УДК 517.9

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В.Р.Портнов (Новосибирск)

В работах автора [1-3] был намечен один подход к исследованию вопроса о разрешимости нелинейных операторных уравнений вида $G(u)=0$, где G - оператор, отображающий банахово пространство X в пространство X^*, вообще говоря, некоэрцитивный.*) Были указаны приложения к конкретным задачам теории дифференциальных уравнений.

В настоящей статье мы рассмотрим еще ряд приложений, при этом основное внимание будет уделено уравнениям вида $S(u)+B(u)=h$, где S является в некотором смысле "главным" оператором, B - "подчиненным", причем коядро оператора S может быть бесконечномерным.

§ 1. Абстрактные теоремы

Пусть X - банахово пространство над полем вещественных или комплексных чисел. Оператор $G: X \to X^*$, вообще говоря, нелинейный. Рассмотрим уравнение

$$G(u)=0 \tag{1.1}$$

и изучим вопрос о разрешимости этого уравнения в пространстве X.

Определение 1.1. Пусть $\mathcal{M}$ - направленное семейство линейных конечномерных подпространств в X, частично упорядоченное по включению, такое, что множество $\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}} \mu$ плотно в X. Обобщенная

---

*) Оператор G называется коэрцитивным, если $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \dfrac{Re\langle G(u),u\rangle}{\|u\|}=\infty$.

последовательность $\{u_\mu\}$, $\mu \in \mathcal{M}$, называется последовательностью Галёркина для оператора $G: X \longrightarrow X^*$, если $u_\mu \in \mu$ $\forall \mu \in \mathcal{M}$ и $\langle G(u_\mu), v \rangle = 0$ $\forall v \in \mu$, $\forall \mu \in \mathcal{M}$. Пусть φ – подмножество в X. Скажем, что оператор G принадлежит классу $\mathcal{O}\!\iota(\varphi)$ (или, точнее, – классу $\mathcal{O}\!\iota(\varphi, \mathcal{M})$), если имеет место импликация $\{$ для оператора G существует ограниченная последовательность Галёркина $\{u_\mu\} \subset \varphi, \mu \in \mathcal{M}\} \Rightarrow$ $\Rightarrow \{0 \in G(\varphi)\}$; если, кроме того, функционал $u \longrightarrow \langle G(u), v \rangle$ непрерывен на множестве $\mu \cap \varphi$ $\forall v \in \mu$, $\forall \mu \in \mathcal{M}$, то об операторе G будем говорить, что он принадлежит классу $\mathcal{O}\!\iota_0(\varphi)$.

Пусть задано разбиение пространства X в конечную прямую сумму нетривиальных линейных замкнутых подпространств

$$X = X^{(1)} \oplus \ldots \oplus X^{(\ell)}. \tag{1.2}$$

Соответствующее разложение произвольного элемента $u \in X$ будем записывать в виде

$$u = u^{(1)} + \ldots + u^{(\ell)}. \tag{1.3}$$

Зададим в X ограниченную замкнутую область φ *), имеющую следующий вид:

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \ldots + \varphi^{(\ell)}, \tag{1.4}$$

где $\varphi^{(\kappa)}$ – ограниченная замкнутая область в $X^{(\kappa)}$, $\kappa = 1, \ldots, \ell$.

Пусть, далее, $\forall \kappa = 1, \ldots, \ell$ задано непрерывное невырожденное векторное поле $A^{(\kappa)}: \partial\varphi^{(\kappa)} \longrightarrow X^{(\kappa)}$ и направленное семейство $\mathcal{M}^{(\kappa)}$ линейных конечномерных подпространств в $X^{(\kappa)}$, частично упорядоченное по включению такое, что множество $\bigcup_{\mu \in \mathcal{M}^{(\kappa)}} \mu$ плотно в $X^{(\kappa)}$, причем $\forall \mu \in \mathcal{M}^{(\kappa)}$:

---

*) Под замкнутой областью понимается замыкание непустого открытого связного множества.

1) множество $\mu \cap \varphi^{(\kappa)}$ представляет собой замкнутую область в μ ; 2) $A^{(\kappa)}(\mu \cap \partial\varphi^{(\kappa)}) \subset \mu$ и 3) вращение векторного поля $A^{(\kappa)}$ на $\mu \cap \partial\varphi^{(\kappa)}$ отлично от нуля. Введем множества $\psi^{(\kappa)} = \{u \in \varphi \mid u^{(\kappa)} \in \partial\varphi^{(\kappa)}\}$, $\kappa = 1, \ldots, \lambda$. Через $\mathcal{M}$ обозначим направленное семейство линейных конечномерных подпространств в X , частично упорядоченное по включению, вида $\mu = \mu^{(1)} \oplus \ldots \oplus \mu^{(\lambda)}$, где $\mu^{(\kappa)} \in \mathcal{M}^{(\kappa)}$ $\forall \kappa = 1, \ldots, \lambda$. Справедлива такая

Т е о р е м а 1.1 (см. [3, с.73, 74]). Пусть оператор G принадлежит классу $\mathcal{O\!L}_0(\varphi)$ и имеют место неравенства

$$Re < G(u), A^{(\kappa)}(u^{(\kappa)}) > \geq 0 \quad \forall u \in \psi^{(\kappa)}, \ \forall \kappa = 1, \ldots, \lambda. \tag{1.5}$$

Тогда уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно решение $u \in \varphi$.

Существование множества φ , для которого выполнены неравенства (1.5), можно установить, проверив коэрцитивность некоторого семейства функций (см. [3]).

О п р е д е л е н и е 1.2. Пусть T - произвольное множество. Семейство вещественных функций $\omega = \{\omega_\kappa(t)\}, \kappa = 1, \ldots, \lambda$, заданных на T , называется коэрцитивным на T , если существует точка $t^* \in T$ (так называемая точка коэрцитивности семейства ω), обладающая свойством: $\omega_\kappa(t^*) \geq 0$ $\forall \kappa = 1, \ldots, \lambda$. Совокупность всех точек коэрцитивности семейства ω называется множеством коэрцитивности этого семейства и обозначается через $T^+(\omega)$. Семейство вещественных функций $\omega^* = \{\omega^*_\kappa(t)\}$, $\kappa = 1, \ldots, \lambda$, заданных на T , называется минорантой семейства ω , если $\omega^*_\kappa(t) \leq \omega_\kappa(t)$ $\forall t \in T$, $\forall \kappa = 1, \ldots, \lambda$.

Пусть при каждом натуральном $\kappa \leq \lambda$ задано непустое семейство $\mathcal{T}^{(\kappa)}$ ограниченных замкнутых областей в $X^{(\kappa)}$, границы которых не пересекаются с нулем подпространства $X^{(\kappa)}$ и каждой области

$\varphi \in \mathcal{T}^{(\kappa)}$ поставлено в соответствие непрерывное невырожденное векторное поле $A_{\varphi}^{(\kappa)} : \partial\varphi \longrightarrow X^{(\kappa)}$, причем $\forall \mu \in \mathcal{M}^{(\kappa)}$, $\forall \varphi \in \mathcal{T}^{(\kappa)}$ выполняются следующие условия: 1) множество $\mu \cap \varphi$ представляет собой замкнутую область в μ, 2) $A_{\varphi}^{(\kappa)} (\mu \cap \varphi) \subset \mu$, 3) вращение поля $A_{\varphi}^{(\kappa)}$ на $\mu \cap \partial\varphi$ отлично от нуля. Обозначим через $\mathcal{T}$ семейство ограниченных замкнутых областей в X вида $\varphi = \varphi^{(1)} + \ldots + \varphi^{(s)}$, где $\varphi^{(\kappa)} \in \mathcal{T}^{(\kappa)}$ $\forall \kappa = 1, \ldots, s$, а через φ_0 - множество $\bigcup\limits_{\varphi \in \mathcal{T}} \varphi$.

Пусть множество T имеет вид: $T = (0, \delta_1) \times \ldots \times (0, \delta_s)$, где $0 < \delta_\kappa \le \infty$ $\forall \kappa = 1, \ldots, s$, и пусть на нем задано некоторое коэрцитивное семейство функций $\omega = \{\omega_\kappa (t)\}$, $t = (t_1, \ldots, t_s)$, $\kappa = 1, \ldots, s$, причем каждая функция $\omega_\kappa (t)$ убывает в широком смысле на интервале $(0, \delta_j)$ по аргументу t_j при зафиксированных остальных аргументах $\forall j \ne \kappa$. Обозначим через $\mathcal{T}^+$ совокупность всех таких областей $\varphi = \varphi^{(1)} + \ldots + \varphi^{(s)}$ из $\mathcal{T}$, $\varphi^{(\kappa)} \in \mathcal{T}^{(\kappa)}$ $\forall \kappa = 1, \ldots, s$, которые обладают следующим свойством:

$$\Big(\sup_{u^{(1)} \in \varphi^{(1)}} \| u^{(1)} \|, \ldots, \sup_{u^{(s)} \in \varphi^{(s)}} \| u^{(s)} \| \Big) \in T^+(\omega).$$

Легко могут быть доказаны такие удобные в приложениях следствия теоремы 1.1.

Т е о р е м а 1.2. <u>Пусть $G \in \mathcal{O}_0 (\varphi_0)$ и $\mathcal{T}^+ \ne \emptyset$. Предположим, что справедливо следующее неравенство:</u>

$$\operatorname{Re} \langle G(u), A_{\varphi^{(\kappa)}}^{(\kappa)} (u^{(\kappa)}) \rangle \ge$$

$$\ge \omega_\kappa \Big(\| u^{(1)} \|, \ldots, \| u^{(\kappa-1)} \|, \sup_{v \in \varphi^{(\kappa)}} \| v \|, \| u^{(\kappa+1)} \|, \ldots, \| u^{(s)} \| \Big)$$

$$\forall u \in X : \| u^{(j)} \| < \delta_j \ \ \forall j \ne \kappa, \ u^{(\kappa)} \in \partial\varphi^{(\kappa)}, \ \ \forall \varphi^{(\kappa)} \in \mathcal{T}^{(\kappa)}, \ \forall \kappa = 1, \ldots, s. \tag{1.6}$$

<u>Тогда уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно решение $u \in \varphi_0$</u>.

Т е о р е м а 1.3. Пусть τ^* – произвольное семейство попарно-непересекающихся между собой множеств из τ^+. Пусть $G \in \mathfrak{A}_0(\varphi)$ $\forall \varphi \in \tau^*$ и выполнено неравенство (1.6). Тогда $\forall \varphi \in \tau^*$ уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно решение $u \in \varphi$, и, следовательно, мощность множества всех решений уравнения (1.1) не меньше мощности семейства τ^*.

Рассмотрим некоторые коэрцитивные семейства функций, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть на множестве $R_+^s = \underbrace{(0,\infty)\times\ldots\times(0,\infty)}_{s}$ задано семейство вещественных функций $\omega = \{\omega_k(t) = t_k^{\theta_k}(a_{kk}t_k^{\gamma_{kk}} - \sum\limits_{1\le j\le s,\, j\ne k} a_{jk}t_j^{\gamma_{jk}} - b_k) - c_k\}$, $k=1,\ldots,s$, где $\theta_k > 0$, $a_{kk} > 0$, $\gamma_{jk} > 0$, $a_{jk} \ge 0$ при $j \ne k$, $c_k \ge 0$, $a_k \ge 0$, $b_k + c_k > 0$. Спрашивается, в каких случаях семейство ω коэрцитивно на множестве $T = (0,\delta_1)\times\ldots\times(0,\delta_s)$?

Ясно, что при $s=1$ этот вопрос решается тривиально.

