УДК 517.392

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ С КУБИЧЕСКОЙ РЕШЕТКОЙ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С ВЫРОЖДЕННЫМИ УГЛАМИ

Г.Г.Акопян (Москва)

В работе изучается порядок убывания ошибок последовательностей кубатурных формул на классе функций $L_p^m(\Omega)$ $(1<p<\infty$, m - натуральное число, Ω - ограниченная область) при использовании кубической решетки с шагом $h\to 0$ для областей интегрирования Ω, содержащих вырожденные углы (в конечном или бесконечном числе). Для такой области Ω строится последовательность кубатурных формул с анизотропным пограничным слоем. Выясняется, как порядок убывания ошибок зависит от геометрии области Ω. Показывается, что найденные оценки в определенном смысле являются наилучшими.

В работах [1, 2, 3] исследовались дробления (последовательности) функционалов ошибок кубатурных формул с (изотропным) пограничным слоем для областей без вырожденных углов (например, удовлетворяющих условию конуса или областей с резкой границей). Вопрос же о порядке убывания ошибок кубатурных формул с кубической решеткой для областей с вырожденными углами оставался открытым.

Назовем (см. [4]) τ-рогом (радиуса b, раствора ε) множество

$$V(\tau,b) = \bigcup_{0<\sigma<b}\left\{x : \frac{x_i}{a_i}>0,\ \sigma<\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\tau_i}<(1+\varepsilon)\sigma\quad (i=1,\dots,n)\right\}, \tag{1}$$

$$\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n),\quad 0<\tau_i<\infty,\quad a_i\neq 0\quad (i=1,\dots,n),$$

$$0<b<\infty,\quad \varepsilon>0.$$

Будем рассматривать ограниченные области $\Omega\subset E^n$, удовлетворяющие слабому условию τ-рога [4], т.е. представимые в виде

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{K} G_k = \bigcup_{k=1}^{K}(G_k+V_k), \tag{2}$$

где $V_k=V_k(\tau,b)$ - τ-рог с некоторыми коэффициентами $a_1,\dots,a_n$, зависящими от k, G_k - попарно-непересекающиеся измеримые множества из E^n.

Будем пользоваться следующими обозначениями: $Q=[0,1)^n$, $Q_N=[-N+1,N)^n$,

N - натуральное число, R^n - множество n-мерных целочисленных мультииндексов, $hQ=[0,h)^n$, $(h\gamma+hQ)$ - арифметическая сумма; если $h>0$, $\beta\in R^n$, $\tau\in E^n$, $\tau>0$, то

$$h^{\frac{1}{\tau}}=\left(h^{\frac{1}{\tau_1}},\dots,h^{\frac{1}{\tau_n}}\right),\ \beta h^{\frac{1}{\tau}}=\left(\beta_1 h^{\frac{1}{\tau_1}},\dots,\beta_n h^{\frac{1}{\tau_n}}\right),\ \Omega_h=\bigcup_{\gamma}(h\gamma+hQ),$$

где $h>0$, а объединение берется по всем $\gamma\in R^n$, для которых $h\gamma+hQ_N\subset\Omega$; при $t>0$ $\Pi_t=\{x:|x_i|^{\tau_i}<t;\ i=1,\dots,n\}$, $\Pi_t^+=\{x:0\le x_i<t^{\frac{1}{\tau_i}},\ i=1,\dots,n\}$.

Пусть для определенности $1=\tau_n\le\tau_{n-1}\le\dots\le\tau_1$.

Будем говорить, что область Ω удовлетворяет слабому условию τ-пика, если существуют измеримые, попарно-непересекающиеся множества $G_1',\dots,G_k'$ и множества

$$V_k'(\tau)=\left\{x:\frac{x_i}{a_i^{(k)}}>0\ (i=1,\dots,n),\ \left(\frac{x_n}{a_n^{(k)}}\right)^{\tau_n}<\dots<\left(\frac{x_1}{a_1^{(k)}}\right)^{\tau_1}\right\},\tag{1'}$$

$$a_i^{(k)}\neq 0\quad (i=1,\dots,n;\ k=1,\dots,K)$$

такие, что

$$\Omega=\bigcup_{k=1}^{K}G_k'=\bigcup_{k=1}^{K}\left(G_k'+\delta^{\frac{1}{\tau}}V_k'(\tau)\right)\tag{2'}$$

для некоторого $\delta>0$.

