УДК 517.948:513.8+519.4

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АБСТРАКТНО ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С.И.Жданов (Новосибирск)

В работе характеризуется класс абстрактно интегральных операторов, действующих из полуупорядоченного пространства в функциональное.

Пусть X_{x_0} - K-пространство x_0-ограниченных элементов с достаточным числом вполне линейных функционалов, X_{max} - его максимальное расширение с единицей x_0 и булевой алгеброй $\mathcal{B}(X)$ единичных элементов; в X_{max} можно определить операцию умножения $x_1 \circ x_2$ [1].

Будем предполагать, что $X^{\times}_{x_0}$ - фундамент в X_{max} с нормой $\|x\|_{X^{\times}_{x_0}}$, аддитивной для положительных слагаемых. Тогда $x_0^{\times}(x) = \|x_+\|_{X^{\times}_{x_0}} - \|x_-\|_{X^{\times}_{x_0}}$ - существенно положительный вполне линейный функционал над $X^{\times}_{x_0}$. Мы полагаем, что x_0 допускает представление $x_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e_n$, где $\{e_n\}$ - последовательность попарно дизъюнктных единичных элементов таких, что $x_0^{\times}(e_n) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ Отсюда следует, что X_{max} - K - пространство счетного типа.

Пусть $x' \in X_{max}$ - положительный элемент. Обозначим через $X_{x'}$ - K - пространство x' - ограниченных элементов, через $X^{\times}_{x'}$ - линейное многообразие тех элементов $x \in X_{max}$, для которых $x_0^{\times}(|x| \circ x') < \infty$. Определим на $X^{\times}_{x'}$ монотонную норму, положив $\|x\|_{X^{\times}_{x'}} = x_0^{\times}(x' \circ |x|)$. Нормированное пространство $X^{\times}_{x'}$ является KB-пространством, нормально содержащимся в X_{max}. Общий вид (o)- линейных функционалов как над $X_{x'}$, так и над $X^{\times}_{x'}$ дается формулой

$$\langle x^{\times}, x \rangle = x_0^{\times}(x^{\times} \circ x), \quad x^{\times} \in X_{x'}, \quad x \in X^{\times}_{x'}.$$

Всюду ниже (Ω, μ) - пространство с σ-конечной положительной мерой μ, $S(\Omega, \mu)$ - пространство вещественных μ-измеримых на Ω функций с естественным отождествлением эквивалентных функций.

1. Напомним, что линейный оператор T, действующий из нормированного пространства Z в K-пространство W, называется оператором с абстрактной нормой (см. [1]), если в W существует элемент w такой, что $\sup\limits_{\|z\| \leq 1} |Tz| < w$.

Теорема 1. <u>Пусть</u> X - KB-<u>пространство,</u> $T : X^{\times} \to S(\Omega, \mu)$ - <u>оператор с абстрактной нормой. Для того чтобы</u> T <u>был представим в виде</u>

$(Tx^*)(s)=\langle x^*, \varphi(s)\rangle$, где $\varphi : \Omega \to X$ - измеримая функция, принимающая значения в компоненте $X(\bar{x}) \in X$, порожденной положительным элементом $\bar{x} \in X$, необходимо и достаточно, чтобы $T \in H_J(X^* \to S(\Omega,\mu))$, где $H_J(X^* \to S(\Omega,\mu))$ - компонента в пространстве $H_r(X^* \to S(\Omega,\mu))$ регулярных операторов, порожденная оператором $J : X^* \to S(\Omega,\mu)$, $(Jx^*)(s) = \langle x^*, \bar{x}\rangle g(s)$, $g(s)=1$ в Ω .

Не уменьшая общности, мы будем доказывать теорему, предполагая положительность оператора T .