Мы укажем одну процедуру, которая позволяет шаг за шагом свести исследование коэрцитивности семейства ω к исследованию коэрцитивности семейства, состоящего из одной функции. В общем виде эта процедура изложена в [3, § 2].

Образуем функцию

$$\chi_s(t_1,\ldots,t_{s-1}) = \left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{s-1} a_{js}t_j^{\gamma_{js}} + b_s + c_s^{\frac{1}{1+\theta_s}}}{a_{ss}}\right)^{\frac{1}{\gamma_{ss}}},$$

определенную на множестве R_+^{s-1}, которая, очевидно, удовлетворяет соотношению

$$\omega_s(t_1,\ldots,t_{s-1},\chi_s(t_1,\ldots,t_{s-1})) \ge 0 \quad \forall t_k > 0,\ \forall k=1,\ldots,s-1, \tag{1.7}$$

так что для коэрцитивности исходного семейства ω достаточно, чтобы коэрцитивным на множестве $T_{s-1} = (0,\delta_1)\times\ldots\times(0,\delta_{s-1})$ было семейство функций

$$\{\omega_k(t_1,\ldots,t_{s-1},\chi_s(t_1,\ldots,t_{s-1}))\}, \quad k=1,\ldots,s-1, \qquad (1.8)$$

причем набор чисел $t_k^* \in (0,\delta_k)$, $k=1,\ldots,s-1$, такой, что $\omega_k(t_1^*,\ldots,t_{s-1}^*,\chi_s(t_1^*,\ldots,t_{s-1}^*)) \geqslant 0$ $\forall k=1,\ldots,s-1$, должен быть выбран так (если это, конечно, возможно), чтобы имело место неравенство $\chi_s(t_1^*,\ldots,t_{s-1}^*) < \delta_s$.

Предположим, что при каждом фиксированном $k=1,\ldots,s-1$ выполнено неравенство $\gamma_{kk}\gamma_{ss} \geqslant \gamma_{sk}\gamma_{ks}$, если $\delta_k = \infty$, и неравенство $\gamma_{kk}\gamma_{ss} \leqslant \gamma_{sk}\gamma_{ks}$, если $\delta_k < \infty$, причем если $\gamma_{kk}\gamma_{ss} = \gamma_{sk}\gamma_{ks}$, то пусть еще

$$a_{kk} > a_{sk}\, a_{ks}^{\frac{\gamma_{sk}}{\gamma_{ss}}}. \qquad (1.9)$$

Тогда легко проверяется, что семейство функций (1.8) обладает на множестве T_{s-1} минорантой вида $\omega^{(s-1)} = \{\omega_k^{(s-1)}(t_1,\ldots,t_{s-1}) = t_k^{\theta_k}\left(a_{kk}^{(s-1)} t_k^{\gamma_{kk}} - \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant s-1,\, j\neq k} a_{jk}^{(s-1)} t_j^{\gamma_{jk}^{(s-1)}} - b_k^{(s-1)}\right) - c_k\}$, $k=1,\ldots,s-1$,

где $a_{kk}^{(s-1)} > 0$, $\gamma_{jk}^{(s-1)} > 0$, $a_{jk}^{(s-1)} \geqslant 0$, при $j\neq k$, $b_k^{(s-1)} \geqslant 0$, $b_k^{(s-1)} + c_k > 0$. Если мы докажем коэрцитивность семейства $\omega^{(s-1)}$ на множестве T_{s-1}, показав при этом, что набор чисел $t_k^* \in (0,\delta_k)$, $k=1,\ldots,s-1$, удовлетворяющий неравенствам $\omega_k^{(s-1)}(t_1^*,\ldots,t_{s-1}^*) \geqslant 0$, удовлетворяет также неравенству $\chi_s(t_1^*,\ldots,t_{s-1}^*) < \delta_s$, то тем самым будет доказана (с учетом неравенства (1.7)) коэрцитивность на T семейства ω.

Таким образом, вопрос о коэрцитивности на множестве T семейства ω, состоящего из s функций, сведен в указанном выше смысле к вопросу о коэрцитивности на множестве T_{s-1} семейства $\omega^{(s-1)}$, состоящего уже из $s-1$ функций, совпадающих по структуре с функциями семейства ω.

Предположим по аналогии с предыдущим, что при каждом фиксированном $k=1,\dots,s-2$ выполняется неравенство $\gamma_{kk}\gamma_{s-1,s-1} \geq \gamma^{(s-1)}_{s-1,k}\gamma^{(s-1)}_{k,s-1}$, если $\delta_k = \infty$, и неравенство $\gamma_{kk}\gamma_{s-1,s-1} \leq \gamma^{(s-1)}_{s-1,k}\gamma^{(s-1)}_{k,s-1}$, если $\delta_k < \infty$, причем если $\gamma_{kk}\gamma_{s-1,s-1} = \gamma^{(s-1)}_{s-1,k}\gamma^{(s-1)}_{k,s-1}$, то пусть еще

$$a_k^{(s-1)} > a^{(s-1)}_{s-1,k}\left(a^{(s-1)}_{k,s-1}\right)^{\frac{\gamma^{(s-1)}_{s-1,k}}{\gamma_{s-1,s-1}}} .$$

Введем функцию

$$\chi_{s-1}(t_1,\dots,t_{s-2}) = \left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{s-2} a^{(s-1)}_{j,s-1}\, t_j^{\gamma^{(s-1)}_{j,s-1}} + b^{(s-1)}_{s-1} + c_{s-1}^{\frac{1}{1+\theta_{s-1}}}}{a^{(s-1)}_{s-1,s-1}}\right)^{\frac{1}{\gamma_{s-1,s-1}}},$$

определенную на множестве R_+^{s-2}, удовлетворяющую соотношению

$$\omega^{(s-1)}_{s-1}\left(t_1,\dots,t_{s-2},\chi_{s-1}(t_1,\dots,t_{s-2})\right) \geq 0 \quad \forall t_k>0,\ \forall k=1,\dots,s-2, \qquad (1.10)$$

и, подобно тому, как было построено семейство функций $\omega^{(s-1)}$, построим семейство функций $\omega^{(s-2)}$. Продолжая этот процесс, мы построим функции $\chi_{s-2}(t_1,\dots,t_{s-3}),\ \chi_{s-3}(t_1,\dots,t_{s-4}),\dots,\chi_2(t_1)$

и семейства $\omega^{(s-3)}, \omega^{(s-4)},\dots,\omega^{(1)}$ функций, определенных соответственно на множествах $R_+^{s-3}, R_+^{s-4},\dots,R_+^{1}$, причем семейство $\omega^{(l)}$ $\forall l=s-1,\dots,2$ имеет вид

$$\left\{\omega_k^{(l)}(t_1,\dots,t_l) = t_k^{\theta_k}\left(a_{kk}^{(l)} t_k^{\gamma_{kk}} - \sum_{1\leq j\leq l,\, j\neq k} a_{jk}^{(l)} t_j^{\gamma_{jk}^{(l)}} - b_k^{(l)}\right) - c_k\right\},$$

где $a_{kk}^{(l)} > 0$, $a_{jk}^{(l)} \geqslant 0$ при $j \neq k$, $\gamma_{jk}^{(l)} > 0$, $b_k^{(l)} \geqslant 0$, $b_k^{(l)} + c_k > 0$, а семейство $\omega^{(1)}$ состоит из одной функции $\omega_1^{(1)}(t_1) = t_1^{\theta_1}(a_{11}^{(1)} t_1^{\gamma_{11}} - b_1^{(1)}) - c_1$, где $a_{11}^{(1)} > 0$, $b_1^{(1)} \geqslant 0$, $b_1^{(1)} + c_1 > 0$. Предполагается, что при фиксированных $l = s-1, \ldots, 2$ и $k = 1, \ldots, l-1$ выполнено неравенство $\gamma_{kk}\gamma_{ll} \geqslant \gamma_{lk}^{(l)}\gamma_{kl}^{(l)}$, если $\delta_k = \infty$, и неравенство $\gamma_{kk}\gamma_{ll} \leqslant \gamma_{lk}^{(l)}\gamma_{kl}^{(l)}$, если $\delta_k < \infty$, причем если $\gamma_{kk}\gamma_{ll} = \gamma_{lk}^{(l)}\gamma_{kl}^{(l)}$, то пусть еще

$$a_k^{(l)} > a_{l_k}^{(l)} \, a_{kl}^{\frac{\gamma_{lk}^{(l)}}{\gamma_{ll}}} .$$

Положим $$t_1^* = \left(\frac{c_1^{(1)} + d_1^{\frac{1}{1+\theta_1}}}{a_{11}^{(1)}} \right)^{\frac{1}{\gamma_{11}}},$$

$$t_2^* = \chi_2(t_1^*), \quad t_3^* = \chi_3(t_1^*, t_2^*), \ldots, t_s^* = \chi_s(t_1^*, \ldots, t_{s-1}^*).$$

Приведенные выше построения семейств функций $\omega^{(l)}$, $l = s-1, \ldots, 1$, с учетом требований к этим семействам, выдвигаемых в процессе указанных построений, позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1.4. Если $t_k^* < \delta_k$ $\forall k = 1, \ldots, s$, то семейство функций ω коэрцитивно на множестве T.

Для построения примеров на применение теоремы 1.4 нам понадобятся такие обозначения: для любого $\lambda > 0$ положим $R_\lambda^s = \{t = (t_1, \ldots, t_s) \in R^s \mid t_k > \lambda \ \forall k = 1, \ldots, s\}$, $\rho_\lambda^s = \{t = (t_1, \ldots, t_s) \in R^s \mid 0 < t_k < \lambda \ \forall k = 1, \ldots, s\}$, а для произвольного подмножества $\mathcal{E}$ пространства R^s через $pr_k \mathcal{E}$ обозначим его ортогональную проекцию на ось t_k.

Пример 1.1. Пусть $\gamma_{\ell k}\gamma_{j\ell} < \gamma_{jk}\gamma_{\ell\ell}$ $\forall j=1,\dots,\ell-1$, $\forall k=1,\dots,\ell-1$, $\forall \ell=2,\dots,s$. Тогда семейство функций ω коэрцитивно на множестве T при $\delta_k=\infty$ $\forall k=1,\dots,s$, причем $\forall \lambda>0$ найдется $\sigma>0$, зависящее от λ такое, что промежуток $[\sigma,\infty)\subset pr_k(R^s_\lambda\cap T^+(\omega))$ $\forall k=1,\dots,s$.

Пример 1.2. Пусть $\gamma_{\ell k}\gamma_{j\ell} > \gamma_{jk}\gamma_{\ell\ell}$ $\forall j=1,\dots,\ell-1$, $\forall k=1,\dots,\ell-1$, $\forall \ell=2,\dots,s$. Тогда семейство функций ω коэрцитивно на множестве T $\forall$ достаточно малых b_k и c_k (более точно, $\forall\lambda>0$ найдется такое $\sigma>0$, зависящее от λ, что $\forall\sigma_0$, $0<\sigma_0<\sigma$, существует $\delta>0$, зависящее от σ_0, которое обладает следующим свойством: если $b_k+c_k<\delta$ $\forall k=1,\dots,s$, то отрезок $[\sigma_0,\sigma]\subset pr_k(\rho^s_\lambda\cap T^+(\omega))$ $\forall k=1,\dots,s$).