Очевидно, что область Ω со слабым условием τ-пика удовлетворяет и слабому условию τ-рога (вообще говоря, с другими коэффициентами).

Пусть $0<h<h_0$ и задана $h^{\frac{1}{\tau}}$-сетка в E^n, т.е. сетка с узлами $\beta h^{\frac{1}{\tau}}$, $\beta\in R^n$ и $h^{\frac{1}{\tau}}$-ячейками $\beta h^{\frac{1}{\tau}}+\Pi_h^+$.

Л е м м а. Пусть Ω - ограниченная область из E^n, удовлетворяющая слабому условию τ-пика, $0<h<h_0$. Тогда число $\delta(h)$ $h^{\frac{1}{\tau}}$-ячеек $\beta h^{\frac{1}{\tau}}+\Pi_h^+$, имеющих непустое пересечение с границей $\partial\Omega$, не превосходит $\delta_1 h^{-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\tau_i}}$, где $\delta_1>0$ не зависит от h .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть натуральные числа D и F настолько велики, что $\bar\Omega\subset Q_D$, $F>(2D-1)\delta^{-\frac{1}{\tau_1}}$. Обозначим $\partial\Omega_k=\partial\Omega\cap\partial G_k'$,

$$y^{(j)}=-D+1+j(2D-1)F^{-1},\quad \partial\Omega_{kj}=\partial\Omega_k\cap\{x:y^{(j-1)}\le x_1<y^{(j)}\},$$
$$k=1,\dots,K;\ j=1,\dots,F,\ B^{(i)}=B_h^{(i)}=\{\beta:\beta\in R^n;\ \beta_i=-[h^{-\frac{1}{\tau_i}}]D,$$
$$\beta_j=-[h^{-\frac{1}{\tau_j}}]D,\ -[h^{-\frac{1}{\tau_j}}]D+1,\dots,([h^{-\frac{1}{\tau_j}}]+1)D;\ j\neq i,\ j=1,\dots,n\},$$
$$B^{(0)}=B_h^{(0)}=\bigcup_{i=1}^{n}B_h^{(i)}.$$

Зафиксируем k и будем считать для определенности, что все коэффициенты $a_i^{(k)}$ множества $V_k'(\tau)$ положительны. Обозначим далее $T(t)=\{x:x\in E^n$, $x_i=2^{n-i+1}a_i^{(k)}t\ \ (i=1,\dots,n)\}$, для $\beta\in B^{(0)}$

$$\Gamma(\beta,s)=\{\gamma:\gamma\in R^n;\ (h^{\frac{1}{\tau}}(\gamma+Q))\cap(h^{\frac{1}{\tau}}(\beta+T(t)))\neq\emptyset,\ t\geq s\}.$$

Очевидно, что

$$Q_D\subset\bigcup_{\beta\in B^{(0)}}\ \bigcup_{\gamma\in\Gamma(\beta,0)}h^{\frac{1}{\tau}}(\gamma+Q).$$

Пусть $\beta\in B^{(0)}$, $(h^{\frac{1}{\tau}}(\gamma+Q))\cap\partial\Omega_{k_j}\neq\emptyset$ хотя бы для одного $\gamma\in\Gamma(\beta,0)$ и $t_0=\min\{t:(h^{\frac{1}{\tau}}(\beta+T(t)+\bar{Q}))\cap\partial\Omega_{k_j}\neq\emptyset\}$. Тогда существует точка $\lambda\in\bar{Q}$ такая, что $x^{(0)}=h^{\frac{1}{\tau}}(\beta+T(t_0)+\lambda)\in\partial\Omega_{k_j}$.

