УДК 517.392

ОЦЕНКИ ОШИБОК КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ВЕСОВОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

О.В.Бесов (Москва)

В работе устанавливаются оценки скорости убывания ошибки сеточных кубатурных формул для весового интегрирования при уменьшении шага сетки в зависимости от гладкости функций. При этом рассматриваются функционалы ошибок, распределенные в соответствии с весом, в частности последовательности функционалов ошибок весового интегрирования с пограничным слоем. Оценки проводятся в анизотропном случае через L_p -модули непрерывности различных порядков самой функции или ее производных. Оценки в невесовом случае через модули непрерывности первого порядка в метрике в некоторых случаях были известны ранее [1, 2]. Показывается, что для области Ω со слабым условием τ-рога можно построить с помощью интерполяционных операторов кубатурные формулы весового интегрирования, удовлетворяющие полученным оценкам.

С помощью интерполяционных операторов В.И.Половинкиным [3] строились специальные кубатурные формулы весового интегрирования с кубической решеткой (так называемые кубатурные формулы весового интегрирования с пограничным слоем в $L_p^s(\Omega)$) для области Ω со слабым условием конуса (изотропный случай). Им найден порядок убывания норм функционалов ошибок в пространстве С.Л.Соболева $L_p^s(\Omega)$ и указан вид тех из них, которые являются асимптотически оптимальными (среди всех кубатурных формул весового интегрирования с кубической решеткой).

Будем пользоваться следующими обозначениями:

E^n – n-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$; $Q=[0,1)^n\subset E^n$; $h=(h_1,\ldots,h_n)$, $0<h_i\le h_0$, $h^{-1}=(h_1^{-1},\ldots,h_n^{-1})$; s, m_i - натуральные числа; $m=(m_1,\ldots,m_n)$, $m-1=(m_1-1,\ldots,m_n-1)$; $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, γ_i - целые числа; $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, α_i, κ_i, j - целые неотрицательные числа; $h\gamma=(h_1\gamma_1,\ldots,h_n\gamma_n)$, $\frac{x}{h}=\left(\frac{x_1}{h_1},\ldots\frac{x_n}{h_n}\right)$; $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, $\tau_i>0$, $v^{\frac{1}{\tau}}=(v^{\frac{1}{\tau_1}},\ldots,v^{\frac{1}{\tau_n}})$, $v>0$; для $G\subset E^n$ обозначим $hG=\left\{x:\frac{x}{h}=\left(\frac{x_1}{h_1},\ldots,\frac{x_n}{h_n}\right)\in G\right\}$,

$hy+G=\{x: x-hy\in G\}$; $\sum\limits_{yh\in G}$ - суммирование по y ;

$$Q^{(N)}=\bigcup_{|y_i|\le N-1}(y+Q)=[-N+1,N)^n,\quad Q_y^{(N)}=y+Q^{(N)};$$

$$1\le p\le\infty,\quad 1\le q\le\infty,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1;$$

$$\|f\|_{p,G}=\left\{\int_G|f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\qquad(1\le p<\infty),$$

$$\|f\|_{\infty,G}=\operatorname*{ess\,sup}_G|f(x)|,\quad \|f\|_p=\|f\|_{p,E^n};$$

$$\Delta^s(y)f(x)=\sum_{i=0}^{s}(-1)^{s-i}C_s^i f(x+iy);$$

$\Delta_i^{m_i}(t)f(x)=\Delta^{m_i}(te^{(i)})f(x)$, где $e^{(i)}-i$ -й орт;

$\Delta^s(y,G)f(x)=\Delta^s(y)f(x)$, если G содержит отрезок $[x,x+sy]$,

$\Delta^s(y,G)f(x)=0$ - в противном случае.