Пример 1.3. Рассмотрим на множестве $T=\underbrace{(0,\infty)\times\dots\times(0,\infty)}_{s}$ семейство функций $\omega=\{\omega_k(t)=t_k^{\theta_k}(\varepsilon_k(a_{kk}t_k^{\gamma_k}-\sum_{j=1}^{k-1}a_{jk}t_j^{\gamma_k})-$
$$-\sum_{j=k+1}^{s}\varepsilon_j a_{jk}t_j^{\gamma_j}-b_k)-c_k\},\ k=1,\dots,s,$$
где $\theta_k>0$, $a_{kk}>0$, $\varepsilon_k>0$, $\gamma_k>0$, $a_{jk}\geq 0$ при $j\neq k$, $b_k\geq 0$, $c_k\geq 0$, и числа ε_k играют роль параметров, которые мы будем менять по нашему усмотрению. Нас будут интересовать два случая: 1) $\gamma_1\geq\gamma_2\geq\dots\geq\gamma_s$ и 2) $\gamma_1\leq\gamma_2\leq\dots\leq\gamma_s$. Если в написанных неравенствах нигде не выполняется знак равенства, то в первом случае мы имеем ситуацию примера 1.1, а во втором – ситуацию примера 1.2, так что ниже предполагается, что при некотором натуральном k, $1<k\leq s$, справедливо равенство $\gamma_{k-1}=\gamma_k$ и все такие натуральные k мы перенумеруем в порядке возрастания: $k_1,\dots,k_\tau$, $1\leq\tau\leq s$, причем для натуральных $k\leq s$, не содержащихся среди $k_1,\dots,k_\tau$, положим $\varepsilon_k=1$ (в частности, всегда $\varepsilon_1=1$). Применяя рассуждения, приведенные перед формулировкой теоремы 1.4, легко доказать следующие

утверждения: а) пусть $r=1$, тогда существует $\varepsilon>0$ такое, что при $0<\varepsilon_{k_1}<\varepsilon$ в первом случае семейство ω коэрцитивно на T, причем $\forall\lambda>0$ найдется $\sigma>0$, зависящее от λ и ε_{k_1} такое, что промежуток $[\sigma,\infty)\subset\rho r_k(R^s_\lambda\cap T^+(\omega))$ $\forall k=1,\dots,s$, а во втором случае $\forall\lambda>0$ найдется такое $\sigma>0$, зависящее от λ и ε_{k_1}, что $\forall\sigma_0$, $0<\sigma_0<\sigma$, существует $\delta>0$, зависящее от σ, которое обладает следующим свойством: если $b_k+c_k<$ <0 $\forall k=1,\dots,s$, то отрезок $[\sigma_0,\sigma]\subset\rho r_k(\rho^s_\lambda\cap T^+(\omega))$ $\forall k=1,\dots,s$; б) пусть $r>1$, тогда можно указать такие положительные функции $\mathscr{X}_\ell(\varepsilon_{k_1},\dots,\varepsilon_{k_\ell})$, $\ell=1,\dots,r-1$, определенные при всех положительных значениях аргументов (эти функции легко могут быть указаны в явном виде) и такое $\varepsilon>0$, что при $0<\varepsilon_{k_1}<\varepsilon_1$, $0<\varepsilon_{k_2}<\mathscr{X}_1(\varepsilon_{k_1}),\dots,0<\varepsilon_{k_r}<\mathscr{X}_{r-1}(\varepsilon_{k_1},\dots,\varepsilon_{k_{r-1}})$ в первом случае семейство ω коэрцитивно на T, причем $\forall\lambda>0$ найдется $\sigma>0$, зависящее от $\lambda,\varepsilon_{k_1},\dots,\varepsilon_{k_r}$ такое, что промежуток $[\sigma,\infty)\subset\rho r_k(R^s_\lambda\cap T^+(\omega))$ $\forall k=1,\dots,s$, а во втором случае $\forall\lambda>0$ найдется такое $\sigma>0$, зависящее от $\lambda,\varepsilon_{k_1},\dots,\varepsilon_{k_r}$, что $\forall\sigma_0$, $0<\sigma_0<\sigma$, существует $\delta>0$, зависящее от σ_0, которое обладает следующим свойством: если $b_k+c_k<\delta$ $\forall k=1,\dots,s$, то отрезок $[\sigma_0,\sigma]\subset\rho r_k(\rho^s_\lambda\cap T^+(\omega))$ $\forall k=1,\dots,s$.

§ 2. Операторные уравнения в пространствах с полунормой

Пусть $\mathscr{R}$ - векторное пространство, $\rho(u)$ - полунорма на $\mathscr{R}$.

Определение. Векторное подпространство X в $\mathscr{R}$ называется согласованным с полунормой $\rho(u)$, если 1) $\mathscr{R}=X\oplus\ker\rho$, 2) X - банахово пространство относительно $\rho(u)$.*)

---

*) Из 1) следует, что $\rho(u)$ - норма на X.

Примером подпространства, согласованного с полунормой, может служить ядро так называемого оператора С.Л.Соболева.

Определение 2.1. Пусть $\Pi : \mathfrak{R} \longrightarrow \ker p$ – линейный проекционный оператор. Оператор Π называется оператором С.Л.Соболева для полунормы $p(u)$, если его ядро $\ker \Pi$ может быть вложено в некоторое банахово пространство Q такое, что выполняются следующие условия: 1) полунорма $p(u)$ и норма $\|u\|_Q + p(u)$ эквивалентны на $\ker \Pi$; 2) подпространство $\ker \Pi$ является банаховым пространством относительно нормы $\|u\|_Q + p(u)$ (или, что то же самое, относительно нормы $p(u)$).

В дальнейшем мы предполагаем, что для полунормы $p(u)$ на $\mathfrak{R}$ существует оператор С.Л.Соболева Π. Положим $U = \ker \Pi$ и $\|u\|_U = p(u)$ $\forall u \in U$. Пусть V и W – банаховы пространства, вложенные в $\ker p$, такие, что $V \cap W = \{0\}$. Ясно, что $U \cap V = U \cap W = \{0\}$. Образуем банахово пространство $\mathfrak{X} = U \oplus V \oplus W$ с нормой $\|u + v + w\|_{\mathfrak{X}} = \|u\|_U + \|v\|_V + \|w\|_W$, $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$. Будем предполагать, что подпространства U и V нетривиальны.

Рассмотрим операторное уравнение

$$S(u) + B(u) = h, \tag{2.1}$$

в котором $h \in \mathfrak{X}^*$, а $S : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ и $B : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ – операторы, вообще говоря, нелинейные, причем оператор S удовлетворяет условиям:

$$S(\mathfrak{X}) \subset (V \oplus W)^{\perp}, \tag{2.2}$$

$$Re < S(u), u > \geq \varepsilon p^q(u) \quad \forall u \in \mathfrak{X}, \tag{2.3}$$

где $\varepsilon > 0$, $q > 1$, а оператор B – условиям:

$$\|B(u+v)\| \leq c + a\|u\|^{\lambda} + b\|v\|^{\sigma} \quad \forall u \in U,\ \forall v \in V; \tag{2.4}$$

$$Re < B(u+v), A(v)> \geqslant \|v\|^{\theta}(\tilde{a}\|v\|^{\gamma-1} - \tilde{b}\|u\|^{\tau} - \tilde{c}) \quad \forall u \in U, \forall v \in V; \tag{2.5}$$

$$< B(u), w > = 0, \quad \forall u \in U \oplus V, \quad \forall w \in W, \tag{2.6}$$

где $c \geqslant 0, a \geqslant 0, b \geqslant 0, \tilde{a} \geqslant 0, \tilde{c} \geqslant 0, \lambda > 0, \gamma > 1, \theta > 0,$ $\sigma > 0, \tau > 0, A: V \longrightarrow V$ - непрерывное и невырожденное на $V \setminus \{0\}$ векторное поле, обладающее такими свойствами: а) справедливо неравенство

$$\|A(v)\| \leqslant C_0 \|v\|^{\theta} \quad \forall v \in V, \tag{2.7}$$

где $C_0 > 0$ и не зависит от v ; б) существует направленное семейство $\mathcal{M}$ линейных конечномерных подпространств в V , частично упорядоченное по включению такое, что множество $\bigcup_{\mu \in \mathcal{M}} \mu$ плотно в V , причем $\forall \mu \in \mathcal{M} \quad A(\mu) \subset \mu$ и вращение поля A на сфере $\{u \in \mu \mid \|u\| = 1\}$ отлично от нуля.

Исследуем вопрос о разрешимости уравнения (2.1). Рассмотрим в X замкнутое подпространство $X = U \oplus V$, и пусть $h \in W^{\perp}$. Тогда, очевидно, разрешимость уравнения (2.1) следует из разрешимости уравнения

$$G(u) = f, \tag{2.8}$$

где f - сужение функционала h с $\mathcal{X}$ на X, а $G: X \longrightarrow X^*$ -оператор, определяемый с помощью тождества

$$< G(u), v > = < S(u) + B(u), v > \quad \forall u \in X, \forall v \in X. \tag{2.9}$$

Из сделанных выше предположений следуют неравенства

$$Re < G(u+v) - f, u > \geqslant \|u\| \Big(\frac{\varepsilon}{C q} \|u\|^{q-1} -$$

$$- c - a\|u\|^{\lambda} - b\|v\|^{\sigma} - |f| \Big) \quad \forall u \in U, \forall v \in V; \tag{2.10}$$

$$\mathrm{Re}\langle G(u+v)-f,\ Av\rangle \geq \|v\|^{\theta}\big(\tilde{a}\|v\|^{\gamma-1}-$$

$$-\tilde{b}\|u\|^{\tau}-\tilde{c}-C_0\big) \quad \forall u\in U,\ \forall v\in V, \qquad (2.11)$$

так что в силу теоремы 1.2 (см. также примеры 1.1 и 1.2) имеют место такие утверждения (теоремы 2.1 и 2.2).

Теорема 2.1. Пусть оператор G принадлежит классу $\mathfrak{A}_0(X)$. Пусть, далее, $\lambda < q-1$ и $(q-1)(\gamma-1) > \sigma\tau$. Тогда уравнение (2.8), а следовательно, и уравнение (2.1) имеют в подпространстве $X = U \oplus V$ по крайней мере одно решение $\forall h \in W^{\perp}$.

Теорема 2.2. Пусть для некоторого δ, $0<\delta\leq\infty$, оператор G принадлежит классу $\mathfrak{A}_0(\{u\in X \mid \|u\|\leq\delta\})$. Пусть, далее, $\lambda > q-1$ и $(q-1)(\gamma-1) < \sigma\tau$. Тогда $\forall d>0$ найдется такое $\varkappa>0$, зависящее от d, что $\forall h\in W^{\perp}$, $\|h\|<\varkappa$, уравнение (2.8), а следовательно, и уравнение (2.1) имеют в шаре $\{u\in X \mid \|u\|<d\}$ по крайней мере одно решение.

§ 3. Об одном квазилинейном уравнении дивергентного вида

Пусть n-мерное евклидово пространство R^n точек $x=(x_1,\dots,x_n)$, $n>1$, разбито в прямую сумму подпространств переменных $x^{(1)}=(x_1,\dots,x_{n_1})$, $x^{(2)}=(x_{n_1-1},\dots,x_{n_1-n_2}),\dots,x^{(N)}=$ $=(x_{n_1+n_2+\dots+n_{N-1}+1},\dots,x_n)$, так, что $x=(x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(N)})$.