Из свойства (2$'$) области Ω следует, что существует последовательность точек $\{x^{(s)}\}$ такая, что $G_k'\ni x^{(s)}\to x^{(0)}$ $(s\to\infty)$ и $x^{(s)}+\delta^{\frac{1}{\tau}}V_k'(\tau)\subset\Omega$, откуда вытекает, что $x^{(0)}+\delta^{\frac{1}{\tau}}V_k'(\tau)\subset\Omega$. Покажем, что для $\gamma\in\Gamma(\beta,t_0+2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^{(\kappa)}})$ имеет место

$$h^{\frac{1}{\tau}}(\gamma+Q)\cap\{x:y^{(j-1)}\leq x_1<y^{(j)}\}\subset\Omega. \tag{3}$$

Для $\gamma\in\Gamma(\beta,t_0+2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^{(\kappa)}})$, по определению Γ, существуют $\alpha\in E^n$ и $s\geq t_0+2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^{(\kappa)}}$ такие, что $\alpha=\beta+T(s)\in\gamma+Q$. Пусть μ выбрано из условия $x^{(0)}+h^{\frac{1}{\tau}}\mu\in h^{\frac{1}{\tau}}(\gamma+Q)$. Тогда $h^{\frac{1}{\tau}}(\alpha-1)\leq x^{(0)}+h^{\frac{1}{\tau}}\mu\leq$ $\leq h^{\frac{1}{\tau}}(\alpha+1)$, т.е. $h^{\frac{1}{\tau}}(\alpha-1)\leq h^{\frac{1}{\tau}}(\beta+T(t_0)+\lambda+\mu)\leq h^{\frac{1}{\tau}}(\alpha+1)$.

Так как $\alpha=\beta+T(s)$, то для μ получаем оценку

$$T(s)-T(t_0)-2\leq\mu\leq T(s)-T(t_0)+2.$$

Остается показать, что $h^{\frac{1}{\tau}}\mu\in\delta^{\frac{1}{\tau}}V_k'(\tau)$, т.е. $0\leq\left(\frac{h^{\frac{1}{\tau}}\mu_n}{a_n^{(\kappa)}}\right)^{\tau_n}<\ldots<\left(\frac{h^{\frac{1}{\tau}}\mu_1}{a_1^{(\kappa)}}\right)^{\tau_1}$, или, иначе, $0<\left(\frac{\mu_n}{a_n^{(\kappa)}}\right)^{\tau_n}<\ldots<\left(\frac{\mu_1}{a_1^{(\kappa)}}\right)^{\tau_1}$.

Действительно, для любого $i=1,\ldots,n-1$ справедливо при

$$s\geq t_0+2+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^{(\kappa)}}$$

неравенство

$$\left(\frac{\mu_{i+1}}{a_{i+1}^{(\kappa)}}\right)^{\tau_{i+1}}\leq\left(\frac{2^{n-i}a_{i+1}^{(\kappa)}(s-t_0)+2}{a_{i+1}^{(\kappa)}}\right)^{\tau_{i+1}}<\left(\frac{2^{n-i+1}a_i^{(\kappa)}(s-t_0)-2}{a_i^{(\kappa)}}\right)^{\tau_i}\leq\left(\frac{\mu_i}{a_i^{(\kappa)}}\right)^{\tau_i},$$

откуда следует (3).

Число тех $\gamma\in\Gamma(\beta,t_0)$, для которых $(h^{\frac{1}{\tau}}(\gamma+Q))\cap(h^{\frac{1}{\tau}}(\beta+T(s)))\neq\emptyset$ при $t_0\leq s<t_0+2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^{(\kappa)}}$ не превосходит $\delta_2>0$, где δ_2 не зависит от t_0, h и β. Так как

$$|B_h^{(0)}|=\sum_{\beta\in B_h^{(0)}}1\leq\delta_3\sum_{i=1}^{n}h^{\frac{1}{\tau_i}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\tau_j}}\leq\delta_4 h^{-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\tau_i}},$$

то получаем, что $\delta(h)\leq\delta_1 h^{-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\tau_i}}$. Лемма доказана.

