КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Помещённые в сборнике краткие сообщения являются тезисами докладов, прочитанных участниками Школы по теории операторов в функциональных пространствах (г.Новосибирск, 1975 г.) на заседаниях секции дифференциальных уравнений с частными производными.

УДК 517.948

НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

М.С.А г р а н о в и ч (Москва)

В докладе анализируется подход к нескольким задачам в основном для уравнения Гельмгольца в R^n или во внешней области, предложенный группой физиков (Н.Н.Войтович, Б.З.Каценеленбаум, А.Н.Сивов). Он связан с выбором в этих задачах в качестве спектрального параметра некоторых величин, отличных от частоты. Задачи сводятся к фредгольмовым интегральным уравнениям 2-го или 1-го рода с тем же спектральным параметром. Соответствующие вполне непрерывные операторы T при надлежащем выборе скалярного произведения диссипативны и обладают свойством $T^* = \bar{T}$, облегчающим построение системы, биортогональной к системе корневых функций оператора T. Выяснены некоторые спектральные свойства этих операторов.

Рассмотрен, например, оператор

$$T\varphi(x) = -\int_S \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}\rho(y)\varphi(y)dS_y \qquad (y \in S). \tag{1}$$

Здесь S – бесконечно гладкая компактная поверхность в R^3; ρ – положительная бесконечно гладкая функция на S; $k = k_1 + ik_2$, $k_1 > 0$, $k_2 \leq 0$. Пусть V – область, ограниченная поверхностью S; предположим, что задача Дирихле $\Delta u + k^2 u = 0$ в V, $u = 0$ на S не имеет нетривиальных решений. Тогда оператор (1) не имеет ядра; система его корневых функций полна в любом соболевском пространстве $H^{(\alpha)}(S)$; если $f \in H^{(\alpha+1)}(S)$, то ряд Фурье функции f по этой системе суммируется к f в $H^{(\alpha)}(S)$ некоторым методом Абеля со скобками. Следствия отсюда для соответствующих задач выводятся при помощи априорных оценок. Далее, собственные значения $\lambda_\nu(T)$ лежат вы-

ше мнимой оси, и $\sqrt{\nu}\,\lambda_\nu \to c$ при $\nu \to \infty$, где $c = -\sqrt{\pi}\left(\int_S \rho^2 dS\right)^{1/2}$. При невещественных k собственных значений нет в некотором угле, примыкающем сверху к полуоси R_+.

Подробности и ссылки на литературу можно найти в заметках автора (см. ["Радиотехника и электроника", 1974, т.19, № 5, с. 970; 1975, т.20, № 1, с. 39 и № 7, с. 1370]) и З.Н.Голубевой ([там же, 1976, т.21, № 2, с. 219-227]).

УДК 517.948

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ГЁЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В НИХ

М.З.Б е р к о л а й к о (Воронеж)

Рассматриваются пространства непрерывных на $[a, b]$ функций, для которых конечна норма:

$$\|u\|_{\varphi,E} = \max\left\{\|u\|_C,\ \left\|\frac{\omega(u,\cdot)}{\varphi(\cdot)}\right\|_E\right\},$$

где $\omega(u,s)$ - модуль непрерывности функции $u(t)$; $\varphi(s)$- возрастающая ($\varphi(0) = 0$) вогнутая функция; E - симметричное пространство. Изучены простейшие свойства этих пространств. Изучаются линейные интегральные операторы, действующие в H_{φ,L_p} и H_{φ,L^*_M}. В частности, получен аналог одной теоремы Л.В.Канторовича; установлено, что при определенных условиях на $\varphi(s)$ линейный сингулярный оператор действует из H_{φ,L_p} в H_{φ,L_p}. Сформулировано необходимое и достаточное условие того, чтобы гармоническая в единичном круге функция была интегралом Пуассона от функции из H_{φ,L_p}.

Получены новые теоремы о существовании и единственности для нелинейных сингулярных интегральных уравнений.

УДК 517.945

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

П.Е.Б е р х и н (Новосибирск)

Рассмотрим уравнение составного типа

$$Lu \equiv q P u + \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f, \qquad (1)$$

где $q = D_0 + \sum_{j=1}^{n} q_j(x) D_j$, $D_j = \partial/\partial x_j$, $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, а P – строго эллиптический оператор порядка $2m$. В цилиндре $V_T = [0,T] \times S$, сечение которого есть тор $S = R^n/Z^n$, что соответствует периодическому по $x_1, \dots, x_n$ случаю, изучается задача отыскания решения уравнения (1) по краевым условиям

$$D_0^j u\big|_{S_0} = 0, \; 0 \le j \le m; \quad D_0^j u\big|_{S_T} = 0, \; 0 \le j \le m-1; \; S_t = \{t\} \times S. \qquad (2)$$

Для гладких функций u, удовлетворяющих условиям (2), верна оценка

$$\|u\|^2_{k+2m+1,p,V_T} \le C_{k,p} \left(\int_0^T \|L^\lambda u\|^2_{k,p+1,V_t} dt + \|L^\lambda u\|^2_{k,p,V_T} \right). \qquad (3)$$

Здесь $L^\lambda = L + (-1)^m \lambda$, λ достаточно велико, а нормы берутся в пространстве Соболева $H^{k,p}(V_t)$. Из оценки (3) вытекает фредгольмовость задачи (1)-(2) и ее однозначная разрешимость для оператора L^λ в соответствующих пространствах. В непериодическом случае ограниченной области $S \subset R^n$ с гладкой границей ∂S справедливы аналогичные результаты, если к (2) добавить условие

$$u\big|_\Gamma = 0, \quad \Gamma = [0,T] \times \partial S.$$

Сходные результаты верны также для краевой задачи

$$(D_0^2 - B)(D_0^2 + A) u + \sum_{|\alpha| \le 3} a_\alpha(x) D^\alpha u = f,$$

$$u\big|_{S_0} = D_0 u\big|_{S_0} = D_0^2 u\big|_{S_0} = 0, \quad u\big|_{S_T} = 0,$$

где A и B – эллиптические операторы второго порядка.

УДК 517.514

К ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н.К.Б л и е в (Алма-Ата)

1°. В теории обобщенных аналитических функций [1] особую роль играют операторы, порожденные интегралами:

$$T_G f = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dG_\zeta\,, \quad \Pi_G f = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, dG_\zeta\,.$$

Последний сингулярный интеграл существует в смысле главного значения по Коши. В дробных H, B – классах [2] свойства этих операторов исследованы в работах автора [3-5]. Пусть $f \in B^{1+\alpha}_{p,1}(G)$, $1<p<2$, $\alpha = \frac{2-p}{p}$, G – ограниченная область с контуром $\Gamma \in C^1_\nu$, $\frac{2-p}{p} < \nu < 1$. Тогда имеют место:

1) представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)}{t-z}\, dt - \frac{1}{\pi}\iint_G f_{\bar\zeta}(\zeta)\frac{dG_\zeta}{\zeta - z}\ ;$$

2) формулы Грина

$$\iint_G f_{\bar z}(z)\,dx\,dy = \frac{1}{2i}\int_\Gamma W(z)\,dz, \quad \iint_G f_z(z)\,dx\,dy = \frac{1}{2i}\int_\Gamma W(z)\,d\bar z.$$

2°. Пусть дано уравнение Бельтрами

$$W_{\bar z} - q(z)\, W_z = 0, \tag{1}$$

где, как известно [1], $|q| \le q_0 < 1$. Пусть E – комплексная плоскость, $1<p<2$, $\alpha = \frac{2-p}{p}$, $q(z) \in B^{\alpha}_{\gamma,1}(E)$, $\gamma = \frac{2}{\alpha}$, и полунорма $\|q\|_{B^\alpha_{\gamma,1}} < \frac{1-q_0}{C}$, где $C = \operatorname{Sup}\|f\|_{L_2}$; здесь Sup берется по всем f, $\|f\|_{B^\alpha_{p,1}} = 1$. Тогда при p, достаточно близком к 2, уравнение (1) имеет полный гомеоморфизм вида $W(z) = z + T_E f$, где f – решение интегрального уравнения $f - q\Pi_E f = q$

в $B^{\alpha}_{p,1}(E)$. При этом $W(z) - z \in B^{1+\alpha}_{p,1}(E)$.

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции, М., 1959.

2. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969.

3. Блиев Н.К. - "Докл. АН СССР", 1972, т.205, № 3, с. 513-514.

4. Блиев Н.К. - "Изв. АН Каз ССР.Серия. физ.-матем.", 1973, № 1, с. 80-83.

5. Блиев Н.К. - "Изв. АН Каз ССР.Серия.физ.-матем.", 1975, № 1, с. 9-13.

УДК 517.948

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Ю.Г.Борисович (Воронеж)

Нелинейные фредгольмовы отображения в связи с задачами теории дифференциальных уравнений рассматривались еще Р.Каччиополи [1], предложившим идею степени по $mod\,2$. Корректное определение степени было дано А.С.Шварцем (доклад на 4-м математическом съезде, 1961 г.) и С.Смейлом [2]. Развивая идеи Смейла, Элворти и Тромбе [3] построили ориентированную степень, а автор и П.Б.Шерман построили вращение фредгольмовых векторных полей по $mod\,2$ (см. [4]) и ориентированное (см. [5]); автор и Ю.И.Сапронов [6] построили индексы пересечений, связанные с совпадениями фредгольмова и конечномерного отображений. Ю.И.Сапронов исследовал конечномерные возмущения нелинейных фредгольмовых отображений. Первые приложения даны в [3,14].

В последующих исследованиях теория степени фредгольмовых отображений была усовершенствована и приближена к задачам приложений. Ю.И.Сапронов [9,11] , вернувшись к идеям Каччиополи, построил степень для класса отображений $\Phi_0 C^1$ по $mod\,2$; В.Г.Звягин [12] построил ориентированную степень, а П.Б.Шерман – ориентированное вращение; при участии автора эта конструкция распространена на $\Phi_n C^1$ $(n \geq 0)$ – отображения, а также отображения, возмущенные вполне непрерывным не обязательно гладким отображением; В.Г.Звягин, Э.М.Мухамадиев, Ю.И.Сапронов вычислили степень эквивариантных отображений [10, 12, 13]; автор и Ю.И.Сапронов доказали теоремы инвариантности [16]; В.Г.Звягин [12] обобщил теорему Биркгофа–Келлога–Роте о существовании собственного вектора на сфере.

Т е о р е м а. Пусть $f:(\bar{\Omega},\partial\Omega)\to(F,F\setminus\theta)$ – ограниченное собственное отображение, заданное на замкнутой области $\bar{\Omega}$ банахова пространства E и действующее в банахово пространство F ; пусть $k:\partial\Omega\to F$ – вполне непрерывное отображение. Тогда при условии $deg(f,\Omega,\theta)\neq 0$ и $\theta\bar{\in}\overline{k(\partial\Omega)}$ существуют вектор $x_0\in\partial\Omega$ и вещественное λ такие, что $f(x_0)+\lambda k(x_0)=\theta$.

В.Г.Звягин дал приложения этой теоремы к проблеме собственных функций квазилинейной эллиптической краевой задачи второго порядка; эти результаты были обобщены им при участии автора и П.Менца на уравнения высшего порядка и параболические задачи в [17] . Приведем один результат. Пусть

$$F(x,u,Du,\dots,D^{2m}u)+\lambda g(x,u,Du,\dots,D^{2m-1}u)=0,\ D^{\beta}u\big|_{\partial\Omega}=0,\ |\beta|\leq m-1, \quad (1)$$

– нелинейная эллиптическая задача о собственных функциях, где Ω – область с гладкой границей $\partial\Omega$, F – C^{∞}–гладкая функция своих аргументов $x,p_0,\dots,p_{2m-1},p_{2m}$, нечетная по переменным $p_0,\dots,p_{2m}$, $g\in C^1$ – ограниченная функция своих аргументов, λ – вещественный

параметр. Имеет место

Т е о р е м а. Пусть выполнены предыдущие условия и для некоторого $\varepsilon>0$ $|g(x,p_0,\dots,p_{2m-1})|\geq\varepsilon$. Тогда задача (1) имеет решения со сколь угодно большой гёльдеровской нормой.

Другие приложения к теории периодических решений функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа даны автором и П.Б.Шерманом в [15].

Л и т е р а т у р а

1. C a c c i o p p o l i R.-"Rend.Acc."-Lincei, 1936, v.24
2. S m a l e S. "Amer.J.Math.", 1965, v.87, p.861-866.
3. E l w o r t h y K.,T r o m b a A.-"Proc.Symp.Pure Math.,A.M.S."-Providence, 1970, 18, p.86-94.
4. Б о р и с о в и ч Ю.Г., Ш е р м а н П.Б. - "Труды НИИ математики ВГУ", Воронеж, 1970, в.2, с. 31-38.
5. Ш е р м а н П.Б. - "Труды матем. ф-та ВГУ", Воронеж, 1970, в.4, с. 128-131.
6. Б о р и с о в и ч Ю.Г., С а п р о н о в Ю.И. - "Докл. АН СССР", 1971, т.196, № 1, с. 12-15; - "Труды 8-й летней матем. школы", Изд. АН УССР, 1971, с. 128-163; - "Труды матем. ф-та ВГУ", Воронеж, 1971, в.4, с.7-19.
7. С а п р о н о в Ю.И. - "Труды НИИ математики ВГУ", Воронеж, 1970, в.2, с.21-26.
8. С а п р о н о в Ю.И. - "Функциональный анализ и его приложения", 1971, т.5, в.4, с. 38-43.
9. С а п р о н о в Ю.И. К теории компактных, уплотняющих и фредгольмовых отображений (канд. дис.), Воронеж, ВГУ, 1972.
10. С а п р о н о в Ю.И. - "Труды матем. ф-та ВГУ", Воронеж, 1973, в.10, с. 82-88.

11. С а п р о н о в Ю.И. – "Труды НИИ математики ВГУ", Воронеж, 1973, в.11, с. 92–102.

12. З в я г и н В.Г. Исследование топологических характеристик нелинейных операторов (канд. дис.), Воронеж, ВГУ, 1974.

13. З в я г и н В.Г., М у х а м а д и е в Э.М., С а п р о н о в Ю.И. – "Успехи мат. наук", 1973, т.28, в.6, с. 109–210; "Труды матем. ф-та ВГУ", Воронеж, 1973, в.10, с.25–44.

14. Б о р и с о в и ч Ю.Г. – "Труды матем. ф-та ВГУ", Воронеж, 1971, в.3, с. 35–41.

15. Б о р и с о в и ч Ю.Г., Ш е р м а н П.Б. – "Труды матем. ф-та ВГУ", Воронеж, 1972, в.7, с. 17–24; 1973, в.10, с. 12–25.

16. Б о р и с о в и ч Ю.Г., С а п р о н о в Ю.И. – "Труды НИИ математики ВГУ", Воронеж, 1975, в.20, с. 13–19.

17. Б о р и с о в и ч Ю.Г., М е н ц П. – "Труды матем. ф-та ВГУ", Воронеж, 1975, в.16, с. 9–13.

УДК 517.514

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В.И.Б у р е н к о в (Москва)

Известен ряд методов продолжения функций за пределы области определения с сохранением дифференциальных свойств, например, метод Хестенеса [1], метод Кальдерона [2], метод Стейна [3], метод Уитни [4]. Мы предложим еще один метод продолжения.