Положим $\hat{x}^{(i)}=(x^{(1)},\dots,x^{(i-1)},x^{(i+1)},\dots,x^{(N)})$ $\forall i=1,\dots,N$. Пусть Ω - область в R^n. Обозначим через $\hat{\Omega}_i$ ортогональную проекцию области Ω на подпространство переменных $\hat{x}^{(i)}$, а через $\Omega_i(\hat{x}^{(i)})$ - пересечение области Ω с гиперплоскостью, проходящей через точку $\hat{x}^{(i)}$ параллельно подпространству переменных $x^{(i)}$. Предположим, что область Ω обладает таким свойством: $\forall \hat{x}^{(i)}\in\hat{\Omega}_i$,

$\forall i=1,\dots,N$ проекция множества $\Omega_i(\hat{x}^{(i)})$ на подпространство переменных $x^{(i)}$ звездна относительно некоторого не зависящего от $\hat{x}^{(i)}$, открытого шара K_i. Пусть, наконец, задано натуральное число $\mathscr{X}$ и при каждом натуральном $K \leqslant \mathscr{X}$ заданы натуральные числа $m_1^{(K)}, m_2^{(K)}, \dots, m_N^{(K)}$.

Обозначим через $\mathcal{R}$ совокупность вещественных функций $u(x)$, у которых $\forall K=1,\dots \mathscr{X}$ на Ω существуют все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные $\mathcal{D}_{x^{(1)}}^{\alpha^{(1)}} \mathcal{D}_{x^{(2)}}^{\alpha^{(2)}} \dots \mathcal{D}_{x^{(N)}}^{\alpha^{(N)}} u(x)$, $|\alpha^{(i)}|=m_i^{(K)}$, $i=1,\dots,N$, и конечна полунорма

$$p(u)=\sum_{K=1}^{\mathscr{X}} \sum_{\substack{|\alpha^{(i)}|=m_i^{(K)}\\ i=1,\dots,N}} \left\| \sigma^{(K)}_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}}(x) \mathcal{D}_{x^{(1)}}^{\alpha^{(1)}} \dots \mathcal{D}_{x^{(N)}}^{\alpha^{(N)}} u(x) \right\|_{L_q(\Omega)}, \tag{3.1}$$

где $1<q<\infty$, $\sigma^{(K)}_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}}(x)$ - непрерывные и положительные в Ω функции.

Полунорму $p(u)$ нам удобно будет записать еще в таком виде

$$p(u)=\|\mathcal{L}u\|_{\mathcal{H}},$$

где $\mathcal{L}=\left\{\mathcal{D}_{x^{(1)}}^{\alpha^{(1)}} \dots \mathcal{D}_{x^{(N)}}^{\alpha^{(N)}}\right\}_{\substack{|\alpha^{(i)}|=m_i^{(K)}\\ i=1,\dots,N,\ K=1,\dots,\mathscr{X}}}$, а $\mathcal{H}$ - банахово пространство наборов вещественных функций

$$\sigma(x)=\left\{ \sigma^{(K)}_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}}(x) \right\}_{\substack{|\alpha^{(i)}|=m_i^{(K)}\\ i=1,\dots,N\\ K=1,\dots,\mathscr{X}}}$$

с нормой

$$\|\sigma(x)\|_{\mathcal{H}}=\sum_{K=1}^{\mathscr{X}} \sum_{\substack{|\alpha^{(i)}|=m_i^{(K)}\\ i=1,\dots,N}} \left\| \sigma^{(K)}_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}}(x) \sigma^{(K)}_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}}(x) \right\|_{L_q(\Omega)}.$$

Построим для полунормы $p(u)$ оператор С.Л.Соболева $\Pi:\mathcal{R} \to \ker p$ в виде:

$$\Pi=\Pi^{(1)}\Pi^{(2)}\dots\Pi^{(T)}, \tag{3.2}$$

где оператор $\Pi^{(\kappa)} : L_1^{loc}(\Omega) \to L_1^{loc}(\Omega)$ определяется по формуле

$$\Pi^{(\kappa)} = I - (I - \Pi_1^{(\kappa)})(I - \Pi_2^{(\kappa)}) \dots (I - \Pi_N^{(\kappa)}), \tag{3.3}$$

а построением операторов $\Pi_i^{(\kappa)}$, $i=1,\dots,N$, $\kappa=1,\dots,\varkappa$, мы сейчас займемся.

Положим $m_i = \max\limits_{1 \le \kappa \le \varkappa} m_i^{(\kappa)}$. Для каждого $\alpha^{(i)} = (\alpha_{n_{i-1}+1}^{(i)}, \alpha_{n_{i-1}+2}^{(i)}, \dots \dots, \alpha_{n_{i-1}+n_i}^{(i)})$, $|\alpha^{(i)}| < m_i$, зафиксируем функцию $\eta_{\alpha^{(i)}}(x^{(i)}) \in C_0^\infty(K_i)$ такую, что

$$\int_{K_i} \eta_{\alpha^{(i)}}(x^{(i)}) x^{(i)\beta^{(i)}} dx^{(i)} = \begin{cases} 1, \text{ если } \beta^{(i)} = \alpha^{(i)}, \\ 0, \text{ если } \beta^{(i)} \ne \alpha^{(i)},\ |\beta^{(i)}| < m_i. \end{cases}$$

Оператор $\Pi_i^{(\kappa)} : L_1^{loc}(\Omega) \to L_1^{loc}(\Omega)$ зададим равенством

$$\Pi_i^{(\kappa)} u(x) = \sum_{|\alpha^{(i)}| < m_i^{(\kappa)}} x^{(i)\alpha^{(i)}} \int_{K_i} \eta_{\alpha^{(i)}}(y^{(i)}) u(x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)}, y^{(i)}, x^{(i+1)}, \dots, x^{(N)}) dy^{(i)}. \tag{3.4}$$

Тогда легко проверить, что $\Pi : L_1^{loc}(\Omega) \to \ker P$ и Π - проекционный оператор, т.е. $\Pi^2 = \Pi$.

Воспользуемся следующим интегральным тождеством С.Л.Соболева [5, формула (7.12)] :

$$u(x) = \pi_i^{(\kappa)} u(x) + \nabla_i^{(\kappa)} u(x), \tag{3.5}$$

где

$$\pi_i^{(\kappa)} u(x) = \sum_{|\alpha^{(i)}| < m_i^{(\kappa)}} x^{(i)\alpha^{(i)}} \int_{K_i} \zeta_{\alpha^{(i)}}^{(\kappa)}(y^{(i)}) \times$$

$$\times u(x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)}, y^{(i)}, x^{(i+1)}, \dots, x^{(N)}) dy^{(i)}, \tag{3.6}$$

$$\nabla_i^{(k)} u(x) - \int_{\Omega^{(i)}(\hat{x}^{(i)})} |x^{(i)} - y^{(i)}|^{m_i^{(k)} - n_i} \times$$

$$\times \sum_{|\alpha| = m_i^{(k)}} w_{\alpha^{(i)}}^{(k)} (x^{(i)}, y^{(i)}) \mathcal{D}_{y^{(i)}}^{\alpha^{(i)}} u(x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)}, y^{(i)}, x^{(i+1)}, \dots, x^{(N)}) dy^{(i)}, \quad (3.7)$$

справедливым для функций $u(x)$, у которых в Ω существуют все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные порядка $m_i^{(k)}$ по переменным $x^{(i)}$. В [5] выписан явный вид функций $\varphi_{\alpha^{(i)}}^{(k)}(x^{(i)})$ и $w_{\alpha^{(i)}}^{(k)}(x^{(i)}, y^{(i)})$. Из (3.5) следует такое тождество

$$u(x) = \Pi_i^{(k)} u(x) + (I - \Pi_i^{(k)}) \nabla_i^{(k)} u(x), \qquad (3.8)$$

где I – тождественный оператор, или в операторной форме

$$I - \Pi_i^{(k)} = (I - \Pi_i^{(k)}) \nabla_i^{(k)}, \qquad (3.9)$$

откуда

$$I - \Pi^{(k)} = (I - \Pi_1^{(k)}) \dots (I - \Pi_N^{(k)}) = (I - \Pi_1^{(k)}) \nabla_1^{(k)} \dots (I - \Pi_N^{(k)}) \nabla_N^{(k)} =$$

$$= (I - \Pi_1^{(k)}) \dots (I - \Pi_N^{(k)}) \nabla_1^{(k)} \dots \nabla_N^{(k)} = (I - \Pi^{(k)}) \nabla_1^{(k)} \dots \nabla_N^{(k)}.$$

Введем оператор $\nabla^{(k)}$, определенный на множестве $\mathfrak{M}^{(k)}$ функций $u(x)$, обладающих в Ω всеми обобщенными в смысле С.Л.Соболева производными: $\mathcal{D}_{x^{(1)}}^{\alpha^{(1)}} \mathcal{D}_{x^{(2)}}^{\alpha^{(2)}} \dots \mathcal{D}_{x^{(N)}}^{\alpha^{(N)}} u(x)$, $|\alpha^{(i)}| = m_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, N$:

$$\nabla^{(k)} u(x) - \sum_{\substack{|\alpha^{(i)}| = m_i^{(k)} \\ i = 1, \dots, N}} \int_{\Omega} |x^{(1)} - y^{(1)}|^{m_1^{(k)} - n_1} \dots |x^{(N)} - y^{(N)}|^{m_N^{(k)} - n_N} \times$$

$$\times\, w_{\alpha^{(1)}}^{(k)} (x^{(1)}, y^{(1)}) \dots w_{\alpha^{(N)}}^{(k)} (x^{(N)}, y^{(N)}) \mathcal{D}_{y^{(1)}}^{\alpha^{(1)}} \mathcal{D}_{y^{(2)}}^{\alpha^{(2)}} \dots \mathcal{D}_{y^{(N)}}^{\alpha^{(N)}} u(y) dy. \qquad (3.10)$$

Ясно *), что $\forall u(x)\in C_0^{\infty}(\Omega)$

$$\nabla^{(\kappa)}u(x) = \nabla_1^{(\kappa)}\dots\nabla_N^{(\kappa)}u(x), \tag{3.11}$$

поэтому

$$(I-\Pi^{(\kappa)})u(x)=(I-\Pi^{(\kappa)})\nabla^{(\kappa)}u(x) \quad \forall u(x)\in C_0^{(\infty)}(\Omega), \tag{3.12}$$

откуда с помощью предельного перехода получаем

$$(I-\Pi^{(\kappa)})u(x) = (I-\Pi^{(\kappa)})\nabla^{(\kappa)}u(x) \quad \forall u(x)\in \mathfrak{M}^{(\kappa)}. \tag{3.13}$$

Далее, имеем такое очевидное равенство

$$I-\Pi=(I-\Pi^{(1)})+\Pi^{(1)}(I-\Pi^{(2)})+\dots+\Pi^{(1)}\Pi^{(2)}\dots\Pi^{(\varkappa-1)}(I-\Pi^{(\varkappa)}), \tag{3.14}$$

так что окончательно, с учетом (3.13) будем иметь

$$(I-\Pi)u(x) = (I-\Pi^{(1)})\nabla^{(1)}u(x)+\Pi^{(1)}(I-\Pi^{(2)})\nabla^{(2)}+\dots+$$

$$+\Pi^{(1)}\Pi^{(2)}\dots\Pi^{(\varkappa-1)}(I-\Pi^{(\varkappa)})\nabla^{(\varkappa)}u(x) \quad \forall u(x)\in\bigcap_{1\le\kappa\le\varkappa}\mathfrak{M}^{(\kappa)}. \tag{3.15}$$

Положим

$$\nabla = (I-\Pi^{(1)})\nabla^{(1)}+\Pi^{(1)}(I-\Pi^{(2)})\nabla^{(2)}+$$

$$+\dots+\Pi^{(1)}\Pi^{(2)}\dots\Pi^{(\varkappa-1)}(I-\Pi^{(\varkappa)})\nabla^{(\varkappa)} . \tag{3.16}$$

Ясно, что $\nabla : \bigcap_{1\le\kappa\le\varkappa}\mathfrak{M}^{(\kappa)}\longrightarrow L_1^{loc}(\Omega)$, причем оператор ∇ на $\bigcap_{1\le\kappa\le\varkappa}\mathfrak{M}^{(\kappa)}$ можно записать в виде $\nabla=\nabla_0\mathcal{L}$, где ∇_0 – интегральный оператор, непрерывно отображающий пространство наборов $v(x)=\{v^{(\kappa)}_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}}(x)\}_{|\alpha^{(i)}|=m_i^{(\kappa)},\, i=1,\dots,N,\ \kappa=1,\dots,\varkappa}$ функций из $L_1^{loc}(\Omega)$ в пространство $L_1^{loc}(\Omega)$. Ядро этого интегрального оператора может

---

*) На самом деле достаточно требовать, чтобы у $u(x)$ существовали в Ω все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные вида $\mathcal{D}^{\alpha^{(i_1)}}_{x^{(i_1)}}\mathcal{D}^{\alpha^{(i_2)}}_{x^{(i_2)}}\dots\mathcal{D}^{\alpha^{(i_\tau)}}_{x^{(i_\tau)}}u(x)$, $|\alpha^{(i_j)}|=m_{i_j}^{(\kappa)}$, $j=1,\dots,\tau$, $1\le i_1<i_2<\dots<i_\tau$, $\tau\le N$. В этом легко убедиться с помощью предельного перехода.