Покажем, что $\Omega\setminus\Omega_h\subset\bigcup_{\beta\in\bar{B}}(\beta h^{\frac{1}{\tau}}+\Pi_{2Nh})$, где $\bar{B}$ - множество всех β, для которых $(h^{\frac{1}{\tau}}(\beta+Q))\cap\partial\Omega\neq\emptyset$. В самом деле, если $x\in\Omega\setminus\Omega_h$, то,

согласно определению Ω_h, $x\in h(y+Q_N)\not\subset\Omega$ так, что $(hy+hQ_N)\cap\partial\Omega\neq\emptyset$. Если точка $x^{(0)}\in(hy+hQ_N)\cap\partial\Omega$ и $x^{(0)}\in\beta h^{\frac{1}{\tau}}+\Pi_h^+$, то, очевидно, $x\in\beta h^{\frac{1}{\tau}}+\Pi_{2Nh}$. Отсюда следует, что при

$$B=\left\{\beta:\beta\in R^n;\ (\beta h^{\frac{1}{\tau}}+\Pi_h^+)\cap(\Omega\setminus\Omega_h)\neq\emptyset\right\},\ \Omega\setminus\Omega_h\subset\bigcup_{\beta\in B}h^{\frac{1}{\tau}}(\beta+Q),$$

причем число элементов $|B|$ множества B оценивается неравенством

$$|B|=|B(h)|\leq(2N)^n|\bar{B}|\leq Sh^{-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{\tau_i}},\tag{4}$$

где $S>0$ не зависит от h.

Положим $\Pi_k^h=\Pi_k^h(\beta)=G_k\cap(\Omega\setminus\Omega_h)\cap(\beta h^{\frac{1}{\tau}}+\Pi_h^+)$ и пусть задано достаточно большое $M>0$. Из [3] следует, что существуют число $T>0$ и мультииндексы $\beta^{(1)},\dots,\beta^{(k)}$ такие, что при всех h, $0<h<h(M)$, для любого $x\in\Pi_k^h(\beta)$ сдвинутый τ-рог $x+V_k(\tau,Th)$ содержит $h^{\frac{1}{\tau}}$-параллелепипед $(\beta+\beta^{(k)})h^{\frac{1}{\tau}}+\Pi_{Mh}$, где $V_k(\tau,Th)$ задается с помощью (1) при $b=Th$.

О п р е д е л е н и е. Множество функционалов $\{\ell^h\}$, $0<h<h_0$, назовем множеством дроблений функционала ошибок ℓ с анизотропным пограничным слоем в $L_p^m(\Omega)$, если

$$\ell^h=\sum_{hy\in\Omega_h}\ell_y^h+\sum_{k=1}^{K}\sum_{\beta\in B}\ell_{\beta,k}^h,\quad \ell_y^h(x)=\ell\left(\frac{x}{h}-y\right),\ \ell\in L_p^{m^*}(Q_N),$$

$$(\ell_{\beta,k}^h,f)=\int\limits_{\Pi_k^h(\beta)}f(x)dx-\sum_{hy\in\Pi_k^h(\beta)+V_k(\tau,Th)}c_{\beta,k,y}^h f(hy),\ \ell_{\beta,k}^h\in L_p^{m^*}(\Pi_k^h(\beta)+V_k(\tau,Th)).$$

Отметим, что при

$$m>\frac{\tau_1}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}\tag{5}$$

имеется вложение $L_p^m(\Omega)\hookrightarrow C(\Omega)$ для области Ω с условием (2) (см. [4]).