При

$$e\in E^n,\quad |e|=1,\quad \sigma>0$$

$$\omega_e^s(\sigma,G,f)_p=\sup_{|t|\le\sigma}\|\Delta^s(te,G)f\|_p,$$

$$\omega^s(\sigma,G,f)_p=\sup_{|e|=1}\omega_e^s(\sigma,G,f)_p,$$

$$\omega_i^s(\sigma,G,f)_p=\omega_{e^{(i)}}^s(\sigma,G,f)_p,$$

$$P_{m-1}(x)=\sum_{\alpha_1<m_1}\dots\sum_{\alpha_n<m_n}c_\alpha x^\alpha.$$

Ограниченная область $\Omega\subset E^n$,

$$\Omega^h=\{x: x\in hy+hQ,\ mes[\Omega\cap(hy+hQ)]>0\}.$$

В случае $h=(\sigma,\dots,\sigma)$ вместо hy, hG, Ω^h и т.д. будем писать просто $\sigma\gamma$, σG, Ω^{σ} и т.д.

Функция $g(x)$ (весовая) задана на Ω, $g \in L_q(\Omega)$. Будем считать, что g продолжена нулем на E^n. Будем предполагать, что Ω удовлетворяет слабому условию τ-рога [4], в силу которого существуют попарно-непересекающиеся измеримые множества $G_1, \ldots, G_K$ такие, что

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{K} G_k = \bigcup_{k=1}^{K} \left(G_k + \delta^{\frac{1}{\tau}} V_k(\tau)\right), \tag{1}$$

где

$$V_k(\tau) = \bigcup_{0<\sigma<1} \left\{ x : \frac{x_i}{a_{ki}} > 0,\ \sigma < \left(\frac{x_i}{a_{ki}}\right)^{\tau_i} < (1+\varepsilon)\sigma,\ i=1,\ldots,n \right\},$$

$$a_{ki} \neq 0,\quad \varepsilon > 0,\quad \delta > 0.$$

Будем считать, что

$$h = \sigma^{\frac{1}{\tau}},\quad 0 < \sigma \leq \sigma_0. \tag{2}$$

Для изотропного случая $\tau_1 = \ldots = \tau_n$ слабое условие τ-рога называется также слабым условием конуса.

Л е м м а 1. Пусть функционал ℓ^h имеет вид

$$(\ell^h, f) = \left(\sum_{\gamma h \in \Omega} \ell_\gamma^h, f\right) \tag{3}$$

и при $0 \leq k_i \leq m_i$, $1 \leq p \leq \infty$, $\gamma h \in \Omega^h$ справедлива оценка

$$|(\ell_\gamma^h, f)| \leq C \|g\|_{q, hQ_\gamma^{(N)}} \sum_{i=1}^{n} h_i^{\tau_i} \int_0^{h_i} \omega_i^{m_i-k_i}(t, \Omega \cap$$

$$\cap\, hQ_\gamma^{(N)}, \mathcal{D}_i^{k_i} f)_p \frac{dt}{t^{1+\tau_i-k_i}}. \tag{4}$$

Тогда

$$|(\ell^h, f)| \leq C_1 \|g\|_q \sum_{i=1}^n h_i^{\tau_i} \int_0^{h_i} \omega_i^{m_i-k_i}(t,\Omega,\mathcal{D}_i^{k_i} f)_p \frac{dt}{t^{1+\tau_i-k_i}} . \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью неравенства Гельдера для сумм и интегралов имеем

$$|(\ell^h, f)| \leq C \sum_{i=1}^n \int_0^{h_i} \left(\sum_{\gamma h \in \Omega^h} \int_{hQ_\gamma^{(N)}} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left(\sum_{\gamma h \in \Omega^h} \left[\omega_i^{m_i-k_i}(t, \Omega \cap hQ_\gamma^{(N)}, \mathcal{D}_i^{k_i} f)_p \right]^p \right)^{\frac{1}{p}} \frac{dt}{t^{1+\tau_i-k_i}},$$

откуда и следует (5).