быть выписано в явном виде через ядра интегральных операторов $\Pi_l^{(k)}$ и $\nabla_l^{(k)}$. Предположим, что оператор ∇_0 непрерывно отображает банахово пространство $\mathcal{H}$ в банахово пространство Q, непрерывно вложенное в пространство $L_1^{loc}(\Omega)$. Равенство (3.15) перепишем в виде

$$u(x) - \Pi u(x) = \nabla_0 \mathcal{L} u(x) \quad \forall u(x) \in \bigcap_{1 \le k \le \ell} \mathcal{M}^{(k)}. \tag{3.17}$$

Из (3.17) следует такое неравенство

$$\| u \|_Q \le C \rho(u) \qquad \forall u \in \mathcal{R} \cap \ker \Pi \tag{3.18}$$

с константой $C \in R$, не зависящей от $u \in \mathcal{R} \cap \ker \Pi$.

Рассмотрим в $L_1^{loc}(\Omega)$ подпространство $\mathcal{X} = \mathcal{R} \cap Q$ и введем на нем норму $\| u \|_{\mathcal{X}} = \| u \|_Q + \rho(u)$. Поскольку Q - банахово пространство и Q непрерывно вложено в $L_1^{loc}(\Omega)$, то $\mathcal{X}$ - банахово пространство.

Покажем теперь, что подпространство $\mathcal{R} \cap \ker \Pi$ вложено в банахово пространство Q и является банаховым пространством относительно нормы $\| u \|_{\mathcal{X}}$. Отсюда сразу с учетом неравенства (3.18) будет следовать, что Π - оператор С.Л.Соболева на $\mathcal{R}$ и, значит, подпространство $\mathcal{R} \cap \ker \Pi$ согласовано на $\mathcal{R}$ с полунормой $\rho(u)$.

Тот факт, что $\mathcal{R} \cap \ker \Pi$ вложено в пространство Q, следует из тождества (3.17) и того, что оператор $\nabla = \nabla_0 \mathcal{L}$ отображает пространство $\mathcal{R}$ в пространство Q. Таким образом, $\mathcal{R} \cap \ker \Pi$ является подпространством в пространстве Σ.

Для того чтобы доказать, что пространство $\mathcal{R} \cap \ker \Pi$ банахово относительно нормы $\| u \|_{\mathcal{X}}$, достаточно показать, что оно замкнуто в пространстве $\mathcal{X}$. Так как $\mathcal{R} \cap \ker \Pi \subset \mathcal{X}$, то $\mathcal{R} \cap \ker \Pi = \Sigma \cap \ker \Pi$ и, значит, $\mathcal{R} \cap \ker \Pi = \ker \Pi_0$, где $\Pi_0 : \mathcal{X} \to L_1^{loc}(\Omega)$ - сужение оператора Π с $L_1^{loc}(\Omega)$ на Σ. Оператор Π непрерывен на $L_1^{loc}(\Omega)$, а $\mathcal{X}$ непрерывно вложено в

$L_1^{loc}(\Omega)$; поэтому оператор Π_0 непрерывен на $\mathfrak{X}$, и, значит, подпространство $\ker\Pi_0 = \mathfrak{R} \cap \ker\Pi$ замкнуто в $\mathfrak{X}$.

Предположим, что норма на пространстве Q имеет вид:

$$\|u\|_Q = \|u(x)\|_{L_1(K_1\times\ldots\times K_N)} + \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|\sigma_\alpha(x)\mathcal{D}^\alpha u(x)\|_{L_\gamma(\Omega)}, \quad (3.18)$$

где $\mathcal{A}$ – конечное множество мультииндексов такое, что $\forall i=1,\ldots,n$ найдется мультииндекс $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathcal{A}$, обладающий свойством $\alpha_j=0$ $\forall j\neq i$; $\sigma_\alpha(x)$ – непрерывные и положительные в Ω функции; $1<\gamma<\infty$.

Предположим еще, что оператор ∇_0 отображает пространство $\mathcal{H}$ в пространство Q вполне непрерывно.

Рассмотрим на пространстве $Q\cap\ker p$ полунорму

$$p_0(u) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|\sigma_\alpha(x)\mathcal{D}^\alpha u(x)\|_{L_\gamma(\Omega)}.$$

Из результатов работы автора [4] следует, что полунорма $p_0(u)$ обладает в $Q\cap\ker p$ согласованным подпространством V, так что пространство $\mathfrak{X}$ может быть разбито в прямую сумму линейных замкнутых подпространств: $\mathfrak{X} = U\oplus V\oplus W$, где $U=\mathfrak{R}\cap\ker\Pi$, а $W=\ker(p+p_0)$.

Рассмотрим уравнение:

$$\sum_{K=1}^{z} \sum_{\substack{|\alpha^{(i)}|=m_i^{(K)}\\ i=1,\ldots,N}} (-1)^{\sum_{i=1}^{N}|\alpha^{(i)}|} \mathcal{D}_{x^{(1)}}^{\alpha^{(1)}}\ldots\mathcal{D}_{x^{(N)}}^{\alpha^{(N)}}$$

$$\left(a^{(K)}_{\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(N)}}(x|u)\left|\mathcal{D}_{x^{(1)}}^{\alpha^{(1)}}\ldots\mathcal{D}_{x^{(N)}}^{\alpha^{(N)}}u(x)\right|^{q-2}\mathcal{D}_{x^{(1)}}^{\alpha^{(1)}}\ldots\mathcal{D}_{x^{(N)}}^{\alpha^{(N)}}u(x)\right)+$$

$$+\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}(-1)^{K+|\alpha|}\mathcal{D}^\alpha\left(a_\alpha(x|u)|\mathcal{D}^\alpha u(x)|^{\gamma-2}\mathcal{D}^\alpha u(x)\right)=h(x), \quad (3.19)$$

в котором $h(x)\in\mathfrak{X}^*$ и k – целое число, причем операторы

$$u \to \frac{a_\alpha(x|u)}{\sigma_\alpha^\gamma(x)} \quad \text{и} \quad u \to \frac{a^{(\kappa)}_{\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(N)}}(x|u)}{(\sigma^{(\kappa)}_{\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(N)}}(x|u))^q}$$ непрерывно

отображают пространство $\mathfrak{X}$ со слабой топологией в пространство $L_\infty(\Omega)$.

Предположим, что

$$\inf_{\substack{x\in\Omega,\, u\in\mathfrak{X},\\ |\alpha^{(i)}|=m_i^{(\kappa)},\, i=1,\ldots,N,\, \kappa=1,\ldots,\varkappa}} \frac{a^{(\kappa)}_{\alpha^{(1)}\ldots\alpha^{(N)}}(x|u)}{(\sigma^{(\kappa)}_{\alpha^{(1)}\ldots\alpha^{(N)}}(x))^q} > 0 \text{ и } \inf_{\substack{x\in\Omega,\, u\in\mathfrak{X}\\ \alpha\in\mathcal{A}}} \frac{a_\alpha(x|u)}{\sigma_\alpha^\gamma(x)} > 0.$$

Из теорем 2.1 и 2.2 следует такая *)

Т е о р е м а 3.1. Уравнение (3.19) имеет в пространстве X по крайней мере одно обобщенное решение $\forall h \in W^\perp$, если $\gamma < q$, и $\forall h \in W^\perp$, достаточно малых по норме, если $\gamma > q$.

Рассмотрим теперь случай, когда оператор A в теоремах 2.1 и 2.2 имеет вид $(-1)^\kappa \Pi_1 + (-1)^\ell \Pi_2$, где κ и ℓ – целые числа, а Π_1 и Π_2 – линейные проекционные операторы, соответствующие разложению пространства U в прямую сумму двух линейных замкнутых подпространств.

Пусть $\mathcal{R}$ – совокупность вещественных функций $u(x,y)$ от двух переменных x и y, которые обладают на R^2 обобщенными в смысле С.Л.Соболева производными $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}$, имеют конечную полунорму

$$p(u) = \left\| (1+x^2+y^2)^{\frac{\gamma}{2}} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3 \partial y} \right\|_{L_q(R^2)} + \left\| (1+x^2+y^2)^{\frac{\gamma}{2}} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right\|_{L_q(R^2)}, \quad (3.20)$$

---

*) Оператор A выбирается равным тождественному или минус тождественному.

где $\nu \in \mathbb{R}$, $1<q<\infty$, $\nu + 2/q > 1$, и выполняется соотношение

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \qquad (3.21)$$

Предположим, что имеет место неравенство

$$\left\| a(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\|_{L_\gamma(\mathbb{R}^2)} \leq C p(u) \quad \forall u \in \mathcal{R}, \qquad (3.22)$$

где константа $C \in \mathbb{R}$ не зависит от $u \in \mathcal{R}$, $a(x,y)$ - непрерывная и положительная в $\mathbb{R}^2$ функция, $1<\gamma<\frac{2q}{2-q}$ при $q<2$ и $1<\gamma<\infty$ при $q \geq 2$.

Рассмотрим в пространстве $L_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$ два проекционных оператора Π_1 и Π_2:

$$\Pi_1 u = \int_{\mathbb{R}} \psi(y) u(x,y)\,dy, \quad \Pi_2 u = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) u(x,y)\,dx,$$

где $\psi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \psi(\xi)\,d\xi = 1$.

Введем обозначение

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 - \Pi_1 \Pi_2. \qquad (3.23)$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность функций $u(x,y)$, у которых на $\mathbb{R}^2$ существует обобщенная в смысле С.Л.Соболева производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. Аналогично тому, как было получено тождество (3.17), получаем соотношение

$$u(x,y) - \Pi u(x,y) = \nabla_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y), \quad \forall u \in \mathfrak{M}, \qquad (3.24)$$

где $\nabla_0 : L_1^{loc}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$ - оператор, действующий по формуле

$$\nabla_0 v(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(x,\xi)\,\mathcal{E}(y,\eta)\, v(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$b(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \psi(\xi)\,d\xi - \chi(x,y), \quad \chi(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y > x, \\ 0, & \text{если } y \leq x. \end{cases}$$

Пусть $a^*(x,y)$ - положительная и непрерывная в R^2 функция такая, что $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \dfrac{a^*(x,y)}{a(x,y)} = 0.$

Пусть, далее, интегральный оператор ∇_0 непрерывно отображает весовое банахово пространство $L_{q,a^*(x,y)}(R^2)$ с нормой $\|u\|_{L_{q,a^*(x,y)}(R^2)} = \|a^*(x,y)u\|_{L_q(R^2)}$ в банахово пространство Q с нормой

$$\|u\|_Q = \|u\|_{L_1\{(x,y)|x^2+y^2<1\}} + \left\|b(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_q(R^2)} + \left\|b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L_q(R^2)},$$

где $b(x,y)$ - непрерывная и положительная в R^2 функция.