Из [4, с.172] при ядре усреднения, сосредоточенном в единичной окрестности точки $\beta^{(k)}$, получаем, что при условии (5)

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}\|_{C(h^{-\frac{1}{\tau}}\Pi_k^h(\beta))}\leq C_1\Big(&\|\tilde{f}\|_{L_p^m(h^{-\frac{1}{\tau}}(\Pi_k^h(\beta)+V_k(\tau,Th)))}+\\&+\|\tilde{f}\|_{L_p(\beta+\beta^{(k)}+h^{-\frac{1}{\tau}}\Pi_{Mh})}\Big).\end{aligned}\tag{6}$$

При $m>\frac{n}{p}$ из [5] для проекционного многочлена $\tilde{P}_{m-1}(\tilde{f})$ имеем

$$\|\tilde{f}-\tilde{P}_{m-1}(\tilde{f})\|_{C(\beta+\beta^{(k)}+h^{-\frac{1}{\tau}}\Pi_{Mh})}\leq C_2\|\tilde{f}\|_{L_p^m(\beta+\beta^{(k)}+h^{-\frac{1}{\tau}}\Pi_{Mh})}.\tag{7}$$

Из (6) и (7) получаем, что при условии (5)

$$\|\tilde{f}-\tilde{P}_{m-1}(\tilde{f})\|_{C(h^{-\frac{1}{\tau}}\Pi_k^h(\beta))}\leq C_3\|\tilde{f}\|_{L_p^m(h^{-\frac{1}{\tau}}(\Pi_k^h(\beta)+V_k(\tau,Th)))}.\tag{8}$$

Заметим, что постоянные C_1,C_2,C_3 не зависят от h. Заменяя теперь x

на $h^{\frac{1}{\tau}}x$, получаем для $f(x)=\tilde{f}(h^{-\frac{1}{\tau}}x)$, $P_{m-1}(f)(x)=\tilde{P}_{m-1}(\tilde{f})(h^{-\frac{1}{\tau}}x)$ оценку

$$\|f-P_{m-1}(f)\|_{C(\Pi_k^h(\beta))}\le C_4 h^{-\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}}\sum_{|\alpha|=m} h^{\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{\tau_i}}\|D^{\alpha}f\|_{L_p(\Pi_k^h(\beta)+V_k(\tau,Th))},$$

откуда следует, что

$$\|f-P_{m-1}(f)\|_{C(F)}\le C_5 h^{\frac{m}{\tau_1}-\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}}\|f\|_{L_p^m(\Pi_k^h(\beta)+V_k(\tau,Th))}, \tag{9}$$

где $F=\Pi_k^h(\beta)\cup\left(h^{\frac{1}{\tau}}(\beta+\beta^{(k)})+\Pi_{Mh}\right)$.

Т е о р е м а 1. Если ограниченная область $\Omega\subset E^n$ удовлетворяет условию $(2')$, то существует такое дробление ℓ^h функционала ℓ с анизотропным пограничным слоем в $L_p^m(\Omega)$, что при $0<h<h_0$

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}\le C_6\left(h^m+h^{\frac{m}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_1}(1-\frac{1}{p})}\right) \tag{10}$$

с константой C_6, не зависящей от h.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать число M настолько большим, чтобы в $h^{\frac{1}{\tau}}$-параллелепипеде Π_{Mh} нашлось достаточное число узлов кубической решетки с шагом h для построения сеточной кубатурной формулы, точной для многочленов P_{m-1} степени $m-1$ (см. [1, 3]).

При $0<h<h_1$ коэффициенты a_k кубатурной формулы с узлами $h^{-\frac{1}{\tau}}[h^{\frac{1}{\tau}-1}]h\gamma\subset Q_M$, точной на многочленах P_{m-1}, для произвольного открытого множества $G\subset Q$ можно выбрать так, чтобы $|a_k|\le A$, где A не зависит от h, k и области интегрирования G. Заменив переменные x_i на $h^{\frac{1}{\tau_i}}x_i$, получим кубатурную формулу с коэффициентами $c_k^h=h^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}}a_k$ и с узлами $[h^{\frac{1}{\tau}-1}]h\gamma\subset h^{\frac{1}{\tau}}Q_M$ из кубической решетки с шагом h, точную для многочленов P_{m-1}, причем

$$|c_k^h|\le Ah^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}}. \tag{11}$$

Если $mes\,\Pi_k^h(\beta)=0$, положим $\ell^h_{\beta,k}=0$. Если же $mes\,\Pi_k^h(\beta)>0$, то пусть $\ell^h_{\beta,k}$ - функционал ошибок кубатурной формулы для интегрирования по $\Pi_k^h(\beta)$, построенный указанным способом, $supp\,\ell^h_{\beta,k}\subset\Pi_k^h(\beta)+V_k(\tau,Th)$.