Доказательство. Необходимость. Пусть $(Tx^*)(s)=\langle x^*, \varphi(s)\rangle$, где $\varphi : \Omega \to X$ - положительная μ-измеримая функция со значениями в $X(\bar{x})$. Существует такое множество Ω_0 , что $\mu\Omega_0 = 0$ и в каждой точке $s \in \Omega \setminus \Omega_0$ выполняется $\varphi(s) = \sup\limits_N \varphi_N(s)$, где $\varphi_N(s) = \inf(\varphi(s), N\bar{x})$, $N=1,2,\dots$ Ясно, что для таких $s \in \Omega\setminus\Omega_0$ имеет место $\varphi_N(s) \le \varphi_{N+1}(s)$ и $\varphi_N(s) \in X(\bar{x})$, $N=1,2,\dots$. Определим операторы $T_N : X^* \to S(\Omega,\mu)$, $(T_N x^*)(s) = \langle x^*, \varphi_N(s)\rangle$. Операторы T_N образуют монотонно возрастающую последовательность, и для любого $x^* \in X^*$ функция $|(Tx^*)(s)| = |\langle x^*, \varphi(s)\rangle| = \lim\limits_{N\to\infty} |\langle x^*, \varphi_N(s)\rangle| = \lim\limits_{N\to\infty} (T_N x^*)(s)$ - μ - почти всюду в Ω , т.е. $T_N x^* \xrightarrow{(o)} Tx^*$. Следовательно, $T_N \xrightarrow{(o)} T$. Так как для любого положительного $x^* \in X^*$ справедливо $T_N x^* \le Tx^*$, $N=1,2,\dots$, то $T_N \in H_J(X^* \to S(\Omega,\mu))$ и, таким образом, $T \in H_J(X^* \to S(\Omega,\mu))$.

Достаточность. Пусть $T \in H_J(X^* \to S(\Omega,\mu))$ - положительный оператор. Тогда $T = \sup\limits_N T_N$, где $T_N = \inf(T, NJ)$, $N=1,2,\dots$.

Так как для любого $x^* \in X^*$ верно $|(T_N x^*)(s)| \le N \langle x^*, \bar{x}\rangle g(s)$, то, используя теорему 1.1.7 [3] , можно записать $(T_N x^*)(s) = \langle x^*, \varphi_N(s)\rangle$, где $\varphi_N : \Omega \to X$ - μ -измеримые функции, $N=1,2,\dots$. Кроме того, $\theta \le \varphi_N(s) \le \varphi_{N+1}(s)$ - μ -почти всюду в Ω , а из неравенства $|\langle x^*, \varphi_N(s)\rangle| \le N|\langle x^*, \bar{x}\rangle| g(s)$ следует, что для μ -почти всех $s \in \Omega$ значения $\varphi_N(s)$, $N=1,2,\dots$, принадлежат компоненте $X(\bar{x})$.

Так как $T_N \le T$, $N=1,2,\dots$, и $T : X^* \to S(\Omega,\mu)$ - оператор с абстрактной нормой, то $\sup\limits_{\|x^*\|\le 1} |(T_N x^*)(s)| = \sup\limits_{\|x^*\|\le 1} |\langle x^*, \varphi_N(s)\rangle| = \|\varphi_N(s)\|_X \le \sup\limits_{\|x^*\|\le 1} |(Tx^*)(s)| \le \omega(s) < \infty$ - μ -почти всюду в Ω . В силу μ -измеримости функций $\varphi_N : \Omega \to X$, $N=1,2,\dots$, функции $\|\varphi_N(s)\|_X$ μ -измеримы, и ясно, что найдется множество $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mu\Omega_0 = 0$, такое, что для всех $s \in \Omega \setminus \Omega_0$ имеет место $\{\varphi_N(s)\} \subset X(\bar{x})$, $N=1,2,\dots$, и $\|\varphi_N(s)\|_X \le \omega(s) < \infty$, $N=1,2,\dots$. Так как X - KB -пространство, то для этих $s \in \Omega \setminus \Omega_0$ существует $\varphi(s) = \sup\limits_N \varphi_N(s)$ и $\|\varphi(s) - \varphi_N(s)\|_X \to 0$, т.е. $\varphi : \Omega \to X$ является μ -измеримой функцией. Из определения компоненты следует, что $\sup\limits_N \varphi_N(s) = \varphi(s) \in X(\bar{x})$.