В случае, когда $\Omega = \{x_n < \varphi(\bar{x}),\ \bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})\}$, где $\varphi(\bar{x})$ – функция, удовлетворяющая условию Липшица с показателем γ и константой M, рассматриваются множества $G = E_n \setminus \bar{\Omega}$ и $G_m = \{2^{-m-1} < x_n - \varphi(\bar{x}) \le 2^{-m},\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, строится соответствующее разбиение

единицы $\psi_m(x)$ и для $x \in \Omega$ полагается $(Tf)(x) = f(x)$, а для $x \in G$

$$(Tf)(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(x) \int_{E_n} f(\bar{x} - 2^{-\frac{m}{\gamma}} \bar{z}, x_n - A 2^{-m} z_n)\,\omega(z)\,dz,$$

где $\omega(z)$ – некоторое специальное ядро усреднения с носителем, содержащимся в первом координатном угле, а A – постоянная, зависящая только от M и n.

Рассматриваются открытые множества Ω с границей $\Gamma(\Omega)$ класса $Lip\,\gamma$, и для них с помощью оператора T и разбиения единицы строится оператор продолжения S; с его помощью для таких открытых множеств устанавливается ряд теорем о продолжении с сохранением и (при $0<\gamma<1$) с минимальным ухудшением класса для пространств Соболева, характеризующихся конечностью норм

$$\sum_{|\alpha|\le l} \| D^{\alpha} f \|_{L_p(\Omega)}, \quad \| f \|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \| D_i^{l} f \|_{L_p(\Omega)}.$$

Ранее известные результаты о продолжении для этих пространств развиваются и дополняются в следующих направлениях: оба варианта этих пространств рассматриваются при $1 \le p \le \infty$; $\Gamma(\Omega) \in Lip\,\gamma$, $0<\gamma\le 1$; продолжающая функция $(Sf)(x)$ бесконечно дифференцируема для $x \in E_n \setminus \bar{\Omega}$, причем порядок роста производных $D^{\alpha}(Sf)(x)$, $|\alpha| > l$, при подходе к границе является в некотором смысле наилучшим.

Эти результаты изложены в заметке автора [5] и в работе [6] (с доказательством). Метод построения оператора T близок к методу построения оператора приближения функций, использованного в работе автора [7].

С помощью оператора T, применяя новый метод склейки локальных продолжений, при котором не используется разбиение единицы, мы строим также оператор продолжения R, позволяющий для случая $\Gamma(\Omega) \in Lip\,1$ ограниченным образом продолжать функции с сохранением полунорм

$$\sum_{|\alpha|=l} |D^{\alpha} f|_{L_p(\Omega)}, \quad \sum_{i=1}^{n} |D_i^{l} f|_{L_p(\Omega)}$$

с Ω на некоторое $\Omega_1 \supset \bar{\Omega}$ (вообще говоря, нельзя взять $\Omega_1 = E_n$).

Литература

1. H e s t e n e s M.R.-"Duke Math.J." ,1941, v.8, p.183-192.
2. C a l d e r o n A.P.-"Proc.Symp.Pure Math.", 1961, v.5, p.33-49.
3. S t e i n E.M. Singular integrals and differentiability propeeties of functions,-Princeton, 1970.
4. W h i t n e y H.-"Trans.Amer.Math.Soc.", 1934, v.36, p.63-89.
5. Б у р е н к о в В.И. - "Докл. АН СССР", 1975, т.224, № 2, с.269-272.
6. Б у р е н к о в В.И. - "Труды Мат. ин-та АН СССР", 1976, т.140, с.27-67.
7. Б у р е н к о в В.И. - "Труды Мат. ин-та АН СССР", 1974, т.131, с.39-50.

УДК 517.564

ОБОСНОВАНИЕ КОРОТКОВОЛНОВОЙ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ И АСИМПТОТИКА ПРИ $t \to \infty$ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

Б.Р.В а й н б е р г (Москва)

Пусть $L = L\left(x, i\frac{\partial}{\partial t}, i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ - гиперболическая матрица из операторов порядка не выше m, которая при $|x| < a$ имеет постоянные коэффициенты и является однородной. Пусть Ω - внешность ограниченной области в R^n (или $\Omega = R^n$), $\partial\Omega \subset \{x : |x| < a\}$ и задача

$$L v = 0,\ x \in \Omega;\ Bv|_{\partial\Omega} = 0;\ v_t^{(j)}\Big|_{t=0} = 0,\ j < m-1,\ v_t^{(m-1)}\Big|_{t=0} = f(x) \quad (1)$$

коэрцитивна. Предполагается, что соответствующая стационарная задача

$$L\left(x,\kappa,i\frac{\partial}{\partial x}\right)u=f(x),\ x\in\Omega;\quad Bu\Big|_{\partial\Omega}=0 \tag{2}$$

является эллиптической задачей с параметрами хотя бы для одного луча $\arg\kappa=\varphi,\ 0<\varphi<\pi.$

Изучаются следующие три вопроса:

1°. Асимптотика по гладкости матрицы Грина задачи (1).

2°. Асимптотика решений задачи (1) при $t\to\infty$.

3°. Коротковолновая асимптотика (при $|Re\,\kappa|\to\infty$) резольвенты задачи (2).

Пусть H^s - пространство Соболева функций в Ω, $H^s_a\subset H^s$ - подпространство, состоящее из функций, равных нулю при $|x|>a$, $I_1: H^s_a\to H^s$ - оператор вложения, I_2 - оператор ограничения функций на область $|x|<b$, $b\geqslant a$. Пусть R_κ, $\arg\kappa=\varphi$, - оператор, переводящий $f\in H^s$ в решение задачи (2), и $\hat{R}_\kappa=I_2R_\kappa I_1: H^s_a\to\to H^{s+m}(|x|<b)$. Оператор $\hat{R}_\kappa$ допускает мероморфное продолжение на всю плоскость κ, если n нечетно, или на плоскость с разрезом по $Re\,\kappa=0$, $Im\,\kappa<0$, если n четно.

Пусть $\Omega=R^n$. Тогда ответ на вопрос 1° известен, и, например, с помощью канонического оператора В.П.Маслова можно построить матрицу E_N, являющуюся решением задачи (1) с $f(x)=\delta(x-x_0)+f_N(x,x_0,t)$, $f_N\in C^N$. Пусть $\sigma(L)$ - старшая однородная часть L, $H=\det\sigma(L)$. Вводится следующее (необходимое) ограничение: выпущенные из шара $|x|<a$ с $H=0$ траектории динамической системы, отвечающей гамильтониану H, должны уходить на бесконечность. Тогда E_N можно построить так, чтобы $E_N=0$ при $|x_0|<a, |x|<b$ и $t\gg1$. Пусть $\tilde{E}^b_{N,\kappa}$ - преобразование Фурье (от t к κ) интегрального оператора с ядром E_N и

$$U_{\alpha,\beta}=\{\kappa: |Im\,\kappa|<\alpha\ln|Re\,\kappa|-\beta\}.$$

Доказывается, что при некоторых $\alpha, \beta > 0$ оператор $\tilde{E}^{b}_{N,K}$ дает асимптотику $\hat{R}_K$ при $|K| \to \infty$, $K \in U_{\alpha,\beta}$. В частности, $\hat{R}_K$ не имеет полюсов в $U_{\alpha,\beta}$. Эти результаты получены при отсутствии каких-либо сведений о поведении решений задачи (1) при $t \to \infty$. Наоборот, найденные при этом оценки оператора $\hat{R}_K$ позволяют получить асимптотику решений задачи (1) при $|x| < b$, $t \to \infty$, $f \in H^s_a$. Эта асимптотика существенно (особенно при четном n) зависит также от поведения $\hat{R}_K$ при $K \to 0$, которое подробно изучается.

Аналогичные результаты получены для задачи во внешности ограниченной области. При этом основное условие налагается не на динамическую систему, а на матрицу Грина и заключается в том, что ее особенности должны уходить на бесконечность при $t \to \infty$.

В качестве примера дается обоснование коротковолновой асимптотики решения задачи рассеяния.

УДК 518.512

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОТЫСКАНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК НЕКОТОРЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Б.А.В е р т г е й м (Новосибирск)

1. Исследование многих операторных уравнений приводит к задаче о неподвижной точке (н.т.) в условиях теоремы Брауэра. Приближения к н.т. можно строить с помощью симплициальных разбиений на основе леммы Шпернера, используя экономные алгоритмы поиска так называемого представительного (нормального) частичного симплекса (см. [1-4]).

Достаточным условием существования вблизи изолированной н.т. представительного симплекса является отличие от нуля индекса этой точки; оценка близости такого симплекса к н.т. основана на лемме Лебега о су-

ществовании для конечного открытого покрытия компакта K такого $\delta > 0$ (число Лебега), что каждое множество диаметра $< \delta$ содержится в одном из множеств покрытия (см. [3, теоремы 1,2]). В ряде случаев эта оценка упрощается. Подобные способы применимы и для многозначных отображений в условиях теоремы Какутани. Эти способы сходятся медленно, но они могут дать начальное приближение, которое при достаточной гладкости оператора вблизи от н.т. уточняется быстросходящимися методами типа Ньютона-Канторовича.

2. В ряде случаев, в том числе при неединственности н.т., можно, преобразовав задачу, применить следующее предложение.

Пусть для уравнения $\varphi(x) = 0$, $\varphi : X \to Y$ (X, Y – пространства Банаха, φ – оператор, дифференцируемый по Фреше) и для начальной точки a выполнены условия: $\mathrm{Im}\, \varphi'(a) = Y$; $\ker \varphi'(a) = N$ имеет в X топологическое дополнение M ; φ' удовлетворяет условию Гёльдера, норма $\|\varphi(a)\|$ мала (эти условия допускают количественное уточнение). Перейдем к уравнению относительно $\eta \in M$, $\varphi(\xi + \eta) = 0$, где ξ фиксировано, близко к a, $\xi \in a + N$. Тогда для решения этого уравнения применим метод Ньютона-Канторовича с $\eta_0 = 0$. Данный способ имеет ряд преимуществ по сравнению с [5].

Литература

1. S c a r f H.-" SIAM J.Appl.", 1967, v.15, N 5,p.1238.
2. K u h n H.-"Proc.Nat.Acad.Sci.USA", 1968, v.61, p.1238-1242.
3. В е р т г е й м Б.А. - "Докл. АН СССР", 1970, т.191, №1, с.9-11.
4. E a v e s B.-"Math.Prog.", 1972, v.3, N 1, p.1-22.
5. Р а к о в щ и к Л.С. - "Журн. вычислит. математики и мат. физики", 1968, т.8, №6, с.1208-1217.

УДК 517.946

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ

В.Н.В р а г о в (Новосибирск)

Рассмотрим смешанно-составное уравнение

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(x_0 \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + u_{x_0 x_0} + \sum_{i=0}^{n} a_i(x) u_{x_i} + c(x) u\right) = f \qquad (1)$$

в ограниченной односвязной области $D \subset R^{n+1}$ с границей Γ, которая состоит при $x_0 > 0$ из гладкой поверхности σ, а при $x_0 < 0$ из характеристического конуса

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \frac{2}{3}(-x_0)^{3/2} = 1, \qquad x_0 < 0.$$

Для простоты предположим, что коэффициенты уравнения (1) бесконечно дифференцируемы в замкнутой области $\bar{D}$.

К р а е в а я з а д а ч а. Найти решение уравнения (1) в области D, такое что

$$u\big|_{\Gamma} = 0. \qquad (2)$$

Обозначим через $n = (n_0, n_1, \ldots, n_n)$ вектор внутренней нормали.

Т е о р е м а. Пусть на поверхности σ выполнено неравенство $n_0(x) \le 0$ и $2a_0(x) > n a_i^2(x)$, $c_{x_0}(x) \ge 0$, $x \in D$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для любой функции $f \in W_2^{-1}(D)$ существует слабое обобщенное решение задачи (1)-(2) из пространства Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и сильное решение этой задачи единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проводится с помощью энергетических оценок для прямой задачи (1)-(2) и ей сопряженной.

Литература

1. Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С. - "Сиб. мат. журн.", 1961, т.2, № 1, с.7-20.

2. Врагов В.Н. - "Дифференц. уравнения", 1973, т.9, № 1, с.169-171.

УДК 517.946

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОЙ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.М.Гаджиев (Махачкала)

В различных задачах механики и акустики при описании процессов совместного распространения тепловых и звуковых колебаний встречаются системы гиперболо-параболических уравнений.

В прямоугольнике $D=\{0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq h\}$ на плоскости XoY для системы

$$
\begin{gathered}
y^m u_{yy}-u_{xx}+a_1(x,y)u_y+b_1(x,y)u_x+c_1(x,y)u+\alpha_1\sigma_x+\beta_1\sigma=f_1(x,y),\\
\sigma_y-\sigma_{xx}+a_2(x,y)u_y+b_2(x,y)u_x+c_2(x,y)u+\alpha_2\sigma_x+\beta_2\sigma=f_2(x,y)
\end{gathered}
\tag{1}
$$

рассматривается "видоизмененная" смешанная задача [1] : найти решение системы (1) из пространства Соболева $W_2^2(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x,0)=\sigma(x,0)=u(0,y)=\sigma(0,y)=u(1,y)=\sigma(1,y)=0. \tag{2}$$

Предположим для простоты, что функции $a_i(x,y)$, $b_i(x,y)$, $c_i(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируемы в $\bar{D}$ $(i=1,2)$. Имеет место следующая

Теорема. Пусть $a_1(x,0)\geq\delta>0$ при $m>1$, $a_1(x,0)-1\geq\delta>0$ при $m=1$. Тогда для любых функций

$f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ из пространства $W_2^1(D)$ существует единственное решение смешанной задачи (1), (2) из пространства $W_2^2(D)$.

При доказательстве теоремы система (1) сводится к симметрической системе дифференциальных уравнений первого порядка [2] и далее применяется метод "ε-регуляризации" [3].

Литература

1. Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Изд-во НГУ, 1973.
2. Friedrichs K.O.-"Communs Pure and Appl.Math.",1958,v.11, N 3,p.333-414.
3. Врагов В.Н. - "Докл. АН СССР", 1975, т.224, № 2, с.273-276.

УДК 517.948

ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТЯХ С "РЕБРАМИ"

А.В.Глушак (Воронеж)

Пусть D - область евклидова пространства $(x,y)\in R_1\times R_n$, ограниченная частью гиперплоскости $x=0$ (обозначим ее Γ_2) и гладкой поверхностью Γ_1, лежащей в полупространстве $x>0$.

В области D рассматривается граничная задача

$$L(x,y,q,D_\alpha,D_y)u\equiv\sum_{k+p+|\beta|\le 2m}a_{kp\beta}(x,y)q^k D_\alpha^p D_y^\beta u=f, \qquad (1)$$

$$B_j(x,y,q,D_\alpha,D_y)u\Big|_{\Gamma_1}\equiv\sum_{k+p+|\beta|\le m_j}b^j_{kp\beta}(x,y)q^k D_\alpha^p D_y^\beta u\Big|_{\Gamma_1}=g_j \quad (j=1,\dots,m), \qquad (2)$$

где $D_\alpha = i\sqrt{\alpha(x)}\,\partial_x\sqrt{\alpha(x)}$, $\alpha(x)\in C^{2m}(\bar{R}_1^+)$, $\alpha(0)=0$, $\alpha(x)>0$

при $x>0$, $\forall x>0$ $\int_x^\infty \frac{dx}{\alpha(x)}<\infty$, $\lim_{x\to 0}\int_x^\infty \frac{dx}{\alpha(x)}=\infty$;

q – комплексный параметр, принадлежащий множеству $Q=\{q:|\arg q|\le\varphi\}$.