Аналогично устанавливается

Л е м м а 1$'$. Пусть функционал ℓ^σ имеет вид

$$(\ell^\sigma, f) = \left(\sum_{\gamma\sigma \in \Omega^\sigma} \ell_\gamma^\sigma, f \right)$$

и при $0 \leq k \leq s$, $1 \leq p \leq \infty$, $\gamma\sigma \in \Omega^\sigma$ справедлива оценка

$$|(\ell_\gamma^\sigma, f)| \leq C \|g\|_{q,\sigma Q_\gamma^{(N)}} \int_0^\sigma \sum_{|\alpha|=k} \omega^{s-k}(u, \Omega \cap \sigma Q_\gamma^{(N)}, \mathcal{D}^\alpha f)_p \frac{du}{u^{1+p-k}} .$$

Тогда

$$|(\ell^\sigma, f)| \leq C_1 \|g\|_q \int_0^\sigma \sum_{|\alpha|=k} \omega^{s-k}(u, \Omega, \mathcal{D}^\alpha f)_p \frac{du}{u^{1+p-k}} .$$

Отметим, что леммы 1 и 1$'$ верны и без предположения, что Ω удовлетворяет слабому условию τ-рога (конуса).

Наша цель теперь построить кубатурные формулы, удовлетворяющие условиям лемм 1, 1$'$. Укажем предварительно одно геометрическое свойство области Ω. Из (1) следует, что для всякого натурального M существуют натуральное N и мультииндексы $\gamma^{(k)}$ такие, что

$$|\gamma_i^{(k)}| + M < N \qquad (i=1,\dots,n;\ k=1,\dots,K)$$

и при всех σ, $0 < \sigma < \sigma(M)$, и всех γ множество $G_k \cap \sigma^{\frac{1}{\tau}}(Q+\gamma)$ τ-достижимо по Ω из множества

$$\sigma^{\frac{1}{\tau}}(Q^{(M)} + \gamma + \gamma^{(k)}) \subset \Omega \cap \sigma^{\frac{1}{\tau}}(Q^{(N)} + \gamma), \tag{6}$$

т.е.

$$\bigcup_{0<\eta\leq 1} \left[(1-\eta^{\frac{1}{\tau}}) x + \eta^{\frac{1}{\tau}} \sigma^{\frac{1}{\tau}} (Q^{(M)} + \gamma + \gamma^{(k)}) \right] \subset \Omega \tag{7}$$

при $x \in G_k \cap \sigma^{\frac{1}{\tau}}(Q+\gamma)$.

Соотношение (7) тривиально выполнено и для $x \in \sigma^{\frac{1}{\tau}}(Q^{(M)} + \gamma + \gamma^{(k)})$.

Л е м м а 2. <u>При достаточно большом</u> N <u>существуют функционалы ошибок</u> $\ell^h_{\gamma,k}$, $\gamma h \in \Omega^h$, $1 \le k \le K$, <u>вида</u>

$$(\ell^h_{\gamma,k}, f) = \int\limits_{G_k \cap hQ_\gamma} f(x) g(x)\,dx - \sum_{\beta h \in \Omega \cap hQ_\gamma^{(N)}} c^h_{\gamma,k,\beta} f(\beta h), \tag{8}$$

<u>причем</u>

$$|c^h_{\gamma,k,\beta}| \le c \|g\|_{q, hQ_\gamma^{(N)}} \prod_{j=1}^{n} h_j^{\frac{1}{p}}, \tag{9}$$

$$(\ell^h_{\gamma,k}, P_{m-1}) = 0 \qquad \text{для любого } P_{m-1}. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\operatorname{mes}(G_k \cap hQ_\gamma) = 0$, то можно взять $c^h_{\gamma,k,\beta} = 0$. Построение $\ell^h_{\gamma,k}$ в изотропном невесовом случае имеется в [5], а при наличии веса и с заменой (7) на соответствующее требование ограниченности L_p^{s*}-норм $\ell^h_{\gamma,k}$ - в [3]. В последнем случае построение проводится с помощью проекционных операторов. Требуемые в лемме функционалы можно построить, обобщив соответствующие рассмотрения из [5] или [3] на анизотропный случай. Здесь будет использован второй способ, связанный с построением интерполяционных операторов.

