_W \left(\left| \frac{2rz}{r^2+z^2} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{r^2-z^2}{r^2+z^2} \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 + \frac{z^2}{r^2+z^2} |\nabla u|^2 \right) d\sigma.$$

Подстановка выражений (3.4) в оставшиеся интегралы тождества (3.1) заканчивает доказательство леммы.

Теперь очевидной становится следующая

Т е о р е м а единственности 3.1. Пусть область W такова, что на $S \cup B$ имеет место неравенство

$$(z^2 - r^2)\frac{\partial r}{\partial n} - 2rz\frac{\partial z}{\partial n} \geqslant 0. \qquad (3.5)$$

Тогда задача (1.1)-(1.5) имеет не более одного решения.

Геометрический смысл условия (3.5) состоит в том, что поле Φ, определенное в (3.4), всюду на $S \cup B$ образует с полем внутренних нормалей n угол, не превосходящий $\pi/2$. Нетрудно заметить, что интегральные кривые поля Φ – полуокружности:

$$\ell_{c,\varphi} : r^2 + (z+c)^2 = c^2, \ c>0, \ r \geqslant 0, \ \varphi = const,$$

ориентированные так, что начало находится в точке $r=0$, $z=-2c$, а конец – в точке $x=y=z=0$. Условие (3.5) эквивалентно утверждению, что все трансверсальные пересечения каждой кривой $\ell_{c,\varphi}$ с $S \cup B$ представляют собой точки входа в W.

Можно дать еще одну интерпретацию условия (3.5). Инверсия относительно единичного шара с центром в начале координат $I : (\rho, \omega) \longrightarrow (\rho^{-1}, \omega)$, где (ρ, ω) – сферические координаты, переводит полуокружности $\ell_{c,\varphi}$ в лучи $z = (2c)^{-1}$, $\varphi = const$, направленные от оси z в бесконечность. Условие (3.5) эквивалентно звездности области IW относительно этого семейства лучей. Другими словами, сечение

области IW любой плоскостью $z = const$ должно быть звездным относительно пересечения этой плоскости с осью z.

З а м е ч а н и е 3.1. Все результаты настоящего параграфа останутся верными для случая бесконечной глубины, если вместо асимптотики (2.4) использовать асимптотику (2.7), а интегралы понимать как несобственные по z с бесконечным нижним пределом. Доказательства останутся в силе, если всюду, где нужно, обосновать сходимость интегралов по z с помощью асимптотики (2.7).

§ 4. Разрешимость краевой задачи

В этом параграфе будем предполагать, что условие (3.5) выполнено. Дополнительно допустим, что существует диффеоморфизм $\gamma : \overline{V}_h \longrightarrow \overline{W}_0$, где $W_0 = W \cup \overline{D}$, класса C^3, тождественный при $r = (x^2+y^2)^{1/2} > a$ и при $z = 0$. Очевидно, область W_0 удовлетворяет условию (3.5).

Задача об установившихся колебаниях жидкости в W_0 ставится следующим образом:

$$\Delta u = f \quad \text{в} \quad W_0 . \tag{4.1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \nu u\right)\Big|_F = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_B = 0, \tag{4.3}$$

$$u = O\left(r^{-1/2}\right), \ \frac{\partial u}{\partial r} - i\lambda_0 u = o\left(r^{-1/2}\right) \tag{4.4}$$

при $r \longrightarrow \infty$.

Согласно теореме 3.1 задача (4.1)-(4.4) имеет не более одного решения. В работе [6, теорема 1.2] показано, что из единственности

вытекает однозначная разрешимость задачи (4.1)-(4.4) при любой правой части f из $L^2(W_0)$ с носителем в цилиндре $x^2+y^2<R^2$ при некотором $R<\infty$. В той же работе (теорема 2.2) построено фундаментальное решение задачи (4.1)-(4.4) $G(p,q)$, которое определяется следующим образом*). При любом фиксированном $q \in W_0$ функция $u(p) = G(p,q)$ является решением задачи (4.1)-(4.4), где $f(p) = -\delta(p-q)$.

Как следует из доказательств теорем 1.2 и 2.2 (см. [6]), функция $G(p,q)$ представима в виде

$$G(p,q) = (4\pi\rho)^{-1} + g(p,q), \tag{4.5}$$

где ρ - евклидово расстояние между точками p и q, а функция $g(p,q)$ принадлежит классу $C^\infty(\Omega\times\Omega)$ для любой области Ω с компактным замыканием в W_0.