Будем обозначать через $H_\alpha^s(D)$ ($s\ge 0$ целое) пространство обобщенных функций, для которых конечна норма

$$\|u\|^2_{s,\alpha,q}=\sum_{k+\rho+|\beta|\le s}\int_D |q|^{2k}\,|D_\alpha^\rho\,\partial_y^\beta u|^2\,dx\,dy.$$

Аналогично вводится граничное пространство $H_\alpha^s(\Gamma_1)$ с нормой $\ll\cdot\gg_{s,\alpha,q}$.

Т е о р е м а. Пусть $s-\max\{2m, m_j+1\}\ge 0$, оператор L α-эллиптичен, выполнено условие дополнительности. Тогда существует такое $q_0>0$, что при всех $q\in Q$, $|q|>q_0$ и любых $f\in H_\alpha^{s-2m}(D)$, $g_j\in H_\alpha^{s-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ $(j=1,2,\ldots,m)$, задача (1)-(2) имеет единственное решение $u\in H_\alpha^s(D)$ и справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{s,\alpha,q}\le c\Big(\|f\|_{s-2m,\alpha,q}+\sum_{j=1}^m \ll g_j\gg_{s-m_j-\frac{1}{2},\alpha,q}\Big).$$

УДК 517.948

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В.П.Г л у ш к о, В.Н.П а н ю ш к и н (Воронеж)

Устанавливается теорема существования решения общей квазилинейной граничной задачи для вырождающегося на границе области $D\subset R_n$ эллиптического квазилинейного уравнения порядка $2m$. С помощью известного метода "склеивания" указанная задача сводится к рассмотрению в полу-

пространстве R_n^+ $((t,x)\in R_n^+ : 0<t<\infty,\ x\in R_{n-1})$ следующих уравнений:

$$L(t,\partial_t,D_x,\lambda)u=L_0(t,\partial_t,D_x,\lambda)u+L'(t,\partial_t,D_x)u=f(t,x,u,\dots,D^{2m-1}u); \quad (1)$$

$$B_\sigma(\partial_t,D_x)u\big|_{t=0}=g_\sigma(x,u\big|_{t=0},\dots,D^{m_\sigma-1}u\big|_{t=0}),\ 1\le\sigma\le m, \quad (2)$$

где главная часть L_0 оператора L представима в виде произведения m вырождающихся эллиптических операторов второго порядка; m_σ – порядок (вырожденный) граничных операторов B_σ. На основе свойств оператора соответствующей линейной задачи при определенных условиях на f и g_σ доказывается с помошью принципа Шаудера, что при достаточно больших $\lambda>0$ существует решение поставленной задачи в пространстве $H_{s,\alpha}(D)$, где $s\ge max\{2m, m_\sigma+2\}$.

УДК 517.948

НУЛЬ-ПРОСТРАНСТВА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В.П.Г л у ш к о, Э.Д.Г у л я н с к и й (Воронеж)

Устанавливается условие конечномерности ядра оператора, порожденного вырождающимся эллиптическим уравнением второго порядка в полосе E_n^d $((t,x)\in E_n^d : 0<t<d,\ x\in E_{n-1})$, граничным условием общего вида на гиперплоскости вырождения $t=0$ и условием $u\big|_{t=d}=0$. При определенных требованиях на поведение коэффициентов рассматриваемых дифференциальных операторов при $|x|\to\infty$ доказывается, что нуль-пространство (ядро) соответствующей граничной задачи конечномерно. Одновременно выводятся новые априорные оценки решений вырождающихся эллиптических уравнений, содержащие весовые множители вида $\sigma^\kappa(x)=(1+|x|^2)^{\kappa/2}$.

УДК 517.947

НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

М.Л.Горбачук, В.И.Горбачук, В.А.Михайлец

(Киев)

Рассматривается выражение

$$\ell[y] = -y'' + Q(t)y \quad (t \in [a,b],\ -\infty < a < b < \infty), \qquad (1)$$

где $Q(t) = Q^*(t)$ – при каждом t полуограниченный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, удовлетворяющий некоторым условиям гладкости по t. Все максимально диссипативные расширения $\tilde{L}_U$ минимального оператора L_0, порожденного выражением (1) в пространстве $L_2(H,(a,b))$, описываются с помощью граничных условий вида

$$(E-U)Y' + i(E+U)Y = 0, \qquad (2)$$

где U – произвольный оператор сжатия в $H \oplus H$, а Y и Y' – векторы из $H \oplus H$, выражающиеся через значения функции $y \in \mathcal{D}(\tilde{L}_U)$ и ее производной на концах интервала $[a,b]$. В предположении, что операторы $Q(t)$ при каждом t имеют дискретный спектр, максимально диссипативные расширения $\tilde{L}_U$ с дискретным спектром выделяются условием $(E-U) \in \gamma_\infty$ (γ_∞ – множество всех вполне непрерывных операторов). Если в том же предположении

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i(Q(t))|^{p-\frac{1}{2}} < \infty$$

($\lambda_i(S)$ – собственные числа оператора S), то $R_\lambda(\tilde{L}_U) = (\tilde{L}_U - \lambda E)^{-1}$ $(\operatorname{Im}\lambda < 0)$ принадлежит идеалу Неймана-Шэттена γ_p в $L_2(H,(a,b))$ тогда и только тогда, когда $(E-U) \in \gamma_p$. В частности, если $Q(t)$ – положительные операторы, $Q^{-\frac{1}{2}}(t) \in \gamma_1$ и

$(E - U) \in \gamma_1$, то расширение $\tilde{L}_U$ имеет полную систему собственных и присоединенных функций. Для некоторых спе іальных классов граничных задач даются другие критерии полноты системы собственных и присоединенных функций соответствуюших им расширений $\tilde{L}_U$, а также исследуется асимптотическое поведение собственных чисел (дается несколько членов асимптотики). Полученные результаты иллюстрируются на некоторых уравнениях с частными производными.

УДК 517.948

О НЁТЕРОВОСТИ И ИНДЕКСЕ БИСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р.В.Д у д у ч а в а (Тбилиси)

Получены необходимые и достаточные условия нётеровости бисингулярных операторов $A = a_0 + a_1 (S_{\Gamma_1} \otimes I) + a_2 (I \otimes S_{\Gamma_2}) + a_3 (S_{\Gamma_1} \otimes S_{\Gamma_2})$, где $(S_{\Gamma_k} \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t}$, Γ_1 и Γ_2 - кусочно-гладкие линии Ляпунова, а $a_j (t_1, t_2)$ - разрывные матрицы-функции на $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. Операторы рассматриваются в пространствах с весом

$$L_p^m (\Gamma, \rho) \quad (\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2).$$

Получен алгоритм вычисления индекса указанных операторов, а в некоторых случаях имеется эффективная формула.

Рассматриваются также связанные с этими операторами граничные задачи теории функций двух переменных.

УДК 517.92

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРА ОПЕРАТОРА ГРИНА ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ОСИ

П.П.З а б р е й к о (Ярославль)

Пусть C - пространство ограниченных и непрерывных на всей оси вектор-функций с равномерной нормой, C^1 - пространство функций x, для которых $x' \in C$, с обычной нормой, H - пространство вектор-функций, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|x\|_H = \sup_{|\alpha-\beta|\leq 1} \left| \int_\alpha^\beta x(s)ds \right|.$$

Рассматривается семейство операторов $L_\varepsilon = \frac{d}{dt} - A_\varepsilon(t)$, где $A_\varepsilon(t)$ - семейство ограниченных и непрерывных на оси матриц (непрерывная зависимость от ε не предполагается), причем матрица $B = A_0(t)$ не зависит от t и не имеет нулевого и чисто мнимых собственных значений. Последнее означает, что L_0 является изоморфизмом между C^1 и C. Нас интересует вопрос о том, при каких условиях операторы L_ε при малых ε также являются изоморфизмами между C^1 и C и когда при $\varepsilon \to 0$ справедливо соотношение $\| L_\varepsilon^{-1} - L_0^{-1} \|_{C\to C} \to 0$.

Л е м м а 1. $\|L_0\|_{C\to H}$, $\|L_0^{-1}\|_{H\to C} < \infty$.

Пусть $S_\varepsilon = L_\varepsilon - L_0$ и $D_\varepsilon = S_\varepsilon L_0^{-1}$.

Л е м м а 2. <u>Если</u> $\| S_\varepsilon \|_{C'\to H} \to 0$ <u>при</u> $\varepsilon \to 0$, <u>то</u> $\|D_\varepsilon^2\|_{C\to C} \to 0$ <u>при</u> $\varepsilon \to 0$.

В условиях леммы 2 соотношение $\|D_\varepsilon\|_{C\to C} \to 0$, вообще говоря, не имеет места.

Т е о р е м а. <u>Для того чтобы при малых</u> ε <u>операторы</u> L_ε

были изоморфизмами между C^1 и C, и чтобы при $\varepsilon \to 0$ выполнялось соотношение $\| L_\varepsilon^{-1} - L_0^{-1} \|_{C\to C} \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы при $\varepsilon \to 0$ выполнялось соотношение $| S_\varepsilon |_{C' \to H} \to 0$.

Доказательство следует из лемм 1, 2 и простого соображения о том, что операторы $[I + D_\varepsilon]^{-1}$ существуют и ограничены, если D_ε ограничен и $| D_\varepsilon^2 |_{C\to C} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Предполагаемая схема переносится на случай, когда $A_0(t)$ зависит от t, а L_0 является изоморфизмом между C^1 и C; когда рассматриваются дифференциально-разностные операторы и т.д. Получаемые на этом пути результаты используются при анализе применимости принципа усреднения в различных условиях.

Литература

1. Митроновский Ю.А. Лекции по методу усреднения, Киев, 1971.
2. Забрейко П.П., Красносельский М.А., Колесов Ю.С. - "Докл. АН СССР", 1969, т.18, № 3, с.526-529.
3. Бурд В.Ш., Красносельский М.А., Колесов Ю.С. - "Изв. АН СССР. Серия мат.", 1969, т.33, с.1089-1119.

УДК 513.88

ВОПРОСЫ УМНОЖЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В.К.Иванов (Свердловск)

В основу теории умножения обобщенных функций (распределений из $\mathcal{D}'$) положена восходящая к С.Л.Соболеву [1] и далее развитая в [2] и [3] идея аппроксимации их обычными функциями. В соответствии с [4] и [5] распределение $f(x)$ приближается функцией

$$f(x,y) = \hat{f}^{+}(z) + \hat{f}^{-}(\bar{z}) = \hat{f}^{+}(x+iy) + \hat{f}^{-}(x-iy), \quad y>0$$

(аналитическое представление $f(x)$), и умножение распределений сводится к умножению их аналитических представлений. Это приводит к расширению пространства $\mathcal{D}'$ до некоторого пространства $\mathcal{D}^* \supset \mathcal{D}'$, элементы которого называются гиперраспределениями.

Произведение распределений, вообще говоря, есть гиперраспределение. Оно определяется однозначно, и при его дифференцировании имеет место правило Лейбница. В ряде случаев произведение распределений является обычным распределением, что приводит, например, к следующим соотношениям между произведениями распределений: $x_+^{-\frac{1}{2}} \cdot x_-^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \delta(x)$. Дан простой способ вывода таких соотношений.

Хотя произведение гиперраспределений не определено, тем не менее некоторые подпространства пространства $\mathcal{D}^*$ могут быть превращены в алгебры. Примером является подпространство $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{D}^*$, порождаемое $P(x^{-m})$, $\delta^{(n)}(x)$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, и их бинарными произведениями. Здесь

$$P(x^{-m}) \stackrel{def}{=} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{d^m}{dx^m} \ln|x|.$$

Аналогичная теория развита и для распределений от многих переменных [5].

Литература

1. Соболев С.Л. Задача Коши в пространстве функционалов. - "Докл. АН СССР", 1935, т.3, № 7, с.291-294.

2. Микусинский Я., Сикорский Р. Элементарная теория обобщенных функций. М., ИЛ., 1959.

3. Tillmann H.G.-"Math.Z.", 1961, v.77, S.106-124.

4. И в а н о в В.К. - "Изв. вузов. Математика", 1972, № 3 (118), с.10-19.

5. И в а н о в В.К. - "Докл. АН СССР", 1972, т.204, № 5, с.1045-1048.

6. И в а н о в В.К., В е р ж б а л о в и ч Т.А. - В кн.: Некоторые приложения теории меры. Свердловск, УНЦ АН СССР, с.3-10.

УДК 517.946

КОРРЕКТНОСТЬ В КЛАССАХ ЖЕВРЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В.Я.И в р и й (Магнитогорск)

Изучается корректность в классах Жевре нехарактеристической задачи Коши для линейных дифференциальных операторов с аналитическими коэффициентами; при этом рассматриваются локальная и глобальная корректности в индуктивных классах и глобальная корректность в проективных классах Жевре. Показывается, что для корректности задачи Коши в каком-либо смысле из перечисленных выше аспектов необходима гиперболичность оператора. Обратно, если оператор гиперболичен и область - линза пространственного типа, то задача Коши индуктивно глобально корректна, если показатель класса $\varkappa < \varkappa(r)$, и проективно корректна и индуктивно локально корректна, если $\varkappa \leqslant \varkappa(r) = (2r-2)/(2r-3)$, r - максимальная кратность характеристических корней.

Изучаются условия корректности в фиксированном классе Жевре. Для операторов с характеристиками постоянной кратности даются необходимые и достаточные условия, обобщающие условия Е.Е.Леви (условия C^∞-корректности). Для операторов с характеристиками переменной кратности доказываются необходимые условия; для некоторых модельных операторов доказывается и достаточность полученных условий.

УДК 517.944

ВОЛНОВЫЕ ФРОНТЫ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ (МИКРОЛОКАЛЬНО) ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Я.И в р и й (Магнитогорск)

1. Изучается распространение волновых фронтов решений микролокально гиперболических псевдодифференциальных уравнений вида

$$Pu \equiv (x_0 D_0 + B(x', D'))u = f,$$

где B - псевдодифференциальный оператор порядка 1 по переменным $x' = (x_1, \dots, x_\ell)$ с неотрицательным главным символом; рассмотрения проводятся вблизи $x_0 = \xi_0 = 0$; бихарактеристики этого уравнения простые всюду, исключая, быть может, одну точку, в которой они двукратные. Указывается существование правого параметрикса с направленным распространением волновых фронтов; изучаются эффекты, связанные с раздвоением бихарактеристик. Рассматриваются примеры.

2. Также изучается распространение волновых фронтов решений некоторых гиперболических псевдодифференциальных уравнений с характеристиками переменной кратности, которая, однако, постоянна вдоль бихарактеристик. Для изучаемых операторов может иметь место коническая рефракция, т.е. явление, когда отдельные точки волновых фронтов начальных данных "расползаются" в целое многообразие. Указываются условия, достаточные для отсутствия конической рефракции. Рассматриваются примеры.

УДК 519.948

О ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВАХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Л.А.К а л я к и н (Свердловск)

Исследуется влияние малого параметра на сходимость приближенных методов решения вариационных неравенств.