Построим функционал $\ell^h_{\gamma,k}$, положив

$$(\ell^h_{\gamma,k}, f) = \int\limits_{G_k \cap hQ_\gamma} \left[f(x) - (\mathcal{J}^h_{\gamma,k} f)(x)\right] g(x)\,dx, \tag{11}$$

где $\mathcal{J}^h_{\gamma,k}$ - интерполяционный оператор вида

$$(\mathcal{J}^h_{\gamma,k} f)(x) = \sum_{|\beta_i| < M} P_{m-1,k,\beta}\left(\frac{x}{h}\right) f(h\gamma + h\gamma^{(k)} + h\beta)$$

со свойством

$$\mathcal{J}^h_{\gamma,k} P_{m-1} = P_{m-1} \qquad \text{для любого } P_{m-1}. \tag{12}$$

Такой оператор можно построить, если M достаточно велико, например, следующим образом (см. [3] для изотропного случая.) Пусть $\mathcal{J}$ - интерполяционный оператор вида

$$(\mathcal{J}f)(x) = \sum_{|\beta_i| < M} P_{m-1,\beta}(x) f(\beta), \quad \mathcal{J} P_{m-1} = P_{m-1}. \tag{13}$$

Положим

$$(\mathcal{J}^h_{\gamma,k} f)(x) = \sum_{|\beta_i| < M} P_{m-1,\beta}\left(\frac{x}{h} - \gamma - \gamma^{(k)}\right) f(h\gamma + h\gamma^{(k)} + h\beta). \tag{14}$$

Тогда $\mathcal{J}^h_{\gamma,k} = B^h_{\gamma,k} \mathcal{J} A^h_{\gamma,k}$,

где

$$(A^h_{\gamma,k} f)(x) = f(hx + h\gamma + h\gamma^{(k)}),$$

$$(B^h_{\gamma,k} f)(x) = f\left(\frac{x}{h} - \gamma - \gamma^{(k)}\right).$$

Так как $B^h_{\gamma,k} A^h_{\gamma,k}$ - тождественный оператор, то в силу (13) имеет место (12). Из (12), (14) и (11) следует теперь (8)-(10).

Замечание 1. При доказательстве леммы 2 установлено, что точки βh в (8) можно брать из множества $h(Q^{(M)}+\gamma+\gamma^{(k)})\subset\Omega\cap h(Q^{(N)}+\gamma)$, см. (6).

Замечание 2. Утверждение леммы 2 верно и в области более общего типа. Так, в изотропном случае можно считать, что Ω имеет "резкую границу" (см. [5]). Аналогичное свойство является достаточным и в анизотропном случае.

Теорема 1. Для ограниченной области Ω со слабым условием τ-рога (1) существует множество функционалов ошибок $\{\ell^h\}$, $h=\upsilon^{\frac{1}{\tau}}$, $0<\upsilon<\upsilon_0$, вида

$$(\ell^h, f)=\int_\Omega f(x)g(x)dx-\sum_{\gamma h\in\Omega} c_\gamma^h f(\gamma h), \tag{15}$$

для которых выполняется оценка (5) при $1\le p\le\infty$, $m_i>\tau_i$, $m_i\ge k_i\ge 0$, $\sum_1^n \frac{1}{\tau_i}\le p$.

Доказательство. Построим функционалы

$$\ell^h=\sum_{\gamma h\in\Omega^h}\ell_\gamma^h,$$

положив

$$\ell_\gamma^h=\sum_{k=1}^K \ell_{\gamma,k}^h,$$

где $\ell^h_{\gamma,k}$ взяты из (11), (14), если $\operatorname{mes}(G_k\cap hQ_\gamma)>0$, $\ell^h_{\gamma,k}=0$ - в противном случае. В силу леммы 1 для доказательства теоремы достаточно получить оценку (4). Последняя будет иметь место, если она выполняется для $\ell^h_{\gamma,k}$ вместо ℓ^h_γ при каждом $k=1,\dots,K$. Покажем, что это так. Пусть $\operatorname{mes}(G_k\cap hQ_\gamma)>0$,

$$H(k,h,\gamma)=(G_k\cap hQ_\gamma)\cup h(Q^{(M)}+\gamma+\gamma^{(k)}).$$

В силу (11), (14), (12),

$$|(\ell^h_{\gamma,k},f)|\le C\|g\|_{q,hQ_\gamma^{(N)}}\prod_1^n h_i^{\frac{1}{p}}\sup_{H(k,h,\gamma)}|f(x)-P_{m-1}(x)|, \tag{16}$$