Для любого положительного $x^* \in X^*$ равенство $(Tx^*)(s) = \sup\limits_N (T_N x)(s) =$

$= \sup_N <x^*, \varphi_N(s)> = <x^*, \varphi(s)>$ будет μ-почти всюду. Отсюда следует, что для всех $x^* \in X^*$ верно $(Tx^*)(s) = <x^*, \varphi(s)>$. Теорема доказана.

Пусть $X_{x'} \subset X_{max}^{\lambda}$ - K-пространство x'-ограниченных элементов. Если $x' \in X_{x'}^{\lambda}$ - функционал, для которого $X_{x'}$ является компонентой существенной положительности, то x^x - мера на $B(x')$-булевой алгебре единичных элементов из $X_{x'}$.

Напомним [4], что последовательность $\{e_n\} \subset B(X_{x'})$ сходится к $e \in B(X_{x'})$ звездно относительно (o)-сходимости тогда и только тогда, когда $x^x(e_n) \to x^x(e)$.

Т е о р е м а 2. <u>Пусть</u> B - <u>булева алгебра с мерой</u> ν, Y - <u>регулярное</u> K-<u>пространство счетного типа с единицей</u> y_0. <u>Функция</u> $F: B \to Y$, $F(e) = \nu(e) y_0$, <u>является единицей в пространстве функций</u> $\varphi: B \to Y$ <u>таких, что</u> $\varphi(e_n) \xrightarrow{(o)} \varphi(e)$ <u>при</u> $\nu(e_n) \to \nu(e)$ (<u>т.е. непрерывных по мере</u> ν).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi: B \to Y$ - положительная непрерывная по мере ν функция и $\inf(F, \varphi) = \theta$. Покажем, что $\varphi = \theta$.

Пусть $\theta_B \neq e \in B$ - произвольный элемент. Предположим, что $\varphi(e) \neq \theta_Y$. Тогда $(\inf(F, \varphi))(e) = \inf_{\theta \le \bar{e} \le e}(F(\bar{e}) + \varphi(C\bar{e}))$ (здесь $C\bar{e}$ - дополнение $\bar{e}$ в компоненте, порожденной элементом e).

Так как Y - пространство счетного типа, то $\inf_{0 \le \bar{e} \le e}(F(\bar{e}) + \varphi(C\bar{e})) = \inf_{\theta \le \bar{e}_n \le e}(F(\bar{e}_n) + \varphi(C\bar{e}_n)) = \theta_Y$ и, в силу $F(\bar{e}) + \varphi(C\bar{e}) \ge F(\bar{e})$, найдется подпоследовательность $\{\bar{e}_i\} \subset \{\bar{e}_n\}$ такая, что $\nu(\bar{e}_i) \to 0$. Обозначим $E_K = \{\bar{e}, \bar{e} \in \{\bar{e}_i\},\ \nu(\bar{e}) \le K^{-1}\}$, $M_K = \{y = (F(\bar{e}) + \varphi(C\bar{e})),\ \bar{e} \in E_K\}$. Ясно, что $\inf M_K = \theta$, $K = 1, 2, \ldots$, и $M_{K+1} \subset M_K$. Используя регулярность Y, тем же методом, что и в лемме 5 [5], можно показать существование подпоследовательности $\{\bar{e}_j\} \subset \{\bar{e}_i\}$ такой, что $(o)\text{-}\lim_{j \to \infty}(F(\bar{e}_j) + \varphi(C\bar{e}_j)) = \theta_Y$. Тогда $(o)\text{-}\lim_{j \to \infty} \varphi(C\bar{e}_j) = \theta_Y$, но так как $\nu(\bar{e}_j) \to 0$, то $(o)\text{-}\lim_{j \to \infty} \varphi(C\bar{e}_j) = (o)\text{-}\lim_{j \to \infty} \varphi(C\bar{e}_j) = \varphi(e) = \theta_Y$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Ниже через $H_0^0(X \to Y)$ будем обозначать пространство регулярных (oo)-непрерывных линейных операторов, действующих из K-пространства X в K-пространство Y, через $H_*^0(X \to Y)$ - пространство регулярных линейных операторов, переводящих последовательности, звездно сходящиеся к нулю, в последовательности, (o)-сходящиеся к нулю. Известно [1], что для случая $Y = R$ выполняется $H_0^{(o)}(X \to Y) = H_*^0(X \to Y)$.