Вернемся к задаче (1.1)-(1.5), считая, что S - поверхность класса C^2. Существование функции Грина позволяет свести задачу к интегральному уравнению на S. Действительно, будем искать решение в виде "потенциала простого слоя"

$$u(p) = \int_S G(p,q)\,\gamma(q)\,ds_q \tag{4.6}$$

с неизвестной плотностью γ. Тогда u удовлетворяет всем условиям задачи (1.1)-(1.5), кроме условия (1.3), которое эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма:

---

*) В [6] для функции $G(p,q)$ приняты обозначение $E_q^1(p)$ и название "потенциал скоростей, вызванных периодическим источником, находящимся в точке q внутри жидкости".

$$\frac{1}{2}\gamma(p) - \int\limits_S \frac{\partial G(p,q)}{\partial n_p}\gamma(q)ds_q = -\psi(p). \tag{4.7}$$

При помощи стандартных рассуждений из теории потенциала можно показать, что единственность решения краевой задачи (1.1)-(1.5) влечет однозначную разрешимость уравнения (4.7), а следовательно, и задачи (1.1)-(1.5) при любой правой части $\psi \in C^1(S)$.

З а м е ч а н и е 4.1. В случае бесконечной или постоянной глубины функция $G(p,q)$ совпадает с фундаментальным решением $E(p,q)$, вычисленным явно (см. § 2).

§ 5. Плоская задача

В случае плоскопараллельного движения жидкости задача о колебаниях ставится следующим образом. В области $W \subset R^2_- = \{(x,y): y < 0\}$, граница которой $\partial W = F \cup S \cup B$ состоит из свободной поверхности $F = \{(x,0)\}$, контура $S = \partial B$, погруженного в жидкость, и дна B, которое при $|x| > a$ совпадает с прямой $y = -h$, найти комплексную функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } W, \tag{5.1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \nu u\right)\Big|_F = 0, \quad \nu^2 = \omega^2/g, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \psi, \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_B = 0, \tag{5.4}$$

$$u = O(1), \quad \frac{\partial u}{\partial |x|} - i\lambda_0 u = o(1) \qquad \text{при } |x| \to \infty, \qquad (5.5)$$

где λ_0 - положительный корень уравнения $\lambda\, th\, \lambda h = \nu$.

Эта задача аналогична задаче (1.1)-(1.5), поэтому мы ограничимся формулировкой результатов, останавливаясь лишь на особенностях доказательств.

Прежде всего, фундаментальное решение $E(x, y; \xi, \eta)$ в полосе $V_h = \{(x,y): -h < y < 0\}$ имеет при $\xi^2 + \eta^2 < b^2$ и $r^2 = x^2 + y^2 \to \infty$ асимптотику

$$-i\lambda_0^{-1}\nu(\nu h + sh^2\lambda_0 h)^{-1} ch\,\lambda_0(\eta+h)\,ch\,\lambda_0(y+h)\,e^{i\lambda_0|x-\xi|} + g, \qquad (5.6)$$

где $|g| + |\nabla g| = O(r^{-1})$ Поэтому любое решение задачи (5.1)-(5.5) в полосе V_h имеет асимптотику

$$u = c_\pm(y)e^{\pm i\lambda_0 x} + g_\pm(x,y) \qquad \text{при } x \to \pm\infty, \qquad (5.7)$$

где $|g_\pm| + |\nabla g_\pm| = O(r^{-1})$ при $r \to \infty$. Справедливо неравенство

$$\lambda_0 \int_{-h}^{0} \left[|c_+(y)|^2 + |c_-(y)|^2 \right] dy = \operatorname{Im} \int_S \psi \bar{u}\, ds.$$

Следовательно, для решения однородной задачи имеем $c_+ = c_- = 0$ и

$$|u| + |\nabla u| = O(r^{-1}) \qquad \text{при } r \to \infty. \qquad (5.8)$$

Доказательство единственности решения плоской задачи опирается на интегральное тождество (3.1), которое, очевидно, не зависит от размерности пространства. Мы полагаем $\Psi = -1/2$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$,

где

$$\Phi_1 = x\,\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}, \quad \Phi_2 = -\frac{2x^2y}{x^2+y^2}. \tag{5.9}$$

Матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y} - 2\Psi, & -\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \\ -\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y} - 2\Psi \end{pmatrix}.$$

Л е м м а 5.1. Если решение задачи (5.1)-(5.5) имеет асимптотику (5.8), то справедливо равенство

$$\mathrm{Re}\int_S \left(x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,\frac{\partial \bar u}{\partial x} + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}\,\frac{\partial \bar u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial n}\, ds =$$

$$= \int_W \left| \frac{2xy}{x^2+y^2}\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,\frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 dx\,dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{S\cup B} x \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{2xy}{x^2+y^2}\,\frac{\partial y}{\partial n} \right) |\nabla u|^2\, ds. \tag{5.10}$$

Т е о р е м а 5.1. Пусть область W такова, что на $S\cup B$

$$(y^2 - x^2)\frac{\partial x}{\partial n} - 2xy\frac{\partial y}{\partial n} \geqslant 0. \qquad (5.11)$$

Тогда задача (5.1)-(5.5) имеет не более одного решения.