где P_{m-1} - произвольный многочлен. В силу (7), $H(k,h,\gamma)$ τ-достижимо по Ω из $h(Q^{(M)}+\gamma+\gamma^{(k)})$ (6). Замена $x=h(\tilde{x}+\gamma)$ переводит $H(k,h,\gamma)$ во множество

$$H(k,h,\gamma)=[(h^{-1}G_k-\gamma)\cap Q]\cup[Q^{(M)}+\gamma^{(k)}]\quad(\subset Q^{(N)}),$$

τ-достижимое по $h^{-1}\Omega-\gamma$ из $Q^{(M)}+\gamma^{(k)}$. Тогда для точек $\tilde{x}\in$ $\in\tilde{H}(k,h,\gamma)$ справедливо проекционное разложение:

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{P}_{m-1}(\tilde{x}) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 \frac{1}{t}\iint R_i(\tilde{x},y,z)\Delta_i^{m_i}\left(bt^{\frac{1}{\tau_i}}y_i\right)\tilde{f}\left(\tilde{x}-t^{\frac{1}{\tau}}x+t^{\frac{1}{\tau}}y+t^{\frac{1}{\tau}}z\right)dy\,dz\,dt. \tag{17}$$

Здесь при наперед заданном $\varepsilon>0$ и достаточно малом $b>0$ $\tilde{P}_{m-1}(\tilde{x})$ – многочлен, построенный по значениям $\tilde{f}$ из шара $\{\tilde{x}: |\tilde{x}-y^{(k)}|<\varepsilon\}$, $R_i(\tilde{x},y,z)$ - многочлены степеней не выше $m_j-1+\delta_{ij}$ по $\tilde{x}_j$ с коэффициентами из $C_0^\infty(E^n)$ по y и по z, не зависящими от $\tilde{f}$ и сосредоточенными в

$$\left\{(y,z): |y-\tfrac{1}{2}y^{(k)}|<\varepsilon,\ |z-\tfrac{1}{2}y^{(k)}|<\varepsilon\right\}.$$

Взяв $b>0$, $\varepsilon>0$ достаточно малыми, получим, что для любого $\tilde{x}\in\tilde{H}(k,h,y)$ представление (17) определено для сужения $\tilde{f}$ на

$$\bigcup_{0<\eta\le 1}\left[(1-\eta^{\frac{1}{\tau}})\tilde{x}+\eta^{\frac{1}{\tau}}(Q^{(M)}+y^{(k)}-\tilde{x})\right]\subset(h^{-1}\Omega-y)\cap Q^{(N)}.$$

Теперь с помощью простых оценок получаем из (17) при $\sum_1^n\frac{1}{\tau_i}\le p$ неравенство

$$\sup_{\tilde{H}(k,h,y)}|\tilde{f}(\tilde{x})-\tilde{P}_{m-1}(\tilde{x})|\le$$
$$\le\tilde{C}\sum_{i=1}^n\int_0^1\|\Delta_i^{m_i}(t,(h^{-1}\Omega-y)\cap Q^{(N)})\tilde{f}\|_p t^{-\tau_i-1}dt,$$

в котором $\tilde{C}$ не зависит от $\tilde{f}$, k, h, y. Возвращаясь к переменной x, получаем для $f(x)=\tilde{f}(\tilde{x})$, $P_{m-1}(x)=\tilde{P}_{m-1}(\tilde{x})$ оценку

$$\sup_{H(k,h,y)}|f(x)-P_{m-1}(x)|\le C\left(\prod_1^n h_i\right)^{-\frac{1}{p}}\sum_{i=1}^n h_i^{\tau_i}\times$$
$$\times\int_0^{h_i}\|\Delta_i^{m_i}(t,\Omega\cap hQ_y^{(N)})f\|_p t^{-\tau_i-1}dt. \tag{18}$$

Применяя неравенство (18) к оценке (16), в которой берем P_{m-1} тем же, что и в (18), получаем

$$|(\ell_{y,k}^h,f)|\le C_1\|g\|_{q,hQ_y^{(N)}}\times$$
$$\times\sum_{i=1}^n h_i^{\tau_i}\int_0^{h_i}\|\Delta_i^{m_i}(t,\Omega\cap hQ_y^{(N)})f\|_p t^{-\tau_i-1}dt.$$

Теорема доказана при $k_i=0$. Общий случай вытекает из доказанного с помощью замены разностей интегралами от производных и применения обобщенного неравенства Минковского (см., например, [4]).