Так как формулы точны для многочленов P_{m-1}, то, заменив f на $f-P_{m-1}(f)$, получим

$$\|\ell^h_{\beta,k}\|_{L_p^{m*}(\Pi_k^h(\beta)+V_k(\tau,Th))}=\sup_f\frac{\int_{\Pi_k^h(\beta)}f(x)dx-\sum_{i=1}^{L}c_i^h f(x^{h,i})}{\|f\|_{L_p^m(\Pi_k^h(\beta)+V_k(\tau,Th))}}\le$$

$$\leq \frac{\|f-P_{m-1}(f)\|_{C(\Pi_k^h(\beta))} \operatorname{mes}\Pi_k^h(\beta)+\|f-P_{m-1}(f)\|_{C(h^{\frac{1}{\tau}}(\beta+\beta^{(k)})+\Pi_{Mh})}\sum_{i=1}^{L}|c_i^h|}{\|f\|_{L_p^m(\Pi_k^h(\beta)+V_k(\tau,Th))}} .$$

Так как

$$\operatorname{mes}\Pi_k^h(\beta)\leq C_7\, h^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}} ,$$

то с помощью (9) и (11) получаем

$$\|\ell_{\beta,k}^h\|_{L_p^{m*}(\Pi_k^h(\beta)+V_k(\tau,Th))}\leq C_8 h^{\frac{m}{\tau_1}+(1-\frac{1}{p})\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}} . \qquad (12)$$

Оценим теперь норму $\ell^h=\sum_{h\gamma\in\Omega_h}\ell_\gamma^h+\sum_{k=1}^{K}\sum_{\beta\in B}\ell_{\beta,k}^h$.

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}=\sup_f\frac{|(\ell^h,f)|}{\|f\|_{L_p^m(\Omega)}}\leq \sup_f\frac{|\sum_{h\gamma\in\Omega_h}(\ell_\gamma^h,f)|}{\|f\|_{L_p^m(\Omega)}}+$$

$$+\sup_f\frac{|\sum_{k=1}^{K}\sum_{\beta\in B}(\ell_{\beta,k}^h,f)|}{\|f\|_{L_p^m(\Omega)}}=\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2 .$$

Из [1] и [3] имеем, что $\mathcal{J}_1=O(h^m)$. Оценим $\mathcal{J}_2$ с помощью (12) и неравенства Гёльдера, учитывая конечность кратности покрытия $\Omega\setminus\Omega_h$ множествами $\Pi_k^h(\beta)+V_k(\tau,Th)$:

$$\mathcal{J}_2\leq \sup_f\frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{\beta\in B}\|\ell_{\beta,k}^h\|_{L_p^{m*}(\Pi_k^h(\beta)+V_k(\tau,Th))}\|f\|_{L_p^m(\Pi_k^h(\beta)+V_k(\tau,Th))}}{\|f\|_{L_p^m(\Omega)}}\leq$$

$$\leq C_9 h^{\frac{m}{\tau_1}+(1-\frac{1}{p})\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}}\sup_f\frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{\beta\in B}\|f\|_{L_p^m(\Pi_k^h(\beta)+V_k(\tau,Th))}}{\|f\|_{L_p^m(\Omega)}}\leq$$

$$\leq C_{10}\,|B(h)|^{1-\frac{1}{p}}\, h^{\frac{m}{\tau_1}+(1-\frac{1}{p})\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}} . \qquad (13)$$

Из (13) с помощью (4) получаем $\mathcal{J}_2\leq C_{11}h^{\frac{m}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_1}(1-\frac{1}{p})}$.

Заметим, что если $m\leq(1-\frac{1}{p})\frac{1}{\tau_1-1}$, то $\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}=O(h^m)$, а если неравенство строгое, то коэффициент при h^m тот же, что и в случае кубатурных формул с обычным пограничным слоем для области той же меры (см. [1, 2, 3]).