Рассмотрим на пространстве Q полунорму

$$p_0(u) = \left\|b(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_q(R^2)} + \left\|b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L_q(R^2)}.$$

Из неравенства (3.24) и тождества (3.22) следует, что оператор Π является оператором С.Л.Соболева для полунормы $p(u)$ на пространстве $\mathcal{R}$. Положим $U = \mathcal{R} \cap \ker \Pi$, $V = Q \cap \ker p \cap \ker \Pi_1 \Pi_2$, $W = \ker(p + p_0)$, $\mathfrak{X} = U \oplus V \oplus W$, $X = U \oplus X$. Пространство $\mathfrak{X}$, как и выше, мы будем рассматривать с нормой $\|u\|_{\mathfrak{X}} = p(u) + \|u\|_Q$, относительно которой оно является банаховым и рефлексивным.

Рассмотрим уравнение

$$-\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left((1+x^2+y^2)^{\frac{\nu q}{2}}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\right|^{q-2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\right) -$$

$$-\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\left((1+x^2+y^2)^{\frac{\nu q}{2}}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right|^{q-2}\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right) +$$

$$+(-1)^{k}\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,y)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}\right)^{\frac{\gamma}{2}-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+$$

$$+(-1)^{\ell}\frac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}\right)^{\frac{\gamma}{2}-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=h(x,y), \qquad (3.25)$$

в котором $h(x,y)\in \mathfrak{X}^{*}$, k, ℓ - целые числа, и задачу для него

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\lambda, \qquad (3.26)$$

где $\lambda\in R$.

Из теорем 2.1 и 2.2 следует такое утверждение, аналогичное теореме 3.1:

Теорема 3.2. Задача (3.26) для уравнения (3.25) имеет обобщенное решение вида $\lambda xy + u(x,y)$, где $u(x,y)\in X$, $\forall h\in W^{\perp}$, $\forall\lambda\in R$, если $\gamma<q$, и $\forall h\in W^{\perp}$, $\forall \varkappa\in R$, достаточно малых по норме, если $\gamma>q$.

Замечание 3.1. В данном случае оператор A (см. § 2) имеет вид: $(-1)^{k}\Pi_1+(-1)^{\ell}\Pi_2$.

Замечание 3.2. Ограничение $h\in W^{\perp}$ в теореме 3.2 можно снять, а именно написать $h\in\mathfrak{X}^{*}$, если в левой части уравнения (3.25) добавить нелинейное слагаемое вида $g(x,y)|u|^{\delta-2}u$.

Замечание 3.3. В теореме 3.2 вместо $h\in W^{\perp}$ можно написать $h\in\mathfrak{X}^{*}$, если, во-первых, пространство Q вполне непрерывно вложено в весовое банахово пространство $L_{\delta,d(x,y)}(R^2)$ с нормой $\|u\|_{L_{\delta,d(x,y)}(R^2)}=\|d(x,y)u\|_{L_\delta(R^2)}$, где $1<\delta<\infty$,

$d(x,y)$ – непрерывная положительная на R^2 функция, и, во-вторых, в левой части уравнения (3.25) добавлено нелинейное слагаемое вида $g(x,y)|u|^{\delta-2}u$, причем $g(x,y)$ – измеримая на R^2 функция такая, что

$$\sup_{(x,y)\in R^2}\frac{|g(x,y)|}{d^{\delta}(x,y)}<\infty,\quad \int_{R^2} g(x,y)\,dx\,dy\neq 0,$$

и если $q>\gamma$, то $\delta<\gamma$. В этом случае теоремы 2.1 и 2.2 неприменимы и нужно воспользоваться общими теоремами 1.2 и 1.3 с $s=3$.

§ 4. Существование периодических решений у нелинейных систем дифференциальных уравнений

В этом параграфе мы рассмотрим еще одну область применения теорем § 1.

Пусть H – вещественная невырожденная матрица порядка n; Ω – образ куба $\{x\in R^n \mid 0<x_i<1 \ \forall i=1,\dots,n\}$ при отображении $H: R^n \longrightarrow R^n$; $\mathcal{B}_n$ – совокупность всех n-мерных векторов с целочисленными компонентами; $S\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ – дифференциальный оператор с постоянными комплексными матричными порядка N коэффициентами.[*] Далее,

$$\mathcal{L}u(x)=\Big\{\mathcal{L}_j u(x)-\sum_{i=1}^{N}\sum_{|\alpha|=m_{ij}}\lambda_{\alpha}^{(ij)}(x)\mathcal{D}^{\alpha}u_i(x)\Big\}_{j=1,\dots,\nu}\ {}^{**)}$$

– конечный набор дифференциальных выражений с H – периодическими на R^n комплекснозначными коэффициентами $\lambda_{\alpha}^{(ij)}(x)$, у которых на

---

*) Сформулированные ниже утверждения могут быть распространены на некоторые операторы S с переменными H – периодическими коэффициентами. К их числу принадлежат, например, операторы, у которых коэффициенты являются тригонометрическими H – периодическими матричными многочленами.

**) m_{ij} – натуральные числа.

R^n существуют все локально ограниченные обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные $\mathcal{D}^{\beta}\lambda_{\alpha}^{(ij)}(x)$ $\forall \beta \leq \alpha$ *) и которые действуют на вектор-функции $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_N(x))$, считающиеся в дальнейшем столбцами; $L_1(H;N)$ – банахово пространство H – периодических комплексных вектор-функций на R^n, $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_N(x) \sim$ $\sim \sum_{\beta \in \mathcal{B}_n} \hat{u}^{(\beta)} e^{2\pi i (H^{-1}x, \beta)}$, $\hat{u}^{(\beta)} \in C^N$ **) с конечной нормой $\sum_{i=1}^{N} \|u_i\|_{L_1(\Omega)}$; $\mathfrak{M}$ – некоторое комплексное банахово пространство, непрерывно вложенное в $L_1(H; N)$ и содержащее все вектор-функции с бесконечно дифференцируемыми компонентами; $\mathfrak{X}$ – банахово пространство тех вектор-функций $u(x)$ из $\mathfrak{M}$, у которых на R^n существуют в обобщенном смысле все дифференциальные выражения набора $\mathcal{L}$ и конечна норма

$$\|u\|_{\mathfrak{X}} = \|u\|_{\mathfrak{M}} + \sum_{j=1}^{\nu_0} \|\mathcal{L}_j u\|_{L_{q_j}(\Omega)} + \left(\sum_{\beta \in \mathcal{B}_n} \left(|\operatorname{Re} S(2\pi i H^{*-1}\beta)| \, |\hat{u}^{(\beta)}, \hat{u}^{(\beta)}|\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $1 \leq \nu_0 < \nu$ и $1 < q_j < \infty$ $\forall j = 1, \ldots, \nu_0$.

Поставим в соответствие каждому $j = 1, \ldots, \nu$ функцию $\Phi_j : R^n \times C^{\nu} \to C$. Пусть $\mathfrak{F}_j(x, \xi)$ – N-мерная вектор-функция – столбец с одинаковыми компонентами $\Phi_j(x, \xi)$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$Su(x) + \sum_{j=1}^{\nu} \mathcal{L}_j^{*} \mathfrak{F}_j(x, \mathcal{L}u(x)) = f, \tag{4.1}$$

где f – заданная H – периодическая обобщенная вектор-функция из пространства $\mathfrak{X}^*$, а $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_N(x))$ – неизвестная вектор-функция из пространства $\mathfrak{X}$.

---

*) Это требование выдвигается для того, чтобы возможно было определить дифференциальные выражения набора $\mathcal{L}$ в обобщенном (соболевском) смысле. В каждом конкретном случае оно, вообще говоря, может быть ослаблено.

**) $\hat{u}^{(\beta)}$ – коэффициенты Фурье вектор-функции $u(x)$.

Сформулируем два условия, позволяющие разумным способом определить обобщенное решение системы (4.1).

У с л о в и е 1. Имеет место неравенство

$$\left(|\mathrm{Im}\, S(2\pi i H^{*^{-1}}\beta)|\xi, \xi\right) \leq C\left(|\mathrm{Re}\, S(2\pi i H^{*^{-1}}\beta)|\xi, \xi\right) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^N, \ \forall \beta \in \mathcal{B}_n$$

с константой C, не зависящей от ξ и β.

У с л о в и е II. Каждый оператор $\mathcal{L}_j$, $\nu_0 < j \leq \nu$, вполне непрерывно отображает пространство $\mathfrak{X}$ в некоторое пространство $L_{q_j}(\Omega)$, $1 \leq q_j \leq \infty$, а каждая функция $\Phi_j(x;\xi)$, $1 \leq j \leq \nu$, порождает оператор суперпозиции, отображающий пространство $L_{q_1}(\Omega) \times \ldots \times L_{q_\nu}(\Omega)$ в пространство $L_{q_j'}(\Omega)$, непрерывный и преобразующий каждое ограниченное множество из $L_{q_1}(\Omega) \times \ldots \times L_{q_\nu}(\Omega)$ в множество, ограниченное в $L_{q_j'}(\Omega)$.

Будем предполагать, что условия 1 и II выполнены. Это предположение позволяет дать следующее естественное

О п р е д е л е н и е 4.1. Обобщенным решением системы (4.1) называется такая вектор-функция $u(x) \in \mathfrak{X}$, для которой имеет место тождество *)

$$\sum_{\beta \in \mathcal{B}_n} \left(S(2\pi i H^{*^{-1}}\beta)\hat{u}^{(\beta)}, \hat{v}^{(\beta)}\right) + \int_\Omega \sum_{j=1}^{\nu} \Phi_j(x, \mathcal{L}u)\overline{\mathcal{L}_j v}\, dx = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in \mathfrak{X}.$$

Прежде чем ввести в рассмотрение операторное уравнение, решения которого будут одновременно и обобщенными решениями системы (4.1), мы

---

*) Для такого определения обобщенного решения системы (4.1) нужно в условии П от каждого оператора $\mathcal{L}_j$, $\nu_0 < j \leq \nu$, требовать лишь, чтобы он отображал $\mathfrak{X}$ в $L_{q_j}(\Omega)$, а от каждого оператора суперпозиции, порожденного функцией $\Phi_j(x,\xi)$, $1 \leq j \leq \nu$, — чтобы он отображал $L_{q_1}(\Omega) \times \ldots \times L_{q_\nu}(\Omega)$ в $L_{q_j'}(\Omega)$. Остальные свойства этих операторов, указанные в условии П, в частности непрерывность, понадобятся в дальнейшем.

введем некоторые обозначения и сформулируем условия, обеспечивающие возможность предельного перехода в галёркинских уравнениях.

Обозначим через $\mathcal{B}_n^-$ совокупность всех таких векторов $\beta \in \mathcal{B}_n$, для которых матрица $Re\, S\,(2\pi i H^{*^{-1}}\beta)$ имеет отрицательные собственные числа, а через C_β^- – прямую сумму собственных подпространств в $\mathbb{C}^N$, соответствующих отрицательным собственным числам. Будем считать, что C_β^- – инвариантное подпространство для оператора $Im\, S(2\pi i H^{-1*}\beta)\ \forall \beta \in \mathcal{B}_n^-$.