Пусть V_1, V_0 – рефлексивные строго выпуклые банаховы пространства, H гильбертово; вложения $V_1 \subset V_0 \subset H$ непрерывны и V_1 (V_0) плотно в V_0 (в H). Пусть A_i $(i=0,1)$ – ограниченный, монотонный, семинепрерывный коэрцитивный оператор из V_i в сопряженное пространство V_i'. Рассматривается вариационное неравенство [1, 2]:

$$u_\varepsilon \in K,\ \varepsilon>0,\ \varepsilon(A_1(u_\varepsilon), v-u_\varepsilon)+(A_0(u_\varepsilon), v-u_\varepsilon)\geq(f, v-u_\varepsilon),\ \forall v\in K$$

$$u_0\in\bar{K},\ \varepsilon=0,\ (A_0(u_0), v-u_0)\geq(f, v-u_0),\ \forall v\in K, \tag{1}$$

где K – замкнутое выпуклое множество в V_1, $\bar{K}$ – его замыкание в V_0, $f\in V_0'$. При этих условиях установлена слабая сходимость $u_\varepsilon \longrightarrow u_0$ в V_0 и $(A_0(u_\varepsilon)-A_0(u_0), u_\varepsilon-u_0)\longrightarrow 0$ при $\varepsilon\longrightarrow 0$. Для приближенного решения задачи (1) применяется комбинация методов штрафа и Галеркина (см. [2]). Показано, что в случае положительно определенного оператора A_0 получаемые приближения сходятся сильно в V_0 к точному решению u_ε равномерно относительно ε. Подобные результаты о сходимости имеют место и в случае вариационного неравенства: $u_\varepsilon\in K$,

$$(Lv, u_\varepsilon - v)+\varepsilon(A_1(u_\varepsilon), v-u_\varepsilon)+(A_0(u_\varepsilon), v-u_\varepsilon)\geq(f, v-u_\varepsilon), \forall v\in K\cap D(L),$$

где L – неограниченный замкнутый линейный оператор из V_1 в V_1' с условиями $L\geq 0$, $L^*\geq 0$ (см. [2, с.396]).

Литература

1. Lions J.L. Perturbation sunguliers dans les problemes aux limites eten controle optimal, Lect.Notes Math.", Springer-Verlag,1973, N 323.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., "Мир", 1972.

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

В.С.Климов (Ярославль)

Рассматриваются теоремы вложения для пространств Орлича-Соболева и их приложения к вариационным и краевым задачам. Имеет место следующий результат. Пусть $f(\xi) = f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ – выпуклая четная функция, причем $f(0) = 0$ и при любом $t > 0$ множество $\{\xi : f(\xi) \le t\}$ есть ограниченное замкнутое тело в R^n. Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^1_f(\Omega)$ совокупность функций из $\overset{\circ}{W}{}^1_1(\Omega)$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_f(\Omega)} = \inf k : \int_\Omega f\left(\frac{\nabla u}{k}\right) dx \le 1.$$

Здесь и далее Ω – ограниченная область в R^n, лебегова мера которой равна 1.

Теорема. Пусть $\Phi(S)$ – четная функция одного переменного, причем $mes_n\{\xi : \Phi(|\xi|) \le t\} = mes_n\{\xi : f(\xi) \le t\}$. Пусть $E(\Omega)$ – симметричное пространство функций на Ω, $E(0,1)$ – соответствующее ему пространство на $[0,1]$. Если оператор

$$Hx = \int_t^1 s^{\frac{1}{n}-1} x(s)ds$$

действует и непрерывен из $L_\Phi(0,1)$ в $E(0,1)$, то пространство $\overset{\circ}{W}{}^1_f(\Omega)$ непрерывно вложено в $E(\Omega)$.

В качестве следствий этой теоремы получаются результаты Гельмана, Рабиновича, Дональдсона, Трудингера, Похожаева, Мозера и др. Приводятся приложения теорем вложения к краевым и вариационным задачам с сильными нелинейностями. Основные результаты опубликованы в "Докл. АН СССР", 1974, т.217, № 2, с.272–275; "Функциональный анализ", 1974, № 1, с.79.

УДК 513.88

ОПЕРАТОРЫ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

М.А.К р а с н о с е л ь с к и й, А.В.П о к р о в с к и й

(Москва)

Рассматриваются задачи с нелинейностями гистерезисного и релейного типа.

1. Преобразователи с гистерезисными нелинейностями трактуются как однозначные нелинейные операторы, определенные на соответствующих функциональных пространствах входных сигналов и сопоставляющие им выходные сигналы. Для построения некоторых классов таких операторов вначале конструируются "элементарные носители" гистерезисных нелинейностей – гистероны. Из гистеронов при помощи специальных интегральных представлений конструируются операторы, соответствующие более общим гистерезисным нелинейностям.

Основную роль играют гистероны первого рода, важность которых ясна, например, из следующей идентификационной теоремы: класс статических и управляемых преобразователей, устойчивых по отношению к шумам малой амплитуды, совпадает с классом гистеронов первого рода.

Операторная трактовка гистерезисных нелинейностей, основанная на

рассмотрении гистеронов, соответствует многим распространенным феноло- гическим моделям в теории пластичности и магнитизме (Максвелл, Больц- ман, Маделунг, Беккер, Бесселинг, А.Ю.Ишлинский и др.)

2. Для некоторых классов гистерезисных нелинейностей удобны их представления в виде континуальных аналогов систем параллельно соединенных реле. Такие представления применялись, по существу, еще Прейсахом и Гилтаем в теории магнетизма.

В операторной трактовке речь идет о специальных спектральных разложениях гистерезисных нелинейностей по простым разрывным операторам.

При помощи континуальных систем реле могут быть представлены лишь узкие классы гистерезисных нелинейностей. Удается найти условия, при которых такие и другие близкие им представления возможны.

3. Исследуются свойства введенных в рассмотрение операторов. Эти свойства позволяют применять общие методы функционального анализа для анализа различных уравнений с гистерезисными нелинейностями.

4. Сложности специального типа возникают при изучении уравнений даже с простейшими разрывными нелинейностями (типа идеального реле). Идеализации, приводящие к разрывным нелинейностям, часто хороши лишь в тех частях фазового пространства, в которых нет разрывов. В подобных ситуациях интересны лишь те решения, которые являются точками непрерывности соответствующих разрывных операторов.

Предлагаются условия существования таких решений для случая монотонных нелинейностей, и описан "челночный метод" их приближенного построения. Оказывается, многие гистерезисные нелинейности также обладают свойством монотонности.

УДК 517.945

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОПЕРАТОРОВ И ТЕХНИКА НЭША-МОЗЕРА

И.Я.К р у г л я к (Ярославль)

Пусть X, Y – банаховы пространства и f – дифференцируемое по Фреше отображение единичного шара T пространства X в Y. Предположим, что оператор $f'(x)$ имеет правый обратный оператор $g(x): Y \to X$ $(x \in T)$, не являющийся, однако, ограниченным. И пусть существует такое банахово пространство $Z \supset X$, что операторы $g(x)$ являются непрерывными операторами из Y в Z. В работах Зигеля, Нэша, Колмогорова, Мозера, Арнольда была разработана и применена специальная техника, позволяющая в ряде подобных ситуаций доказывать существование решения уравнений $f(x) = 0$ при условии, что $\|f(0)\|_Y$ достаточно мало. С помощью этой техники решен ряд важных и трудных проблем анализа, механики, уравнений в частных производных. Тем не менее возможности этой техники пока еще далеко не изучены. Об этом свидетельствуют появившиеся в последние годы работы, в которых конкретные задачи решались на основе теорем о неявной функции, близких, но отличных от классической теоремы Нэша-Мозера.

Анализ доказательств и условий показывает, что возможность применения техники Нэша-Мозера связана с интерполяционными свойствами операторов $\varphi_x(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h$. В подтверждение этого предположения приводится прозрачное доказательство теоремы (аналогичной теореме Нэша-Мозера), основанное на теоремах Ж.Петре об интерполяции линейных и нелинейных операторов.

УДК 518.1

О ЗАДАЧАХ ЗОЛОТАРЕВА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ (МЕТОДА ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ)

В.И.Л е б е д е в (Москва)

Чтобы построить итерационные методы переменных направлений решения операторных уравнений, важно решить следующие задачи. Пусть $\mathcal{B}$ - банахова алгебра ограниченных операторов, M - множество операторов из $\mathcal{B}$, спектр которых лежит на $[\eta, 1]$, $0<\eta<1$. Пусть

$$A_1, A_2 \in M,$$

$$T(\gamma) = (A_2+\gamma I)^{-1}(A_1-\gamma I)(A_1+\gamma I)^{-1}(A_2-\gamma I);$$

$$\bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n); \quad R_N = \prod_{i=1}^{N} T(\gamma_i);$$

$$S_N(\bar{\gamma}) = \sup_{A_i \in M} \| R_N \|, \quad E_N = \inf_{\bar{\gamma}} S_N.$$

З а д а ч а 1. Для заданного $N>0$ найти $\{\gamma_i\}_1^N$ такие, что

$$S_N(\bar{\gamma}) = E_N.$$

З а д а ч а 1'. Для заданного $N>0$ найти $\{\gamma_i\}_1^N$ такие, что $S_N(\bar{\gamma}) \leq CE_N$, где $C>1$ не зависит от N.

Эти задачи назовем задачами Золотарева, поскольку для коммутативной $\mathcal{B}$ они сводятся к задаче о нахождении дробно-рациональной функции вида

$$f_N(t) = \prod_{i=1}^{N} (t-\gamma_i)/(t+\gamma_i),$$

наименее отклоняющейся от нуля на $[\eta, 1]$, решенной в 1877 г. Золотаревым. (В 1961 г. этот результат был переоткрыт американскими математиками.) При построении бесконечно продолжаемых оптимальных итерационных методов возникает

З а д а ч а 2. Найти, если они существуют, бесконечные последовательности $\{\gamma_i\}_1^\infty$ и $\{N_n\}_1^\infty$ такие, что $\forall n \quad \delta_{N_n} = E_{N_n}$.

Когда $\mathcal{B}$ коммутативна, задача 2 сводится к следующей.

З а д а ч а 2$'$. Найти бесконечные последовательности $\{\gamma_i\}_1^\infty$ и $\{N_n\}_1^\infty$ такие, что $\sup\limits_{\ell \le t \le 1} |f_{N_n}| = E_{N_n}$,

где E_N – наименьшее отклонение от нуля на $[\ell, 1]$ функций типа $f_N(t)$.

Решение задачи 2$'$ найдено для последовательностей $\{N_n\}_1^\infty$ вида: $N_{n+1} = p_n N_n$, $N_0 = 2^h$, где p_n – нечетные простые числа, а $h \ge 0$ – целое.

Использование последовательностей $\{\gamma_i\}_1^\infty$ – решений задачи 2$'$ – при численном решении задач с некоммутативными операторами показало высокую скорость сходимости итерационного метода переменных направлений.

УДК 517.432

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫХ МЕТОДОВ В ТЕОРИИ ВЕТВЛЕНИЯ

Б.В. Л о г и н о в (Ташкент), В.А. Т р е н о г и н (Москва)

Рассматривается нелинейное уравнение

$$\mathcal{F}(x, \lambda) = 0, \tag{1}$$

где оператор $\mathcal{F}$ отображает окрестность нуля в $X \dotplus R^1$ в $\mathcal{Y}$ (X и $\mathcal{Y}$ – банаховы пространства) и является в ней достаточно гладким. Производная Фреше $A_0 = \mathcal{F}_x(0,0)$ предполагается нётеровым оператором. Уравнение (1) назовем инвариантным относительно группы G, если существуют ее представления L_g и K_g в пространствах X и $\mathcal{Y}$ соответственно, такие что $\mathcal{F}(L_g x, \lambda) = K_g \mathcal{F}(x, \lambda)$ при любом $g \in G$.

При условии L_g – инвариантности дополнения $X^{\infty-n}$ к подпространству нулей $N(A_0)$ оператора A_0 устанавливается инвариантность относительно группы G отвечающего (1) уравнения разветвления (УР), полученного как с помощью сужения оператора A_0, так и с помощью леммы Шмидта. Основным результатом является теорема о многопараметрических семействах решений (G – непрерывная группа), позволяющая при их отыскании понизить порядок УР. Эта редукция УР осуществляется различными способами и использует характер действия представлений группы G в некоторых конечномерных подпространствах, связанных с оператором A_0 .

Выясняется роль жордановой структуры оператора A_0 для возможностей редукции УР. Для задачи о точках бифуркации доказываются теоремы существования решений, использующие вид обобщенной жордановой структуры оператора A_0 .

Групповая симметрия в многомерном ветвлении впервые была использована В.И.Юдовичем в задаче о свободной конвенции в жидкости. В дальнейшем ростовской школой был рассмотрен ряд интересных конкретных задач. Здесь в качестве приложения рассматривается уравнение $\Delta w + \lambda w = f(w) = a_2 w^2 + \ldots$ на гладкой компактной гиперповерхности σ в R^{n+1} с краем (тогда $w|_{\partial\sigma} = 0$) или без края. Более детально изучен случай сферы в R^3 и общие поверхности вращения.

УДК 517.948

ФОРМУЛА ГРИНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С.Я.Л ь в и н (Воронеж)

1. Получена формула Грина для задачи в ограниченной области n-мерного пространства, порожденной эллиптической по Дуглису-Нирен-

бергу системой уравнений $\mathcal{L}u = f$ и граничными условиями любого порядка $Bu|_{\Gamma} = \varphi$. Формально сопряженная относительно формулы Грина задача $\hat{\mathcal{L}}v = g$, $B'v|_{\Gamma} = \psi$ также является эллиптической, при этом, вообще говоря, $\hat{\mathcal{L}} \neq \mathcal{L}^*$. Множество правых частей, для которых эта задача разрешима в шкале пространств С.Л.Соболева, описывается с помощью ядра сопряженной задачи.

2. Аналогичные результаты получены для общей граничной задачи для эллиптических операторов высокого порядка, вырождающихся на границе области и несущественно отличающихся вблизи этой границы от произведения α -эллиптических операторов второго порядка. Решения этой задачи понимаются в слабом смысле; при дополнительных ограничениях доказывается существование сильных решений, принадлежащим весовым пространствам С.Л.Соболева.

УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ, ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВНЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ

Б.П.П а н е я х (Москва)

Пусть M - гладкое компактное $(n+1)$ -мерное риманово многообразие без края и M^0 - его ориентированное C^∞- подмногообразие коразмерности 1. На M рассматривается псевдодифференциальный оператор $\mathcal{A}$ с гладким однородным символом $\mathcal{A}(X, \xi)$, отличным от нуля на кокасательном пучке $T_0^*(M)$ всюду, кроме, быть может, точек с $X \in M^0$. Пусть (t, x) - локальные координаты на M в окрестности M^0, причем $M^0 = \{t=0\}$, и пусть (τ, λ) - ковектор в точке (t, x). Предполагается, что $\mathcal{A}(0, x^0, \tau^0, \lambda^0) = 0 \Longrightarrow$ $\Rightarrow \partial_\tau \mathcal{A}(0, x^0, \tau^0, \lambda^0) \neq 0$. Тогда (см. [2]) в окрестности точки $(0, x^0, \tau^0, \lambda^0)$ символ $\mathcal{A}$ допускает факторизацию вида $\mathcal{A} = (\tau - \varkappa(t, x, \lambda)) \times$

$\times e(t,x,\tau,\lambda)$, где $e \neq 0$, а $\operatorname{Im} \varkappa(t,x,\lambda)$ либо не меняет знак, когда t переходит через 0 с "-" на "+", либо меняет его с "-" на "+", либо меняет его с "+" на "-". В последнем случае, который мы и рассматриваем, уравнение $\mathcal{A}u = f$ неразрешимо даже локально в окрестности любой точки $(0,x)$ для "большинства" C^∞-правых частей f. Тем не менее оказывается справедливой следующая

Т е о р е м а. Для любой функции $f \in L_2(M)$, ортогональной конечномерному подпространству, существует решение $u \in L_2(M)$ задачи

$$\mathcal{A}u = f \quad \text{на } M \setminus M^0. \tag{1}$$

Если $f=0$, то такие решения образуют конечномерное подпространство.