Покажем, что оценка (10) неулучшаема на всем классе областей со слабым условием τ-рога с фиксированными параметрами. Именно для любого h,

$0<h<\frac{1}{2}$, найдется область $\Omega=\Omega(h)\subset Q_3$, удовлетворяющая условию (2′) с фиксированными параметрами и такая, что для любой кубатурной формулы с узлами из кубической решетки с шагом h имеет место неравенство

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}>C_{12}h^{\frac{m}{q_1}+\frac{1}{q_1}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \tag{14}$$

при некотором $C_{12}>0$, не зависящем от h .

Для произвольного $h\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ рассмотрим $\Omega=\Omega(h)=\left\{\left(\bigcup_{\beta\in B}h^{\frac{1}{q}}\beta+\right.\right.$ $\left.+V'(q)\right)\cup Q'\Big\}$, где $V'(q)$ задается с помощью (1′) при $a_i^{(k)}=1$ $(i=1,\ldots,n)$,

$$B=\{\beta:\beta=(\beta',\beta_n)\;;\;\beta'=(0,\beta_2,\ldots,\beta_{n-1})\in R^{n-1},\;0<\beta_j<[h^{-\frac{1}{q_j}}]$$

$$(j=2,\ldots,n-1);\;\;\beta_n=\frac{1}{4}+k\;\;\;(k=0,1,\ldots,[h^{-1}]\},$$

$$Q'=\left\{x:x\in E^n,\;\frac{1}{2}<x_1<2,\;\;0<x_j<2\;\;\;(j=2,\ldots,n)\right\}.$$

Пусть $\sigma>0$. Тогда усреднение $\varphi_h(t)$ функции $\varphi(t)=\theta(2\sigma h^{\frac{1}{q_1}}-t)$ с носителем неотрицательного ядра усреднения из $(-\sigma h^{\frac{1}{q_1}},\sigma h^{\frac{1}{q_1}})$ равно 0 при $t>3\sigma h^{\frac{1}{q_1}}$ и равно 1 при $0<t<\sigma h^{\frac{1}{q_1}}$. Заметим, что в замыкании $\Omega(h)\cap$ $\cap\{x:x\in E^n,\,x_1>\sigma h^{\frac{1}{q_1}}\}$ нет ни одного узла кубической решетки $A(h)=$ $=\{h\gamma:\gamma\in R^n\}$.

Пусть $f(x)=f_h(x_1)=\varphi_h(x_1)\,x_1^{m-1}$. Для нормы произвольного функционала ошибок ℓ^h кубатурной формулы с узлами из $A(h)\cap\overline{\Omega(h)}$ имеем

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}\geq\frac{|(\ell^h,f_h)|}{\|f_h\|_{L_p^m(\Omega)}}=\frac{J_1}{J_2},$$

где

$$J_1=\sum_{\beta\in B}\int\limits_{h^{\frac{1}{q}}\beta+V'(q)}f_h(x)dx\geq\sum_{\beta\in B}\int\limits_{h^{\frac{1}{q}}(\beta+\sigma V'(q))}x_1^{m-1}dx.$$

Каждый из интегралов под знаком суммы оценивается снизу через $C_{13}h^{\frac{m}{q_1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{q_i}}$, откуда

$$J_1\geq C_{13}h^{-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{q_i}}h^{\frac{m}{q_1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{q_i}}=C_{13}h^{\frac{m}{q_1}}.$$

Для J_2 имеем следующую оценку сверху:

$$J_2=\left(\int\limits_{\Omega(h)}|f_h^{(m)}(x_1)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{\beta\in B}\int\limits_{h^{\frac{1}{q}}(\beta+3\sigma V'(q))}|f_h^{(m)}(x_1)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq h^{-\frac{1}{p}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{q_i}}\left(\int\limits_{3\sigma h^{\frac{1}{q}}V'(q)}|f_h^{(m)}(x_1)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq C_{14}h^{-\frac{1}{p}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{q_i}}h^{-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}}=C_{14}h^{-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1 p}}$$

Следовательно, $\frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2} \geqslant C_{15} h^{\frac{m}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_1}(1-\frac{1}{p})}$, откуда вытекает (14) при $0<C_{12}<C_{15}$.