Пространство $\mathcal{X}$ естественным образом разбивается в прямую сумму двух линейных замкнутых подпространств:

$$\mathcal{X}_+ = \Big\{ \sum_{\beta \in \mathcal{B}_n} \hat{u}^{(\beta)} e^{2\pi i (H^{-1}x, \beta)} \in \mathcal{X} \,\Big|\, \hat{u}^{(\beta)} \in C_\beta^{-\perp} \text{ при } \beta \in \mathcal{B}_n^- \Big\}$$

и

$$\mathcal{X}_- = \Big\{ \sum_{\beta \in \mathcal{B}_n^-} \hat{u}^{(\beta)} e^{2\pi i (H^{-1}x, \beta)} \in \mathcal{X} \,\Big|\, \hat{u}^{(\beta)} \in C_\beta^- \quad \forall \beta \in \mathcal{B}_n^- \Big\}.$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

У с л о в и е Ш. Полунорма $\boldsymbol{x}$ компактна на $\mathcal{X}$.

У с л о в и е 1У. $\forall j = 1, \ldots, \nu$ оператор $\mathcal{L}_j$ вполне непрерывно отображает подпространство $\mathcal{X}_-$ в пространство $L_{q_j}(\Omega)$.

У с л о в и е У. Имеют место следующие два неравенства:

$$Re \sum_{j=1}^{\nu_0} \big(\Phi_j(x,\xi) - \Phi_j(x, \eta_1, \ldots, \eta_{\nu_0}, \xi_{\nu_0+1}, \ldots, \xi_\nu) \big) \times$$

$$\times (\bar{\xi}_j - \bar{\eta}_j) > 0 \quad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{C}^\nu,\ \forall \eta_j \in \mathbb{C},\ j = 1, \ldots, \nu_0,\ \sum_{j=1}^{\nu_0} |\xi_j - \eta_j| \neq 0$$

и

$$\varliminf_{\sum_{j=1}^{\nu_0} |\xi| \to \infty} \ \inf_{\sum_{j=\nu_0+1}^{\nu} |\xi_j| \le \lambda} Re \sum_{j=1}^{\nu_0} \big(\Phi_j(x,\xi) -$$

$$- \Phi_j(x, \eta_1, \ldots, \eta_{\nu_0}, \xi_{\nu_0+1}, \ldots, \xi_\nu) \big) (\bar{\xi}_j - \bar{\eta}_j) > 0$$

$$\forall x \in \Omega, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall q_j \in C, \ j=1,\dots,\nu_0 .$$

(Последнее неравенство является уточнением соотношения (2.48) из [6, с.195].)

Введем, далее, подпространство $\Lambda = \mathcal{X} \cap \ker(S+S^*) \bigcap_{1\le j\le \nu_0} \ker \mathcal{L}_j$, которое, очевидно, содержится в подпространстве $\mathcal{X}$, причем, в силу одного результата автора [4], из условия Ш следуют такие два факта: 1) $\dim \Lambda < \infty$, 2) существует такое линейное замкнутое подпространство $\hat{\mathcal{X}}_+ \subset \mathcal{X}$, что $\mathcal{X}_+ = \hat{\mathcal{X}}_+ \oplus \Lambda$ и с некоторой константой $M > 0$ выполнено неравенство *)

$$\|u\| \le M \Big(\sum_{j=1}^{\nu_0} \|\mathcal{L}_j u\|_{L_{q_j}(\Omega)} +$$

$$+ \Big(\sum_{\beta \in \mathcal{B}_n} (|Re\, S\,(2\pi i H^{*-1}\beta)|\, \hat{u}^{(\beta)}, \hat{u}^{(\beta)}) \Big)^{\frac{1}{2}} \Big) \quad \forall u \in \mathcal{X}_+ . \qquad (4.2)$$

Зафиксируем некоторое разложение подпространства Λ в прямую сумму линейных подпространств: $\Lambda = V \oplus W$, где $W \quad \bigcap_{\nu_0+1 \le j \le \nu} \ker \mathcal{L}_j$, и положим

$$X = \mathcal{X}_- \oplus \hat{\mathcal{X}}_+ \oplus V, \quad X_+ = \hat{\mathcal{X}}_+ \oplus V, \quad X_- = \mathcal{X}_- .$$

Ясно, что принадлежность правой части f системы (4.1) подпространству $W^\perp$ является необходимым условием существования у нее в пространстве $\mathcal{X}$ обобщенного решения. Поэтому всюду в дальнейшем предполагается, что $f \in W^\perp$.

Для выяснения вопроса о существовании обобщенных решений у системы (4.1) рассмотрим эквивалентное этой системе операторное уравнение

$$G_f(u) = 0, \qquad (4.3)$$

---

*) Здесь и далее знак нормы без поясняющего нижнего индекса означает норму в пространстве $\mathcal{X}$.

где $G_f : X \longrightarrow X^*$ – оператор, определяемый с помощью тождества

$$< G_f(u), v > = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} \left(S(2\pi i H^{*^{-1}}\beta)\hat{u}^{(\beta)}, \hat{v}^{(\beta)}\right) +$$
$$+ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{\nu} \Phi_j (x, \mathcal{L}u)\overline{\mathcal{L}_j v}dx - < f, v > \quad \forall v \in X.$$

Оператор G_f $\forall f \in W^{\perp}$ при выполнении условий 1–У принадлежит классу $\mathcal{O}_0(X)$, поскольку: 1) из условий 1, П следует его непрерывность; 2) из условия Ш, в силу одного результата автора [4], следует, что норма на X эквивалентна норме, задающей равномерно выпуклую единичную сферу и, следовательно, подпространство X рефлексивно; 3) в силу условий П–У в операторном уравнении $(\Pi_+^* - \Pi_-^*)G_f(u) = 0$, где Π_+ и Π_- – проекторы, соответствующие разложению $X = X_+ \oplus X_-$, эквивалентном уравнению (4.3), оператор $(\Pi_+^* - \Pi_-^*)G_f$ является оператором "вариационного исчисления" [6, с.192–198].

Перейдем теперь к формулировке условий, обеспечивающих существование у оператора G_f ограниченной последовательности Галёркина.

Прежде всего заметим, что из условий П, Ш следует такое

Условие У1. На подпространстве X_- норма $\|u\|_{\mathfrak{X}}$ эквивалентна полунорме $\left(\sum_{\beta\in\mathcal{B}_n} (|Re\, S(2\pi i H^{*^{-1}}\beta)|\hat{u}^{(\beta)}, \hat{u}^{(\beta)})\right)^{\frac{1}{2}}$.

Будем предполагать, что подпространства X_- и $\hat{\mathfrak{X}}_+$ нетривиальны. Если одно из них окажется тривиальным, то этот факт только упростит рассмотрения. Пусть, кроме того, пока является нетривиальным также и подпространство V. Случай, когда V тривиально, будет оговорен ниже.

Имея в виду применение в дальнейшем теорем § 1, положим $s=3$, $X^{(1)} = X_-$, $X^{(2)} = \hat{\mathfrak{X}}_+$, $X^{(3)} = V$ *), так что $\forall u \in X$ однозначным обра-

---

*) Некоторые из обозначений, вводимых ниже, преследуют ту же цель.

зом определено разложение: $u = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$, где $u^{(\kappa)} \in X^{(\kappa)}$ $\forall \kappa = 1,2,3$. Пусть d – размерность подпространства $X^{(3)}$. Зафиксировав в $X^{(3)}$ базис $\{v^{(1)}(x), \dots, v^{(d)}(x)\}$ и записав каждую вектор-функцию $v(x) \in X^{(3)}$ в виде $v(x) = \sum_{i=1}^{d} \xi_i v^{(i)}(x)$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{C}^d$, мы тем самым зададим изоморфизм между $X^{(3)}$ и $\mathbb{C}^d$. Чтобы не вводить новых обозначений, будем отождествлять изоморфные между собой множества в $X^{(3)}$ и $\mathbb{C}^d$ и обозначать их одинаковыми символами.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^d$ векторное поле $A^{(3)}: \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$, определенное равенством

$$A^{(3)}(\xi) = \Big\{ A_i^{(3)}(\xi) = \int_{\Omega} \sum_{j=\nu_0+1}^{\nu} \Phi_j \Big(x, \mathcal{L}\Big(\sum_{i=1}^{d} \xi_i v^{(i)}(x)\Big)\Big) \overline{\mathcal{L}_j v^{(i)}(x)}\, dx \Big\}, \quad i=1,\dots,d.$$

Векторное поле в $X^{(3)}$, заданное соотношением $\sum_{i=1}^{d} \xi_i v^{(i)}(x) \longrightarrow \sum_{i=1}^{d} A_i^{(3)}(\xi) v^{(i)}(x)$, будем обозначать также через $A^{(3)}$ (так, что

$$A^{(3)}\Big(\sum_{i=1}^{d} \xi_i v^{(i)}(x)\Big) = \sum_{i=1}^{d} A_i^{(3)}(\xi) v^{(i)}(x)).$$

Для дальнейших формулировок зафиксируем некоторое положительное число δ из расширенной вещественной прямой, положив:

$$X_\delta^{(\kappa)} = \{u \in X^{(\kappa)} \,|\, \|u\| < \delta\} \quad \forall \kappa = 1,2,3 \quad \text{и} \quad X_\delta = X_\delta^{(1)} + X_\delta^{(2)} + X_\delta^{(3)},$$

так что $X_\infty^{(\kappa)} = X^{(\kappa)}$ $\forall \kappa = 1,2,3$ и $X_\infty = X$. Зададим, далее, в пространстве $\mathbb{C}^d$ (или, что то же самое, в подпространстве $X^{(3)}$) семейство $\mathcal{T}^{(3)}$ ограниченных замкнутых областей φ, обладающих следующими свойствами: 1) $0 \bar{\in} \partial\varphi$, 2) векторное поле $A^{(3)}$ невырожденно на $\partial\varphi$ и имеет на $\partial\varphi$ ненулевое вращение. Потребуем, чтобы при $\delta < \infty$ $\forall \varepsilon > 0$ нашлась область $\varphi \in \mathcal{T}^{(3)}$ такая, что $\sup_{\xi \in \varphi} |\xi| < \varepsilon$, а при $\delta = \infty$ $\forall \sigma > 0$ нашлась область $\varphi \in \mathcal{T}^{(3)}$ такая, что $\inf_{\xi \in \varphi} |\xi| > \sigma$. Положим $\mathcal{E} = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{T}^{(3)}} \partial\varphi$.