Идея доказательства состоит в следующем. Пусть уравнение $\mathcal{A}(0,x,\tau,\lambda) = 0$ имеет m корней $\tau = \tau(x,\lambda)$. Рассмотрим гладкую функцию $q(X)$ на M, отличную от 0 на $M \setminus M^0$ и равную t^m в окрестности M^0. Тогда в $\mathcal{D}'(M)$ задача (1) оказывается равносильной уравнению $q\mathcal{A}u = qf$, для которого нормальная разрешимость из L_2 в L_2 доказывается построением правого и левого регуляризаторов оператора $q\mathcal{A}$. В случае $m=1$ и оператора $\mathcal{A}$, отвечающего задаче с косой производной, наш результат содержится в работе [1].

Л и т е р а т у р а

1. М а з ь я В.Г., П а н е я х Б.П. - "Труды Моск. матем. об-ва", 1974, т.31, с.237-295.

2. Э с к и н Г.И. - "Мат. сб.", 1970, т.82, № 4, с.585-628.

УДК 517.5

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ С ПЕРЕМЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В ПРОСТРАНСТВЕ БОХНЕРА

А.Е.Поличка (Хабаровск)

Рассматривается задача Коши

$$v'(t)+A(t)v(t)=f(t),\quad 0\leq t\leq 1,\quad v(0)=0, \tag{1}$$

в банаховом пространстве E и разностный метод ее приближенного решения

$$\Delta u_k/\tau + A[(k+1)\tau]u_{k+1}=\varphi_{k+1},\ 0\leq k\leq N-1,\ u_0=0. \tag{2}$$

Здесь $\tau=1/N$; $\Delta u_k/\tau=(u_{k+1}-u_k)/\tau$, $(u_k)_1^N$, $(\varphi_k)_1^N$ – искомая и заданная сеточные функции, $A(t)$ для каждого $0\leq t\leq 1$ порождает аналитическую полугруппу.

Разностная задача (2) корректно разрешима в разностном пространстве Бохнера $B_p(\tau)$, если для любой $(\varphi_k)_1^N\in B_p(\tau)$ и при любом $0<\tau\leq\tau_0$ существует единственное решение $(u_k)_1^N$ задачи (2) и для него справедливо неравенство коэрцитивности

$$\|(\Delta u_k/\tau)_0^{N-1}\|_{B_p(\tau)}+\|(A(k\tau)u_k)_1^N\|_{B_p(\tau)}\leq M(p)\|(\varphi_k)_1^N\|_{B_p(\tau)} \tag{3}$$

с $M(p)$, не зависящим от τ и φ_k.

Теорема. Пусть $\|[A(t)-A(s)]A^{-1}(0)\|\leq M|t-s|^{\varepsilon}$, $0<\varepsilon\leq 1$, и пусть задача (2) с $A(t)\equiv A(s)$ для всех $0\leq s\leq 1$ корректно разрешима в $B_{p_0}(\tau)$ при некотором $1<p_0<\infty$. Тогда задача (2) с переменным $A(t)$ корректно разрешима в $B_p(\tau)$ при любом $1<p<\infty$, причем $M(p)=M(p_0)p^2(p-1)^{-1}$.

В случае постоянного оператора этот факт установлен в [1]. Разбиение единицы не дает нужной оценки для $M(p)$. Если E – гильбер-

тово пространство, то условие теоремы проверяется для $p_0=2$.

Литература

1. Поличка А.Е., Соболевский П.Е. - "Труды НИИМ ВГУ", 1974, № 15, с.76-82.

УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В.Р.Портнов (Новосибирск)

Пусть X - банахово пространство вещественное или комплексное, X^* - банахово пространство непрерывных функционалов $f(u)$ на X , удовлетворяющих соотношению $f(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2)=\bar{\lambda}_1 f(u_1)+\bar{\lambda}_2 f(u_2)$ $\forall\lambda_1,\lambda_2$, принадлежащих полю скаляров, $\forall u_1, u_2\in X$. Рассмотрим уравнение

$$G(u)=0, \tag{1}$$

где $G:X\longrightarrow X^*$ - оператор, вообще говоря, нелинейный. Пусть задано разбиение пространства X в конечную прямую сумму нетривиальных линейных замкнутых подпространств $X=X^{(1)}\oplus\ldots\oplus X^{(s)}$. Соответствующее разложение произвольного элемента $u\in X$ будем записывать в виде: $u=u^{(1)}+\ldots+u^{(s)}$. Зададим в X ограниченную замкнутую область φ [*)], имеющую следующий вид: $\varphi=\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}+\ldots+\varphi^{(s)}$, где $\varphi^{(k)}$ - ограниченная замкнутая область в $X^{(k)}$, $k=1,\ldots,s$. Пусть, далее, $\forall k=1,\ldots,s$ задано непрерывное невырожденное векторное поле

[*)] Под замкнутой областью понимается замыкание непустого открытого связного множества.

$A^{(K)}: \partial\varphi^{(K)} \longrightarrow X^{(K)}$ и направленное семейство $\mathcal{M}^{(K)}$ линейных конечномерных подпространств в $X^{(K)}$, частично упорядоченное по включению, такое, что множество $\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}^{(K)}}\mu$ плотно в $X^{(K)}$, причем $\forall\mu\in\mathcal{M}^{(K)}$

1) множество $\mu\cap\varphi^{(K)}$ представляет собой замкнутую область в μ;

2) $A^{(K)}(\mu\cap\partial\varphi^{(K)})\subset\mu$ и 3) вращение векторного поля $A^{(K)}$ на $\mu\cap\partial\varphi^{(K)}$ отлично от нуля. Введем множества $\Psi^{(K)}=\{u\in\varphi \mid u^{(K)}\in\partial\varphi^{(K)}\}$, $K=1,\ldots,s$. Через $\mathcal{M}$ обозначим направленное семейство линейных подпространств μ вида $\mu=\mu^{(1)}\oplus\ldots\oplus\mu^{(s)}$, где $\mu^{(K)}\in\mathcal{M}^{(K)}$ $\forall K=1,\ldots,s$, такое, что справедлива такая

Т е о р е м а 1. Пусть оператор G обладает следующими свойствами: а) каково бы ни было линейное конечномерное подпространство $\mu\subset X$, функционал $u\longrightarrow\langle G(u),v\rangle$ непрерывен на $\mu\cap\varphi$, $\forall v\in\mu$, б) имеет место импликация $\{$ существует обобщенная последовательность $\{u_\mu\}\subset\varphi$ $,\ldots,\mu\in\mathcal{M}$, такая, что $u_\mu\in\mu$ $\forall\mu\in M$ и

$$\langle G(u_\mu),v\rangle=0 \quad \forall v\in\mu,\ \forall\mu\in\mathcal{M} \Rightarrow \{0\in G(\varphi)\},$$

в) справедливы неравенства $Re\langle G(u), A^{(K)}(u^{(K)})\rangle\geq 0$ $\forall u\in\Psi^{(K)}$, $\forall K=1,\ldots,s$. Тогда уравнение (1) имеет по крайней мере одно решение $u\in\varphi$.

З а м е ч а н и е. Свойством б) обладает, например, любой оператор "вариационного исчисления" (в частности, монотонный), заданный на рефлексивном пространстве X, в случае, когда φ - слабо замкнутое множество в X.

Приведем три примера на применение теоремы 1. В первом и третьем примерах операторное уравнение, порожденное краевой задачей, предварительно преобразуется к уравнению вида (1). В первом и втором примерах $s=2$, в третьем $s=4$.

П р и м е р 1. Пусть Ω - ограниченная область в R^n, граница которой представляет собой бесконечно дифференцируемое многообразие размерности $n-1$. Точки Ω обозначаются через x, а точки $\partial\Omega$

– через x' .

Рассмотрим краевую задачу:

$$\sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u + \varkappa(x, D^{\alpha^{(1)}} u, \ldots, D^{\alpha^{(N)}} u) = f(x) \text{ в } \Omega , \quad (2)$$

$$\sum_{|\beta|\le m_j} b_{j\beta}(x') D^\beta u = g_j(x') \quad \text{на } \partial\Omega \ (j=0,\ldots,m-1), \quad (3)$$

где $m, m_0, \ldots, m_{m-1}$ – натуральные числа, $a_\alpha(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $b_{j\beta}(x') \in C^\infty(\partial\Omega)$, $\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(N)}$ – все мультииндексы, не превосходящие по модулю $2m-1$, $\varkappa : \Omega \times R^N \longrightarrow R$ – функция, удовлетворяющая условию Каратеодори, неравенству $|\varkappa(x,\xi)| \le M(x) + C|\xi|^\delta$, $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in R^N$, в котором $M \in L_p(\Omega)$, $n < p < \infty$, $C \in R$, $\delta > 0$, и соотношению $\varkappa(x, t\xi) = t^\delta \varkappa(x,\xi)$ $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in R^N$, $\forall t > 0$, причем $\forall \varepsilon > 0$ найдутся такие функции $K_0(x)$ и $K(x)$ из $L_1(\Omega)$, зависящие от ε , что $\|K_0\|_{L_1(\Omega)} < \varepsilon$ и

$$|\varkappa(x, \xi+\eta) - \varkappa(x,\xi)| \le K_0(x)|\xi|^\delta + K(x)|\eta|^\delta \quad \forall x \in \Omega, \ \forall \xi, \eta \in R^N.$$

Предположим, что при $\varkappa(x,\xi) \equiv 0$ краевая задача (2), (3) является регулярной эллиптической Ядро этой задачи обозначим через Q , а ядро сопряженной задачи – через Q^+ . Пусть Λ – линейное подпространство в Q и $\mathcal{B} : \Lambda \xrightarrow{\text{на}} Q^+$ – линейный оператор такой, что

$$\int_\Omega \varkappa(x, D^{\alpha^{(1)}} \xi(x), \ldots, D^{\alpha^{(N)}} \xi(x)) \mathcal{B}\xi(x) dx > 0 \quad \forall \xi(x) \in \Lambda \setminus \{0\}.$$

Т е о р е м а 2. Краевая задача (2), (3) разрешима в пространстве $W_p^{2m}(\Omega)$ $\forall f \in L_p(\Omega)$, $\forall g_j \in W_p^{2m-m_j-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$, $j=0,\ldots,m-1$, если $0 < \delta < 1$, и для всех f и g_j , достаточно малых по норме, если $\delta > 1$.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\mathcal{P}\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u+\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\mathcal{D}^{\alpha}\left(|\mathcal{D}^{\alpha}u|^{q-2}\mathcal{D}^{\alpha}u\right)=f(x), \quad (4)$$

где $m\geq 0$ - целое число, $1<q<2$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$, $\mathcal{P}$ - многочлен с комплексными коэффициентами. Пусть H - вещественная невырожденная матрица порядка n. Поставим задачу об отыскании H-периодических комплекснозначных решений $u(x)$ уравнения (4) при заданной комплекснозначной правой части $f(x)$. Пусть $\mathcal{B}_n$ - совокупность всех n-мерных векторов с целочисленными компонентами, $\mathcal{B}_n^-=\{\beta\in\mathcal{B}_n \mid Re\,\mathcal{P}(2\pi i H^{*^{-1}}\beta)<0\}$. Предположим, что множество $\mathcal{B}_n^-$ либо конечно, либо бесконечно и

$$\lim_{\beta\in\mathcal{B}_n^-,\,|\beta|\to\infty}(1+|\beta|)^{-2m}Re\,\mathcal{P}(2\pi i H^{*^{-1}}\beta)=-\infty.$$

Предположим еще, что имеет место оценка $|Im\,\mathcal{P}(2\pi i H^{*^{-1}}\beta)|\le$ $\le C|Re\,\mathcal{P}(2\pi i H^{*^{-1}}\beta)|$ $\forall\beta\in\mathcal{B}_n$, где $C\in R$ - константа, не зависящая от β. Пусть K - единичный куб $\{x\in R^n \mid 0<x_i<1,\ i=1,\dots,n\}$. Рассмотрим банахово пространство X H - периодических комплекснозначных функций $u(x)=\sum_{\beta\in\mathcal{B}_n}u_\beta e^{2\pi i(H^{-1}x,\beta)}$ с конечной нормой

$$\|u\|_X=\Big(\sum_{\beta\in\mathcal{B}_n}|\mathcal{P}(2\pi i H^{*^{-1}}\beta)||u_\beta|^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\|u\|_{W_q^m(H(K))}.$$

Справедлива такая

Теорема 3. <u>Уравнение (4) имеет в пространстве</u> X <u>по крайней мере одно решение</u> $\forall f\in X^*$.