Т е о р е м а 3. <u>Пусть</u> Z^* - <u>пространство ограниченных элементов, сопряженное к</u> KB-<u>пространству</u> Z, $\bar{z}$ -<u>существенно положительный вполне линейный функционал над</u> Z^*. <u>Для того чтобы линейный оператор</u> $T: Z^* \to S(\Omega, \mu)$ <u>был представим в виде</u> $(Tz^*)(s) = <z^*, \varphi(s)>$, <u>где</u> $\varphi: \Omega \to Z$ - μ-<u>измеримая функция, необходимо и достаточно, чтобы</u> $T \in H_*^0(Z^* \to S(\Omega, \mu))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Так как $\varphi: \Omega \to Z = H^o_*(Z^* \to R)$, то необходимость условия следует из определения (o)-сходимости в $S(\Omega,\mu)$.

Достаточность. Как упоминалось выше, вполне линейный существенно положительный функционал $\bar{z}$ над Z^* является мерой над булевой алгеброй $B(Z^*)$ единичных элементов, и звездная сходимость в $B(Z^*)$ совпадает со сходимостью по мере. В силу теоремы 2, функция $F: B(Z^*) \to S(\Omega,\mu)$, $F(e) = \langle e,\bar{z}\rangle g(s), g(s) = 1$, $e \in B(Z^*)$, является единицей в пространстве $(B(Z^*) \to S(\Omega,\mu))$ аддитивных функций, непрерывных по мере $\bar{z}$. Из [6, утверждение УШ.1.45] следует, что пространство $(B(Z^*) \to S(\Omega,\mu))$ решеточно изоморфно пространству $H^o_*(Z^* \to S(\Omega,\mu))$. Тогда оператор $J: Z^* \to S(\Omega,\mu)$, $(Jz^*)(s) = \langle z^*,\bar{z}\rangle g(s), g(s) = 1$ в Ω является единицей в $H^o_*(Z^* \to S(\Omega,\mu))$; любой оператор $T \in H^o_*(Z^* \to S(\Omega,\mu))$ входит в компоненту, порожденную оператором J и, по теореме 1, имеет вид $(Tz^*)(s) = \langle z^*, \varphi(s)\rangle$, где $\varphi: \Omega \to Z$ - μ-измеримая функция. Теорема доказана.

П. Пусть X - нормальное подпространство в X_{max}, $\varphi: \Omega \to X_{max}$ - такая функция, что для любого $x \in X$ функция $\varphi_x(s) = \varphi(s)\circ x$ принимает значения в $X^X_{x_0}$ и является μ-измеримой. Можно записать оператор $T: X \to S(\Omega,\mu)$ в виде

$$(Tx)(s) = x^X_0(\varphi(s)\circ x). \tag{1}$$

В том случае, когда X - нормальное подпространство в $S(\Omega',\mu')$, класс операторов вида (1) совпадает с классом интегральных операторов [7].

Так как реализация X в виде нормального подпространства в $S(\Omega',\mu')$ всегда возможна, то операторы вида (1) можно считать аналогом интегральных операторов - абстрактно интегральными операторами.

Естественно ожидать, что для абстрактно интегральных операторов существует аналог известного критерия А.В.Бухвалова [5] об интегральном представлении линейных операторов в функциональных пространствах. Действительно, справедливость этого предположения устанавливается ниже теоремой 4 (для случая пространства ограниченных элементов) и теоремой 5 - в общем случае.