Пусть выполнено

У с л о в и е УП. Имеют место следующие пять неравенств:

$$Re \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{\nu} \Phi_j (x, \mathcal{L}u) \overline{\mathcal{L}_j u^{(1)}} dx \leq$$

$$\leq \| u^{(1)} \| \left(a_{11}^{*} \| u^{(1)} \|^{\gamma_{11}} + a_{21} \| u^{(2)} \|^{\gamma_{21}} + \right.$$

$$\left. + a_{31} \| u^{(3)} \|^{\gamma_{31}} + b_1^{*} \right) + c_1 \quad \forall u \in X_{\delta}, \tag{4.4}$$

где $a_{11}^{*} \geq 0$, $a_{21} \geq 0$, $a_{31} \geq 0$, $b_1^{*} \geq 0$, $c_1 \geq 0$, $\gamma_{11} - 1$, $\gamma_{21} > 0$, $\gamma_{31} > 0$;

$$\sum_{\beta \in \mathcal{B}_n} \left(Re\, S(2\pi i H^{*^{-1}} \beta) \hat{u}^{(2)(\beta)}, \hat{u}^{(2)(\beta)} \right) +$$

$$+ Re \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{\nu} \Phi_j (x, \mathcal{L}u) \overline{\mathcal{L}_j u^{(2)}} dx \geq$$

$$\geq a_{22}^{*} \left(\sum_{j=1}^{\nu_0} \| \mathcal{L}_j u^{(2)} \|_{L_{q_j}(\Omega)} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{\beta \in \mathcal{B}_n} \left(Re\, S(2\pi i H^{*^{-1}} \beta) \hat{u}^{(2)(\beta)}, \hat{u}^{(2)(\beta)} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\gamma_{22}+1} -$$

$$- a_{12} \| u^{(1)} \|^{\gamma_{12}} \| u^{(2)} \| - a_{32} \| u^{(3)} \|^{\gamma_{32}} \| u^{(2)} \| - c_2 \quad \forall u \in X_{\delta}, \tag{4.5}$$

где $a_{22}^{*} > 0$, $a_{12} \geq 0$, $a_{32} \geq 0$, $c_2 \geq 0$, $\gamma_{12} > 0$, $\gamma_{32} > 0$;

$$| A^{(3)}(\xi) | \leq g | \xi |^{\theta_3} \qquad \forall \xi \in \mathcal{E}, \tag{4.6}$$

где $g \geq 0$, $\theta_3 > 0$;

$$\left(\inf_{\xi \in \partial\varphi} | A^{(3)}(\xi) | \right)^2 \geq a_{33}^{(0)} \left(\sup_{\xi \in \partial\varphi} | \xi | \right)^{\theta_3 + \gamma_{33}} - c_3^{(0)} \quad \forall \varphi \in \tau^{(3)}; \tag{4.7}$$

где $a_{33}^{(0)} > 0$, $c_3^{(0)} \geq 0$, $\gamma_{33} > 0$;

$$Re \int_{\Omega} \sum_{j=\nu_0+1}^{\nu} \left(\Phi_j (x, \mathcal{L}u^{(3)}) - \Phi_j (x, \mathcal{L}u) \right) \overline{\mathcal{L}_j v} dx \leq$$

$$\leq \| v \| \left(a_{33}^{*} \| u^{(3)} \|^{\gamma_{33}} + a_{13}^{*} \| u^{(1)} \|^{\gamma_{31}} + a_{23}^{*} \| u^{(2)} \|^{\gamma_{32}} + b_3^{*} \right) + c_3^{*} \quad \forall u \in X_{\delta}, \forall v \in X^{(3)}, \tag{4.8}$$

где $a_{33}^* \geq 0$, $a_{13}^* \geq 0$, $a_{23}^* \geq 0$, $b_3^* \geq 0$, $c_3^* \geq 0$, $\gamma_{13} > 0$, $\gamma_{23} > 0$.

Заметим, далее, что из условия У1 следует неравенство

$$-\sum_{\beta \in \mathcal{B}_n} (Re\, S(2\pi i H^{*^{-1}} \beta) \hat{u}^{(\beta)}, \hat{u}^{(\beta)}) \geq a_{11}^{(0)} \|u\|^{\gamma_{11}+1} \quad \forall u \in X^{(1)}, \tag{4.9}$$

где $a_{11}^{(0)} > 0$, а из конечномерности подпространства $X^{(3)}$ следует существование таких положительных чисел M_1 и M_2, что

$$M_1 |\xi| \leq \|\sum_{i=1}^{d} \xi_i v^{(i)}(x)\| \leq M_2 |\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^d.$$

Введем такие обозначения: $A^{(1)} u = -u \quad \forall u \in X^{(1)}$, $A^{(2)}(u) = u$, $\forall u \in X^{(2)}$; τ^k, $k = 1,2$, - семейство шаров $\{u \in X^{(k)} \mid \|u\| \leq \rho\}$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \theta_2 = 1$; $a_{11} = a_{11}^{(0)} - a_{11}^*$, $b_1 = b_1^* + \sup\limits_{v \in X^{(1)}, \|v\|=1} \langle f, v \rangle$; $a_{22} = a_{22}^* M^{1+\gamma_{22}}$ (M - константа из неравенства (4.2)), $b_2 = \sup\limits_{v \in X^{(2)}, \|v\|=1} \langle f, v \rangle$; $a_{33} =$

$$= a_{33}^{(0)} M_2^{-\theta_3 - \gamma_{33}} - a_{33}^* g M_2 M_1^{-\theta_3}, \; a_{13} = a_{13}^* g M_2 M_1^{-\theta_3}, \; a_{23} = a_{23}^* g M_2 M_1^{-\theta_3},$$

$$b_3 = (b_3^* + \sup_{v \in X^{(3)}, \|v\|=1} \langle f, v \rangle) g M_2 M_1^{-\theta_3}, \quad c_3 = c_3^{(0)} + c_3^*;$$

$$\omega = \{\omega_k(t) = t_k^{\theta_k} (a_{kk} t_k^{\gamma_{kk}} - \sum_{j \neq k} a_{jk} t_j^{\gamma_{jk}} - b_k) - c_k\}, \quad k = 1,2,3.$$

Если подпространство V тривиально, то семейство областей $\tau^{(3)}$ и векторное поле $A^{(3)}$ вводить не имеет смысла; при этом требование выполнения неравенств (4.6)-(4.8) в формулировке условия УП, разумеется, исключается, а в неравенствах (4.4) и (4.5) считается $u^{(3)} = 0$. В этом случае $s = 2$ и $\omega = \{\omega_k(t)\}$, $k = 1,2$, где

$$\omega_1(t) = t_1 (a_{11} t_1 - a_{21} t_2^{\gamma_{21}} - b_1) - c_1, \quad \omega_2(t) = t_2 (a_{22} t_2^{\gamma_{22}} - a_{12} t_1^{\gamma_{12}} - b_2) - c_2.$$

Из теорем 1.2 и 1.3 следуют такие утверждения.

Т е о р е м а 4.1. <u>Если семейство функций</u> ω <u>коэрцитивно на множестве</u> R_+^s <u>и семейство множеств</u> $\tau^+ \neq \emptyset$, <u>то система (4.1) имеет в подпространстве</u> *) X <u>по крайней мере одно обобщенное решение.</u>

---

*) Напомним, что $f \in W^{\perp}$.

Т е о р е м а 4.2. Если $\delta = \infty$ и семейство функций ω удовлетворяет условию примера 1.1, то система (4.1) имеет в подпространстве X по крайней мере одно обобщенное решение $\forall f \in W^{\perp}$. Если, кроме того, $V \neq \{0\}$ и области семейства $\mathcal{T}^{(s)}$ попарно между собой не пересекаются, то система (4.1) $\forall f \in W^{\perp}$ имеет в подпространстве X бесчисленное множество обобщенных решений.

Т е о р е м а 4.3. Если $\delta < \infty$ и семейство функций ω удовлетворяет условию примера 1.2, то $\forall \lambda > 0$ найдется $\sigma > 0$, зависящее от λ, такое, что система (4.1) имеет по крайней мере одно обобщенное решение в шаре $X_\lambda = \{u \in X \,|\, \|u^{(k)}\| < \lambda \quad \forall k=1,\dots,s\}$ при условии, что $b_k + c_k < \sigma \quad \forall k=1,\dots,s$. Если, кроме того, $V \neq \{0\}$ и области семейства $\mathcal{T}^{(3)}$ попарно между собой не пересекаются, то число обобщенных решений системы (4.1) в шаре X_λ стремится к ∞ при $\sum_{k=1}^{3} (b_k + c_k) \longrightarrow 0$.

З а м е ч а н и е 4.1. Аналогично могут быть сформулированы утверждения о существовании обобщенного решения системы (4.1) в случае, когда семейство функций ω удовлетворяет одному из условий примера 1.3.

З а м е ч а н и е 4.2. Если коэффициенты оператора S – вещественные матрицы, а $\Phi_j : R^n \times R^\nu \to R \quad \forall j=1,\dots,\nu$, то в качестве $\mathcal{X}$ можно взять пространство вещественных H – периодических функций (см. [1, с.98–100]) с той же самой конечной нормой и сформулировать теоремы, аналогичные теоремам 4.1–4.3 (см. также предыдущее замечание), о существовании у системы (4.1) вещественного обобщенного H-периодического решения.

З а м е ч а н и е 4.3. Примеры систем вида (4.1), у которых при любой правой части $f \in W^{\perp}$ в подпространстве X существует бесчисленное множество обобщенных решений, или у которых при стремлении правой части к нулю по норме пространства X^* число обобщенных решений в подпространстве X стремится к ∞, могут быть построены по аналогии с примерами 5.4 и 5.7 из работы автора [3, с.117, 118].

Замечание 4.4. Теоремы 4.1–4.3 дают, в частности, в определенном смысле ответ на вопрос, поставленный Ж.-Л.Лионсом [6, с.541, проблема 10.13], о существовании периодических решений у уравнения

$$\mathcal{S}u + |u|^{\gamma-2}u = f, \tag{4.10}$$

где $\mathcal{S} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ и $\gamma > 1$, возникающего в релятивистской квантовой механике [6, с.16]. При $n = 2$, очевидно, существуют матрицы*) H, обладающие свойством $\inf_{\beta \in \mathcal{B}_2^-} |\beta|^{-1} |S(2\pi H^{*-1}\beta)| > 0$ (в данном случае $\mathcal{B}_2^- = \{\beta \in \mathcal{B}_2 \mid S(2\pi H^{*-1}\beta) > 0\}$). Если для каждой такой матрицы ввести банахово пространство $\mathfrak{X}$ H- периодических на $\mathbb{R}^2$ комплексных функций $u(x)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{\mathfrak{X}} = \Big(\sum_{\beta \in \mathcal{B}_2} (|S(2\pi H^{*-1}\beta)| \hat{u}^{(\beta)}, \hat{u}^{(\beta)})\Big)^{\frac{1}{2}} + \|u\|_{L_\gamma(\Omega)},$$

то, в силу теорем 4.2 и 4.3, с учетом замечания 4.2, окажутся справедливыми следующие утверждения: 1) пусть $\gamma < 2$, тогда уравнение (4.10) имеет в пространстве $\mathfrak{X}$ по крайней мере одно обобщенное решение (вещественное, если вещественна правая часть f); 2) пусть $2 < \gamma < 4$ **), тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что при $\|f\|_{\mathfrak{X}^*} < \delta$ в шаре $\{u \in \mathfrak{X} \mid \|u\| < \varepsilon\}$ найдется по крайней мере одно обобщенное решение уравнения (4.10) (вещественное, если вещественна правая часть f).

---

*) В качестве H можно взять, например, диагональную матрицу $diag(h_1, h_2)$ с соизмеримыми h_1 и h_2.

**) Ограничение $\gamma < 4$ возникает в силу теорем вложения.

Л и т е р а т у р а

1. П о р т н о в В.Р. Разрешимость некоторых нелинейных операторных уравнений в рефлексивных пространствах Банаха. Приложения к решению краевых задач для квазилинейных уравнений и систем уравнений дивергентного вида. – В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики, Новосибирск, 1975, с.128–188.
2. П о р т н о в В.Р. О разрешимости одного нелинейного операторного уравнения. – "Докл. АН СССР", 1976, т.227, № 6, с.1301–1304.
3. П о р т н о в В.Р. О разрешимости нелинейных операторных уравнений. – В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л.Соболева, ч.1), Новосибирск, 1976, с.72–121.
4. П о р т н о в В.Р. Пространства типа С.Л.Соболева с полунормой, имеющей конечномерное ядро. – В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 1975, вып.32, с.114–138.
5. С о б о л е в С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во АН СССР, Сиб. отделение, 1962, 252 с.
6. Л и о н с Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных задач. М., "Мир", 1972, 587 с.