Пример 3. Пусть Ω - ограниченная область в R^n с границей, представляющей собой бесконечно дифференцируемое многообразие размерности $n-1$. Точки Ω обозначаются через x, а точки $\partial\Omega$ - через x'.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\sum_{|\alpha|\le 2m_i} a_\alpha^{(i)}(x)\mathcal{D}^\alpha u_i + \varkappa_i\left(x, \mathcal{D}^{\alpha^{(1,i)}} u_i, \ldots, \mathcal{D}^{\alpha^{(N_i,i)}} u_i\right) +$$

$$+\theta_i\left(x, \mathcal{D}^{\alpha^{(1,1)}} u_1, \ldots, \mathcal{D}^{\alpha^{(N_1,1)}} u_1, \mathcal{D}^{\alpha^{(1,2)}} u_2, \ldots, \mathcal{D}^{\alpha^{(N_2,2)}} u_2\right) = h_i(x) \text{ в } \Omega \ (i=1,2), \quad (5)$$

$$\sum_{|\beta|\le m_j^{(i)}} b_{j\beta}^{(i)}(x')\mathcal{D}^\beta u_i = g_j^{(i)}(x') \text{ на } \partial\Omega \ (j=0,\ldots,m^{(i)}-1;\ i=1,2), \quad (6)$$

где $m_i, m_j^{(i)}, N_1, N_2$ - натуральные числа, $a_\alpha^{(i)}(x) \in C^\infty(\bar\Omega)$, $b_{j\beta}^{(i)}(x') \in C^\infty(\partial\Omega)$, $\alpha^{(k,i)}$, $k=1,\ldots,N_i$, - все мультииндексы, не превосходящие по модулю $2m_i-1$, $\varkappa_i : \Omega \times R^{N_i} \to R$, $\theta_i : \Omega \times R^{N_1} \times R^{N_2} \to R$ - функции, удовлетворяющие условию Каратеодори и неравенствам:

$$|\varkappa_i(x,\xi^{(i)})| \le A_i(x) + C_i|\xi^{(i)}|^{\delta_i}, \ |\theta_i(x,\xi^{(1)},\xi^{(2)})| \le B_i(x) + M_i(|\xi^{(1)}|^{\delta_{1i}} +$$

$$+|\xi^{(2)}|^{\delta_{2i}}) \quad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi^{(i)}, \eta^{(i)} \in R^{N_i},\ \forall i=1,2,$$

где $0<\delta_i<1$, $A_i, B_i \in L_{p_i}(\Omega)$, $n \le p_i < \infty$, $C_i, M_i \in R$, $\delta_{ji} > 0$, причем $\forall \varepsilon > 0$ найдутся такие функции $K_0(x)$ и $K(x)$ из $L_1(\Omega)$, зависящие от ε, что $\|K_0\|_{L_1(\Omega)} < \varepsilon$ и

$$|\varkappa_i(x,\xi^{(i)}+\eta^{(i)}) - \varkappa_i(x,\xi^{(i)})| \le K_0(x)|\xi^{(i)}|^{\delta_i} + K(x)|\eta^{(i)}|^{\delta_i} \quad \forall x\in\Omega, \forall \xi^{(i)}, \eta^{(i)} \in R^{N_i}, \forall i=1,2.$$

Т е о р е м а 4. Пусть при $\varkappa_i \equiv 0$ и $\theta_i \equiv 0$ краевая задача (5), (6) распадается на две регулярные эллиптические задачи $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, такие, что $\ker \mathfrak{A}_i^* \subset \ker \mathfrak{A}_i$, $i=1,2$. Пусть, далее, функция $\varkappa_i$ удовлетворяет соотношению $\varkappa_i(x, t\xi^{(i)}) = t^{\delta_i}\varkappa_i(x,\xi^{(i)})$ $\forall x\in\Omega$, $\forall \xi^{(i)} \in R^{N_i}$, $\forall t>0$ и пусть $\int_\Omega \varkappa_i(x, \mathcal{D}^{\alpha^{(1,i)}}\xi(x), \ldots, \mathcal{D}^{\alpha^{(N_i,i)}}\xi(x))\xi(x)dx \ne 0$ $\forall \xi(x) \in \ker \mathfrak{A}_i^* \setminus \{0\}$. Предположим еще, что $\delta_{ii} < \delta_i$ и $\delta_{12}\delta_{21} < \delta_1\delta_2$. Тогда краевая задача (5), (6) разрешима в пространстве

$$W_{p_1}^{2m_1}(\Omega) \times W_{p_2}^{2m_2}(\Omega) \quad \forall h_i \in L_{p_i}(\Omega) \quad \forall g_j^{(i)} \in W_{p_i}^{2m_i - m_j^{(i)} - \frac{1}{p_i}}(\partial\Omega) \ (j=0,\ldots,m_i-1;\ i=1,2)$$

Аналогичный результат справедлив для систем, содержащих >2 неизвестных функций.

УДК 517.946

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СЛАБОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р.С.С а к с (Новосибирск)

В ограниченной области $G \subset R^n$ с границей $\Gamma \in C^\infty$ рассматривается дифференциальный оператор $A(x, \partial/\partial x)$ порядка k с ($m \times m$) - матричными коэффициентами класса $C^\infty(\bar{G})$. Пусть A_0 - его однородная старшая часть. Оператор A называется слабоэллиптическим в точке $x \in \bar{G}$, если

а) $\operatorname{rang} A_0(x, \xi) = \rho < m \quad \forall \xi \in R^n \setminus 0$;

б) существует однородная полиномиальная по ξ матрица $P(x, \xi)$ ранга $m - \rho$ такая, что $PA_0 \equiv 0$, порядок оператора $PA(x, \partial/\partial x)$ равен k, и ранг расширенной матрицы $\begin{pmatrix} A_0(x, \xi) \\ (PA)_0(x, \xi) \end{pmatrix}$ максимален ($= m$).

Примеры: $A_1 = \operatorname{rot} + \lambda I_3$, $A_2 \omega = (d + \lambda *)\omega$ и др.

Существование у слабоэллиптических операторов нётеровых краевых задач доказано автором на примерах операторов A_1 и A_2 [1, 2].

Пусть B - ($r \times m$) - матричный дифференциальный оператор, причем порядок его j-й строки равен b_j, $b = (b_1, \ldots, b_r)$, $\ell > |b|$.

Рассматривается следующая краевая задача: найти вектор $u \in W_2^{(\ell+k)}(G)$, удовлетворяющий системе $Au = f$ в области G и краевым условиям $Bu|_\Gamma = g$, где f и g заданы и $Qf = \begin{pmatrix} f \\ p_f \end{pmatrix} \in W_2^{(\ell)}(G)$, $g \in W_2^{\ell - b - \frac{1}{2}}(\Gamma)$. Имеет место следующая

Т е о р е м а. Для ограниченного оператора $\mathfrak{A} u = (Au, Bu|_\Gamma)$ краевой задачи следующие утверждения эквивалентны:

а) оператор A слабоэллиптичен в G и граничный оператор B

накрывает оператор $QA = \begin{pmatrix} A \\ PA \end{pmatrix}$;

б) оператор $\mathfrak{A}$ имеет левый регуляризатор;

в) $\mathfrak{A}$ имеет конечномерное ядро и замкнутую область значений;

г) выполняется априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^{\ell+\kappa}(G)} \leq C\left[\|QAu\|_{W_2^{\ell}(G)} + \|Bu\|_{W_2^{\ell-b-1/2}} + \|u\|_{L_2(G)}\right].$$

При доказательстве этой теоремы мы использовали работы [3, 4], применяя метод решения систем линейных алгебраических уравнений, изложенный в монографии С.Л.Соболева [5].

Литература

1. С а к с Р.С. - "Дифференц. уравнения", 1972, т.8, № 1, с.126-133.
2. С а к с Р.С. - "Докл. АН СССР", 1974, т.218, № 1, с.39-41.
3. С о л о н н и к о в В.А. - "Докл. АН СССР", 1971, т.199, № 2, с.279-281.
4. В о л е в и ч Л.Р. - "Мат. сб.", 1965, т.68, № 3, с.373-416.
5. С о б о л е в С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., "Наука", 1974, с.808.

УДК 517.432

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ТОЧКАХ БИФУРКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.А.С и д о р о в (Иркутск), В.А.Т р е н о г и н (Москва)

Пусть X, Y - вещественные банаховы пространства. Рассматривается задача о точках бифуркации уравнения $F(x,\lambda) = 0$, где $F: X \times R^1 \to Y$ - нелинейный оператор, достаточно гладкий в окрестности точки $(0,0)$.

Если $\lambda = 0$ – изолированная фредгольмовская точка оператора $F_x(0,\lambda) \overset{\text{опр}}{=} A(\lambda)$, то вопрос сводится к изучению нетривиальных решений конечномерной системы неявных функций $\lambda^{p_i}\xi_i = f_i(\xi_1,\dots,\xi_n,\lambda)$, $i = 1,\dots,n$, где p_i – длины A – жордановых цепочек, $f_i = f_\ell^{(i)}(\xi,\lambda) + o(|\xi|^\ell)$, $\ell \geq 2$. Применяя к этой системе элементарные конечномерные методы, получаем ряд важных результатов о точках бифуркации. Например, имеют место

Т е о р е м а 1. <u>Пусть</u> $\sum_{i=1}^{n} p_i$ <u>– нечетное число. Тогда</u> $\lambda = 0$ <u>точка бифуркации.</u>

Т е о р е м а 2. <u>Пусть</u> $p_1 = \dots = p_n = 1$, $f_\ell^{(i)}\big|_{\lambda=0} = \operatorname{grad} U(\xi)$. <u>Тогда каждому изолированному экстремуму</u> η <u>потенциала</u> $U(\xi)$ <u>на сфере</u> $S(0,1)$<u>, такому, что</u> $U(\eta_0) \neq 0$<u>, соответствует решение вида:</u> $x = \left[\sum_1^n c_i\varphi_i + o(1)\right]|\lambda|^{\frac{1}{\ell-1}}$<u>, где</u>

$$c_i = \begin{cases} \left(\dfrac{(\operatorname{sign}\lambda)}{(\ell+1)U(\eta)}\right)^{\frac{1}{\ell-1}} \eta_i, & \ell \text{ четное;} \\ \pm\left|\dfrac{1}{(\ell+1)U(\eta)}\right|^{\frac{1}{\ell-1}} \eta_i, & \ell \text{ нечетное, } \lambda U(\eta) > 0. \end{cases}$$

Показано, что если $p_1 = \dots = p_n = 1$, оператор F аналитический, поле $\{f_i\}$ потенциальное, то существует решение такого же вида, где часть постоянных c_i в неизолированном случае может быть произвольными точками некоторой сферы.

УДК 517.432

О НЕКОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЕТВЛЕНИЯ И РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДАХ К ИХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Н.А.С и д о р о в (Иркутск), В.А.Т р е н о г и н (Москва)

Пусть точка $\lambda = 0$ является точкой ветвления вещественных реше-

ний уравнения $F(x,\lambda)=0$. Требуется построить малые непрерывные решения в окрестности этой точки по приближенному уравнению $\tilde{F}(x,\lambda)=0$.

Приближенное уравнение в окрестности точки ветвления может вообще не иметь вещественных решений. Более того, даже если мы имеем точное уравнение и асимптотику его решения, то при уточнении асимптотики каким-либо итерационным методом вычисления в окрестности точки ветвления окажутся неустойчивыми из-за погрешностей метода и ошибок округления. Поэтому задача о точках ветвления является некорректной в вычислительном смысле.

Возможны два метода построения регуляризирующих уравнений в окрестности точки ветвления. Первый метод основан на возмущении уравнения малым линейным слагаемым. Во втором методе используется сдвиг уравнения по параметру. В частности, если для точного уравнения выполнены условия теоремы 2 [Н.А.Сидоров, В.А.Треногин, Исследование задачи о точках бифуркации ..., данный сборник], то уравнение $\tilde{F}(\tilde{x},\lambda)-\alpha\sum_1^n<\tilde{\gamma}_i,\tilde{x}>\tilde{z}_i=0$, где $\alpha=(\operatorname{sign}\lambda)a$, $\left(\frac{\delta}{\rho(\delta)}\right)^{\frac{\ell-1}{\ell}}\leq a\leq\alpha_0(\delta)$, $\alpha_0,\rho\to 0$ при $\delta\to 0$, $<\tilde{\gamma}_i,\tilde{\varphi}_j>\approx\delta_{ij}$, $<\tilde{\psi}_i,\tilde{z}_j>\approx\delta_{ij}$, $\varphi_i\in N(F_x(0,0))$, $\psi_i\in N^*(F_x(0,0))$, будет регуляризирующим.

УДК 517.946

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА 4-ГО ПОРЯДКА

Н.И.С а м е д о в (Ашхабад)

Рассмотрим уравнение

$$Lu=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_m^2}+\sum_{k=1}^{m-1}\operatorname{sign}x_m\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right)^2u-\left(\frac{\partial}{\partial x_m}+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2u=0 \quad (1)$$

в односвязной области $\mathcal{D} \subset E_m$, ограниченной при $x_m > 0$ поверхностью Ляпунова S_1, при $x_m < 0$ – характеристическим конусом S_2 :

$$x_m = \sqrt{\sum_{k=1}^{m-1} x_k^2} - 1 .$$

К р а е в а я з а д а ч а. Найти функцию $u(x_1, \ldots, x_m)$, удовлетворяющую при $x_m > 0$ и $x_m < 0$ уравнению (1) и принимающую наперед заданные значения:

$$u\Big|_{S_1 \cup S_2} = \varphi_0(x_1, \ldots, x_m); \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_1} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_m). \tag{2}$$

Кроме этого, функция $u(x_1, \ldots, x_m)$ три раза непрерывно дифференцируема в области $\mathcal{D}$.

Т е о р е м а. Краевая задача (1)-(2) имеет единственное решение в классе функций, частные производные 2- и 3-го порядков которых допускают особенности соответственно ниже 1- и 2-го порядков на пересечении конуса S_2 с гиперплоскостью $x_m = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проводится методом интегралов энергии [1] .

Л и т е р а т у р а

1. М е р е д о в М.М. - "Докл. АН СССР", 1973, т.208, № 2, с.273-276.

УДК 517.948

ОБ ОДНОМ ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

О.М.С м е л я н с к и й (Воронеж)

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассматривается вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha^2(t)\frac{du}{dt}\right)-B(t)\frac{du}{dt}-Au=f(t), \quad 0<t<d, \tag{1}$$

где $\alpha(t)$ - скалярная функция, $\alpha(t)>0$ при $t>0$, $\alpha(0)=0$, $\alpha(t)\in C^1[0,d]$; A - положительно определенный самосопряженный в H оператор с плотной в H областью определения $\mathcal{D}(A)$, имеющий вполне непрерывный обратный в H. Предполагается, что область определения $\mathcal{D}(B)$ не зависит от t и $\mathcal{D}(B)\subseteq\mathcal{D}(A^{1/2})$.

Оператор $B(t)$ представим в виде $B(t)=B_1+\alpha(t)B_2A^{1/2}$, где B_1 и B_2 - ограниченные в H операторы, и

$$Re\,(B(t)v,v)_H \geq \beta\|v\|_H^2 \quad (\forall t\in[0,d];\ \forall v\in\mathcal{D}(A^{1/2})). \tag{2}$$

Кроме того, будем предполагать, что

$$(\eta,\eta)_H-Re(B_2\eta,\zeta)_H+(\zeta,\zeta)_H \geq \nu(\|\eta\|_H^2+\|\zeta\|_H^2)\ (\forall\eta,\zeta\in H) \tag{3}$$

$$A^{1/2}B_1A^{-1/2}=T^*T, \tag{4}$$

где T - ограниченный оператор в H.

Для уравнения (1) поставим задачу: найти решение задачи (1), удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{t=+0}=u_0\in\mathcal{D}(A^{1/2});\quad u\big|_{t=d}=0. \tag{5}$$

Т е о р е м а. Пусть выполнены условия (2)-(4). Тогда задача (1), (5) коэрцитивно разрешима, т.е. решение задачи существует и для него справедливо неравенство

$$\|(\alpha^2u')'\|+\|\alpha A^{1/2}u'\|+\|u'\|+\|Au\|\leq c\left\{\|f\|+\|A^{1/2}u(t)\|_H\big|_{t=0}\right\}, \tag{6}$$

где $\|\cdot\|$ - норма в пространстве $\mathcal{L}_2(0,d;H)$.

УДК 517.937

ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ДРОБНЫХ ПРОСТРАНСТВ, ПОРОЖДЕННЫХ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕЙ НА ПОЛУОСИ

Ю.А.С м и р н и ц к и й (Воронеж)

Определим действующий в $L_p[0,\infty)$ обыкновенный дифференциальный оператор A по формуле:

$$Au(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i u^{(i)}(x)+\mu_0 u(x)$$

с областью определения $\mathcal{D}(A)$, содержащей функции из $W_p^n[0,\infty)$, которые удовлетворяют граничным условиям:

$$\sum_{j=0}^{i} \sigma_{ij} u^{(j)}(0)=0,\ i=0,1,\ldots,n-1 \text{ (если } \sigma_{ii}=0 \text{, то и } \sigma_{ij}=0\text{)}.$$

Если уравнение $a_n t^n+\lambda=0 \quad (\lambda>0)$ не имеет чисто мнимых корней и $n-\ell$ чисел σ_{ii} равно нулю, где ℓ - количество корней уравнения $a_n t^n+\lambda=0$, лежащих в правой полуплоскости, то при достаточно большом числе μ_0 оператор будет позитивным в пространстве $L_p[0,\infty)$ $(1<p<\infty)$ (см. [1]).