Т е о р е м а 4. Пусть $X_{x'} \subset X_{max}$ - K-пространство x'-ограниченных элементов. Для того чтобы линейный оператор $T: X_{x'} \to S(\Omega,\mu)$ был абстрактно интегральным, необходимо и достаточно, чтобы $T \in H^o_*(X_{x'} \to S(\Omega,\mu))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $T: X_{x'} \to S(\Omega,\mu)$ - абстрактно интегральный оператор. Тогда (см. [3, лемма 22.10]) $(Tx^x)(s) = \langle x^x, \psi(s)\rangle$, где $\psi: \Omega \to X^x_{x'}$ - μ-измеримая функция. Так как $X^x_{x'} = H^o_0(X_{x'} \to R)$ - пространство (o)-линейных функционалов и $H^o_*(X_{x'} \to R) = H^o_0(X_{x'} \to R)$, то оператор T переводит любую последовательность $\{x^x_n\} \subset X_{x'}$, звездно сходящуюся к нулю, в последовательность

$\{(Tx_n^x)(s)\} \subset S(\Omega,\mu)$, сходящуюся к нулю μ-почти всюду, т.е. $Tx_n^x \xrightarrow{(o)} 0$ и $T \in H_*^o(X_{x'} \to S(\Omega,\mu))$.

Достаточность. Пусть $T \in H_*^o(X_{x'} \to S(\Omega,\mu))$. Так как $T = T_1 - T_2$, где $T_i \in H_*^o(X_{x'} \to S(\Omega,\mu))$, $i = 1,2$, - положительные операторы, то, не ограничивая общности, будем считать T положительным оператором.

По теореме XI.1.31 из [6], $X_{x'}$ разлагается на счетное множество попарно дизъюнктных компонент $X_{x_i'}$, $i = 1,2,\ldots$, каждая из которых представляет собой K-пространство x_i'-ограниченных элементов, и в $X_{x_i'}$, $i = 1,2,\ldots$, найдутся существенно положительные (o)-линейные функционалы $\bar{x}_i$.

Далее, любой элемент $P_{\tau_i} x^x$ (P_{τ_i} - оператор проектирования на $X_{x_i'}$) имеет вид $P_{\tau_i} x^x = e_{x_i'} \circ x^x$, где $e_{x_i'} \in B(X_{max})$ - след элемента x_i'. Из теоремы 3 и леммы 2.2.10 из [3] следует, что $(TP_{\tau_i} x^x)(s) = x_0^x((\varphi^i(s) \circ e_{x_i'}) \circ x^x)$, где $\varphi_{e_{x_i'}}(s) = e_{x_i'} \circ \varphi^i(s)$, $\varphi_{e_{x_i'}} : \Omega \to X_{x_i'}^x$ - μ-измеримая положительная функция. Далее, $x' = \sum_{i=1}^{\infty} x' \circ e_{x_i'}$, и для любого $N = 1,2,\ldots$, имеет место $T(\sum_{i=1}^{N} e_{x_i'} \circ x')(s) = x_0^x(\sum_{i=1}^{N} \varphi^i(s) \circ e_{x_i'} \circ x') = x_0^x(\varphi_N(s) \circ x')$, где $\varphi_N(s) = \sum_{i=1}^{N} e_{x_i'} \circ \varphi^i(s)$, $\varphi_N : \Omega \to X_{x'}^x$ - μ-измеримые положительные функции; ясно, что $\varphi_N(s) \leq \varphi_{N+1}(s)$, $N = 1,2,\ldots$ Найдется множество $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mu\Omega_0 = 0$, такое, что для всех $s \in \Omega \setminus \Omega_0$ и всех $N = 1,2,\ldots$ справедливо $x_0^x(\varphi_N(s) \circ x') \leq (Tx')(s) < \infty$.

Тогда в $X_{x'}^x$ существует $\sup_N \varphi_N(s) = \varphi(s)$ - μ-измеримая функция такая, что $\varphi(s) \circ e_{x_i'} = \varphi^i(s)$. Для любого положительного $x^x \in X_{x'}$ имеет место $(Tx^x)(s) = (o) - \lim_{N\to\infty} T(\sum_{i=1}^{N} x^x \circ e_{x_i'})(s) = (o) - \lim_{N\to\infty} x_0^x(\varphi_N(s) \circ x^x) = x_0^x(\varphi(s) \circ x^x)$.