С л е д с т в и е. <u>В условиях теоремы 1 при</u> $m_i\ge k_i>\tau_i$ $(i=1,\ldots,n)$

выполняется оценка

$$|(\ell^h, f)| \le C\|g\|_q \sum_{i=1}^{n} h_i^{k_i}\, \omega_i^{m_i-k_i}(h_i, \Omega, \mathcal{D}_i^{k_i} f)_p. \tag{19}$$

Доказательство. Достаточно заменить $\omega_i^{m_i-k_i}(t, \Omega, \mathcal{D}_i^{k_i} f)_p$ в правой части (5) на $\omega_i^{m_i-k_i}(h, \Omega, \mathcal{D}_i^{k_i} f)_p$ и вычислить интегралы по t.

Будем далее считать, что область Ω удовлетворяет несколько более сильному требованию, чем слабое условие τ-рога. Именно, пусть существуют открытые множества $\hat{G}_1, \ldots, \hat{G}_K$ такие, что

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{K} \hat{G}_k = \bigcup_{k=1}^{K} (\hat{G}_k + \delta^{\frac{1}{\tau}} \hat{V}_k(\tau)), \tag{20}$$

$$\hat{V}_k(\tau) = \Big\{ x : \frac{x_i}{a_{ki}} \ge 0,\ \Big(\frac{x_{i_1}}{a_{ki_1}}\Big)^{\tau_{i_1}} \le \ldots \le \Big(\frac{x_{i_n}}{a_{ki_n}}\Big)^{\tau_{i_n}} \le 1,$$

$$i_j = i_j(k),\ i_j \ne i_s \ \text{при}\ j \ne s \Big\}. \tag{21}$$

Теорема 2. Для ограниченной области Ω с условием (20) существует множество функционалов ошибок $\{\ell^h\}$, $h = \sigma^{\frac{1}{\tau}}$, $0 < \sigma < \sigma_0$, вида (15), для которых при $m_i \ge k_i \ge 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $p = \infty$, $q = 1$ выполняется оценка (19) для непрерывных функций f.

Доказательство. Выведем прежде всего одно проекционное разложение непрерывной функции через разности. Рассмотрим сначала разложение непрерывной функции $\varphi(x_i)$ одного переменного

$$\varphi(x_i) = (-1)^{m_i} \int K_i(y_i) \Delta_i^{m_i}(y_i)\, \varphi(x_i)\, dy_i +$$

$$+ \iint R_i(x_i, y_i)\, S_i(z_i)\, \Delta_i^{m_i}(z_i)\, \varphi(y_i)\, dy_i\, dz_i +$$

$$+ \sum_{0 \le j < m_i} x_i^j \int L_{ij}(y_i)\, \varphi(y_i)\, dy_i = \Pi_i^* \varphi + \Pi_i \varphi. \tag{22}$$

Здесь $\Pi_i \varphi$ - многочлен, $\Pi_i^* \varphi$ зависит от разности $\Delta_i^{m_i} \varphi$, функция $R_i(x_i, y_i)$ ограничена при ограниченных x_i, y_i, бесконечно дифференцируема при $x_i \ne y_i$ и равна нулю, если y_i находится вне отрезка $[\min(x_i, b_i), \max(x_i, b_i + \varepsilon)]$,

$$K_i, S_i \in C_0^\infty([a_i, m_i^2 a_i + \varepsilon]),\ L_{ij} \in C_0^\infty([b_i, b_i + \varepsilon]),$$

где $a_i > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малыми, b_i - произвольными.