По позитивному оператору B, действующему в банаховом пространстве E, можно построить серию дробных пространств $E_{\alpha,q}[B,E]$ $(0<\alpha<1)$ (см. [2]). Для дробных пространств $E_{\alpha,q}[A,L_p[0,\infty)]$ установлена следующая

Т е о р е м а в л о ж е н и я. Пусть $f(x)\in E_{\alpha,q}[A,L_p[0,\infty)]$, тогда $f(x)$ является следом функции $\tilde f(x)$, принадлежащей пространству Бесова $B^{\beta}_{p,q}(R_1)$, где $\beta=\alpha n$, и удовлетворяет всем граничным условиям, порядок которых меньше k, если $n\alpha-k-1/p+1>0$.

Литература

1. Евзеров И.Д., Соболевский П.Е. - "Дифференц. уравнения", 1973, т.9, № 2, с.228-240.
2. Соболевский П.Е. - "Успехи мат. наук", 1964, т.19, № 6, с.219-222.

УДК 517.946

ОЦЕНКИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С.В.Успенский, П.С.Филатов, Б.Н.Чистяков

(Новосибирск)

Мы рассматриваем уравнение

$$L(D)u(x) \equiv \sum_{\alpha\theta=1} a_\alpha D^\alpha u(x) = f(x) \qquad (1)$$

во всем евклидовом пространстве R^n. Здесь α - целочисленный мультииндекс. Вещественный вектор $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$, $0 < \theta_j \leq 1$, $j=1,2,\ldots,n$, называем показателем однородности оператора L. На L накладывается условие $|L(-i\xi)| \geq K \cdot \langle\xi\rangle$, $\xi \in R^n$,

где $\langle\xi\rangle = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{2/\theta_j}\right)^{1/2}$. Операторы такого вида называются квазиэллиптическими.

Мы рассматриваем обобщенные решения уравнения (1) из класса функций, принадлежащих $L_p^{loc}(R^n)$, $1 < p < \infty$, растущих не быстрее некоторой степени $|x|$ (т.е. $|u(x)|(1+|x|)^{-N} \leq U(x) \in L_p(R^n)$) с условием на бесконечности

$$\lim_{|t|\to\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{t_j}\right) \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_n} |u(\tau)| d\tau = 0. \qquad (2)$$

Обобщенные решения определяются обычным образом: $(u, L^{(*)}\varphi) = (f, \varphi)$, $\forall \varphi \in S_N$, где

$$S_N = \left\{ \varphi : \varphi \in C^k(R^n),\ \sup_{R^n} |D^\alpha \varphi(x)|(1+|x|)^{N+n} < \infty \right\}.$$

С.В.Успенским (см. [1]) получены следующие результаты:

Если u - обобщенное решение уравнения (1) из рассматриваемого класса, то при выполнении некоторых соотношений между $\rho, \theta, \ell, \varepsilon$, и $\bar{\varepsilon}$ имеет место оценка $|D^\rho u, C^\ell_{\bar{\varepsilon}}| \le C |f, C^\ell_\varepsilon|$, где $0 < \rho\theta < 1$, $\bar{\varepsilon} < \varepsilon$, $|f, C^\ell|$ - обычная норма Гёльдера,

$$|f, C_\varepsilon| = \sup_{x,t \in R^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1+|t_j|)^{\varepsilon_j}}{|t_j|} \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_n} |f(x+\tau)| d\tau,$$

и константа C не зависит от u и f.

Если правая часть f удовлетворяет дополнительным условиям на бесконечности, то найдется такое число $d_i > 0$, определяемое по ρ, θ, ε и скорости убывания f на бесконечности, что $|D^\rho u(x)| \le C |x_i|^{-d_i}$, $0 < \rho\theta < 1$, где константа C не зависит от x и зависит от f.

В частности, если f быстро убывает, то

$$d_i = \frac{\rho\theta + |\theta| - 1}{\theta_i}.$$

Эти результаты были обобщены С.В.Успенским и Б.Н.Чистяковым (см. [2]). Рассматривались решения уравнения (1) без условия (2) на бесконечности. При этом получены теоремы о выходе на полином.

Т е о р е м а 1. Пусть u - обобщенное решение уравнения (1) из рассматриваемого класса и $|\theta| > \rho > 1$. Тогда если $f \in L_p(R^n)$, то существует полином $\mathcal{P}_m(x) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha x^\alpha$, принадлежащий ядру оператора L такой, что $u(x) - \mathcal{P}_m(x) \to 0$ при $x_j \to 0$ для почти всех $x^{(j)} \in R^{n-1}$, $1 \le j \le n$.

Т е о р е м а 2. Если $|(1+|x|)^{\ell/p} f, L_p| < \infty$, $1 < |\theta| < \rho <$

$< \infty$, $\beta > n \left(\frac{p}{|\theta|} - 1\right)$ и u - обобщенное решение уравнения (1), то

$$|u(x) - \mathcal{P}_m(x)| \le C \prod_{j=1}^{n} |x_j|^{-d} \cdot \| (1+|x|)^{\beta/p} f, L_p \|,$$

где $d > 0$ и константа C не зависит от x .

Все приведенные результаты обобщаются на псевдодифференциальные операторы с соответствующими условиями на символ.

Из теорем 1, 2 вытекает ряд результатов, устанавливающих условия выхода на полином на бесконечности для функций из классов $L^{l}_{p,\beta}$,

$$\| u, L^{l}_{p,\beta} \| = \sum_{j=1}^{n} \| (1+|x|)^{\beta/p} \int e^{ix\xi} (i\xi_j)^{l_j} \hat{u}(\xi) d\xi, L_p \|,$$

где l_j могут быть и нецелыми.

Эти результаты обобщают работы С.Л.Соболева, О.В.Бесова и др. (Библиографию см. в упомянутых работах.)

П.С.Филатовым [3, 4] рассматривалось уравнение квазиэллиптического типа с переменными коэффициентами

$$L(x,D)\,u(x) \equiv \sum_{\alpha\theta \le 1} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x), \qquad (3)$$

где $\left| \sum_{\alpha\theta = 1} a_\alpha(x)(-i\xi)^\alpha \right| \ge K < \xi >$, $x, \xi \in R^n$,

$K > 0$ - константа.

Коэффициенты $a_\alpha(x)$ предполагаются достаточно гладкими, ограниченными и удовлетворяющими условиям: $|D^\rho a_\alpha(x)| \le C_{\rho\alpha} (1 + < x >)^{-\omega}$, где $|\rho| \ge 1$ при $\alpha\theta = 1$ и $|\rho| \ge 0$ при $\alpha\theta < 1$, т.е. $a_\alpha(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, если $\alpha\theta < 1$, а коэффициенты главной части ($\alpha\theta = 1$) могут и не иметь предела на бесконечности.

При выполнении некоторых соотношений между $\theta, l, \omega, \varepsilon, \bar{\varepsilon}$ и ρ получены следующие оценки:

$$\| D^\rho u, C^l \| \le C \left(\| f, C^l_\varepsilon \| + \sum_{\alpha \le \rho + \bar{l}} \| D^\alpha u, L_p(V) \| \right),$$

где $0 \leq \rho\theta \leq 1$, V - некоторый компакт;

$$|D^{\rho}u, C_{\bar{\varepsilon}}| \leq C(\|f, C_{\varepsilon}^{\ell}\| + \sum_{\alpha \leq \rho} \|D^{\alpha}u, L_p(V)\|),$$

где $0 \leq \rho\theta < 1$, константа C не зависит от u и f

При дополнительных условиях на бесконечности на f и коэффициенты получена оценка

$$|D^{\rho}u(x)| \leq C(1+|x_j|)^{-d_j}(\|f\| + \sum_{\alpha \leq \rho} \|D^{\alpha}u, L_p(V)\|).$$

Литература

1. Успенский С.В. - "Сиб. мат. журн.", 1972, т.13, № 3, с.665-678; № 4, с.903-909.
2. Успенский С.В., Чистяков Б.Н. - "Сиб. мат. журн.", 1975, т.16, № 5, с.1053-1070.
3. Филатов П.С. - В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам мат. физики, Новосибирск, "Наука", 1973, с.212-221.
4. Филатов П.С. - "Сиб. мат. журн.", 1975, т.16, № 2, с.368-383.

УДК 517.919

О ЗАДАЧЕ ПУАНКАРЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р.М.Шарипова (Душанбе)

В ограниченной области G , содержащей нуль, с границей Ляпунова рассматривается следующая краевая задача: найти ограниченное в нуле решение $w(z) \in C^{2,\lambda}(\bar{G} \setminus 0)$ уравнения

$$L(w) = \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\alpha}{\bar{z}} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{\beta}{\bar{z}^2} w = f(z), \quad f(z) \in C^{0,\lambda}(\bar{G}), \tag{1}$$

удовлетворяющее общему краевому условию, записанному в комплексной форме:

$$\ell(w) = \alpha_1 w_z + \alpha_2 w_{\bar z} + \alpha_3 \bar w_z + \alpha_4 \bar w_{\bar z} + \alpha_5 w + \alpha_6 \bar w = g(z)\,;\; g(z) \in C^{0,\lambda}(\Gamma), \qquad (2)$$

где α и β – произвольные комплексные коэффициенты, $\bar z = x - iy$; $\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Имеет место общее представление всех решений уравнения (1) через две произвольные аналитические в области G функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ класса $C^{1,\lambda}(\bar G)$:

$$w(z) = w_f + b_1 \varphi_1(z) + b_2 \varphi_2(z), \qquad (3)$$

здесь $w_{f(z)}$ – частное решение, которое выражается через операторы И.Н.Векуа (см. [1, 2]), а

$$b_1 = |z|^{2p} z^{k+1} \ln |z|^2 \;,\; b_2 = |z|^{2p} z^{k} \quad \text{при } p = p_1 = p_2\,;$$
$$b_1 = |z|^{2p_1} z^{k_1} \;,\; b_2 = |z|^{2p_2} z^{k_2} \quad \text{при } p_1 \neq p_2\,,$$

где p_1, p_2 – корни характеристического уравнения

$$p^2 + (\alpha - 1)p + \beta = 0$$

и K_1, K_2 – целые числа, удовлетворяющие неравенствам:

$$1 \le k_1 + 2\,\mathrm{Re}\,p_1 < 2\,;$$

$$0 \le k_2 + 2\,\mathrm{Re}\,p_2 < 1\,.$$

Используя общее представление аналитической функции интегралом типа Коши с действительной плотностью [3] и краевое условие (2), приводим задачу к эквивалентному сингулярному интегродифференциальному уравнению вида [4] :

$$K\mu = \mathrm{Re}\left\{ J\left(S_1 \lambda'_+ \mu + S_0 \lambda^0_+ \mu\right)\right\} = h\,, \qquad (4)$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}; \quad S_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 b'_1\,, & \alpha_1 b_2 \\ \alpha_4 b_1\,, & \alpha_4 b_2 \end{pmatrix};$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 b_{1z} + \alpha_2 b_{1\bar z} + \alpha_5 b_1 ; & \alpha_1 b_{2z} + \alpha_2 b_{2\bar z} + \alpha_5 b_2 \\ \alpha_3 b_{1z} + \alpha_4 b_{1\bar z} + \alpha_6 b_1 ; & \alpha_3 b_{2z} + \alpha_4 b_{2\bar z} + \alpha_6 b_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$, тогда $S_1 \equiv 0$. Если

$$\det S_0(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{5}$$

то (4) является системой сингулярных интегральных уравнений нормального типа и для нее справедливы основные теоремы Нётера [3] .

Т е о р е м а 1. Задача (1), (2) при выполнении условия (5) – нётерова и ее индекс равен $2 - \frac{1}{\pi}\left[\arg \det S_0\right]_\Gamma$.

Пусть $|\alpha_1|^2 + |\alpha_4|^2 \neq 0$, тогда, следуя [4] , для нее можно привести более общее условие, которое также обеспечивает нётеровость задачи, если только $f(z) \in C^{1,\lambda}(\bar G)$ и $g(z) \in C^{2,\lambda}(\Gamma)$.

Л и т е р а т у р а

1. В е к у а И.Н. Обобщенные аналитические функции. М., 1959.
2. Ш а р и п о в а Р.М. – "Дифференц. уравнения", 1973, т.9, № 12, с.2280–2283.
3. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
4. С а к с Р.С. – "Дифференц. уравнения", 1971, т.7, № 1, с.121–134.

УДК 519.55

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.А.Ш у б и н (Москва)

Изучаемым объектом является такой равномерно эллиптический дифференциальный оператор A в R^n , что его коэффициенты и все их про-

изводные являются равномерными почти-периодическими функциями в R^n. Естественно рассматривать этот оператор в пространствах $L^2(R^n)$ и $B^2(R^n)$ (пространство почти-периодических функций Безиковича), замыкая его с областей определения $C_0^\infty(R^n)$ и $Trig(R^n)$ (тригонометрические многочлены). Можно доказать, что спектры $\sigma(A)$ получившихся при этом неограниченных операторов в $L^2(R^n)$ и $B^2(R^n)$ совпадают как подмножества комплексной плоскости.

Известная в квантовой физике конструкция позволяет в самосопряженном случае ввести важную характеристику A - борелевскую меру на прямой, называемую плотностью состояний. Функция распределения $N(\lambda)$ этой меры (как и ряд других спектральных инвариантов A) может быть получена предельным переходом по расширяющимся областям нормированных делением на объем функций распределения собственных значений. Важно, однако, что существует другое определение $N(\lambda)$, не содержащее этого предельного перехода: оно выражает $N(\lambda)$ через относительный след в некотором II_∞-факторе, взятый от спектрального проектора $\tilde{E}_\lambda$ оператора $A^\#$, конструируемого по A. Спектр $\sigma(A)$ совпадает с множеством точек роста $N(\lambda)$. Для функции $N(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ справедлива асимптотическая формула (типа Вейля), а соответствующая ζ-функция (преобразование Меллина $N(\lambda)$) мероморфно продолжается во всю комплексную плоскость с явно вычисляемыми вычетами полюсов и значениями в неотрицательных целых точках. Если A - оператор с постоянными коэффициентами или одномерный оператор Шредингера с периодическим потенциалом, то для $N(\lambda)$ имеются явные формулы.

Далее, теория почти-периодических псевдодифференциальных операторов позволяет точно описать структуру оператора A^{-1} при выполнении классического условия Фавара.

Важную роль в исследовании A играют специальные шкалы прост-

ранств типа Соболева, построенные на основе пространства $B^2(R^n)$ и аналогичных ему пространств. Свойства этих шкал и поведение A в этих шкалах существенно отличаются от классической ситуации.

УДК 517.946

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

С.Д.Э й д е л ь м а н (Киев), В.А.К о н д р а т ь е в (Москва)

Доклад посвящен изложению результатов исследования слабых и классических решений $u(x)$ систем дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}(x; D_x)\, u_j(x) = f_i(x), \quad i=1,2,\ldots,M, \tag{1}$$

в предположении, что $u(x)$ положительны, т.е. принадлежат конусу $K \subset C^N$ или имеют отрицательную компоненту с заданными свойствами. Многие из нижеизлагаемых результатов содержатся в обзорной статье [1], там же имеется подробная библиография, из нее взяты все используемые ниже определения и обозначения.