Таким образом, T -абстрактно интегральный оператор. Теорема доказана.

Т е о р е м а 5. Пусть X - нормальное подпространство в X_{max}. Для того чтобы линейный оператор $T : X \to S(\Omega,\mu)$ был абстрактно интегральным, необходимо и достаточно, чтобы из того, что последовательность $\{x_n\} \subset X$ ограничена в X и сходится к нулю звездно относительно (o)-сходимости в X_{max}, следовало $(Tx_n)(s) \to 0$ μ-почти всюду.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $T : X \to S(\Omega,\mu)$ - абстрактно интегральный оператор, $(Tx^x)(s) = x_0^x(\varphi(s) \circ x)$, $\{x_n\} \in X$ - последовательность, звездно относительно (o)-сходимости в X_{max}, сходящаяся к нулю и такая, что $|x_n| \leq x \in X$, $n = 1,2,\ldots$. Найдется множество $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mu\Omega_0 = 0$, такое, что для любой точки $s \in \Omega \setminus \Omega_0$ последовательность $\{\varphi(s) \circ x_n\} \subset X_{x_0}^x$ и, в силу (o)-непрерывности операции умножения, звездно относительно (o)-сходимости в X_{max} сходится к нулю. Кроме того, $|\varphi(s) \circ x_n| \leq |\varphi(s) \circ x| \in X_{x_0}^x$ Следовательно, $\{\varphi(s) \circ x_n\}$ сходится к нулю звездно относительно (o)-сходимости в $X_{x_0}^x$: По теореме УП.6.2. из [1] имеем $\|\varphi(s) \circ x_n\|_{X_{x_0}^x} \to 0$. Так как $|(Tx_n)(s)| = |x_0^x(\varphi(s) \circ x_n)| \leq \|\varphi(s) \circ x\|_{X_{x_0}^x}$, то $(Tx_n)(s) \to 0$ μ-почти всюду.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы, $x_1 \in X$ - произвольный положительный элемент. Тогда по теореме 4 $T: X_{x_1} \to S(\Omega,\mu)$ - абстрактно интегральный оператор, $(Tx)(s) = x_0^x(\varphi_1(s)\circ x) = \langle x, \psi_1(s)\rangle$, $\psi_1 : \Omega \to X_{x_1}^x$ - μ-измеримая функция. Далее, пусть $x_1 < x_2$. Тогда $(Tx)(s) = x_0^x(\varphi_2(s)\circ x) = \langle x, \psi_2(s)\rangle$, где $\psi_2 : \Omega \to X_{x_2}^x$ - μ-измеримая функция. Так как $x_1 < x_2$, то $X_{x_1} \subset X_{x_2}$, $X_{x_2}^x \subset X_{x_1}^x$, $\|x\|_{X_{x_2}^x} \geq \|x\|_{X_{x_1}^x}$. Поэтому $\psi_2(s)$, рассматриваемая со значениями в $X_{x_1}^x$, является μ-измеримой. Для всех $x \in X_{x_1}$ имеем $(Tx)(s) = \langle x, \psi_1(s)\rangle = \langle x, \psi_2(s)\rangle = x_0^x(\varphi_1(s)\circ x)$ μ-почти всюду в Ω.

Покажем, что $\psi_1(s) = \psi_2(s)$ для μ-почти всех $s \in \Omega$. Так как функции $\psi_1 : \Omega \to X_{x_1}^x$, $\psi_2 : \Omega \to X_{x_2}^x$ μ-измеримы, то существует сепарабельное подпространство L в пространстве $X_{x_1}^x$ такое, что для μ почти всех $s \in \Omega$ $\psi_1(s) - \psi_2(s) \in L$. Тогда в единичном шаре сопряженного к L пространства L^* существует счетное множество A такое, что $\|x\|_{X_{x_1}^x} = \sup_{y^* \in A} |\langle y^*, x\rangle|, x \in L$. В силу теоремы У1.3.11 [8] существует счетное множество $V \subset X_{x_1}$ такое, что $\|x\|_{X_{x_1}^x} = \sup_{x^x \in V} |\langle x^x, x\rangle|, x \in L$. Отсюда $\|\psi_1(s) - \psi_2(s)\|_{X_{x_1}^x} = 0$ μ-почти всюду в Ω. Таким образом, можно записать $(Tx)(s) = x_0^x(\varphi_1(s)\circ x)$ для всех $x \in X_{x_2}$.