Для некоторых классов областей Ω частного вида, удовлетворяющих условию (2), можно улучшить оценку (10).

Пусть кубируемая область $\Omega \subset E^n$ удовлетворяет условию (2) и такова, что

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1(h)} \cup \overline{\Omega_2(h)}, \tag{15}$$

$0<h<h(\Omega)$, $\Omega_1(h) \cap \Omega_2(h) = \emptyset$, причем $\Omega_1(h)$ можно покрыть h^{t}-параллелепипедами, число которых не превышает $\psi(h)$, а $\Omega_2(h)$ удовлетворяет условию конуса с радиусом h и раствором, не зависящим от h.

Т е о р е м а 2. <u>Если кубируемая область Ω удовлетворяет условиям (2) и (15), то существует такое дробление ℓ^h функционала ℓ с анизотропным пограничным слоем в $L_p^m(\Omega)$, что</u>

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \leqslant C_{16}\left(h^m + h^{\frac{m}{\tau_1}+(1-\frac{1}{p})\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}}\left[\psi(h)\right]^{1-\frac{1}{p}}\right), \tag{16}$$

$0<h<1$, <u>а C_{16} не зависит от</u> h.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем строить кубатурную формулу с узлами из кубической решетки с шагом h отдельно для $\Omega_1(h)$ и $\Omega_2(h)$. Для $\Omega_2(h)$ это можно сделать так же, как в [1, 2, 3].

Для $\Omega_1(h)$ построим формулу по вышеизложенному способу. Если ℓ_1^h и ℓ_2^h - функционалы ошибок кубатурных формул, построенных для $\Omega_1(h)$ и $\Omega_2(h)$, то для $\ell^h = \ell_1^h + \ell_2^h$, как следует из (13), имеем

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \leqslant \|\ell_1^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} + \|\ell_2^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \leqslant C_{17} h^m + \|\ell_1^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{17} h^m + C_{18} h^{\frac{m}{\tau_1}+(1-\frac{1}{p})\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}} \sup_f \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{\psi(h)} \|f\|_{L_p^m(F_{j,k})}}{\|f\|_{L_p^m(\Omega)}}, \tag{17}$$

где $F_{j,k} = \Pi(k,j) + V_k(\tau, Th)$, а $\Pi(k,j)$ - пересечение G_k с h^t-параллелепипедами, покрывающими $\Omega_1(h)$. Из (17) с помощью неравенства Гёльдера получаем (16).

Как и выше, можно доказать неулучшаемость оценки (16). В частном случае, когда Ω имеет лишь конечное число вырожденных углов, т.е. $\psi(h) \leqslant C_{19}$, из (16) получаем

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \leqslant C_{20}\left(h^m + h^{\frac{m}{\tau_1}+(1-\frac{1}{p})\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tau_i}}\right). \tag{18}$$

В этом случае, как это видно из общей части, можно построить не зависящую от h область Ω такую, что при $h \to 0$ имеет место оценка, обратная к (18).

При

$$m \leq \left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{r_1}{r_1-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i} \qquad (19)$$

$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \leq C_{21} h^m$. Если же в (19) имеет место строгое неравенство, то $\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} = C_{22} h^m + o(h^m)$, причем коэффициент C_{22} тот же, что и в случае последовательности кубатурных формул с обычным пограничным слоем для области той же меры.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., "Наука", 1974, 808 с.
2. Половинкин В.И. Последовательность функционалов с пограничным слоем. - "Сиб. мат. журн.", 1974, т.15, № 2, с. 413-429.
3. Бесов О.В. Оценки погрешности кубатурных формул по гладкости функций. - "Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР", 1978, т.150.
4. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., "Наука", 1975, 480 с.
5. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, 1962, 255 с.