1. Если система (1) наделена структурой Дуглиса–Ниренберга с весами t_i, s_j, $P_{ij}v \equiv \sum_{|\alpha| \leq t_i+s_j} D_x^{\alpha}\left[a_{ij}^{(\alpha)}(x)\, v(x)\right]$, коэффициенты $a_{ij}^{(\alpha)}(x)$ удовлетворяют условиям: 1) $a_{ij}^{(\alpha)}(x)$ – измеримые ограниченные в $\bar{G}$ функции; 2) $a_{ij}^{(\alpha)}(x)$, $|\alpha| = t_i + s_j$, непрерывны в $\bar{G}$, то слабые положительные решения (1) принадлежат в G_0-области, примыкающей к нехарактеристическому (класса C^1) куску Γ_0 границы ∂G, – пространству $L_1^{s_{max}\xi - s + (a-1)\xi}(G_0)$ и имеют равномерно ограниченные L_1-следы на совокупности поверхностей, параллельных Γ_0.

2. В случае равномерно эллиптических систем имеет место $G_0 \equiv G$; $\Gamma \equiv \partial G$. Если равномерно эллиптическая система (1)

имеет однородную структуру Петровского, $P_{ij}(x;D_x) \equiv \sum_{|\alpha|\leq m} b_{ij}^{(\alpha)} D_x^{\alpha}$, $b_{ij}^{(\alpha)}(x)$ удовлетворяют в $\bar{G}$ условию Гёльдера, то классические положительные решения (1) принадлежат $L_p(G)$ $\forall p < \frac{n}{n-1}$. Этот результат точен.

Из изложенных результатов следуют L_1-неравенства Харнака, теоремы о росте, обобщенные теоремы Бохнера и Лиувилля для положительных решений эллиптических систем (1).

3. В окрестности характеристических точек границы положительные решения могут вести себя по-разному. Для примера приведем одно простое достаточное условие сохранения суммируемости.

Пусть $u(x)$ - классическое положительное в G решение уравнения $Lu \equiv \sum_{|\alpha|\leq m} a^{(\alpha)}(x) D_x^{\alpha} u(x) = 0$, $\psi(x)=0$ - уравнение Γ_0, x_0 - характеристическая точка Γ_0, т.е. $L^*\psi^m\big|_{x_0} = 0$, ν_{x_0} - внутренняя к Γ_0 нормаль в точке x_0. Если $\sum_{|\alpha|=m} a^{(\alpha)}(x)\sigma^{\alpha} \geq 0$ в $2n$-мерной окрестности (x_0, ν_{x_0}), $L^*\psi^{m-1}\big|_{x_0} > 0$, то $u(x)$ суммируемо в некоторой окрестности x_0, примыкающей к Γ_0.

4. Изучаются положительные решения эволюционных систем с характеристическими гиперплоскостями $t \equiv const$. Для них устанавливаются специальные теоремы единственности характеристической задачи Коши. Для так называемых эволюционных квазиэллиптических систем получены результаты, аналогичные эллиптическим. В частности, теоремы о росте позволяют установить широкие обобщения и усиления классических теорем Уиддера и Теклинда о единственности решения задачи Коши [1].

Литература

1. Кондратьев В.А., Эйдельман С.Д. Положительные решения дифференциальных уравнений с частными производными. - "Труды Моск. матем. о-ва", 1974, т.31, с.85-146.

УДК 517.91

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В АБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

С.Я.Я к у б о в (Баку)

Нами исследуется разрешимость краевой задачи:

$$-u''(t) + A^2 u(t) = f(t, u(t)), \tag{1}$$

$$\alpha_{k1} u(0) + \alpha_{k2} u'(0) + \beta_{k1} u(T) + \beta_{k2} u'(T) = 0 \quad (k=\overline{1,2}), \tag{2}$$

где α_{kj}, β_{kj} $(k,j=\overline{1,2})$ – комплексные числа, A, $f(t,u)$ – вообще говоря, неограниченные операторы в гильбертовом пространстве H.

Т е о р е м а 1. Пусть 1°) A самосопряжен, A^{-1} вполне непрерывен в H; 2°) граничные условия (2) регулярны в смысле Биркгофа–Тамаркина–Наймарка, самосопряжены и положительны; 3°) оператор $f(t,u)$ действует из $[0,T] \times H(A)$ в H непрерывно; 4°) $\forall u \in D(A)$ и $\forall \varepsilon > 0$

$$Re\,(f(t,u), u) \leq a(t,\varepsilon) + \varepsilon \|Au\|^2 - b(\varepsilon)\|u\|_{H_1}^p,$$

где $a(\cdot,\varepsilon) \in L_1(0,T)$, $a(t,\varepsilon) \geq 0$, $b(\varepsilon) > 0$, $p \geq 2$ и H_1 – некоторое гильбертово пространство такое, что $H(A) \subset H_1 \subset H$, причем вложение $H(A) \subset H_1$ компактное; 5°) $\forall u \in D(A)$ $\exists a(\cdot) \in L_2(0,T)$, такое, что

$$\|f(t,u)\| \leq C(\|A^{1/2}u\|)(a(t) + \|Au\| + \|u\|_{H_1}^{p/2}).$$

Тогда задача (1)–(2) имеет решение, принадлежащее

$$W_2^2(0,T;\, H(A^2), H).$$

В качестве приложения рассмотрим в цилиндре $Q = [0,T] \times \Omega$, где

Ω – ограниченное открытое связное множество евклидова пространства R^n с гладкой границей Γ, нерегулярную краевую задачу:

$$-D_t^2 U+(-1)^m \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x) D_x^\alpha U + a(t,x)|U|^{p-2} U = f(t,x),$$

$$\alpha_{k1} U(0,x)+\alpha_{k2} D_t U(0,x)+\beta_{k1} U(T,x)+\beta_{k2} D_t U(T,x)=0,\ k=\overline{1,2}, \tag{3}$$

$$\sum_{|\alpha|\leq m_k} a_{k\alpha}(x) D_x^\alpha U(t,x)\Big|_\Gamma=0,\quad k=\overline{1,m}.$$

Здесь приведем условие лишь на нелинейную часть задачи: $a(t,x)\in C(\bar{Q})$; $a(t,x)\geq a^2>0$; p – любое число, если $m\geq n$; $p\leq 2+n(n-m)^{-1}$, если $m<n\leq 2m$; $p\leq 2+m(n-m)^{-1}$, если $n>2m$. Тогда задача (3) имеет решение из $W_2^2(0,T;\ W_2^{2m}(\Omega),\ L_2(\Omega))$.

УДК 517.91

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ШРЕДИНГЕРОВЫХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В АБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

С.Я.Я к у б о в, А.Б.А л и е в (Баку)

Изучается задача Коши для квазилинейных уравнений первого и второго порядков в банаховом пространстве:

$$u'(t)=A(t)u(t)+f(t,u(t)),\quad u(0)=u_0\in\mathcal{D}(A),$$

$$u''(t)+A(t)u(t)+B(t)u(t)=f(t,u(t),u'(t)),\ u(0)=u_0\in\mathcal{D}(B),\ u'(0)=u_1\in\mathcal{D}(B^{1/2}).$$

В условиях на нелинейную часть двусторонние оценки заменяются на ослабленные односторонние и ослабленные двусторонние оценки. Доказываются теоремы о разрешимости в "целом".

Полученные абстрактные результаты применяются при изучении квазилинейных краевых задач для гиперболических и шредингеровых уравнений.

УДК 517.91

ДИСКРЕТНОСТЬ СПЕКТРА И КРАТНАЯ ПОЛНОТА СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОБЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ И ПРИЛОЖЕНИЯ

С.Я.Я к у б о в, К.С.М а м е д о в (Баку)

Рассматривается задача:

$$L\left(\lambda, \frac{d}{dt}\right)u(t) \equiv \lambda^n u(t) + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m_k} A_{kj}(t)u^{(m_k-j)}(t)\right)\lambda^{n-k} +$$

$$+ (-1)^m u^{(2m)}(t) + A^{2m}u(t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

$$L_\nu u(t) \equiv \alpha_\nu u^{(k_\nu)}(0) + \sum_{j=0}^{k_\nu-1} \alpha_{\nu j} u^{(j)}(0) + \beta_\nu u^{(k_\nu)}(T) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k_\nu-1} \beta_{\nu j} u^{(j)}(T) = 0, \quad \nu = \overline{1,2m}, \tag{2}$$

где $a_0 = 1$, A - неограниченный замкнутый оператор, $A_{kj}(t)$ $(k=\overline{1,n}\ ;\ j=\overline{0,m-1})$ - оператор-функции с неограниченными операторными значениями; a_j $(j=\overline{1,m})$, α_ν , $\alpha_{\nu j}$, β_ν , $\beta_{\nu j}$ $(\nu=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{0,k_\nu-1})$ - комплексные числа, $m-1 \ge k_1 \ge k_2 \ge \ldots \ge k_m \ge 0$, $k_{\nu+2} < k_\nu$, $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0$.

Т е о р е м а. Пусть выполняются следующие условия:

1) A - самосопряженный положительно определенный оператор, $A^{-1} \in \sigma_p$ при некотором $p > 0$;

2) задача $(-1)^m u^{(2m)}(t) + A^{2m}u(t) = 0, L_\nu u = 0$ $(\nu = \overline{1,2m})$ регулярна и самосопряжена;

3) операторы $A_{kj}(t)A^{-j}$ $(k=\overline{1,n}\ ;\ j=\overline{0,m_k})$ почти при всех

$t \in [0,T]$ ограничены, оператор-функции $A_{kj}(t) A^{-j}$ почти равномерно ограничены и сильно измеримы по Бохнеру на $[0,T]$;

4) $m_k \leq \frac{2km}{n} - \varepsilon,\ \varepsilon > 0.$

Тогда система собственных и присоединенных вектор-функций задачи (1)-(2) n-кратно полна в смысле М.В.Келдыша в $L_2(0,T;H)$.

В банаховом пространстве $L_p(0,T;E)$ доказана теорема о дискретности спектра.

Эти результаты позволяют в приложениях охватить нерегулярные краевые задачи для полиномиальных по λ дифференциальных пучков в частных производных.

УДК 517.91

ПОЛУГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В.Л.Я к у ш е в (Новосибирск)

Полугрупповые свойства решений задач Коши достаточно хорошо изучены [1, 2] и успешно используются как для доказательства разрешимости задач Коши, так и для построения их решений. В данном сообщении показывается справедливость обобщенных полугрупповых свойств для решений широкого класса линейных краевых задач. Изложение основывается на идее построения решений краевых задач для составных областей, "склеенных" из простых. Близкие идеи для других целей использовались, например, в [3-5].

Пусть X - банахово пространство; $C^k([a,b],X)$ - пространство k раз ($k=0,1$) непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b] \subset R$ функций со значениями в X ; $L(X,Y)$ - множество линейных отображений X в Y ; $\Delta = \{(x,z) : a \leq x < z \leq b\}$.

На отрезке $[x,z] \subset [a,b]$ рассматривается линейная краевая задача:

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t) = A(t) y(t), \tag{1}$$

$$B(x,z)[y(\cdot)] = \sigma. \tag{2}$$

Здесь $y \in C^1([a,b], X)$; $A \in C^0([a,b], L(X,X)), B \in L(\Delta \times C^0([a,b],X),X)$- линейные замкнутые операторы, удовлетворяющие следующим условиям:
1) множество $D_0(A) = \bigcap_{t \in [a,b]} D(A(t))$ плотно в X ; 2) множество $D(B(x,z)) = D_0(B)$ не зависит от x и z , $D(A(t)) \subset D_0(B) \subset X$, $t \in [a,b]$; 3) существует компакт $M \subset D_0(A)$ такой, что начальная и терминальная задачи Коши для (1) корректны на M, $[x,z] \subset [a,b]$;
4) для всякой функции $f \in C^0([a,b], X)$

$$B(x,z)[f(\cdot)] = B(x,t)[f(\cdot)] + B(t,z)[f(\cdot)] - B_0(t) f(t), \; t \in (x,z). \tag{3}$$

Дальнейшее изложение проводится для граничных данных из M .

Основное содержание данного сообщения составляют следующие результаты:

Л е м м а 1. Пусть краевая задача (1)-(2) корректна на $[x,z]$. Тогда ее решение представимо в виде

$$y(t) = Z(x,t,z)\sigma, \quad t \in [x,z], \quad \sigma \in M. \tag{4}$$

Введем обозначения $Y(x,z) = Z(x,z,z), \overline{Y}(x,z) = Z(x,x,z)$ -значения $Z(x,t,z)$ в граничных точках отрезка $[x,z]$.

Т е о р е м а 1. Пусть краевая задача (1)-(2) корректна на $[x,z]$. Тогда а) если задача (1)-(2) корректна на $[x,t]$, $t \in (x,z]$, то

$$Z(x,t,z) = Y(x,t) B(x,t)[Z(x,\cdot,z)]; \tag{5}$$

б) если задача (1)-(2) корректна на $[t,z]$, $t \in [x,z)$, то

$$Z(x,t,z) = Y(t,z) B(t,z)[Z(x,\cdot,z)]. \tag{6}$$

Следующая теорема выражает решение краевой задачи (1)-(2) на отрезке $[x,z]$ через решения краевых задач на отрезках $[x,t], [t,z]$, $t \in (x,z)$

Т е о р е м а 2. Пусть краевая задача (1)-(2) корректна на отрезках $[x,t]$, $[t,z]$ и $[x,z]$, $t\in(x,z)$. Тогда для оператора $Z(x,s,z)$ справедлива формула склейки:

$$Z(x,s,z)=\begin{cases} Z(x,s,t)\varphi_2^{-1}(x,t,z)\bar{Y}(t,z), & s\in[x,t],\\ Z(t,s,z)\varphi_1^{-1}(x,t,z)Y(x,t), & s\in[t,z].\end{cases}$$

Здесь введены сокращения $\varphi_1(x,t,z)=Y(x,t)+\bar{Y}(t,z)-Y(x,t)B_0(t)\bar{Y}(t,z)$, $\varphi_2(x,t,z)=Y(x,t)+\bar{Y}(t,z)-\bar{Y}(t,z)B_0(t)Y(x,t)$.

С л е д с т в и е. В условиях теоремы 2 для операторов $Y(x,z)$ и $\bar{Y}(x,z)$ справедливы обобщенные полугрупповые свойства:

$$\begin{cases} Y(x,z)=Y(t,z)\{Y(x,t)+\bar{Y}(t,z)-Y(x,t)B_0(t)\bar{Y}(t,z)\}^{-1}Y(x,t),\\ \bar{Y}(x,z)=\bar{Y}(x,t)\{Y(x,t)+\bar{Y}(t,z)-\bar{Y}(t,z)B_0(t)Y(x,t)\}^{-1}\bar{Y}(t,z).\end{cases}$$

Аналогичные результаты справедливы для неоднородной краевой задачи.

Л и т е р а т у р а

1. Х и л л е Э., Ф и л л и п с Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ., 1962.
2. К р е й н С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., "Наука", 1967.
3. Г о д у н о в С.К. Уравнения математической физики (гл.Ш, § 22). М., "Наука", 1971.
4. Р я б е н ь к и й В.С. - "Успехи матем. наук", 1971, т.26, вып.3, с.105-160.
5. П о л о ж и й Г.Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Киев, Изд-во Киевского ун-та, 1962.