Пусть x_1, x_2 - произвольные положительные элементы из X, $x_3 = \sup(x_1, x_2)$. Тогда $(Tx)(s) = x_0^x(\varphi_1(s)\circ x) = x_0^x(\varphi_3(s)\circ x)$, $x \in X_{x_1}$, $(Tx)(s) = x_0^x(\varphi_2(s)\circ x) = x_0^x(\varphi_3(s)\circ x)$, $x \in X_{x_2}$.

Следовательно, для всех $x \in X$ равенство $(Tx)(s) = x_0^x(\varphi_1(s)\circ x)$ будет μ-почти всюду *), где $\varphi_1 : \Omega \to X_{max}$ - такая функция, что для любого $x \in X$ функция $\varphi_x(s) = \varphi_1(s)\circ x$, $\varphi_x : \Omega \to X_{x_0}^x$ измерима. Таким образом, $T : X \to S(\Omega,\mu)$ - абстрактно интегральный оператор.

Т е о р е м а 6. Пусть $X \subset X_{max}$ - нормальное подпространство с единицей x', $T: X \to S(\Omega,\mu)$ - линейный оператор. Утверждение: "$T: X \to S(\Omega,\mu)$ - абстрактно интегральный оператор", эквивалентно объединению утверждения 1) $T \in H_0^0(X \to S(\Omega,\mu))$ и любого из следующих: 2) "$T \in H_*^0(X_{x'} \to S(\Omega,\mu))$"; 3) "если τ - топология в $X_{x'}$, согласующаяся с двойственностью между $X_{x'}$ и $X_{x'}^x$, то из $x_n \xrightarrow{\tau} \theta$ следует $(Tx_n)(s) \to 0$ μ-почти всюду в Ω". Кроме того, если $\bar{x} \in X_{x'}^x$ - существенно положительный вполне линейный функционал над $X_{x'}$, то и утверждения: 4) "T принадлежит компоненте $H_J(X_{x'} \to S(\Omega,\mu))$, порожденной оператором $J: X_{x'} \to S(\Omega,\mu)$, $(Jx^x)(s) = x_0^x(x^x \circ \bar{x})g(s)$, $g(s) = 1$ μ-почти всюду в Ω".

Справедливость этой теоремы непосредственно следует из [7, теоремы 2.1] и [9, теоремы А9] и из результатов предыдущего раздела.

---

*) То множество нулевой меры, на котором $(Tx)(s) \neq x_0^x(\varphi(s)\circ x)$, зависит от x.

Литература

1. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961, 407 с.
2. Вулих Б.З., Лозановский Г.Я. О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах. - "Мат. сб.", 1971, т.84, № 3, с.331-352.
3. Жданов С.И. Интегральные представления операторов в локально выпуклых и полуупорядоченных пространствах. Канд. дис. Новосибирск, 1975.
4. Владимиров Д.А. Булевы алгебры, М., "Наука", 1969, 318 с.
5. Бухвалов А.В. Об интегральных представлениях линейных операторов. - "Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР", 1974, № 47, с.5-14.
6. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.-Л., Гостехиздат, 1950, 546 с.
7. Жданов С.И. О некоторых вопросах общей теории линейных систем. - В кн.: Оптимизация, 1973, № 2 (29), с.52-76.
8. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ., 1962, 895 с.
9. Amemiya I. On ordered topological linear spaces. - "Proc. Int. Symps. Linear Spaces", Ierusalem, 1961, p.14-23.