Доказательство. Если $\psi = 0$, то левая часть равенства (5.10) обращается в нуль. В силу (5.11) поверхностный интеграл справа в (5.10) неотрицателен, поэтому объемный интеграл исчезает. Следовательно, $\partial u / \partial y = 0$ на F и, в силу краевого условия (5.2), $u = 0$ на F. Поэтому $u = 0$ в W.

Геометрический смысл условия (5.11) состоит в том, что все трансверсальные пересечения каждой полуокружности $\ell_c^{\pm}$:

$$x^2 + (y+c)^2 = c^2, \quad c>0, \quad x \gtrless 0,$$

с началом в точке $(0, -2c)$ и концом в точке $(0, 0)$ с кривыми S и B представляют собой "точки входа" в W.

Другая интерпретация условия (5.11) - звездность образа IW при инверсии $I = z = 1/\bar{z}$ относительно семейства лучей $y = const$, $x \geqslant 0$ $(x \leqslant 0)$, направленных в бесконечность.

В оставшейся части параграфа будем предполагать, что условие (5.11) выполнено.

Вопрос о разрешимости рассмотрим в предположении, что область $W_0 = W \cup \bar{D}$ есть образ полосы V_h при C^3 - диффеоморфизме $\bar{V}_h \to \bar{W}_0$, тождественном при $|x| > a$ и $y = 0$.

Функция Грина, существование которой доказано в [6], представима в виде

$$G(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \log|z - \zeta| + g(z, \zeta),$$

где регулярная часть g принадлежит классу $C^{\infty}(\Omega \times \Omega)$ для любой

области Ω с компактным замыканием в W_0. В предположении, что S - контур класса C^2, будем искать решение задачи (5.1)-(5.5) в виде "потенциала простого слоя"

$$u(z) = \int_S G(z,\zeta)\gamma(\zeta)ds_\zeta$$

и для плотности получим интегральное уравнение с ограниченным ядром

$$\frac{1}{2}\gamma(z) - \int_S \frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_z}\gamma(\zeta)ds_\zeta = -\psi(s), \tag{5.12}$$

эквивалентное задаче (5.1)-(5.5).

Теорема 5.2. <u>При сформулированных ограничениях на W задача (5.1)-(5.5) однозначно разрешима для любой правой части</u> $\psi \in C^1(S)$.

Замечание 5.1. Результаты этого параграфа справедливы для случая бесконечной глубины жидкости, при этом роль асимптотики (5.8) играют соотношения

$$|u| = O(r^{-1}),\ |\nabla u| = O(r^{-2}) \quad \text{при } r \to \infty.$$

Литература

1. Кочин Н.Е. Плоская задача об установившихся колебаниях тел под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости. Собр. соч., т.2. М., 1949, с.244-276.

2. Кочин Н.Е. Теория волн, вынуждаемых колебаниями тела под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости. Собр. соч., т.2. М., 1949, с.277-304.

3. Ursell F. Surface waves on deep water in the presence of a submerged circular cylinder, I, II.-"Proc.Cambridge Philos.Soc.", 1950, v.46,p.1; 141-152;153-158.

4. Л и в ш и ц М.Л. Об установившихся колебаниях погруженного в жидкость шара. - "Труды Ленинградского кораблестроительного института", 1975, вып.91, с.133-139.

5. M a s j a W.G. Einige Richtungen und Probleme der Theorie elliptisher Gleichungen.-"Mitteilungen der Math.Gesellschaft der DDR",1975, H.1, S.26-91.

6. В а й н б е р г Б.Р., М а з ь я В.Г. К задаче об установившихся колебаниях слоя жидкости переменной глубины. - "Труды Моск. матем. о-ва", 1973, т.28, с.57-74.

7. J o h n F. On the motion of floating bodies, II.-"Communs Pure and Appl. Math.", 1950, v.3, N 1, p.45-101.