Для непрерывных функций $f(x)$ от n переменных, применяя последовательно разложения (22), построим проекционное разложение

$$f = \Pi^* f + \Pi f, \tag{23}$$

где $\Pi f = \Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_n f$ - многочлен P_{m-1}, а $\Pi^* f$ зависит лишь от разностей $\Delta_i^{m_i} f \quad (i=1,\ldots,n)$. Именно, положим

$$E = \Pi_1^* + \Pi_1 = \Pi_1^* + \Pi_1 \Pi_2^* + \Pi_1 \Pi_2 = \ldots = \Pi_1^* + \Pi_1 \Pi_2^* + \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3^* + \ldots +$$
$$+ \Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_{n-1} \Pi_n^* + \Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_n = \Pi^* + \Pi.$$

При этом параметры представлений (22) выберем в зависимости от i специальным образом. Пусть задано $M > 3$ и пусть N_i - натуральные числа. Выберем b_i, a_i, ε из условий

$$N_i + 2 < b_i < b_i + \varepsilon + m_i^3 a_i + m_i \varepsilon < N_i + M \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Представление (23) будет применяться для точек

$$x \in [0,1)^n \cup \{[2,M]^n + \sum_{i=1}^n N_i e_i\}, \tag{24}$$

где e_i - i-й орт.

В случае $x \in [0,1)^n$ значение $f(x)$ в силу представления (23) определяется сужением f на множество

$$X(x) = \bigcup_{k=1}^n (Q_{k-1} \cup Q_k)_{вып},$$

где

$$Q_n = [2, M+1]^n + \sum_{i=1}^n N_i e_i,$$

Q_k - проекция Q_n на k-мерную плоскость $y_{k+1} = x_{k+1}, \ldots, y_n = x_n$, $(Q_{k-1} \cup Q_k)_{вып}$ - выпуклая оболочка множества $Q_{k-1} \cup Q_k$.

В случае $x \in [2,M]^n + \sum_1^n N_i e_i$ значение $f(x)$ в силу представления (23) определяется сужением f на куб

$$[2, M+1]^n + \sum_1^n N_i e_i \subset \bigcap_{y \in [0,1)^n} X(y).$$

Пусть $\hat{V}(r)$ имеет вид (21) при $a_{ki} > 0$, $i_j = j$. Тогда, очевидно, для заданного M можно выбрать такие натуральные числа N_i и H, что

$$X(x) \subseteq x + H^{\frac{1}{r}} \hat{V}(r), \quad \forall x \in [0,1)^n.$$

Чтобы применить представление (23) для каждого $\hat{G}_k$ из (20) придется, может быть, перенумеровать координатные оси и сменить направления некоторых из них на противоположные, чтобы свести к случаю $a_{ki} > 0$, $i_j = j$ в (21).

Дальнейшую часть доказательства теоремы 2 проводим, используя представление (23) так же, как соответствующую часть доказательства теоремы 1 с помощью представления (17).

З а м е ч а н и е. Если среди чисел r_i имеются совпадающие, то теорема 2 сохраняется и для области Ω более общего вида. Именно, условие на область Ω задается соотношением (20), в котором $\hat{V}_k(\tau)$ описываются неравенствами (21) в системе координат, отличающейся от исходной, возможно, поворотами в подпространствах, каждое из которых соответствует группе совпадающих значений τ_i. В сущности доказательство отличается лишь тем, что при построении проекционного разложения типа (23) "составляющие" разложения по переменным с одинаковыми значениями τ_i заменяются одним многомерным проекционным разложением.

Литература

1. Никольский С.М. Кубатурные формулы, М., "Наука", 1974, 223 с.
2. Корнейчук Н.П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных. - "Матем. заметки", 1968, т.3, № 5, с.565-567.
3. Половинкин В.И. Весовые кубатурные формулы в $L_p^{(m)}(\Omega)$. - В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики, Ташкент (Ин-т кибернетики с ВЦ АН УзССР) 1975, вып.32, с.99-104.
4. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., "Наука", 1975, 480 с.
5. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул, М., "Наука", 1974, 808 с.